Геометрія

Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г.

«Геометрія»

підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів

УДК

ББК

Б36

Рецензент

Є. П. Нелін — професор кафедри математики Харківського національного педагогічного університету імені Г.С. Сковороди

Бевз Г. П.

Б36 Геометрія : підруч. для загальноосвіт. навч. закладів. 8 клас / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. – К. : Видавничий дім «Освіта», 2016. – 272 с. : іл.

ISBN

УДК

ББК

ISBN

Шановні восьмикласники!

У цьому році ви продовжуєте вивчати геометрію — одну з найдавніших і цікавих галузей математики. Геометрія постійно розвивалася, як за формою, так і за змістом: збагачувалися її теорії, удосконалювалися способи доведення і розширювалися сфери застосувань. Від вимірювання землі, через аксіому паралельності і квадратури круга до самоподібності і фракталів — такий шлях пройшла геометрія за час свого розвитку.

Вдумайтесь у слова відомого архітектора Ле Корбюзьє:

> *«Я думаю, що ніколи до теперішнього часу ми не жили в такий геометричний період. Варто поміркувати про минуле, згадати про те, що було раніше, і ми будемо приголомшені тим, що навколишній світ — це світ геометрії чистої, істинної, бездоганної в наших очах. Усе навколо — геометрія. Ніколи ми не бачили так ясно таких форм, як круг, прямокутник, кут, циліндр, куля, виконаних так виразно, з такою сумлінністю і так впевнено».*

Якщо ми хочемо з природою, оточуючим світом жити в злагоді, то маємо добре розуміти його, а отже, і геометрію.

Геометрія потрібна всім: інженерам, архітекторам, конструкторам, художникам, креслярам, столярам, слюсарям, токарям, кравцям та багатьом іншим фахівцям. Застосовують знання з геометрії будівельники, мореплавці, військові, митці, астрономи і навіть кондитери. Яку б науку для вивчення в майбутньому ви не обрали, у якій би галузі не працювали, для високих результатів потрібні гарні знання з геометрії.

У величезному саду Геометрії кожний може дібрати собі букет за смаком: строгі доведення і практичні застосування, цитати визначних математиків і оригінальні задачі, поняття сучасної математики та історичні відомості. У 8 класі ви ознайомитеся з різними видами чотирикутників і їх властивостями, розглянете вписані та центральні кути, вписані й описані чотирикутники та інші многокутники. Ознайомитеся з двома перлинами геометрії — теоремою Фалеса і теоремою Піфагора. Розглянувши подібність трикутників і площі фігур, ви переконаєтеся, наскільки широко геометрія використовується в нашому житті.

Запрошуємо вас у світ Геометрії — дивний, щедрий, досконалий, тісно пов'язаний зі світами Праці, Розуму, Мистецтва. Сподіваємося, що наш підручник стане вам добрим помічником в опануванні геометричних знань, у набутті нових умінь і досвіду, у гармонійному розвитку вашої особистості.

Автори

Як працювати з підручником

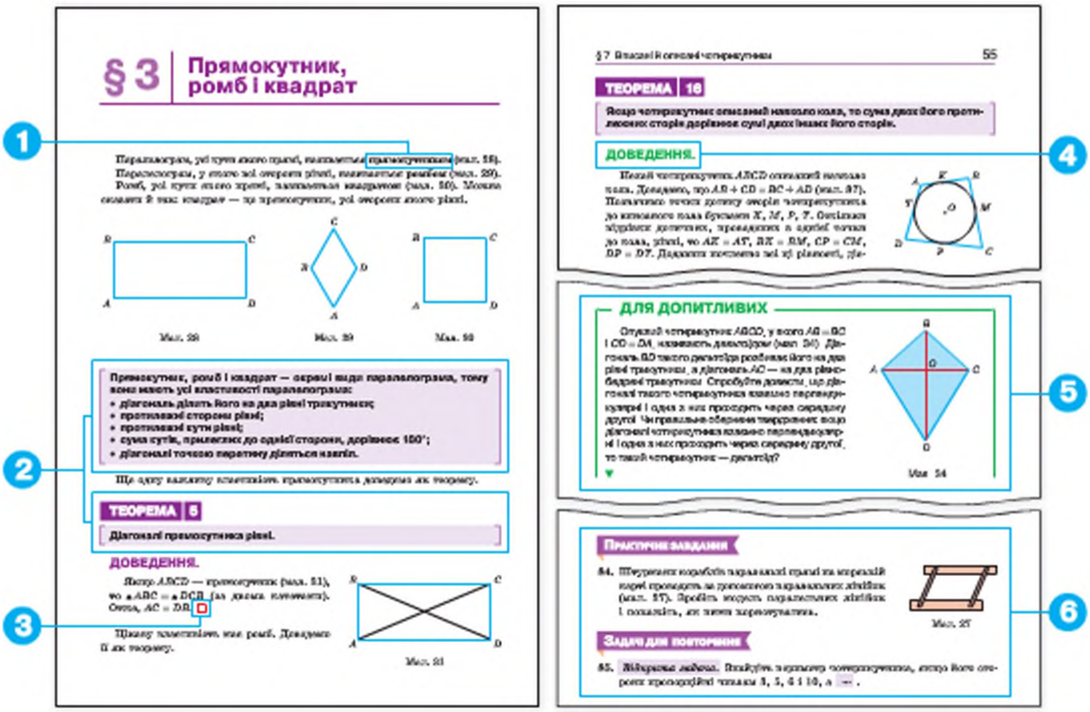
Дорогі восьмикласники і колеги!

Ви тримаєте у руках новий підручник геометрії. Автори сподіваються, що ця книжка стане для вас надійним помічником і порадником. Пропонуємо своєрідну навігацію його сторінками.

Вагомим мотивом і гарним стимулом для навчання є відомості про творців геометрії та приклади практичного застосування навчального матеріалу. Висловлювання видатних математиків можуть стати для вас дороговказом не лише у навчанні, а й на життєвому шляху.

На початку кожного розділу подано короткий огляд його змісту українською та англійською мовами, а також приклади матеріальних об'єктів, моделями яких є геометричні фігури.

1 Вивчаючи теоретичний матеріал, звертайте увагу на слова, надруковані **жирним** шрифтом, — це нові геометричні терміни. Ви повинні усвідомити, що вони означають, і запам'ятати їх.



2 **Жирний текст в квадратних дужках** — це властивості і теореми, доведення яких подано нижче.

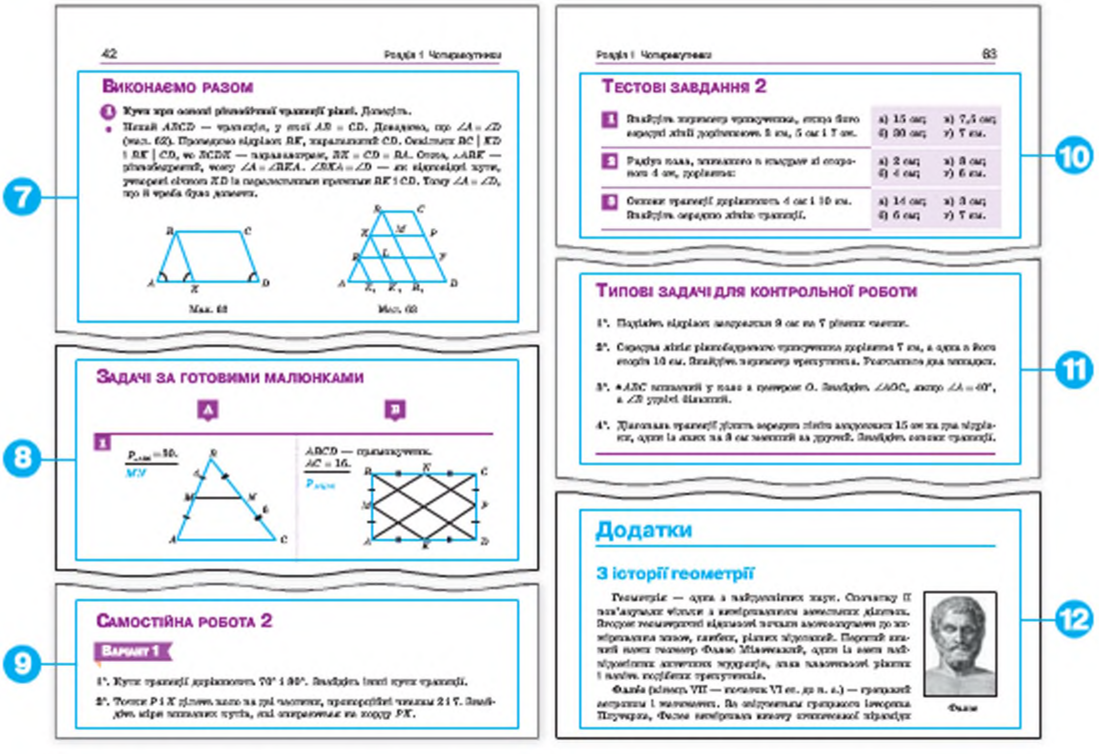
3 Кінець доведення теореми позначено **червоним квадратиком**. 4 **Зеленим кольором** позначено доведення, які не є обов'язковими для вивчення.

5 У кожному параграфі підручника є рубрика **«Для допитливих»**. Вона містить додатковий матеріал, адресований зацікавленим учням.

Підручник містить вправи різних рівнів складності. Є задачі для усного розв'язування та повторення, задачі рівнів А і Б та підвищеної складності. Зацікавлять учнів і вчителів **відкриті задачі та практичні завдання**.

У рубриці **«Виконаємо разом»** наведено зразки розв'язань важливих видів задач. Корисно ознайомитися з ними перед виконанням домашніх завдань, номери яких виділено блакитним кольором.

Наприкінці кожного розділу є рубрики **«Задачі за готовими малюнками»**, **Самостійні роботи** із різнорівневими завданнями, **Тестові завдання** і **Типові задачі для контрольної роботи** трьох рівнів складності.



У додатках подано «Навчальні проекти» до кожного розділу, «Задачі підвищеної складності», «Задачі для повторення», «Тренувальні тести», «Задачі на побудову», **«Історичні відомості»**, «Відомості за курс 7 класу» тощо.

Бажаємо успіхів у вивченні геометрії!

Які послуги робиш батькам,
такі і сам матимеш у старості від дітей.

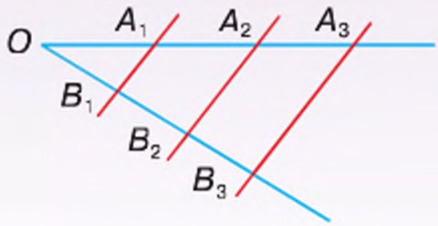
Учи і вчись кращому.

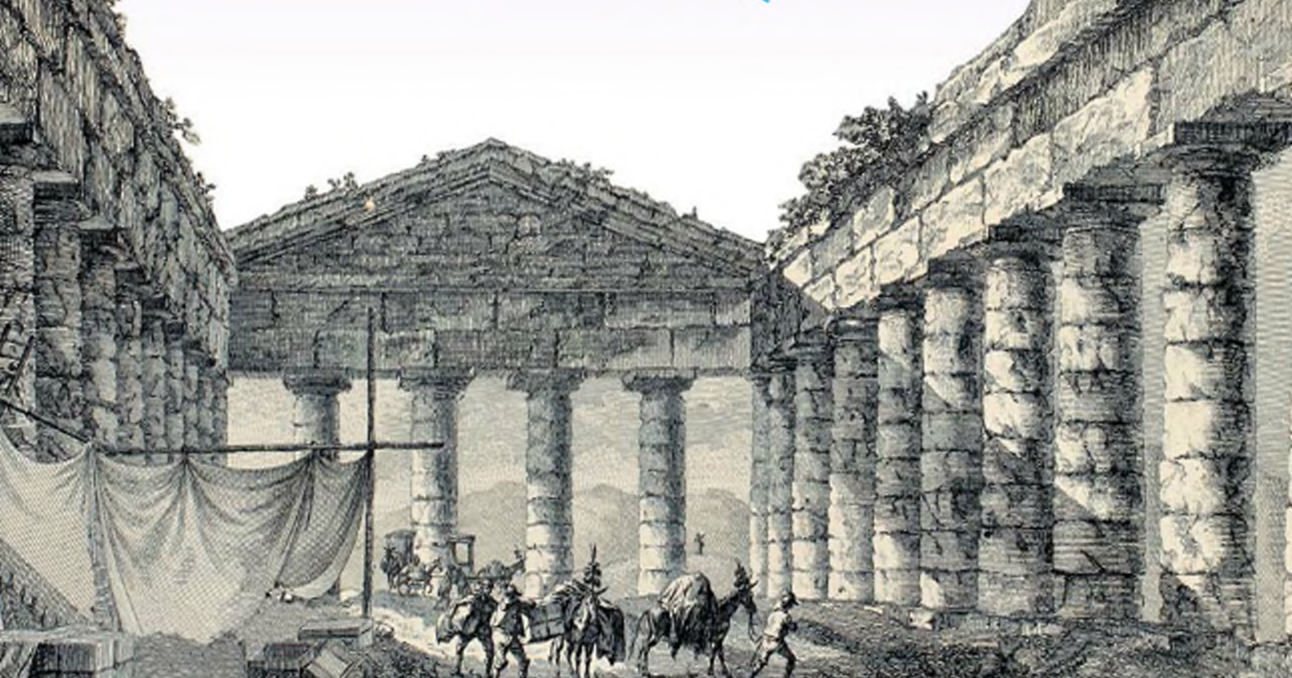
Неуцтво — важкий тягар.

