Тема 11. Визначений інтеграл і його застосування

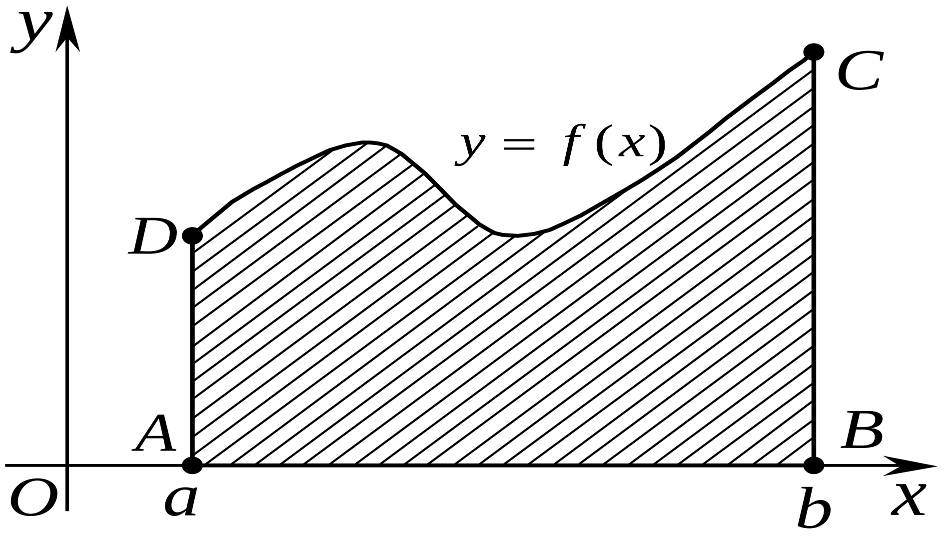
- 1. Визначений інтеграл і його властивості
- 2.Формула Ньютона-Лейбніца
- 3. Невласні інтеграли
- 4. Застосування інтегралів
- **5.** Наближене обчислення визначених інтегралів (самостійне опрацювання)

Визначений інтеграл і його застосування

Нехай $f(x)$ – неперервна на відрізку $[a;b]$.

Означення. Фігура, що належить площині xOy і обмежена відрізком [a;b] осі Ox, прямими $x=a$, $x=b$ і кривою $y= f(x)$, називається **криволінійною трапецією.**

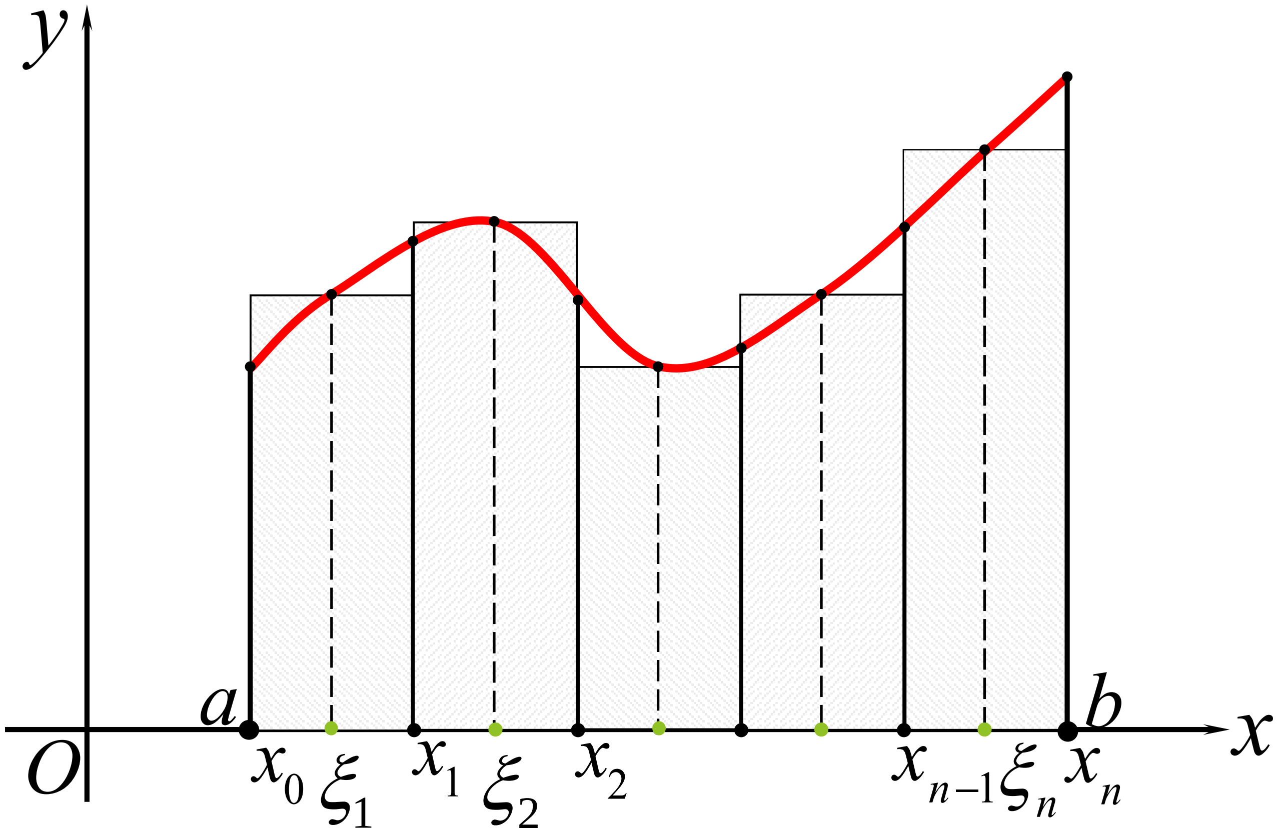
Зауваження. Прямі $x = a$ і $x = b$ можуть виродитись у точки



Визначений інтеграл і його застосування

Нехай $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a;b]$.

