Тригонометричні формули додавання та наслідки з них

Формули зведення

cos (α – β) = cosα· cosβ+ sinα· sinβ. (1)

Користуючись одержаною формулою, можна одержати інші формули:

cos (α + β) = cosα · cosβ – sinα · sinβ; (2)

sin (α + β) = sinα · cosβ + cosα · sinβ; (3)

sin (α – β) = sinα · cosβ – cosα · sinβ; (4)

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta} \qquad (5)$$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta} \qquad (6)$$

Змінивши в формулі (1) β на –β і врахувавши, що cos(-β) = cosβ, sin(-β) = -sinβ, одержимо

cos(α + β) = cos(α - (-β)) = cosα · cos(-β) + sinα · sin(-β) = cosα · cosβ – sinα · sinβ;

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=$$

= sinα · cosβ + cosα · sinβ.

Таким чином,

sin(α + β) = sinα · cosβ + cosα · sinβ

Змінивши в останній формулі β на – β одержимо:

sin(α - β) = sinα · cos(-β) + cosα · sin(-β)

Звідси sin(α– β) = sinα · cosβ – cosα · sinβ

Виведемо формулу тангенса суми чисел:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

.

Отже $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$

Змінивши β на – β, одержимо $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$

Формули зведення

Тригонометричні функції чисел виду $\frac{\pi}{2}$ ± α, π ± α; $\frac{3\pi}{2}$ ± α, 2π ± α можуть бути виражені через функції кута α за допомогою формул, які називаються формулами зведення.

Слід відмітити, що набагато зручніше користуватись правилами зведення, про які йтиметься пізніше.

	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin x$	cos α	cos α	sin α	- sin α	- cos α	- cos α	- sin α	sin α
$\cos x$	sin α	- sin α	- cos α	- cos α	- sin α	sin α	cos α	cos α
$\text{tg}\, x$	ctg α	- ctg α	- tg α	tg α	ctg α	- ctg α	- tg α	tg α
$\text{ctg}\, x$	tg α	- tg α	- ctg α	ctg α	tg α	- tg α	- ctg α	ctg α

Формули зведення запам'ятовувати необов'язково. Для того щоб записати будь-яку з них, можна користуватися таким правилом:

1) В правій частині формули ставиться той знак, який має ліва частина при умові $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2) Якщо в лівій частині формули кут дорівнює $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, то синус замінюється на косинус, тангенс — на котангенс і навпаки. Якщо кут дорівнює $\pi \pm \alpha$, то заміна не виконується.

Приклад 1. Виразимо tg(π – α) через тригонометричну функцію кута α. Якщо вважати, що α — кут І чверті, то π – αбуде кутом ІІ чверті. У ІІ чверті тангенс від'ємний, отже, у правій частині рівності слід поставити знак «мінус». Для кута π– α назва функції «тангенс» зберігається. Тому.

tg(π– α) = - tgα.

За допомогою формул зведення знаходження значень тригонометричних функцій будь-якого числа можна звести до знаходження значень тригонометричних функцій чисел від 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Приклад 2. Знайдемо значення $\sin\frac{8\pi}{3}$.

Маємо:

$$\sin\frac{8\pi}{3} = \sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Література: Г.П.Бевз Математика 10 рівень стандарту

п.12 повторити п.9

Виконати вправи до п.12