ФАЛЕ́С МІЛЕ́ТСЬКИЙ

(прибл. 624 до н. е. — 548 до н. е.)

- Перший мудрець і перший філософ.
- Перший природодослідник і перший фізик.
- Перший геометр і перший астроном.





Розділ 1 | Section 1

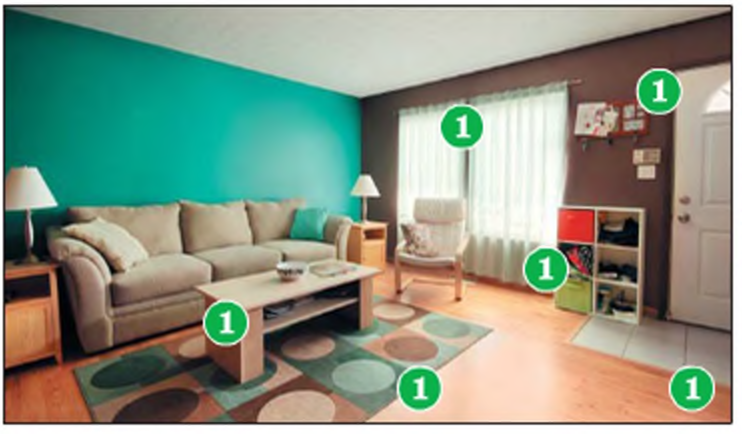
Чотирикутники | Quadrangles

Чотирикутники — найпоширеніші многокутники в нашому довкіллі. Стіни, стеля, підлога, двері, вікна, шибки, поверхня стола, обкладинки книжки і зошита, грані бруска, дошки, цеглини, як правило, мають чотирикутну форму.

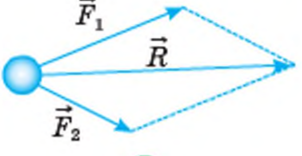
У цьому розділі ви ознайомитеся з найважливішими властивостями чотирикутників, зокрема паралелограмів, прямокутників, ромбів, квадратів і трапецій, а також із властивостями чотирикутників, вписаних у коло і описаних навколо нього.

Для чого вивчати чотирикутники та їх властивості?

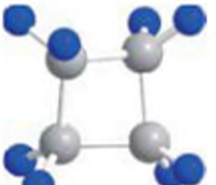
Чотирикутники часто зустрічаються у повсякденному житті (вікна та двері, поверхня столу та шафи, плитка для стін і підлоги, паркет і килим, рушники і простирадла, басейни, тротуарна плитка).



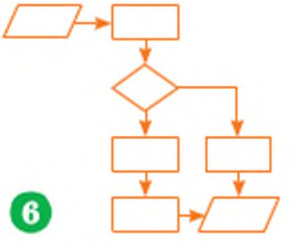
Властивості чотирикутників використовують у фізиці, хімії, інформатиці. У фізиці рівнодійна двох сил визначається, переважно, як діагональ паралелограма.



4



5



6

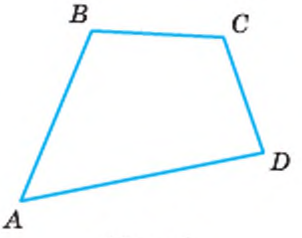
У хімії на основі чотирикутників будують структурні формули деяких органічних речовин. В інформатиці чотирикутниками позначають основні елементи схем алгоритму. Блок вхідних та вихідних даних прийнято позначати паралелограмом, блок обчислень даних — прямокутником, блок прийняття рішень — ромбом.

А де ще можна побачити чотирикутники? Наведіть свої приклади.

Вивчивши матеріал розділу, ви дізнаєтеся: чому домкрат має таку форму, що таке дельтоїд, як зробити повітряного змія, як гарно скласти серветки для святкових обідів тощо.

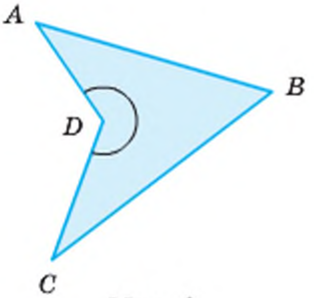
§ 1 Загальні властивості чотирикутників

Нехай дано чотири точки A, B, C, D, з яких ніякі три не лежать на одній прямій. Якщо їх сполучити послідовно відрізками, що не перетинаються, утвориться **чотирикутник** (мал. 1). Він поділяє площину на дві області: внутрішню і зовнішню. Фігуру, що складається з чотирикутника і його внутрішньої області, також називають чотирикутником. Точки A, B, C, D — *вершини* чотирикутника $ABCD$; відрізки AB, BC, CD, DA — його *сторони*. *Кутами* чотирикутника $ABCD$ називають кути ABC, BCD, CDA, DAB.



Мал. 1

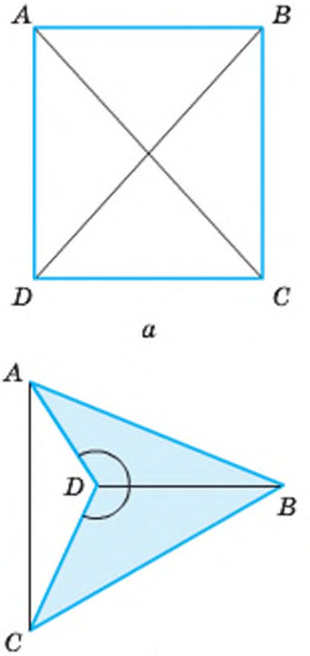
Вершини чотирикутника, що є кінцями однієї його сторони, називають *сусідніми*. *Несусідні* вершини називають *протилежними*. *Сторони* чотирикутника називають *протилежними*, якщо вони не мають спільних точок. *Кути* чотирикутника називають протилежними, якщо їхні вершини — протилежні вершини чотирикутника. У чотирикутнику $ABCD$ протилежні вершини A і C, B і D, протилежні сторони AB і CD, BC і AD, протилежні кути ABC і ADC, BAD і BCD.



Мал. 2

Один із кутів чотирикутника може бути більшим від розгорнутого. Наприклад, кут D чотирикутника $ABCD$ більший за 180° (мал. 2). Такий чотирикутник неопуклий. Якщо кожний із кутів чотирикутника менший від розгорнутого, його називають *опуклим чотирикутником* (див. мал. 1).

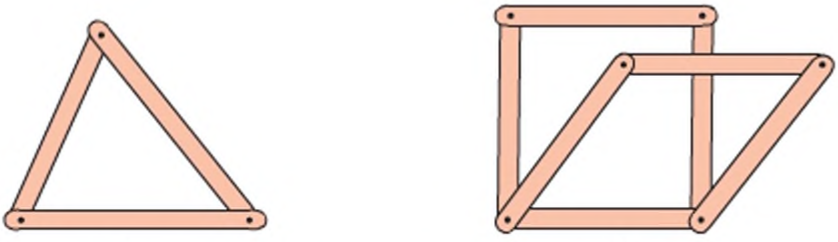
Відрізок, що сполучає дві протилежні вершини чотирикутника, називається його *діагоналлю*. Кожний чотирикутник має дві діагоналі. Діагоналі опуклого чотирикутника перетинаються (мал. 3, *а*). (Подумайте, чи перетинаються діагоналі неопуклого чотирикутника на малюнку 3, *б*.)



Мал. 3

На відміну від трикутника (мал. 4, *а*), чотирикутник без внутрішньої області — фігура не жорстка. Чотири сторони не задають однозначно чотирикутник (мал. 4, *б*).

Суму довжин усіх сторін чотирикутника називають його *периметром*.



Мал. 4

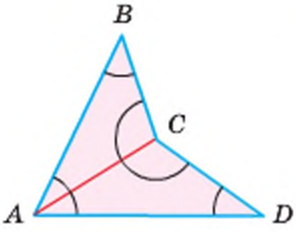
ТЕОРЕМА 1

Сума кутів кожного чотирикутника дорівнює 360°.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай дано чотирикутник $ABCD$ (мал. 5). Одна з його діагоналей розбиває його на два трикутники. Сума кутів чотирикутника дорівнює сумі всіх кутів обох трикутників. Отже,

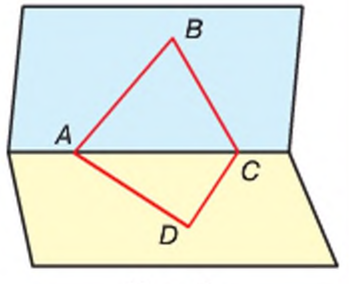
$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 180° + 180° = 360°. \ \square$$



Мал. 5

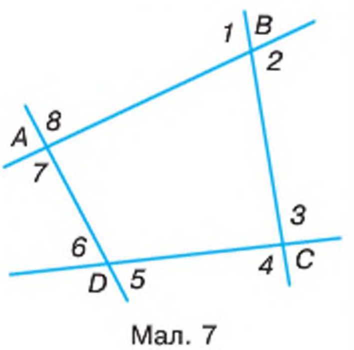
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Чотирикутники, про які йшлося досі, називають ще *плоскими чотирикутниками*. Крім них, існують також неплоскі (просторові) чотирикутники, не всі точки яких лежать в одній площині. Уявіть, що відрізки AB і BC лежать в одній площині, а CD і DA — в іншій (мал. 6). Замкнуту ламану $ABCDA$ також називають чотирикутником, але неплоским. Неплоскі чотирикутники істотно відрізняються від плоских. Наприклад, сума кутів неплоского чотирикутника не дорівнює 360°. Із деякими властивостями неплоских чотирикутників ви ознайомитеся в старших класах. Далі ж, говорячи про чотирикутники, матимемо на увазі тільки плоскі чотирикутники.



Мал. 6

Як ви вже знаєте, крім кутів (внутрішніх) трикутника, розглядають ще його зовнішні кути. Подібно до цього розглядають і зовнішні кути опуклих чотирикутників. Їх можна утворити, продовживши кожну сторону такого чотирикутника в обидва боки. На малюнку 7 цифрами позначено 8 попарно рівних зовнішніх кутів чотирикутника $ABCD$.



Мал. 7

Якщо чотирикутник не опуклий, то при вершині найбільшого його кута поняття зовнішнього кута визначити важко, тому далі розглядатимемо зовнішні кути тільки опуклих чотирикутників.

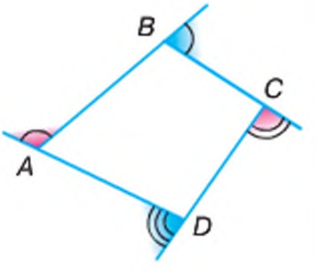
ТЕОРЕМА 2

Сума зовнішніх кутів опуклого чотирикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°.

ДОВЕДЕННЯ.

Додавши до кожного зовнішнього кута чотирикутника суміжний із ним внутрішній кут, дістанемо 4 пари суміжних кутів, загальна сума яких дорівнює $4 \cdot 180°$ (мал. 8). Якщо від цієї суми відняти 360° — суму внутрішніх кутів чотирикутника, буде 360°.

Спробуйте узагальнити цю теорему для довільних опуклих *n*-кутників. □



Мал. 8

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що таке чотирикутник?
2. Які вершини чотирикутника називаються сусідніми? Які — протилежними?
3. Чому дорівнює сума кутів чотирикутника?
4. Який чотирикутник називається опуклим? Який — неопуклим?
5. Що таке діагональ чотирикутника?
6. Скільки діагоналей має чотирикутник?
7. Поміркуйте, чи в кожному чотирикутнику діагоналі перетинаються.

Виконаємо разом

1 Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 2, 3 і 5.