Площа S криволінійної трапеції (σ) $$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$



Визначений інтеграл і його застосування

$$I_n(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad \lambda = \max_{1 \le i \le n} \left| [x_{i-1}; x_i] \right|$$

- інтегральна сума для функції f(x) на відрізку [a;b].

Якщо існує границя сум $I_n(x_i,\xi_i)$ при $\lambda \to 0$, то її називають визначеним **інтегралом від функції f(x) на відрізку [a;b]** (або **в межах від a до b**).

ПОЗНАЧАЮТЬ: $$\int_a^b f(x)dx$$

a і b – **нижня** і **верхня границя інтегрування**,
[a;b] – **проміжок інтегрування**,
f(x) – **підінтегральна функція**,
f(x)dx – **підінтегральний вираз**,
x – **змінна інтегрування**.

Визначений інтеграл і його застосування

Функція $f(x)$, для якої на $[a;b]$ існує визначений інтеграл, називається ***інтегрованою*** на цьому відрізку.

ТЕОРЕМА 1 (необхідна умова інтегрованості функції на $[a;b]$).

Якщо функція $f(x)$ *інтегрована на відрізку* $[a;b]$, *то вона на цьому відрізку обмежена.*

ТЕОРЕМА 2 (достатня умова інтегрованості функції на $[a;b]$).

Для інтегрованості функції $f(x)$ *на* $[a;b]$, *достатньо виконання однієї з умов:*

1) $f(x)$ *неперервна на* $[a;b]$;
2) $f(x)$ *обмежена на* $[a;b]$ і має *на* $[a;b]$ скінчене *число точок розриву;*
3) $f(x)$ *монотонна і обмежена на* $[a;b]$.

Визначений інтеграл і його застосування

1) Геометричний зміст визначеного інтеграла.

Якщо функція $f(x)$ – неперервна на $[a;b]$ і $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = S,$$

де S – площа криволінійної трапеції с основою $[a;b]$ і обмеженою зверху кривою $y = f(x)$.

2) Фізичний зміст визначеного інтеграла.

Якщо функція $v = f(t)$ задає швидкість точки, що рухається в момент часу t, то

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$$

визначить шлях S, пройдений точкою за проміжок часу $[T_1 ; T_2]$.

Властивості визначеного інтеграла

1) якщо $a > b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

2) якщо $a = b$, то

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Властивості визначеного інтеграла

1) $\int_a^b dx = b - a.$

2) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

3) $\int_a^b \left(f(x) \pm \varphi(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx$

4) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Властивості визначеного інтеграла

- 5) Якщо $f(x) > 0$ $(f(x) \geq 0)$ $\forall x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx > 0 \quad \left(\int_a^b f(x)dx \geq 0\right)$$

- 6) Якщо $f(x) \leq \varphi(x)$ $\forall x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$

- 7) Якщо m і M –відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

- 8) Якщо $f(x)$ – непарна функція, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

- Якщо $f(x)$ – парна функція, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$

Теорема про середнє

Якщо функція f(x) неперервна на [a;b], то в інтервалі (a;b) знайдеться така точка c, що справедлива рівність

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c)$$

Визначений інтеграл зі змінною верньою межею

Нехай f інтегровна на [a,b], xє[a,b].

Озн. За цих умов існує

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

і називається інтегралом зі змінною верхньою межею.

Теорема

Похідна від визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею по цій межі дорівнює підінтегральній функції від цієї межі, тобто

$$(F(x))' = (\int_a^x f(t)dt)'_x = f(x)$$

Формула Ньютона-Лейбніца

Неперервна на [a;b] функція f має первісну і для неї справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Методи обчислення визначеного інтеграла

- Заміна змінної

Якщо визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ перетворюється за допомогою підстановки:

$x=\varphi(t)$ в інший інтеграл, з новою змінною t, то задані межі: $x_1=a, x_2=b$ змінюються новими межами:

$t_1=\alpha, t_2=\beta$, які визначаються з вибраної підстановки, тобто з рівнянь:

$$a=\varphi(\alpha), b=\varphi(\beta)$$

Якщо $\varphi'(t), f(\varphi(t))$ неперервні на відрізку: $[\alpha;\beta]$

то:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (2)$$

- Інтегрування частинами $\int_a^b udv=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b vdu$

$$\int_1^3 x^3\sqrt{x^2-1}\,dx = \left|\begin{matrix} x^2-1=t & \\ 2xdx=dt & \\ x=1 & t=0 \\ x=3 & t=8 \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int_0^8 (t+1)\sqrt{t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^8 \left(t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\right)dt = \left.\frac{t^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^8 = \frac{464\sqrt{2}}{15}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x} = 2\int_0^1 \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{3+2\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int_0^1 \frac{dt}{3+3t^2+2-2t^2} = 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+5} =$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left.\frac{t}{\sqrt{5}}\right|_0^1 = \frac{2\sqrt{5}}{5}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\int_2^4 xe^{2x}dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = e^{2x}dx \\ du = dx & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right| = \frac{x}{2}e^{2x}\Big|_2^4 - \frac{1}{2}\int_2^4 e^{2x}dx =$$

$$= \frac{x}{2}e^{2x}\Big|_2^4 - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_2^4 = \frac{7}{4}e^8 - \frac{3}{4}e^4$$

Невласні інтеграли

Для існування $\int_a^b f(x)dx$ необхідне виконання умови:

1) $[a;b]$ – скінченний,

2) $f(x)$ – обмежена (необхідна умова існування визначеного інтеграла).