● За такої умови можна вважати, що шукані кути дорівнюють $2x$, $2x$, $3x$ і $5x$, де x — деяке число градусів. Сума всіх кутів чотирикутника дорівнює 360°, тому

$$2x + 2x + 3x + 5x = 360°,\ 12x = 360°,\ x = 30°.$$

$$2 \cdot 30° = 60°,\ 3 \cdot 30° = 90°,\ 5 \cdot 30° = 150°.$$

Отже, шукані кути 60°, 60°, 90° і 150°.

2 Чи існує чотирикутник, три сторони якого дорівнюють 2 см, 3 см, 5 см, а периметр 2 дм?

● 2 дм = 20 см. Якщо такий чотирикутник існує, то його четверта сторона завдовжки 20 – (2 + 3 + 5) = 10 (см). Виходить, четверта сторона чотирикутника дорівнює сумі трьох інших. За цієї умови всі вершини чотирикутника мають лежати на одній прямій. Отже, такого чотирикутника не існує.

Задачі і вправи

Виконайте усно

1. Три кути чотирикутника дорівнюють 50°, 60° і 100°. Знайдіть міру четвертого кута.

2. Чи існує чотирикутник, який має три кути по 120°?

3. Чи існує чотирикутник, який має три тупі кути?

4. Які з наведених нижче предметів мають форму чотирикутника (мал. 9)?

Мал. 9

5. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо кожна з них менша за його периметр на 6 см.

6. Периметр чотирикутника дорівнює 20 м. Як він зміниться, якщо кожну сторону збільшити на 1 м?

7. Периметр чотирикутника дорівнює 10 дм. Як він зміниться, якщо кожну сторону збільшити втричі?

А

8. Накресліть чотирикутник $ABCK$. Назвіть його протилежні сторони, протилежні вершини, протилежні кути.

9. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 38 см, а сторони пропорційні числам 2, 3, 5 і 9.

10. Одна зі сторін чотирикутника удвічі більша за кожну з інших сторін. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 20 см.

11. Знайдіть довжини сторін чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 21 см, а одна зі сторін удвічі коротша від кожної з інших.

12. Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам: а) 1, 2, 3, 4; б) 1, 2, 2, 13.

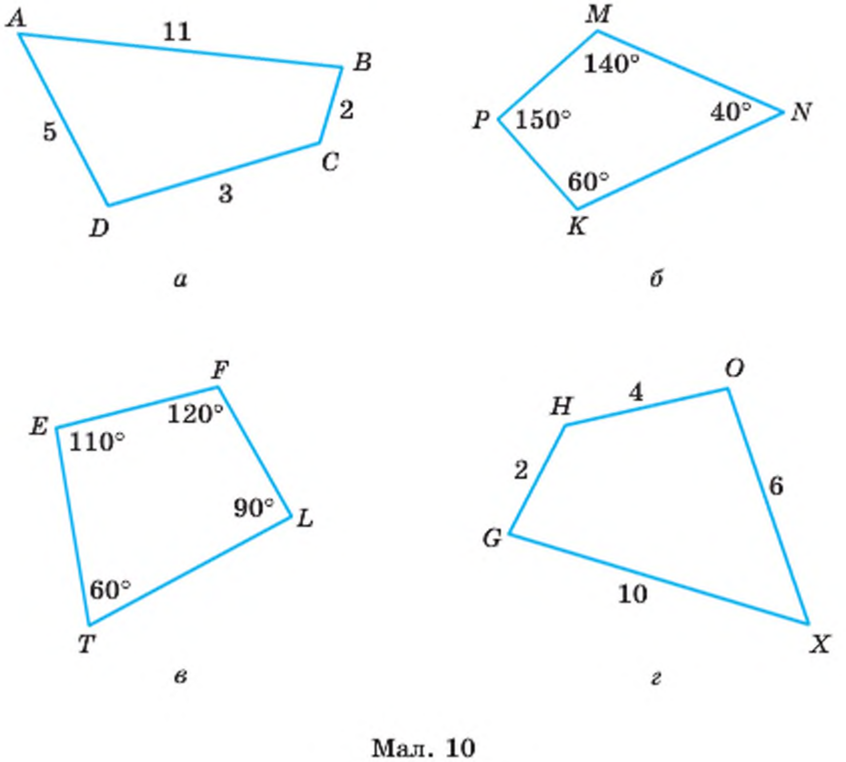
13. Кути чотирикутника, взяті послідовно, пропорційні числам 3, 4, 5 і 6. Чи має цей чотирикутник паралельні сторони?

14. Чи існує чотирикутник зі сторонами 3 см, 5 см, 8 см і 16 см?

15. Доведіть, **що довжина будь-якої сторони чотирикутника менша від суми довжин трьох інших його сторін.**

16. Знайдіть діагональ BD чотирикутника $ABCD$, якщо $\angle BAD = 90°$, $\angle ADB = 30°$ і $AB = 4$ см.

17. Чи існують чотирикутники з такими даними, як на малюнку 10? Якщо ні, то як змінити сторони і кути, щоб чотирикутник існував?



Мал. 10

18. Знайдіть довжину діагоналі чотирикутника, якщо його периметр дорівнює c, а периметри трикутників, на які ця діагональ ділить даний чотирикутник, дорівнюють a і b.

19. Знайдіть кути чотирикутника $ABCD$, якщо $AB = BC = CD = DA = CA = a$.

20. Усі сторони чотирикутника рівні. Доведіть, що його протилежні кути рівні.

21. Чи можуть усі кути чотирикутника бути гострими?

22. Три кути чотирикутника прямі. Доведіть, що і четвертий його кут прямий.

Б

23. Яку найбільшу кількість гострих кутів може мати опуклий чотирикутник?

24. Зовнішні кути опуклого чотирикутника пропорційні числам 7, 8, 9 і 12. Знайдіть міри його внутрішніх кутів.

25. У трикутнику MNK $\angle M = 44°$, а $\angle N = 56°$. Бісектриси NE і MP цього трикутника перетинаються в точці O. Установіть відповідність між кутами (1–4) утвореного чотирикутника $EOPK$ і кутами, визначеними умовами (А–Д).

1	$\angle EOP$	А	Більший кут рівнобедреного трикутника, у якого менші кути дорівнюють по $50°$
2	$\angle OPK$	Б	Кут, суміжний з кутом у $50°$
3	$\angle PKE$	В	Менший кут чотирикутника, у якого три кути рівні між собою, а четвертий на $16°$ менший за кожен з них
4	$\angle KEO$	Г	Зовнішній кут рівностороннього трикутника
		Д	Найменший кут чотирикутника, кути якого пропорційні числам 4, 5, 5 і 6

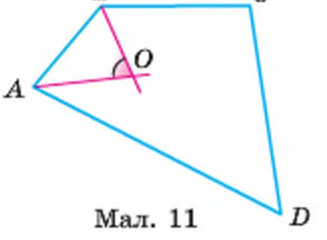
26. У чотирикутнику $ABCD$ сторона BC на 1 см, а сторона AD на 6 см більші за AB. Знайдіть периметр чотирикутника, якщо довжина сторони CD є середнім арифметичним сторін AB та AD і $CD = 5$ см.

27. Одна зі сторін чотирикутника дорівнює середньому арифметичному трьох інших сторін, які пропорційні числам 2, 3 і 6. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 44 см. Доведіть, що такий чотирикутник існує.

28. У чотирикутнику $ABCD$ $BC \parallel AD$, $\angle A = 50°$, $\angle ADB = 70°$, $\angle BDC = 60°$. Доведіть, що $BC = AD$ і $AB = CD$.

29. Доведіть, що сума діагоналей опуклого чотирикутника менша за периметр цього чотирикутника.

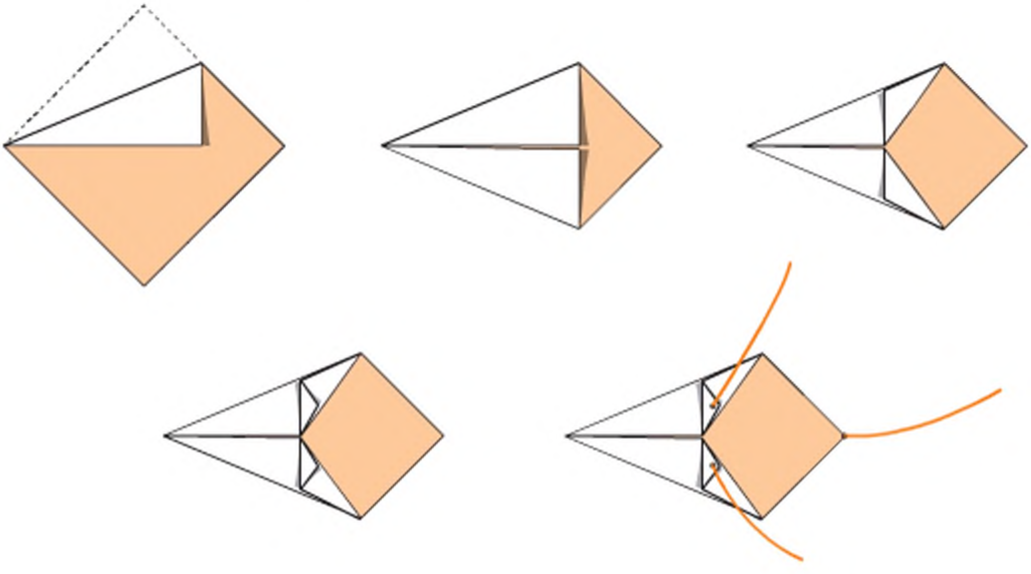
30. Доведіть, що коли бісектриси кутів A і B чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O (мал. 11), то кут AOB дорівнює півсумі кутів C і D.



Мал. 11

Практичне завдання

31. *Повітряний змій своїми руками*. Виріжте із кольорового або білого паперу квадрат розміром 50×50. Складіть його так, як показано на малюнку 12. Приклейте до змія хвіст і вуздечки. Запускайте його проти вітру. Дізнайтеся, як можна виготовити інші моделі повітряного змія.



Мал. 12

Задачі для повторення

32. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $AO = BO$, $CO = DO$. Доведіть, що $AC = BD$ і $AC \parallel BD$.

33. Знайдіть кути трикутника, якщо один із них на 20° більший за другий і вдвічі менший за третій.

34. Знайдіть міри внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих та січній, якщо вони пропорційні числам 2 і 3.

35. Трикутники ABC і ADC мають спільну основу AC (точки B і D лежать по один бік від прямої AC). Доведіть, що $AD = BC$, якщо $AB = DC$ і $\angle BAC = \angle ACD$.

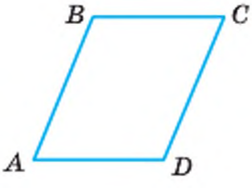
36. Розв'яжіть попередню задачу за умови, що точки B і D лежать по різні боки від прямої AC. Доведіть, що $AD \parallel BC$.

§ 2 Паралелограми

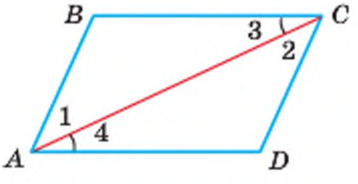
Розгляньте малюнок 13. Він складається із багатьох чотирикутників, у кожного з яких протилежні сторони паралельні.

Чотирикутник, у якого кожна сторона паралельна протилежній стороні, називається **паралелограмом** (мал. 14).

Мал. 13



Мал. 14



Мал. 15

ТЕОРЕМА 3

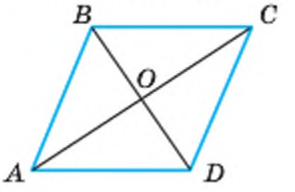
(Ознаки паралелограма.) **Якщо в чотирикутнику: 1) кожна сторона дорівнює протилежній стороні,** або **2) дві протилежні сторони рівні і паралельні,** або **3) діагоналі чотирикутника перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, то такий чотирикутник — паралелограм.**

ДОВЕДЕННЯ.

1) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $AB = CD$ і $BC = AD$ (мал. 15). Діагональ AC розбиває його на два рівні трикутники ABC і CDA (за трьома сторонами). Тому $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$. З рівності кутів 1 і 2 випливає, що $AB \parallel CD$, а з рівності кутів 3 і 4, що $BC \parallel AD$. Отже, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

2) Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $AB = CD$ і $AB \parallel CD$ (мал. 15). Оскільки $AB \parallel CD$, то $\angle 2 = \angle 1$ як внутрішні різносторонні кути. Тоді $\triangle ABC = \triangle CDA$ (за двома сторонами і кутом між ними). Отже, $\angle 3 = \angle 4$, тому $AD \parallel CB$. Згідно з умовою $AB \parallel CD$. Тому чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

3) Якщо діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O і $OA = OC$, $OB = OD$ (мал. 16), то $\triangle OAB = \triangle OCD$ і $\triangle OBC = \triangle ODA$ (за двома сторонами і кутом між ними). Тому $AB = CD$ і $AD = CB$. Згідно з доведеною ознакою 1 чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. □



Мал. 16

Отже, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, якщо виконується одна з таких умов:

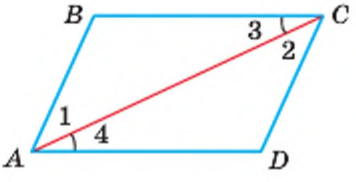
1) $AB \parallel CD$ і $BC \parallel AD$ (означення);
2) $AB = CD$ і $BC = AD$ (ознака 1);
3) $AB = CD$ і $AB \parallel CD$ (ознака 2);
4) $AO = OC$ і $BO = OD$ (ознака 3).

ТЕОРЕМА 4

(Властивості паралелограма.) **У паралелограмі:**
1) діагональ ділить його на два рівні трикутники;
2) протилежні сторони рівні;
3) протилежні кути рівні;
4) сума кутів, прилеглих до однієї сторони, дорівнює 180°;
5) діагоналі, перетинаючись, діляться навпіл.

ДОВЕДЕННЯ.

1) Нехай $ABCD$ — довільний паралелограм (мал. 17). Його діагональ AC — січна паралельних прямих AB і CD та паралельних прямих AD і CB. Тому $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих. За стороною і прилеглими кутами $\triangle ABC = \triangle CDA$.



Мал. 17

2) З рівності трикутників ABC і CDA випливає: $AB = CD$, $AD = CB$.

3) З рівності трикутників ABC і CDA випливає: $\angle B = \angle D$. А оскільки $\angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3$, то $\angle A = \angle C$.

4) Оскільки $\angle A$ і $\angle B$ — внутрішні односторонні кути при паралельних прямих BC і AD та січній AB, то $\angle A + \angle B = 180°$.

5) Нехай AC і BD — діагоналі паралелограма $ABCD$, а O — точка їх перетину (мал. 16). $\angle BAC = \angle DCA$ — як внутрішні різносторонні, утворені січною AC з паралельними прямими AB і CD. Так само $\angle ABD = \angle CDB$. За стороною і прилеглими кутами трикутники OAB і OCD рівні. Отже, $OA = OC$ і $OB = OD$. □

Оскільки кожний кут паралелограма дорівнює протилежному куту, а сума всіх його кутів дорівнює 360°, то жоден із кутів не може бути більшим за 180°. Отже,

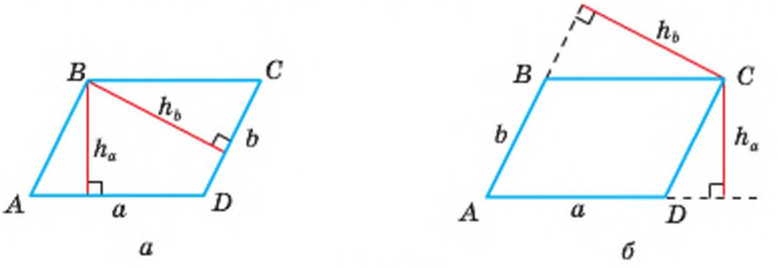
паралелограм — чотирикутник опуклий.

Щоб однозначно задати паралелограм, досить вказати довжини двох його сусідніх сторін і кут між ними, або довжини двох сусідніх сторін і однієї діагоналі, або довжини двох діагоналей і кут між ними.

У паралелограмі, як і в трикутнику, можна провести висоти.

Висотою паралелограма називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки сторони паралелограма на пряму, що містить протилежну сторону. Висотою паралелограма також називають і довжину відповідного перпендикуляра.

Найчастіше висоти паралелограма проводять з його вершин (мал. 18, *а*, *б*).



Мал. 18

Форму паралелограмів мають частини поручнів на сходах (мал. 19) і складові деяких домкратів (мал. 20). На сторінці зошита в косу лінійку є багато сотень різних паралелограмів.

Мал. 19

Мал. 20

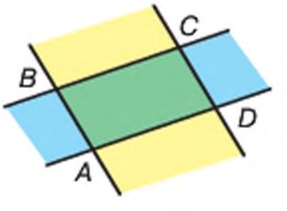
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Частина площини, обмежена двома паралельними прямими, називається *смугою*. Кожний паралелограм є спільною частиною (перетином) двох смуг (мал. 21).

Кожний паралелограм має дві діагоналі. Точку перетину діагоналей паралелограма називають його центром. *Центр паралелограма* — середина кожної з його діагоналей.

Кожна пряма, яка проходить через центр паралелограма і не проходить через його вершини, розбиває даний паралелограм на два рівні чотирикутники. Наприклад, пряма *KP*, що проходить через центр *O* паралелограма *ABCD* (мал. 22), розбиває його на чотирикутники *AKPD* і *CPKB*, які можна сумістити. Для цього досить перший з них повернути навколо точки *O* на 180°.

Спробуйте зробити модель з паперу, якою можна проілюструвати останнє твердження.



Мал. 21

Мал. 22

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення паралелограма.
2. Які властивості мають сторони паралелограма?
3. Які властивості мають кути паралелограма?
4. Сформулюйте і доведіть ознаки паралелограма.
5. Як однозначно задати паралелограм?

Виконаємо разом

1 Знайдіть кути паралелограма, якщо один із них удвічі більший від другого.

- Якщо міра меншого з кутів дорівнює x, то міра більшого — $2x$. Їх сума $x + 2x = 180°$, звідки $x = 60°$, а $2x = 120°$.

  Отже, кути паралелограма: 60°, 120°, 60°, 120°.

Якщо задача має недостатню кількість даних, то її називають *відкритою*. Ви маєте доповнити її умову на свій розсуд і розв'язати отриману задачу. Бажано розглянути якомога більшу кількість можливих варіантів задачі та її розв'язання.

2 ***Відкрита задача.*** Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 30 см і ... .

- Умову задачі можна доповнити так: а) сторони пропорційні числам 2 і 3; б) різниця суміжних сторін дорівнює 7 см; в) бісектриса гострого кута ділить протилежну сторону паралелограма навпіл; г) висота, проведена до більшої сторони, дорівнює 3 см і утворює з меншою стороною кут 60°; ґ) діагоналі утворюють зі сторонами рівні кути; д) одна зі сторін менша від його периметра на 25 см, а друга — на 20 см.

  Розв'яжемо задачу з останнім доповненням.

  Нехай довжини сусідніх сторін паралелограма x см і y см. Тоді його периметр дорівнює $(2x + 2y)$ см.
  Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x+2y-x=25, \\ 2x+2y-y=20. \end{cases}$$

  Розв'яжемо її:

$$\left\{\begin{array}{l|l} x+2y=25 & 2, \\ 2x+y=20 & -1 \end{array}\right. \qquad \begin{cases} 2x+4y=50, \\ -2x-y=-20 \end{cases}$$

$$3y=30,\ y=10.$$

  Тоді $x+2\cdot 10=25,\ x=5$.
  Отже, сторони паралелограма: 10 см і 5 см.

Задачі і вправи

Виконайте усно

37. Один із кутів паралелограма дорівнює 70°. Знайдіть інші кути паралелограма.

38. Знайдіть кути паралелограма, якщо сума двох із них дорівнює 120°.

39. Знайдіть кути паралелограма, якщо сума трьох із них дорівнює 300°.

40. Сторони паралелограма завдовжки 3 см і 5 см. Знайдіть його периметр.

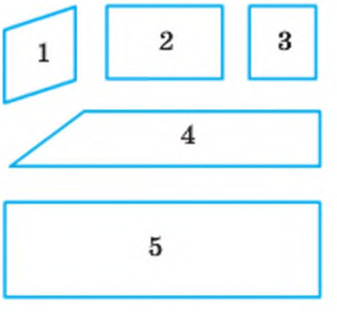
41. Периметр паралелограма 60 см, а одна зі сторін 10 см. Знайдіть другу сторону паралелограма.

42. Знайдіть периметр паралелограма, якщо середнє арифметичне всіх його сторін дорівнює 3 м.

43. Знайдіть кути паралелограма, якщо всі його сторони рівні і кожна з них дорівнює одній діагоналі.

А

44. Які з фігур, зображених на малюнку 23, — паралелограми?



Мал. 23

45. Знайдіть кути паралелограма, якщо один із них дорівнює: а) 50°; б) 90°.

46. На сторонах BC і AD паралелограма $ABCD$ позначено точки M і K такі, що $MK \parallel AB$. Доведіть, що чотирикутник $ABMK$ — паралелограм.

47. Бісектриси кутів A і C паралелограма $ABCD$ перетинають сторони BC і AD у точках M і N відповідно. Доведіть, що чотирикутник $AMCN$ — паралелограм.

48. Точки M, N, P, K — середини сторін паралелограма $ABCD$. Доведіть, що $MNPK$ — паралелограм.

49. Кути чотирикутника пропорційні числам 2, 3, 2 і 5. Чи може бути даний чотирикутник паралелограмом?

50. Сума двох кутів паралелограма дорівнює 156°. Знайдіть кути паралелограма.

51. Обчисліть кути паралелограма, якщо:
а) один із кутів на 20° менший за другий;
б) один із кутів у 5 разів більший за другий;
в) два з них пропорційні числам 4 і 5;
г) різниця двох із них дорівнює 40°.

52. Обчисліть кути паралелограма $ABCD$, якщо $\angle CAD = 32°$, $\angle ACD = 37°$.

53. Під яким кутом перетинаються бісектриси двох кутів паралелограма, прилеглих до однієї сторони?

54. Знайдіть кути паралелограма, якщо одна з його діагоналей дорівнює стороні паралелограма і перпендикулярна до неї.

55. Бісектриса кута паралелограма перетинає його сторону під кутом 29°. Знайдіть кути паралелограма.

56. Периметр паралелограма дорівнює 48 см, а одна зі сторін 13 см. Знайдіть довжини інших його сторін.

57. Периметр паралелограма дорівнює 32 см. Знайдіть довжини його сторін, якщо дві з них відносяться як 3 : 5.

58. Периметр паралелограма дорівнює 48 см. Знайдіть довжини його сторін, якщо сума двох із них дорівнює 32 см.

59. Знайдіть довжину діагоналі AC паралелограма $ABCD$, якщо його периметр дорівнює 40 дм, а периметр трикутника ABC 27 дм.

60. Обчисліть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 42 см і:
а) одна зі сторін на 5 см більша за другу;
б) одна зі сторін у 2 рази більша за другу;
в) різниця сторін дорівнює 7 см;
г) сторони відносяться як 3 : 4.

61. На стороні BC рівностороннього трикутника ABC взято точку M, через яку проведено прямі, паралельні до сторін AB і AC. Знайдіть кути утвореного чотирикутника.

62. У паралелограмі $ABCD$ $AB = 10$ см, $BC = 15$ см, $\angle B = 150°$. Знайдіть висоти, проведені з вершини B.

Б

63. Із вершини B паралелограма $ABCD$ до сторони AD проведено висоту BH. Знайдіть кути паралелограма, якщо $AH = BH$ і: а) $\angle B$ — тупий; б) $\angle B$ — гострий.

64. На стороні BC паралелограма $ABCD$ взято точку P так, що $AB = BP$. Знайдіть кут PAD, якщо $\angle ABC = 100°$.

65. Бісектриса $\angle A$ ділить сторону BC паралелограма $ABCD$ навпіл. Знайдіть периметр паралелограма, якщо сторона $AB = 5$ см.

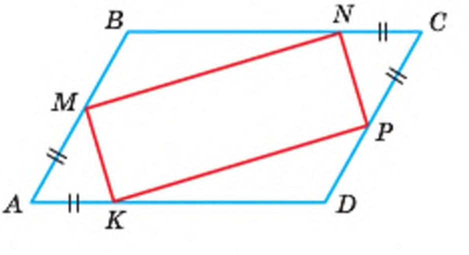
66. Бісектриса $\angle A$ ділить сторону CD паралелограма $ABCD$ у точці M так, що $CM - MD = 2$ см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 34 см.

67. Знайдіть периметр паралелограма, якщо бісектриса його кута ділить одну зі сторін на відрізки завдовжки 5 см і 3 см.

68. $ABCD$ — паралелограм, точки M і N — середини сторін BC і AD. Доведіть, що чотирикутник $AMCN$ — паралелограм.

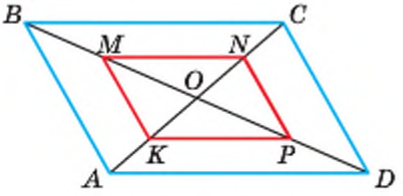
69. На діагоналі AC паралелограма $ABCD$ позначили точки M і N так, що $AM = CN$. Доведіть, що чотирикутник $MBND$ — паралелограм.