Невласні інтеграли – узагальнене поняття визначеного інтеграла у випадку, коли одна з цих умов не виконується.

Невласні інтеграли І роду (за нескінченним проміжком)

ОЗНАЧЕННЯ. ***Невласним інтегралом І роду*** від функції f(x) на проміжку [a;+∞) називається границя функції I(b) при $b \to +\infty$.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} I(b) = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Якщо y = f(x) неперервна на (–∞;b] , то аналогічно визначається і позначається ***невласний інтеграл І роду*** для функції f(x) на проміжку **(– ∞;b]:**

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Невласні інтеграли I роду

При цьому, якщо границя в правій частині формули існує і скінченна, то невласний інтеграл називають ***збіжним***.

В іншому випадку (якщо границя не існує або дорівнює нескінченності) невласний інтеграл називають ***розбіжним***.

Якщо y = f(x) неперервна на $\mathbb{R}$, то ***невласним інтегралом I роду*** для функції f(x) **на проміжку** $(-\infty;+\infty)$ називають

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (2)$$

де c – довільне число.

Невласний інтеграл від $f(x)$ на проміжку $(-\infty;+\infty)$ називається ***збіжним***, якщо **ОБИДВА** інтеграли в правій частині формули (2) збігаються.

У протилежному випадку, невласний інтеграл на проміжку $(-\infty;+\infty)$ називається ***розбіжним***.

Невласні інтеграли I роду

1. $$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x+x^3}=\lim_{B\to+\infty}\int_1^B\frac{dx}{x\left(1+x^2\right)}=\lim_{B\to+\infty}\int_1^B\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx=$$

$$=\lim_{B\to+\infty}\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Bigg|_1^B=\lim_{B\to+\infty}\left(\ln\frac{B}{\sqrt{B^2+1}}-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}\ln 2.$$

2. $$\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x+1)}=\lim_{B\to+\infty}\int_1^B\frac{d(\ln x+1)}{\ln x+1}=\lim_{B\to+\infty}\ln(\ln x+1)\Big|_e^B=$$

$$=\lim_{B\to+\infty}\left(\ln(\ln B+1)-\ln 2\right)=+\infty.$$

Невласні інтеграли I роду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 6x + 10} = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \int_A^B \frac{dx}{(x-3)^2 + 1} = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \operatorname{arctg}(x-3)\Big|_A^B =$$

$$= \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \left(\operatorname{arctg}(B-3) - \operatorname{arctg}(A-3)\right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Ознаки збіжності невласних інтегралів I роду

ТЕОРЕМА 1 (перша ознака збіжності).

Нехай f(x) і φ(x) неперервні на [a;+∞) і $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, $\forall x \in [c; +\infty)$ (де $c \ge a$).

Тоді:

1) якщо $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ – збіжний, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ теж збіжний ,

до того ж $$\int_c^{+\infty} f(x)dx \le \int_c^{+\infty} \varphi(x)dx;$$

2) якщо $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – розбіжний, то $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ теж розбіжний.

Ознаки збіжності невласних інтегралів I роду

ТЕОРЕМА 2 (друга ознака збіжності)

Нехай f(x) і φ(x) неперервні і невід'ємні на [a;+ ∞).

Якщо $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=h,$ де h – дійсне число, відмінне від нуля,

то інтеграли

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad i \qquad \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$$

поводять себе однаково відносно збіжності.

Ознаки збіжності невласних інтегралів I роду

- При використанні теорем 1 и 2 в якості «еталонних» інтегралів зазвичай використовують наступні невласні інтеграли:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^n} dx \quad - \begin{cases} \textit{збігається}, & \textit{при} \ \ n > 1, \\ \textit{розбігається при} & n \le 1. \end{cases}$$

$(a > 0)$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx \quad - \begin{cases} \textit{збігається}, & \textit{при} \ \ \alpha > 0, \\ \textit{розбігається}, \ \textit{при} & \alpha \le 0. \end{cases}$$

Ознаки збіжності невласних інтегралів I роду

ТЕОРЕМА 3 (ознака абсолютної збіжності).

Якщо збігається інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$, то і інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ теж буде *збіжним*.

При цьому інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ називається **абсолютно збіжним**.

Ознаки збіжності невласних інтегралів І роду

Якщо $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ розбіжний, то про інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ нічого сказати неможна. Він може розбігатися, а може і збігатися.