70. $ABCD$ — паралелограм, $AM = AK = CN = CP$ (мал. 24). Доведіть, що $MNPK$ — паралелограм.



Мал. 24

71. Середини півдіагоналей M, N, P, K паралелограма $ABCD$ послідовно сполучили відрізками (мал. 25). Доведіть, що чотирикутник $MNPK$ — паралелограм.



Мал. 25

72. Доведіть, що бісектриси кутів паралелограма з нерівними сторонами, перетинаючись, утворюють паралелограм.

73. Доведіть, що бісектриси зовнішніх кутів паралелограма, перетинаючись, утворюють паралелограм.

74. У паралелограма $ABCD$ $AB = 12$ дм, $\angle A = 30°$. Знайдіть відстань від точки C: 1) до прямої AD; 2) до відрізка AD.

75. Діагональ AC паралелограма $ABCD$ є бісектрисою кута A. Доведіть, що діагоналі паралелограма перпендикулярні.

76. Діагональ BD паралелограма $ABCD$ є бісектрисою кута B. Доведіть, що сторони паралелограма рівні.

77. Діагональ паралелограма утворює з його сторонами рівні кути. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 48 см.

78. Установіть відповідність між найменшим кутом вказаного трикутника (1–4) і найменшим кутом паралелограма, для якого виконуються умови (А–Д).

Трикутник, у якого	Паралелограм, у якого
1 всі кути рівні	**А** всі кути рівні
2 катет дорівнює половині гіпотенузи	**Б** сума протилежних кутів дорівнює 90°
3 катети рівні	**В** один із кутів на 60° менший за другий
4 зовнішні кути дорівнюють 150° і 162°	**Г** найбільший із кутів у 9 разів більший за найменший
	Д два кути пропорційні числам 1 і 5

79. Скільки різних паралелограмів можна скласти, прикладаючи один до одного два рівні різносторонні трикутники?

80. Із двох рівних прямокутних трикутників із кутом 30° склали паралелограм. Знайдіть кути цього паралелограма.

81. Сторони трикутника дорівнюють a, b і c. Знайдіть периметр паралелограма, складеного з двох таких трикутників. Розгляньте три випадки.

82. $ABCD$ — паралелограм. Зовні нього побудовано рівносторонні трикутники ABM і DCT. Доведіть, що $MD = BT$ і $MC = AT$.

83. Розгляньте малюнки 26, *а*, *б*. Поясніть дію механізмів, заснованих на властивостях паралелограма. Наведіть свої приклади таких механізмів.

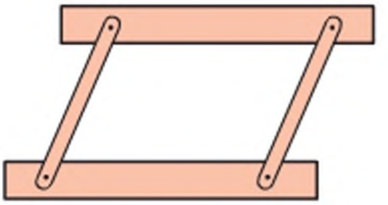

а

б

Мал. 26

Практичне завдання

84. Штурмани кораблів паралельні прямі на морській карті проводять за допомогою паралельних лінійок (мал. 27). Зробіть модель паралельних лінійок і покажіть, як ними користуватись.



Мал. 27

Задачі для повторення

85. *Відкрита задача.* Знайдіть сторони чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 3, 5, 6 і 10, а ... .

86. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ $\angle A = \angle C$, $\angle B = 3\angle A$, а $\angle D = 135°$. Чи має чотирикутник паралельні сторони?

87. Чи буде чотирикутник опуклим, якщо один із його кутів дорівнює 65°, другий на 25° більший, а третій у 5 разів менший за перший?

88. Один із кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 116°. Знайдіть міри інших кутів трикутника.

89. У колі проведено діаметри AB і CD. Доведіть, що $AC = BD$ і $AC \parallel BD$.

Геометрія навколо нас

Палац Потоцьких у Львові було побудовано у 1880 р.

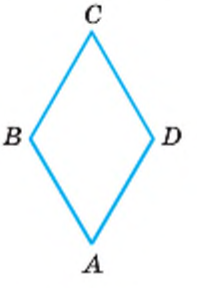
§ 3 Прямокутник, ромб і квадрат

Паралелограм, усі кути якого прямі, називається **прямокутником** (мал. 28).

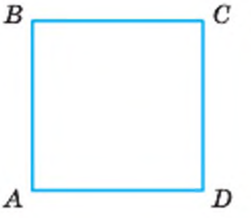
Паралелограм, у якого всі сторони рівні, називається **ромбом** (мал. 29).

Ромб, усі кути якого прямі, називається **квадратом** (мал. 30). Можна сказати й так: квадрат — це прямокутник, усі сторони якого рівні.

Мал. 28



Мал. 29



Мал. 30

Прямокутник, ромб і квадрат — окремі види паралелограма, тому вони мають усі властивості паралелограма:
- **діагональ ділить його на два рівні трикутники;**
- **протилежні сторони рівні;**
- **протилежні кути рівні;**
- **сума кутів, прилеглих до однієї сторони, дорівнює 180°;**
- **діагоналі точкою перетину діляться навпіл.**

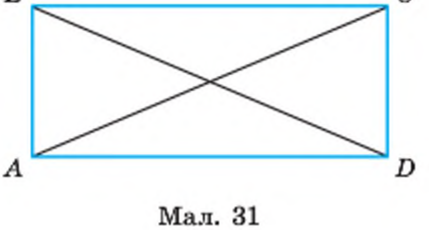
Ще одну важливу властивість прямокутника доведемо як теорему.

ТЕОРЕМА 5

Діагоналі прямокутника рівні.

ДОВЕДЕННЯ.

Якщо $ABCD$ — прямокутник (мал. 31), то $\triangle ABC = \triangle DCB$ (за двома катетами). Отже, $AC = DB$. □



Мал. 31

Цікаву властивість має ромб. Доведемо її як теорему.

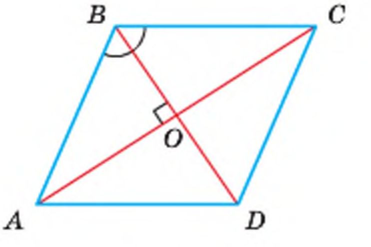
ТЕОРЕМА 6

Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні і ділять кути ромба навпіл.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай $ABCD$ — ромб, O — точка перетину його діагоналей (мал. 32). Доведемо, що $AC \perp BD$ і що, наприклад, $\angle ABD = \angle CBD$.

Оскільки O — середина діагоналі AC, $AB = BC$, то медіана BO рівнобедреного трикутника ABC є його висотою і бісектрисою. Отже, $BO \perp AC$ і $\angle ABO = \angle CBO$. Тоді й $\angle ABD = \angle CBD$. □



Мал. 32

Оскільки квадрат є і ромбом, і прямокутником, то він має всі властивості ромба і прямокутника.

У квадраті:
- **всі кути прямі;**
- **всі сторони рівні;**
- **діагоналі рівні;**
- **діагоналі взаємно перпендикулярні;**
- **діагоналі ділять кути навпіл.**

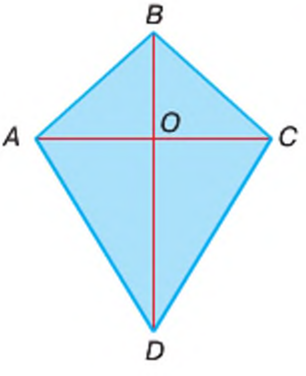
Пам'ятаємо, що квадрат є видом паралелограма, тому має всі властивості паралелограма (див. с. 17).

Співвідношення між розглянутими видами паралелограмів можна зобразити, як показано на малюнку 33.

Мал. 33

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Опуклий чотирикутник $ABCD$, у якого $AB = BC$ і $CD = DA$, називають *дельтоїдом* (мал. 34). Діагональ BD такого дельтоїда розбиває його на два рівні трикутники, а діагональ AC — на два рівнобедрені трикутники. Спробуйте довести, що діагоналі такого чотирикутника взаємно перпендикулярні і одна з них проходить через середину другої. Чи правильне обернене твердження: якщо діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні і одна з них проходить через середину другої, то такий чотирикутник — дельтоїд?



Мал. 34

Окремий вид дельтоїда — ромб. Співвідношення між поняттями *дельтоїд, ромб, квадрат* можна проілюструвати такою діаграмою (мал. 35). Дельтоїд, відмінний від ромба, не є паралелограмом.

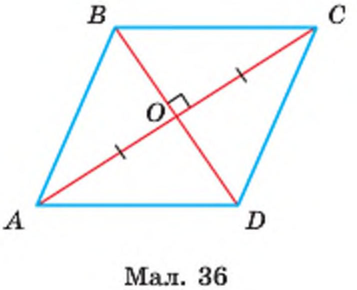
Мал. 35

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення прямокутника.
2. Які властивості має прямокутник? Доведіть їх.
3. Сформулюйте означення ромба.
4. Які властивості має ромб? Доведіть їх.
5. Сформулюйте означення квадрата.
6. Які властивості має квадрат?

Виконаємо разом

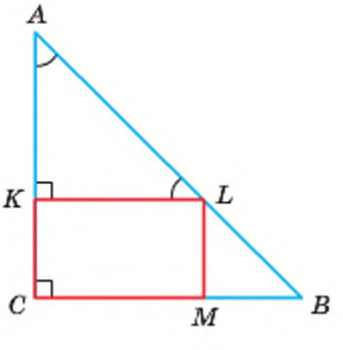
1 Доведіть, що паралелограм, у якого діагоналі перпендикулярні, — ромб (мал. 36).



Мал. 36

- За властивістю діагоналей паралелограма $AO = CO$, а за умовою задачі $BO \perp AC$. Отже, у трикутнику ABC BO — медіана і висота. Тоді трикутник ABC — рівнобедрений, $AB = BC$. Оскільки протилежні сторони паралелограма рівні, то $AB = BC = CD = AD$. Отже, $ABCD$ — ромб.

2 У рівнобедрений прямокутний $\triangle ABC$ вписано прямокутник, який має з трикутником спільний прямий кут C (мал. 37). Знайдіть довжину катета, якщо периметр прямокутника дорівнює 12 см.



Мал. 37

- Оскільки $\triangle ABC$ — рівнобедрений прямокутний, то $\angle A = 45°$, тоді $\angle ALK = 45°$. Отже, $\triangle AKL$ — рівнобедрений, $AK = KL$. Тому

$$AC = AK + KC = KL + KC = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \text{ см}.$$

Задачі і вправи

Виконайте усно

90. Сторона ромба дорівнює a. Знайдіть його периметр.
91. Знайдіть сторону квадрата, периметр якого дорівнює P.
92. Знайдіть периметр ромба, якщо він на 30 дм довший за одну сторону.
93. Знайдіть кути ромба, якщо один із них має 40°.
94. Знайдіть кути ромба, якщо його діагоналі рівні.
95. Знайдіть кути ромба, якщо сума двох із них дорівнює 200°.

А

96. Доведіть, що діагональ ділить прямокутник на два рівні трикутники.
97. Доведіть, що кожна сторона прямокутника коротша від його діагоналі.
98. Знайдіть довжини діагоналей прямокутника, якщо вони перетинаються під кутом 60°, а менша сторона прямокутника дорівнює 7 см.
99. Діагональ прямокутника дорівнює d і утворює зі стороною кут 30°. Знайдіть довжину меншої сторони прямокутника.
100. Діагональ прямокутника дорівнює 12 см і утворює зі сторонами кути, один із яких удвічі більший за другий. Знайдіть довжину меншої сторони прямокутника.
101. Кут між діагоналями прямокутника дорівнює 40°. Знайдіть кути, які діагональ утворює зі сторонами прямокутника.
102. Сторони прямокутника дорівнюють 7 см і 10 см. Знайдіть відстані від точки перетину діагоналей до сторін прямокутника.
103. Відстані від точки перетину діагоналей прямокутника до його сторін дорівнюють 3 см і 4 см. Знайдіть периметр прямокутника.
104. Відстань від точки перетину діагоналей прямокутника до однієї зі сторін на 3 см більша, ніж до другої. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 28 см.
105. **Якщо діагоналі паралелограма рівні, то він — прямокутник.** Доведіть.
106. Доведіть: а) якщо всі кути чотирикутника рівні, то він — прямокутник; б) якщо один кут паралелограма прямий, то цей паралелограм — прямокутник.
107. Через точку M, що лежить на гіпотенузі прямокутного трикутника ABC, проведено прямі, паралельні катетам. Вони перетинають катети BC і AC у точках F і E. Доведіть, що $MFCE$ — прямокутник.
108. Знайдіть периметр прямокутника $ABCD$, якщо бісектриси його кутів A і B ділять сторону CD на три відрізки по 3 см.
109. Один із кутів ромба дорівнює 50°. Знайдіть кут між меншою його діагоналлю і стороною.
110. Знайдіть кути ромба, якщо одна з його діагоналей дорівнює стороні.