Якщо $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ розбіжний, *а* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ – збіжний, *то інтеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *називається* ***умовно збіжним***

Невласні інтеграли ІІ роду (від необмежених функцій)

ОЗНАЧЕННЯ. ***Невласним інтегралом ІІ роду*** на проміжку $[a;b]$ від функції f(x), необмеженої в точці b називається границя функції $I(b_1)$ *при* $b_1 \to b-0$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b_1 \to b-0} I(b_1) = \lim_{b_1 \to b-0} \int_a^{b_1} f(x)dx$$

Якщо y=f(x) неперервна на (a;b] і $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = +(-)\infty$, то аналогічно визначається і позначається ***невласний інтеграл ІІ роду*** для функції f(x) на проміжку $[a;b]$ від *функції* $f(x)$, ***необмеженої в точці а***

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{a_1 \to a+0} \int_{a_1}^b f(x)dx.$$

Невласні інтеграли II роду

Якщо $y = f(x)$ неперервна на $[a;b] \setminus \{c\}$ і $x = c$ – точка нескінченного розриву функції, то ***невласним інтегралом II роду*** для функції f(x) **на проміжку** $[a;b]$ називають

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Невласний інтеграл на проміжку $[a;b]$ від функції $f(x)$, необмеженої всередині цього відрізку, називається ***збіжним***, якщо **ОБИДВА** інтеграли в правій частині формули (2) збігаються.

У протилежному випадку, невласний інтеграл на проміжку $[a;b]$ називається ***розбіжним***.

Невласні інтеграли II роду

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^1 \ln x dx\right) = \left[\begin{array}{c|c} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dV = dx & V = x \end{array}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(x\ln x\Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 dx\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\Bigg|_\varepsilon^1 - x\Big|_\varepsilon^1\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\ln 1}{1} - \frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} - 1 + \varepsilon\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(0 - \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} - 1 + 0\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon - 1) = 0 - 1 = -1$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin(1-\varepsilon)\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

Невласні інтеграли II роду

- «Еталонні» інтеграли для невласних інтегралів II роду (від необмежених функцій)

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} dx \qquad - \begin{cases} збігається, & при \;\; n<1, \\ розбігається \; при & n \geq 1. \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n} dx \qquad - \begin{cases} збігається, & при \;\; n<1, \\ розбігається \; при & n \geq 1. \end{cases}$$

Застосування визначеного інтеграла

Обчислення площ плоских фігур.

Площа криволінійної трапеції, що обмежена неперервною кривою $y = f(x), (f(x) \geq 0)$, віссю Ох, та двома прямими: $x = a, x = b, a \prec b$, знаходиться за формулою:

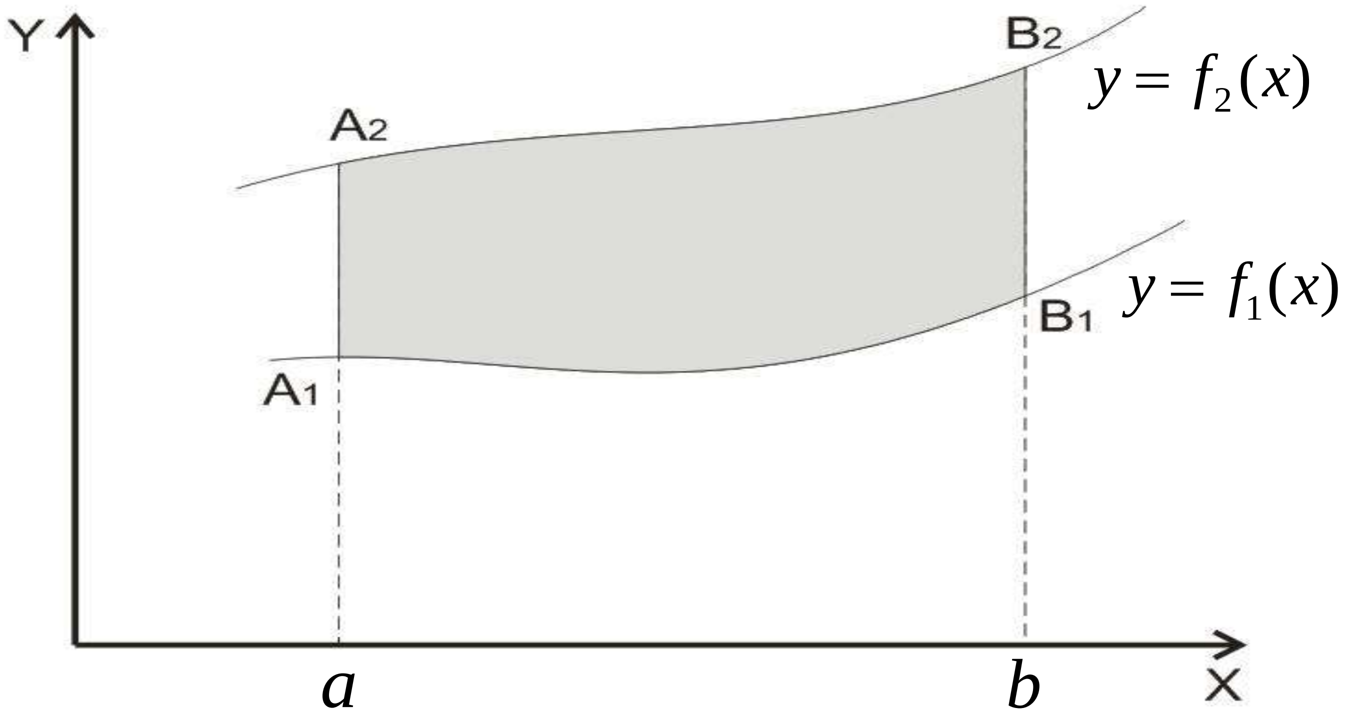
$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Якщо $f(x) \leq 0, x \in [a;b]$, то площа відповідної фігури обчислюється як інтеграл від абсолютного значення функції:

$$\left| S = \int_a^b f(x)dx \right|$$

Якщо плоска фігура обмежена двома неперервними кривими, рівняння яких: $y = f_1(x), y = f_2(x)$, причому $f_2(x) \geq f_1(x)$ скрізь на відрізку $[a;b]$, та двома прямими: $x = a, x = b, a \prec b$, то площа визначається за формулою:

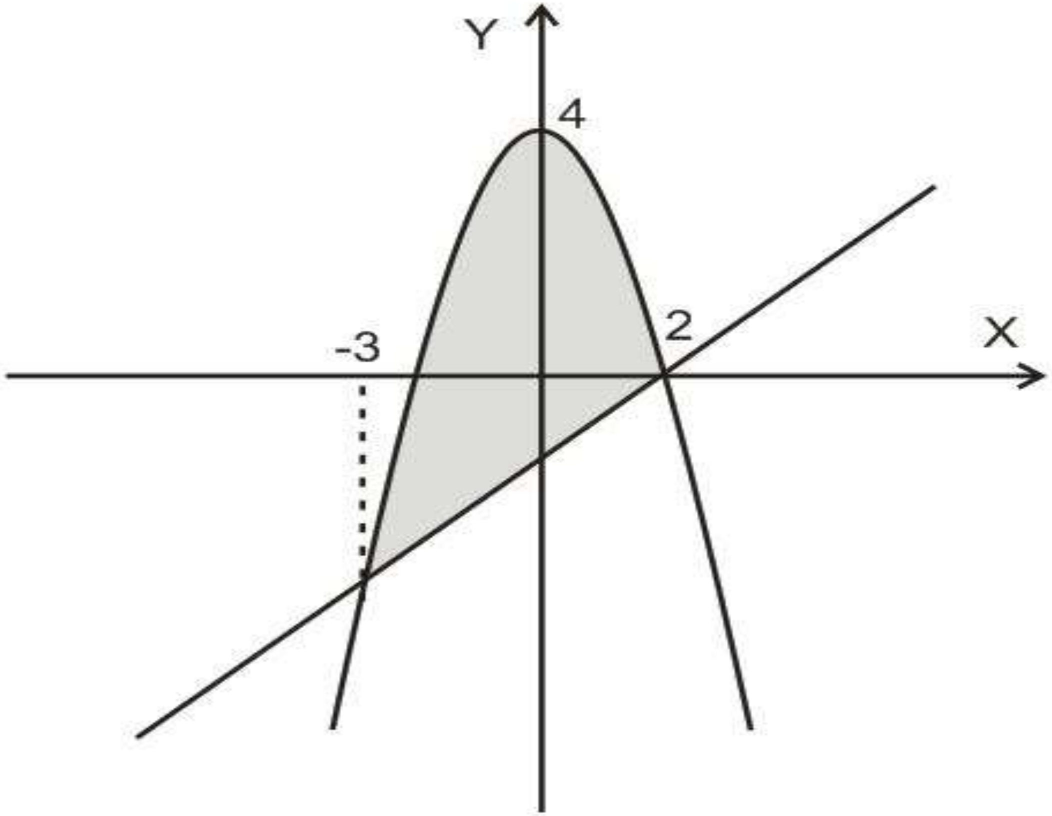
$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$



Приклад

Знайти площу фігури, обмежену прямою

$y = x - 2$ і параболою $y = 4 - x^2$



$$S = \int_{-3}^{2}(4 - x^2 - x + 2)dx =$$

$$= \int_{-3}^{2}(6 - x^2 - x)dx =$$

$$= (6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\Big|_{-3}^{2} = 20\frac{5}{6}$$

$$S = 20\frac{5}{6}\,\text{îä}^{\,2}$$

Довжина дуги кривої

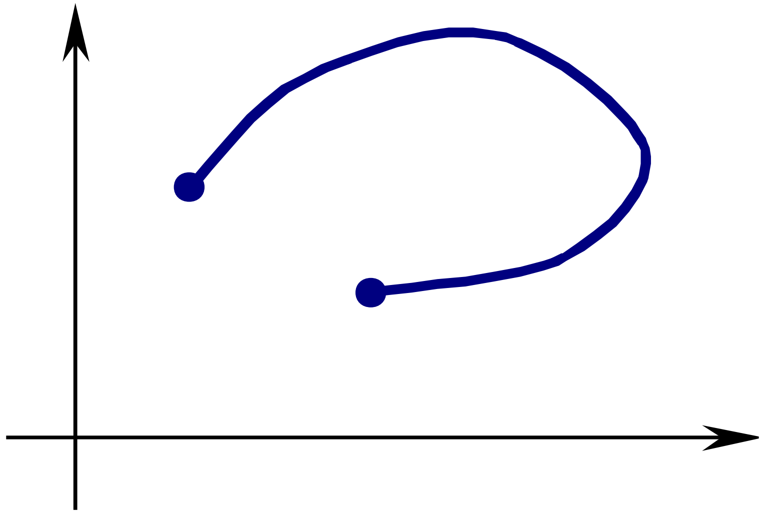
Плоска крива, задана параметрично рівняннями

Нехай крива (ℓ) не має самоперетинів і задана параметричним рівнянням: $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$,

де $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – непрерывно диференційована на $[\alpha;\beta]$.

Довжина кривої (ℓ) .

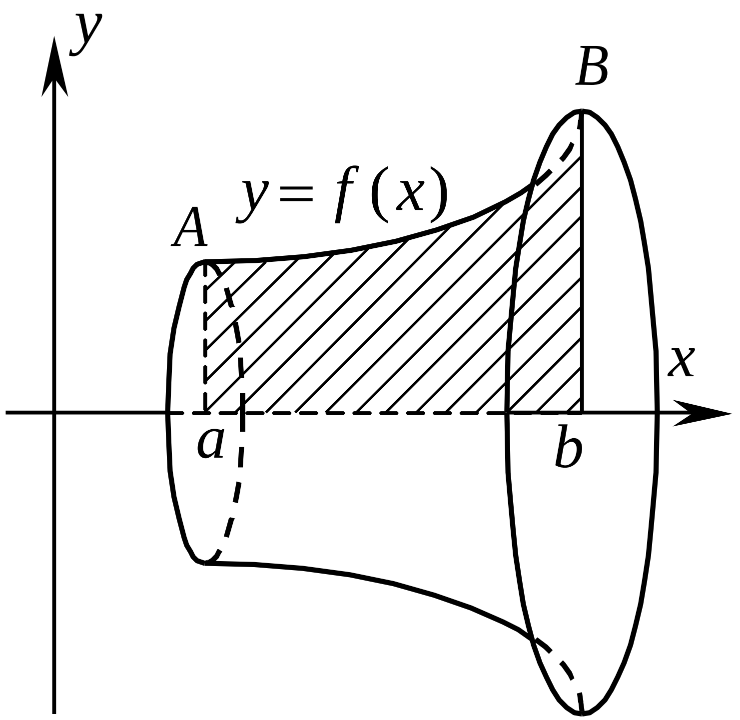
$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$



$$\ell = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Об'єм тіла обертання

- Нехай (V) – тіло, отримане в результаті обертання навколо осі Ox криволінійної трапеції з основою [a;b], обмеженою $y = f(x)$.
  Об'єм цього тіла (V)



$$V_x = \pi \int_a^b [\,f(x)]^2\,dx.$$

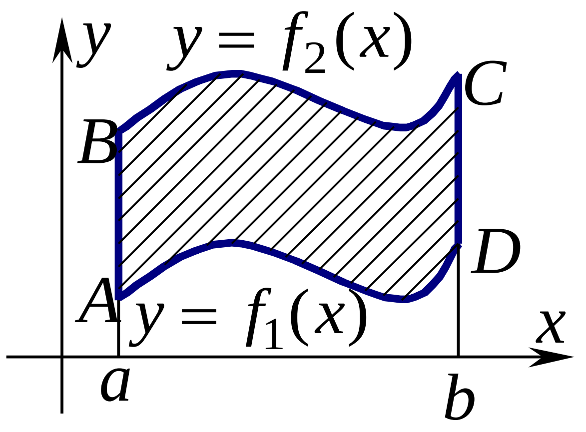
Об'єм тіла обертання

Нехай (V) – тіло, отримане в результаті обертання навколо осі Ox області (σ), обмеженої лініями

$$x = a,\ \ x = b,\ y = f_1(x),\ \ y = f_2(x),$$

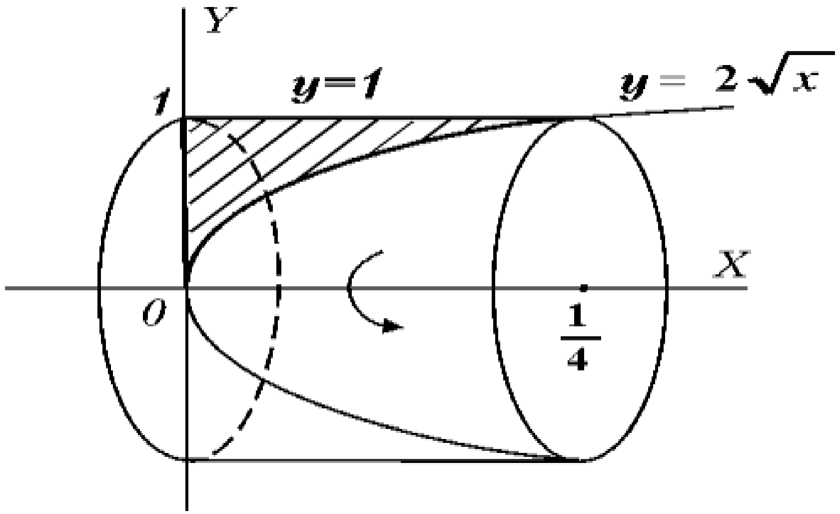
де $0 \le f_1(x) \le f_2(x),\ \ \forall x \in [a;b].$

Об'єм цього тіла (V)



$$V_x = \pi \int_a^b \left([\, f_2(x)]^2 - [\, f_1(x)]^2 \right) dx.$$

Приклад. Знайти об'єм тіла, отриманого обертанням навколо осі ОХ кривої $y = 2\sqrt{x}$ і обмеженого прямими х=0 і у=1.