111. Кут A ромба $ABCD$ дорівнює 140°. Знайдіть кути трикутника AOB, якщо O — точка перетину діагоналей ромба.

112. Сторона ромба дорівнює a, а кут 150°. Знайдіть відстань між протилежними сторонами ромба.

113. Кути ромба пропорційні числам 1 і 2. Знайдіть меншу діагональ ромба, якщо його периметр дорівнює 40 см.

114. Один із кутів ромба на 60° менший за другий. Знайдіть периметр ромба, якщо менша його діагональ дорівнює 6 см.

115. Висота ромба, проведена з вершини тупого кута, ділить сторону навпіл. Знайдіть: а) кути ромба; б) периметр ромба, якщо менша його діагональ дорівнює 5 см.

116. M, N, P, K — середини сторін квадрата $ABCD$. Доведіть, що $MNPK$ — квадрат.

117. Доведіть, що **ромб, у якого діагоналі рівні, — квадрат.**

118. Доведіть, що **прямокутник, у якого діагоналі перпендикулярні, — квадрат.**

119. Периметр квадрата дорівнює 16 см. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей до сторін квадрата.

120. На малюнку 38 зображено частину загону для коней. Скільки метрів дерев'яних рейок знадобиться для огорожі нового загону, якщо він матиме форму прямокутника зі сторонами 30 м і 40 м?

Мал. 38

Б

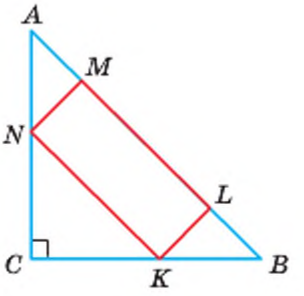
121. Із вершини B прямокутника $ABCD$ опущено перпендикуляр BK на діагональ AC, $K \in AC$. Знайдіть AK і KC, якщо $AC = 12$ см і $\angle BAK = 60°$.

122. Із вершини B прямокутника $ABCD$ опущено перпендикуляр BK на діагональ AC, $K \in AC$. У якому відношенні точка K ділить AC, якщо $AB = 6$ см і $\angle ABK : \angle KBC = 1:2$?

123. У прямокутний $\triangle ABC$ вписано прямокутник $CKLM$ так, що $\angle C$ у них спільний, а точка L — середина AB. Доведіть, що $KM = \frac{1}{2} AB$.

124. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано прямокутник, який має з трикутником спільний прямий кут. Знайдіть катети трикутника, якщо сторони прямокутника дорівнюють 2 см і 7 см.

125. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано прямокутник, дві вершини якого лежать на гіпотенузі, а дві інші — на катетах (мал. 39). Знайдіть периметр прямокутника, якщо його сторони пропорційні числам 2 і 5, а довжина гіпотенузи дорівнює 18 см.



Мал. 39

126. Дано прямокутний рівнобедрений трикутник. Якщо з будь-якої точки гіпотенузи опустити перпендикуляри на катети, то утвориться прямокутник, півпериметр якого дорівнює катету. Доведіть.

127. Якщо діагоналі паралелограма ділять його кути навпіл, то цей паралелограм — ромб. Доведіть.

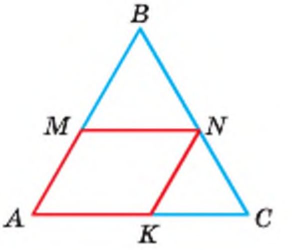
128. Доведіть, що чотирикутник, у якого всі сторони рівні, — ромб.

129. Установіть вид чотирикутника, вершини якого — середини сторін прямокутника.

130. Знайдіть периметр ромба, якщо сума трьох його кутів дорівнює $210°$, а висота 7 см.

131. Доведіть, що точка перетину діагоналей ромба рівновіддалена від усіх його сторін.

132. У рівносторонній $\triangle ABC$ вписано ромб (мал. 40), периметр якого дорівнює 16 см. Знайдіть периметр трикутника.



Мал. 40

133. Один із кутів ромба у 5 разів більший за інший, а периметр дорівнює 56 см. Знайдіть висоту ромба, проведену з вершини гострого кута.

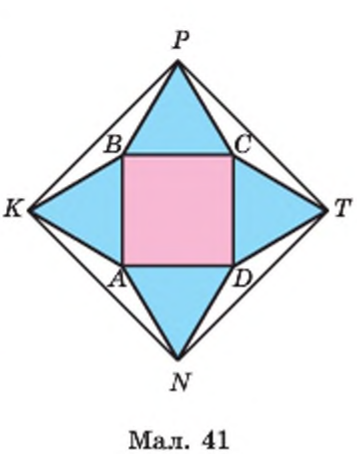
134. Із вершини тупого кута B ромба $ABCD$ до сторін CD і AD проведено перпендикуляри BM і BN ($M \in CD$, $N \in AD$). Доведіть, що: а) $BM = BN$; б) $\angle NBM = \angle BAD$.

135. Через кожну вершину квадрата проведено пряму, паралельну до відповідної діагоналі. Визначте вид утвореного чотирикутника та знайдіть його периметр, якщо діагональ квадрата a.

136. Доведіть, що паралелограм з рівними і перпендикулярними діагоналями — квадрат.

137. Діагоналі чотирикутника рівні і перпендикулярні. Чи кожний такий чотирикутник є квадратом?

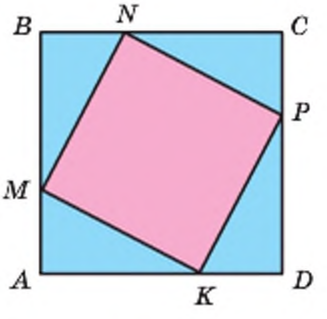
138. На сторонах квадрата, зовні від нього, побудовано рівносторонні трикутники, вершини яких послідовно сполучено. Доведіть, що утворений чотирикутник — квадрат (мал. 41).



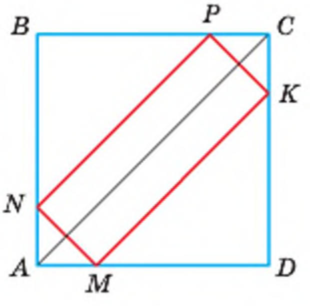
Мал. 41

139. Точки M, N, P, K ділять сторони квадрата $ABCD$ у відношенні 1 : 2 (мал. 42). Доведіть, що $MNPK$ — квадрат.

140. У квадрат $ABCD$ вписано прямокутник $MNPK$ (мал. 43). Доведіть, що довжина діагоналі квадрата дорівнює півпериметру прямокутника.



Мал. 42



Мал. 43

141. Прямокутник, ромб і квадрат такі, що периметр кожного дорівнює 20 см. Скільки існує таких: а) прямокутників; б) ромбів; в) квадратів?

142. Діагональ першого квадрата є стороною другого, діагональ другого — стороною третього квадрата. Знайдіть відношення периметрів першого і третього квадратів.

143. Дано прямокутник із нерівними сторонами. Доведіть, що бісектриси його кутів перетинаються в чотирьох точках, які є вершинами квадрата.

144. Установіть відповідність між множинами чотирикутників (1–4) і властивостями, які мають усі чотирикутники з цих множин (А–Д).

1 Множина всіх паралелограмів
2 Множина всіх прямокутників
3 Множина всіх ромбів
4 Множина всіх квадратів

А Суміжні сторони чотирикутника рівні між собою, а протилежні сторони не завжди рівні
Б Усі кути і всі сторони чотирикутника рівні між собою
В Діагоналі чотирикутника не завжди рівні, але є бісектрисами усіх внутрішніх кутів
Г Протилежні тупі кути чотирикутника рівні між собою, а діагоналі не завжди є перпендикулярними
Д Діагоналі чотирикутника рівні між собою, але не завжди перпендикулярні

Практичне завдання

145. *Складання серветок*. Розгляньте малюнок 44. Візьміть паперову серветку і складіть її за вказаним алгоритмом. Запропонуйте інший спосіб складання серветок.

Мал. 44

Задачі для повторення

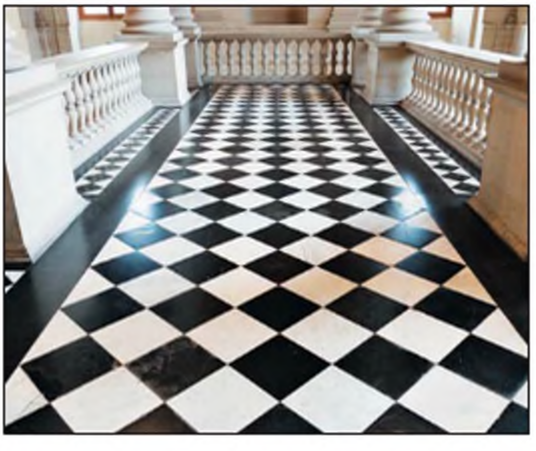
146. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ ділить сторону BC на відрізки 7 см і 3 см, починаючи від вершини B. Знайдіть периметр паралелограма.

147. Із вершин B і D паралелограма $ABCD$ на діагональ AC опущено перпендикуляри BM і DN ($M \in AC$, $N \in AC$). Доведіть, що $BMDN$ — паралелограм.

148. На площині дано два кути: $\angle AOB = 75°$ і $\angle BOC = 32°$. Знайдіть міру $\angle AOC$. Скільки розв'язків має задача?

149. Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 7 см. Якими натуральними числами може виражатися довжина третьої сторони?

Геометрія навколо нас



Квадратна плитка на підлогах і стінах будівель

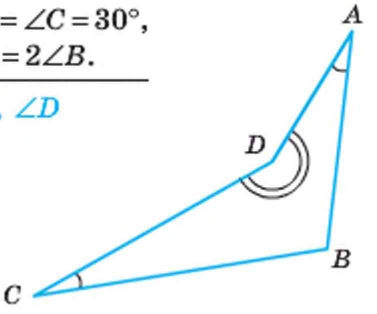
Задачі за готовими малюнками

А | **Б**

1

А. $\angle A = \angle C = 30^\circ$, $\angle D = 2\angle B$.

$\angle B$, $\angle D$



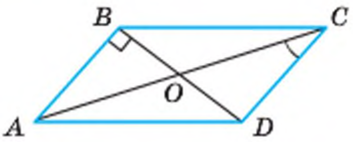
Б. ▱$ABCD$, $\angle A : \angle B = 1:2$.

$\angle B$, $\angle C$

2

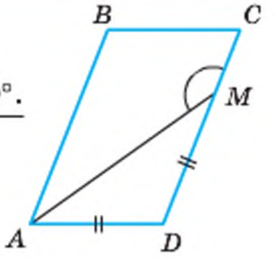
А. ▱$ABCD$, $AB \perp BD$, $\angle ACD = 30^\circ$.

Довести: $AO = BD$.



Б. ▱$ABCD$, $AD = DM$, $\angle AMC = 140^\circ$.

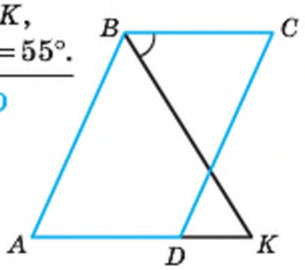
$\angle B$, $\angle C$



3

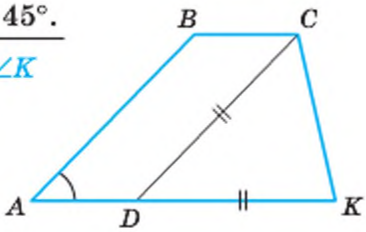
А. ▱$ABCD$, $AB = AK$, $\angle CBK = 55^\circ$.

$\angle A$, $\angle D$



Б. ▱$ABCD$, $CD = DK$, $\angle A = 45^\circ$.

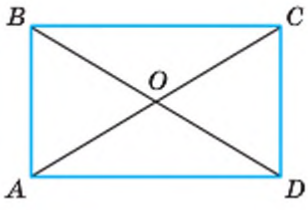
$\angle B$, $\angle K$



4

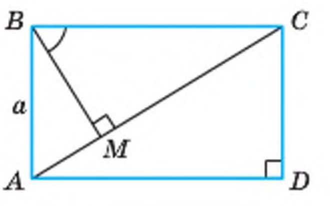
А. $ABCD$ — прямокутник, $AC = 2AB$.