$$V_{ox} = \pi\int_a^b [y_2{}^2(x) - y_1{}^2(x)]\,dx.$$

$$y_2(x) = 1,\ \ y_1(x) = 2\sqrt{x}.$$

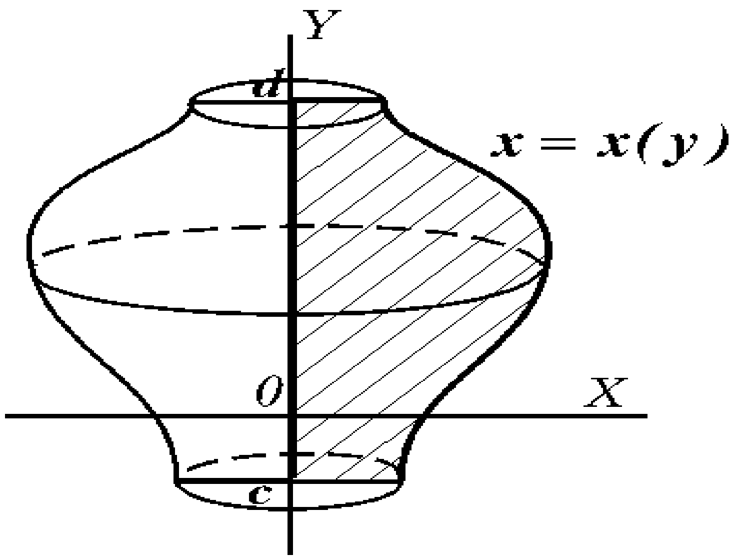
Знаходимо межі інтегрування з умови

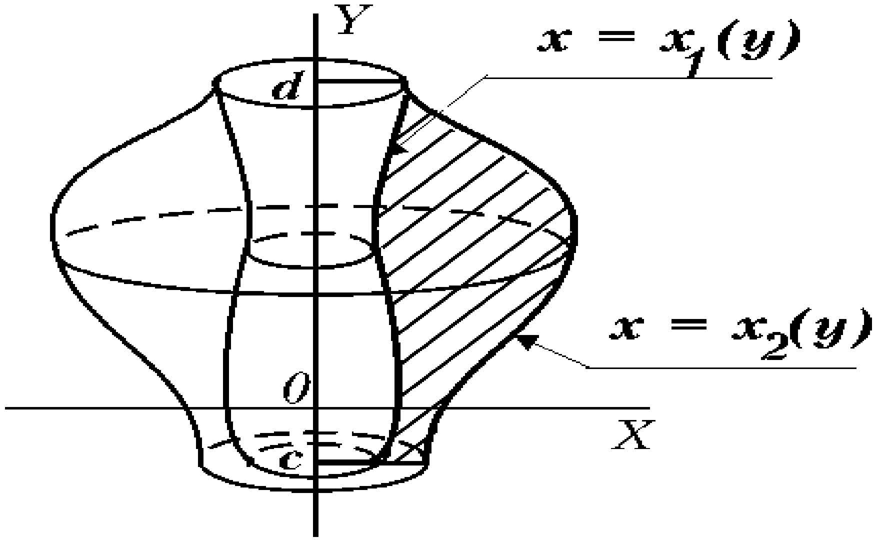
$$2\sqrt{x} = 1 \ \Rightarrow \ x = 1/4.$$

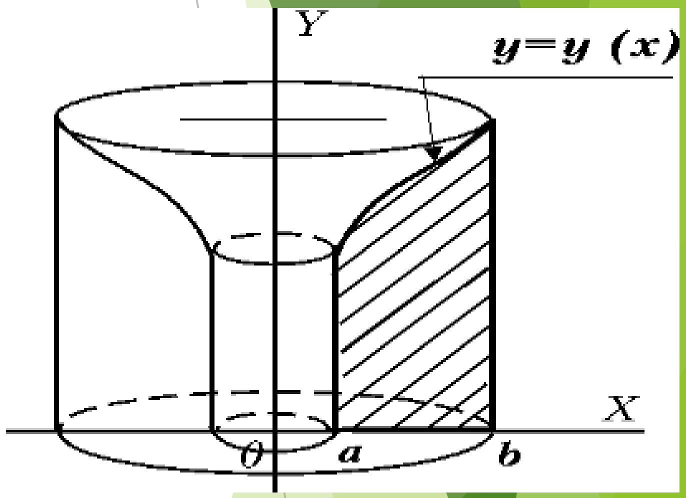
$$V_{ox} = \pi\int_0^{1/4}[1^2 - (2\sqrt{x})^2]\,dx = \pi\int_0^{1/4}(1-4x)\,dx = \pi(x-2x^2)\Big|_0^{1/4} = \frac{\pi}{8}.$$