$\angle COB$



Б. $ABCD$ — прямокутник, $\angle MBC = 60^\circ$, $AB = a$, $BM \perp AC$.

MC



Самостійна робота 1

Варіант 1

1°[*]**.** Знайдіть кути паралелограма, якщо сума двох із них дорівнює 260°.

2°. На діагоналі AC ромба $ABCD$ відклали рівні відрізки AM і CN. Доведіть, що чотирикутник $DMBN$ — ромб.

3•. У прямокутнику $ABCD$ бісектриса кута A перетинає сторону CD у точці M. Знайдіть периметр прямокутника, якщо $AB = 10$ см і $CM : MD = 1 : 4$.

Варіант 2

1°. Знайдіть кути ромба, якщо один із них на 30° більший за другий.

2°. M і N — середини сторін BC і AD ромба $ABCD$. Доведіть, що чотирикутник $AMCN$ — паралелограм.

3•. У прямокутнику $ABCD$ бісектриса кута A перетинає сторону BC у точці M. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 56 см і $BM : MC = 2 : 3$.

Варіант 3

1°. Знайдіть кути паралелограма, якщо різниця двох із них дорівнює 40°.

2°. На сторонах BC і AD прямокутника $ABCD$ відклали рівні відрізки BK і DL. Доведіть, що чотирикутник $AKCL$ — паралелограм.

3•. У паралелограмі $ABCD$ бісектриса кута A перетинає сторону CD у точці M. Знайдіть периметр паралелограма, якщо $AD = 6$ см і $CM : MD = 2 : 3$.

Варіант 4

1°. Знайдіть кути ромба, якщо один із них у 3 рази більший за другий.

2°. Бісектриси кутів A і C прямокутника $ABCD$ перетинають сторони BC і AD у точках M і N відповідно. Доведіть, що чотирикутник $AMCN$ — паралелограм.

3•. У паралелограмі $ABCD$ бісектриса кута A перетинає сторону BC у точці M. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 40 см і $BM : MC = 1 : 3$.

---

[*] Тут і далі:
° — початковий і середній рівні;
• — достатній рівень;
•• — високий рівень.

Тестові завдання 1

1	$ABCD$ — прямокутник. Яке з тверджень хибне?	а) $AB \perp BC$; б) $AC = BD$, в) $AC \perp BD$; г) $BC \parallel AD$.
2	$ABCD$ — довільний ромб. Який знак слід поставити замість *: $AC * BD$?	а) =; в) $\parallel$; б) $\perp$; г) не можна визначити.
3	Сума кутів чотирикутника дорівнює:	а) 120°; в) 180°; б) 90°; г) 360°.
4	Бісектриса гострого кута паралелограма ділить його більшу сторону навпіл. Знайдіть периметр паралелограма, якщо його менша сторона дорівнює 6 см.	а) 12 см; б) 18 см; в) 36 см; г) не можна визначити.
5	Сума кутів паралелограма, прилеглих до однієї сторони, дорівнює:	а) 90°; в) 360°; б) 180°; г) 120°.
6	Одна зі сторін паралелограма дорівнює 5 см, а периметр 16 см. Знайдіть довжину другої сторони.	а) 5 см; в) 11 см; б) 6 см; г) 3 см.
7	Знайдіть кути ромба, якщо вони пропорційні числам 2 і 7.	а) 20° і 70°; б) 20° і 140°; в) 40° і 140°; г) 80° і 280°.
8	Менша сторона прямокутника дорівнює 5 см. Знайдіть довжину діагоналі, якщо вона утворює з більшою стороною кут 30°.	а) 10 см; в) 2,5 см; б) 5 см; г) 20 см.
9	O — точка перетину діагоналей ромба $ABCD$. Визначте вид $\triangle AOB$.	а) гострокутний; б) прямокутний; в) тупокутний; г) рівносторонній.
10	Периметр квадрата 20 см. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей квадрата до його сторони.	а) 20 см; б) 10 см; в) 5 см; г) 2,5 см.

Типові задачі для контрольної роботи

1°. Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 4, 6 і 8.

2°. Периметр паралелограма дорівнює 120 см, а менша сторона 25 см. Знайдіть довжини інших його сторін.

3°. Знайдіть кути паралелограма, якщо його діагональ утворює зі сторонами кути 42° і 34°.

4°. Діагональ прямокутника дорівнює 10 см і утворює зі стороною кут 30°. Знайдіть довжину меншої сторони прямокутника.

5•. Знайдіть сторони прямокутника, якщо відстань від точки перетину діагоналей до однієї зі сторін на 2,5 см більша, ніж до другої, а периметр прямокутника дорівнює 34 см.

6•. Один із кутів ромба дорівнює 120°. Знайдіть меншу діагональ ромба, якщо його периметр дорівнює 24 см.

7•. Знайдіть периметр паралелограма $ABCD$, якщо його менша сторона дорівнює 5 см, а бісектриси кутів A і D перетинаються в точці K, яка лежить на стороні BC. Знайдіть міру $\angle AKD$.

8•. Доведіть, що чотирикутник, вершини якого є серединами сторін ромба, — прямокутник.

9••. На діагоналі BD квадрата $ABCD$ взято точки M і N такі, що $BM = DN$. Доведіть, що $AMCN$ — ромб. Знайдіть його периметр, якщо $MN = 4$ см і $\angle BAM = 15°$.

10••. У рівнобедрений прямокутний трикутник з гіпотенузою 15 см вписано прямокутник так, що дві його вершини лежать на гіпотенузі, а дві інші — на катетах. Знайдіть периметр прямокутника, якщо одна з його сторін утричі більша за другу.

Серед рівних розумом — за однакових інших умов — переважає той, хто знає геометрію.

Б. Паскаль

§ 4 Застосування властивостей паралелограма

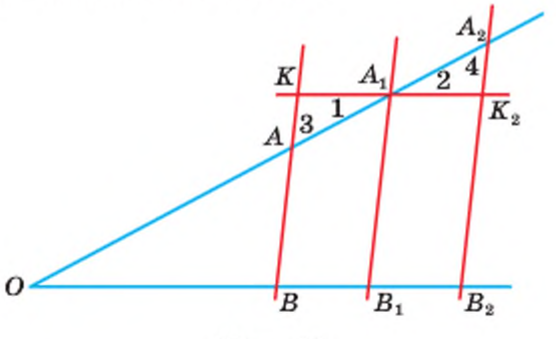
Властивості паралелограма можна застосовувати під час доведення теорем і розв'язування задач. Одна із теорем названа на честь видатного грецького філософа і геометра Фалеса Мілетського (кінець VII–початок VI ст. до н. е.). Його здобутки в геометрії були настільки великими для подальшого розвитку цієї науки, що його іменем назвали теорему, яку вивчають на всій планеті. Детальніше про життя Фалеса та його досягнення прочитайте у рубриці «З історії геометрії», а зараз — теорема.

ТЕОРЕМА 7

(Фале́са.) **Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки і на другій його стороні.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай паралельні прямі AB, A_1B_1 і A_2B_2 перетинають сторону OA кута AOB в точках A, A_1, A_2, а сторону OB — в точках B, B_1, B_2 (мал. 45). Доведемо: якщо $AA_1 = A_1A_2$, то $BB_1 = B_1B_2$.

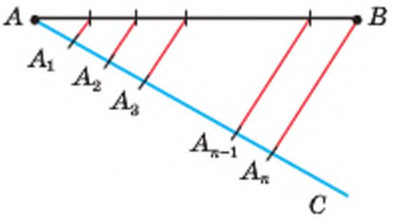


Мал. 45

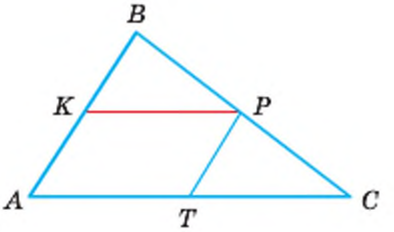
Проведемо через точку A_1 пряму KK_2, паралельну OB. Нехай ця пряма перетинає прямі AB і A_2B_2 в точках K і K_2. Тоді $\triangle AA_1K = \triangle A_2A_1K_2$ (бо $AA_1 = A_1A_2$, $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$). Отже, $KA_1 = A_1K_2$. Чотирикутники KA_1B_1B і $A_1K_2B_2B_1$ — паралелограми. Тому якщо $KA_1 = A_1K_2$, то $BB_1 = B_1B_2$. □

Задача. Поділіть даний відрізок AB на n рівних частин.

Розв'язання. Проведемо довільний промінь AC і відкладемо на ньому рівні відрізки AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ (мал. 46). Проведемо пряму A_nB, а через точки A_1, A_2, ..., A_{n-1} — прямі, паралельні A_nB. Вони поділять даний відрізок AB на n рівних частин. Це випливає з теореми Фалеса.



Мал. 46



Мал. 47

Середньою лінією трикутника називається відрізок, який сполучає середини двох сторін цього трикутника.

ТЕОРЕМА 8

Середня лінія трикутника паралельна одній із його сторін і дорівнює її половині.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай KP — середня лінія $\triangle ABC$ (мал. 47). Проведемо через точку P пряму, паралельну AC. За теоремою Фалеса вона перетинає відрізок AB в його середині K, тобто містить середню лінію KP. Отже, $KP \parallel AC$. Цим доведено першу частину теореми.

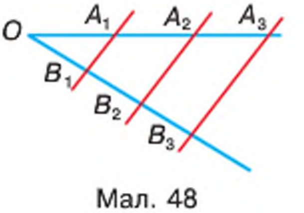
Проведемо ще середню лінію PT. Вона паралельна AB, тому чотирикутник $AKPT$ — паралелограм. За властивістю паралелограма $KP = AT$, а за теоремою Фалеса $AT = TC$. Отже, $KP = \frac{1}{2} AC$. □

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

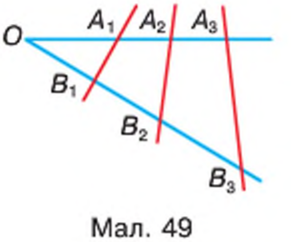
Чи правильне твердження, обернене до теореми Фалеса? Правильне, якщо розглядати відрізки на сторонах кута, починаючи від його вершини.

Якщо на одній стороні кута *O* відкласти рівні відрізки OA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., а на другій — також рівні між собою відрізки OB_1, B_1B_2, B_2B_3, ..., то прямі A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... паралельні одна одній (мал. 48). Спробуйте довести це твердження самостійно.

Коли рівні відрізки відкладати на одній стороні кута O і на другій, але не від вершини кута, то прямі A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... можуть бути не паралельними (мал. 49).



Мал. 48



Мал. 49

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте і доведіть теорему Фалеса.
2. Що називається середньою лінією трикутника?
3. Які властивості має середня лінія трикутника?
4. Доведіть теорему про середню лінію трикутника.

Виконаємо разом

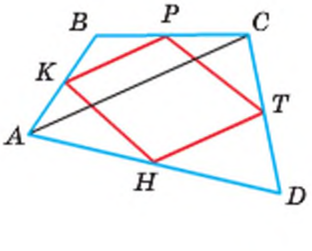
1 Доведіть, що середини сторін довільного чотирикутника є вершинами паралелограма.

- Нехай $ABCD$ — довільний чотирикутник, а точки K, P, T, H — середини його сторін (мал. 50).

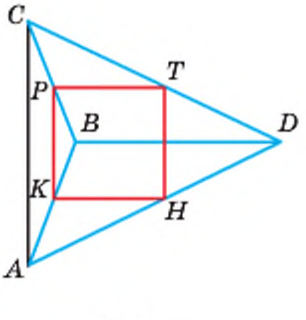
Проведемо діагональ AC даного чотирикутника і розглянемо трикутники ABC і ADC. KP — середня лінія $\triangle ABC$, тому $KP \parallel AC$ і $KP = 0{,}5AC$. TH — середня лінія $\triangle ADC$, тому $TH \parallel AC$ і $TH = 0{,}5AC$. За транзитивною властивістю відрізки KP і TH паралельні й рівні. Тому за ознакою паралелограма (теорема 3) чотирикутник $KPTH$ — паралелограм.

Примітка.

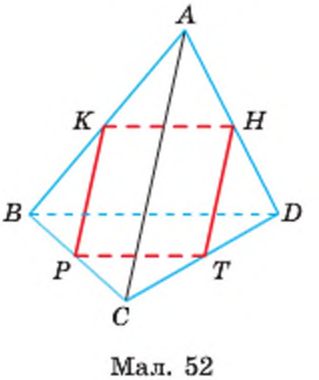
Наведене доведення правильне для неопуклого чотирикутника (мал. 51) і для неплоского чотирикутника. Наприклад, якщо ламана $ABCD$ складається з чотирьох ребер трикутної піраміди, а точки K, P, T, H — середини цих ребер, то чотирикутник $KPTH$ — також паралелограм (мал. 52).