Об'єм тіла обертання

Обертання навколо осі OY







$$V_{oy} = \pi \int_c^d x^2(y)\,dy$$

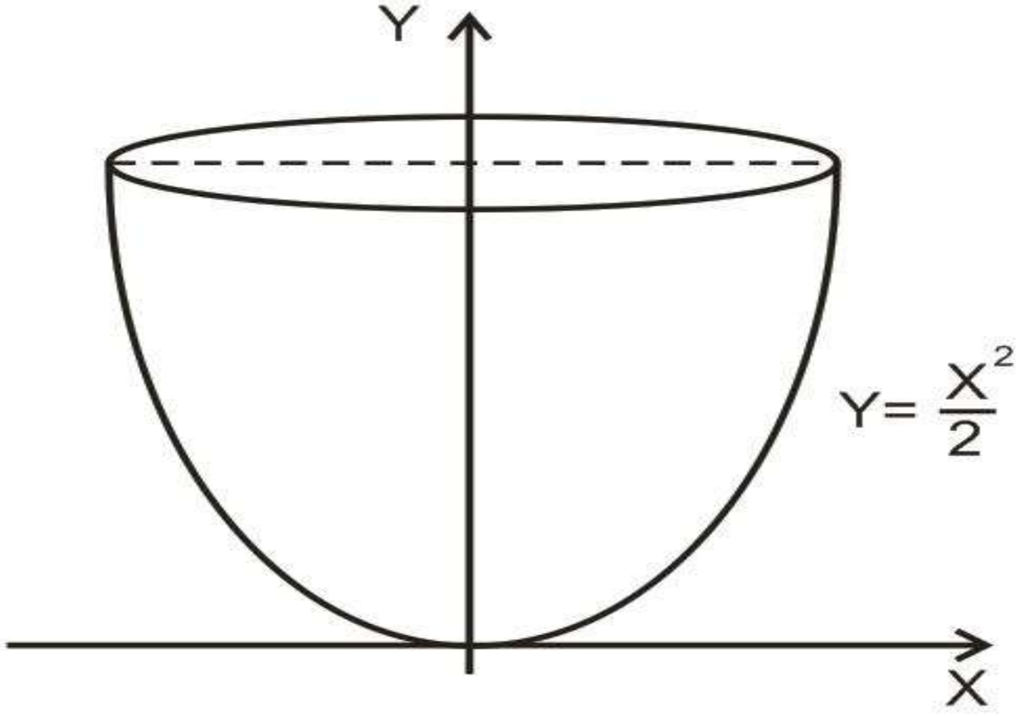
$$V_{oy} = \pi \int_c^d [x_2{}^2(y) - x_1{}^2(y)]\,dy$$

$$V_{oy} = 2\pi \int_a^b x \cdot y(x)\,dx$$

Приклад

Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі OY фігури, обмеженої лініями

$$y = \frac{x^2}{2}, x = 0, y = 2\sqrt{2}$$



$$V_y = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} 2y\,dy =$$

$$= \pi y^2 \Big|_0^{2\sqrt{2}} = 8\pi$$

$$V_y = 8\pi(o\ddot{a}^3)$$

Площа поверхні обертання

Якщо дуга гладкої кривої $y = f(x), a \le x \le b$ обертається навколо осі Ох, то площа поверхні обертання обчислюється за формулою

$$S_x = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Якщо крива задана параметрично $x = x(t), y = y(t); (t_1 \le t \le t_2)$, то

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$$

Приклад

Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі ОХ дуги синусоїди y=sin2x від x=0 до $x = \pi/2$

Розв'язок

$$S_x = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin 2x\sqrt{1+4\cos^2 2x}\,dx$$

Знаходимо y'=2cos2x; тоді

Виконаємо заміну змінної: $2\cos 2x = t; -4\sin 2x = dt; \sin 2x dx = (-1/4)dt$

Знайдемо границі інтегрування по t: $x = 0 \Rightarrow t = 2; x = \pi/2 \Rightarrow t = -2$

Таким чином,

$$S_x = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin 2x\sqrt{1+4\cos^2 2x}\,dx = 2\pi \int_2^{-2} \sqrt{1+t^2}\,(-\frac{1}{4})dt = \frac{\pi}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{1+t^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2})\right]_{-2}^{2} = \frac{\pi}{2}\left[2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5}+2)\right]$$

Економічні задачі, що зводяться до обчислення визначених інтегралів

Якщо $f(t)$ -продуктивність праці в момент часу t,

то $$u = \int_0^T f(t)dt$$ -обсяг продукції, що

випускається за проміжок часу $[0;T]$.

$$u = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$ -обсяг продукції, що

випускається за проміжок часу $[t_1;t_2]$.

Задача 1. Знайти обсяг продукції, виробленої за чотири роки, якщо продуктивність праці характеризується формулою:

$$f(t) = (1+t)e^{3t}$$

.

Розв'язання.

Обсяг виробленої продукції дорівнює:

$$U = \int_0^4 (1+t)e^{3t}dt = \left| \begin{array}{l} u = 1+t \\ du = dt \\ dv = e^{3t}dt \\ v = \dfrac{e^{3t}}{3} \end{array} \right| = \left. \frac{(t+1)\cdot e^{3t}}{3} \right|_0^4 - \int_0^4 \frac{e^{3t}}{3}dt =$$

$$= \frac{5e^{12}}{3} - \frac{1}{3} - \frac{e^{12}}{9} + \frac{1}{9} = \frac{14e^{12} - 2}{9} \approx 2,53\cdot 10^5 (ум.од.)$$

Знаходження середнього часу, затраченого на виготовлення виробу

Нехай відома функція $t = t(x)$,що описує зміни витрат часу t на виготовлення виробу в залежності від ступеня освоєння виробництва, де x-порядковий номер виробу в партії. Тоді середній час t_{cep} , витрачений на виготовлення одного виробу в період

освоєння від x_1 до x_2 виробів обчислюється за формулою:

$$t_{cep} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x)dx$$

Задача 2.

Знайти середній час, витрачений на виготовлення одного виробу в період освоєння від 100 до 121 виробів, якщо функція витрат часу на виготовлення виробів: $t = 600x^{-\frac{1}{2}}$.

Розв'язання.

$$t_{сер} = \frac{1}{121-100}\int_{100}^{121} 600x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{600}{21}\sqrt{2}\Big|_{100}^{121} = \frac{400}{7} \approx 57,2(хв)$$