Мал. 50



Мал. 51



Мал. 52

2 Периметр $\triangle ABC$ дорівнює P. Знайдіть периметр трикутника MNK, сторони якого є середніми лініями $\triangle ABC$.

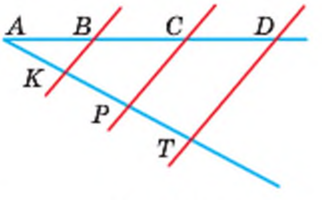
- Нехай сторони $\triangle ABC$ дорівнюють a, b і c. Тоді, за властивістю середньої лінії трикутника, сторони $\triangle MNK$ дорівнюють $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$, звідки

$$P_{\triangle MNK} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{P}{2}.$$

Задачі і вправи

Виконайте усно

150. У якому трикутнику дві середні лінії рівні?
151. У якому трикутнику всі три середні лінії рівні?
152. Сторони трикутника дорівнюють 6 м, 8 м і 10 м. Знайдіть довжини його середніх ліній.
153. K, P, T — середини сторін $\triangle ABC$, периметр якого дорівнює 40 см. Знайдіть периметр трикутника KPT.
154. Дві сторони трикутника відносяться як 2 : 3. Як відносяться його середні лінії, паралельні цим сторонам?
155. Три паралельні прямі перетинають одну сторону кута A в точках B, C і D, а другу — в точках K, P, T (мал. 53). При цьому $AB = BC = CD = 4$ см, $KP = 3$ см. Обчисліть відстані AK, AP, AT, KT.



Мал. 53

А

156. Поділіть даний відрізок на 3 рівні частини.
157. Поділіть даний відрізок на 4 рівні частини двома способами.
158. Накресліть гострокутний трикутник, одна зі сторін якого дорівнює 6 см. Поділіть кожну сторону трикутника на три рівні частини.
159. На одній зі сторін кута відклали рівні відрізки і через їхні кінці провели прямі, перпендикулярні до бісектриси кута. Доведіть, що відрізки, утворені на обох сторонах кута, рівні.
160. Сторону AB $\triangle ABC$, яка удвічі менша за BC, поділили на 4 рівні частини і через точки поділу провели прямі, паралельні AC. Порівняйте довжини відрізків, утворених на сторонах AB і BC.
161. Сторону AB $\triangle ABC$, яка на 6 см менша за BC, поділили на 3 рівні частини і через точки поділу провели прямі, паралельні AC. Порівняйте довжини відрізків, утворених на сторонах AB і BC.
162. Сторони трикутника дорівнюють 3 м, 4 м і 5 м. Знайдіть довжини його середніх ліній.
163. Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 10 см і 14 см. Знайдіть периметр трикутника, який відтинає від даного трикутника його середня лінія. Скільки розв'язків має задача?
164. Доведіть, що середні лінії трикутника розбивають його на чотири рівні трикутники.
165. Сторони трикутника a, b і c. Знайдіть периметр трикутника, вершинами якого є середини сторін даного трикутника.
166. K, P, T — середини сторін AB, BC і AC трикутника ABC. Доведіть, що чотирикутник $AKPT$ — паралелограм.

167. K, P, T, H — середини сторін чотирикутника, діагоналі якого дорівнюють 45 дм і 32 дм. Знайдіть периметр чотирикутника $KPTH$.

168. Діагоналі чотирикутника дорівнюють d і d_1. Знайдіть периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін даного чотирикутника.

169. Середини сторін ромба послідовно сполучили відрізками. Доведіть, що утворений чотирикутник — прямокутник.

170. Знайдіть сторони трикутника, якщо вони пропорційні числам 3, 5 і 7, а периметр трикутника, утвореного середніми лініями, дорівнює 30 см.

171. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть відстань від середини гіпотенузи до катетів трикутника.

172. Точка A лежить на прямій a, а точка B віддалена від прямої на 8 см. Знайдіть відстань від середини відрізка AB до прямої a.

Б

173. *Відкрита задача.* M, N, P і K — середини сторін AB, BC, CD і AD чотирикутника $ABCD$. Установіть вид чотирикутника $MNPK$, якщо $ABCD$ — ... .

174. Основу рівнобедреного трикутника, яка дорівнює 8 см, поділили на 4 рівні частини і через точки поділу провели прямі, паралельні бічній стороні. Відрізки, утворені на бічній стороні, на 1 см більші за відповідні відрізки основи. Знайдіть периметр трикутника.

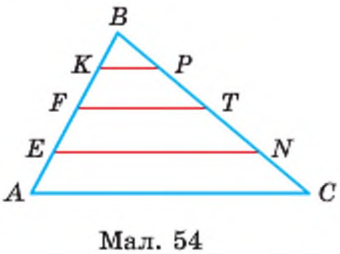
175. Діагональ ромба $ABCD$ поділили на 6 рівних частин і через точки поділу провели прямі, паралельні другій діагоналі. Знайдіть периметр ромба, якщо довжина одного з утворених на стороні AB відрізків дорівнює 2,5 см.

176. Якщо на прямій a відкласти кілька рівних відрізків і через них провести паралельні прямі до перетину з прямою b, то і на прямій b вони відсічуть рівні відрізки. Доведіть це твердження.

177. M — довільна точка відрізка AC. Доведіть, що середня лінія $\triangle ABC$, паралельна AC, ділить відрізок BM навпіл.

178. Доведіть, що пряма, яка містить середню лінію трикутника, рівновіддалена від усіх його вершин.

179. Сторону AB $\triangle ABC$ точками E, F, K поділили на 4 рівні частини і через них провели прямі, паралельні AC (мал. 54). Знайдіть AC і KP, якщо $FT = 5$ см.

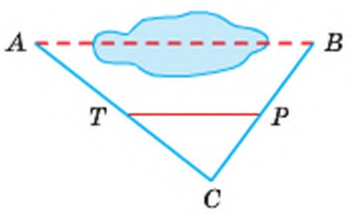


Мал. 54

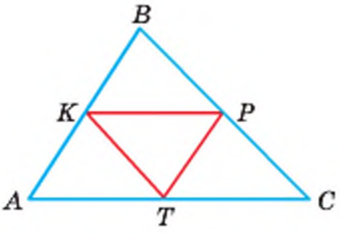
180. Відрізок AB точками M, N, K поділили на 4 рівні частини. Знайдіть відстані від точок M і N до прямої, яка проходить через точку A на відстані 12 см від точки B.

181. Точки A і B лежать по різні боки від прямої a і віддалені від неї на 6 см і 10 см. Знайдіть відстань від середини відрізка AB до прямої a.

182. Як, користуючись властивістю середньої лінії трикутника, визначити відстань від пункту A до пункту B, між якими не можна пройти (мал. 55)?



Мал. 55



Мал. 56

183. Сума діагоналей чотирикутника дорівнює a. Знайдіть периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін даного чотирикутника.

184. Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює c. Знайдіть, на які відрізки середня лінія трикутника ділить медіану, проведену до гіпотенузи.

185. Одна з вершин трикутника міститься за межами зошита. Проведіть медіани цього трикутника або їхні частини.

186. K, P, T, H — середини сторін чотирикутника $ABCD$. За якої умови чотирикутник $KPTH$ є: а) ромбом; б) прямокутником; в) квадратом?

187. Як розрізати довільний трикутник на дві частини, щоб із них можна було скласти паралелограм?

188. Якщо K, P, T — середини сторін $\triangle ABC$ (мал. 56), то $AK : AB = AT : AC = KT : BC$. Доведіть.

Практичне завдання

189. Виріжте з паперу три рівні різносторонні трикутники. Один із них розріжте по середній лінії і з двох утворених частин складіть паралелограм. Інші трикутники розріжте по інших середніх лініях і складіть із них паралелограми. Чи рівні всі утворені у такий спосіб паралелограми? Чи рівні їхні периметри?

190. Підготуйте презентацію на тему:
1. Фалес Мілетський — один із семи мудреців світу.
2. Математичні здобутки в школі Фалеса.

Задачі для повторення

191. На сторонах AB і CD прямокутника $ABCD$ відкладено рівні відрізки AN і CM. Доведіть, що $NBMD$ — паралелограм.

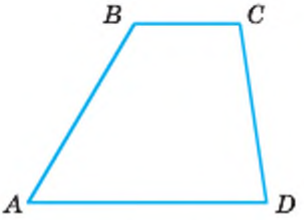
192. Доведіть, що бісектриси кутів ромба утворюють прямий або розгорнутий кут.

193. Доведіть, що периметр ромба, вписаного в рівносторонній трикутник (гострий кут ромба збігається з кутом трикутника), дорівнює $2a$, де a — довжина сторони трикутника.

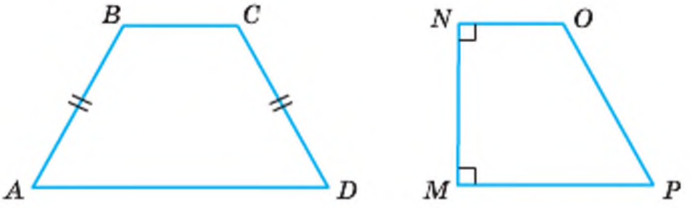
194. На скільки частин ділять площину два рівні квадрати, розміщені на ній?

§ 5 Трапеція

Чотирикутник, у якого тільки дві сторони паралельні, називають **трапецією** (мал. 57). Паралельні сторони трапеції — її *основи*, дві інші — *бічні сторони*. Трапецію з рівними бічними сторонами називають *рівнобічною*, або *рівнобедреною*. Якщо трапеція має прямий кут, її називають *прямокутною*. На малюнку 58 трапеція $ABCD$ — рівнобічна, а трапеція $MNOP$ — прямокутна.



Мал. 57



Мал. 58

У кожній трапеції сума двох кутів, що прилягають до бічної сторони, дорівнює 180°. Чому?

Середньою лінією трапеції називається відрізок, який сполучає середини її бічних сторін.

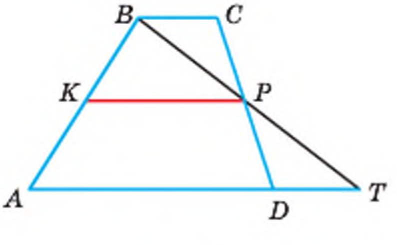
ТЕОРЕМА 9

Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай KP — середня лінія трапеції $ABCD$ (мал. 59), а прямі BP і AD перетинаються в точці T. Трикутники BCP і TDP рівні, бо $CP = PD$, $\angle BPC = \angle TPD$, $\angle BCP = \angle TDP$. Отже, $BC = DT$ і $BP = PT$. Середня лінія KP трапеції $ABCD$ є також середньою лінією трикутника ABT. Тому $KP \parallel AT$ і $KP = \frac{1}{2}AT$.

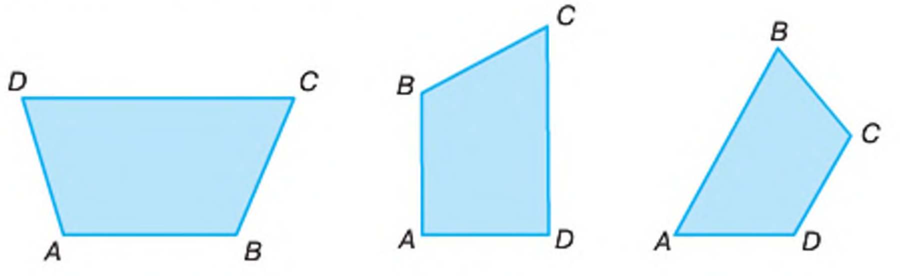
Отже, $KP \parallel AD$ і $KP = \frac{1}{2}(AD + BC)$. □



Мал. 59

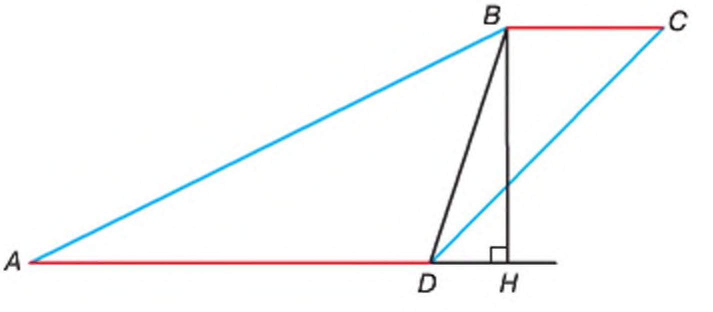
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Креслячи трапецію, найчастіше її більшу основу вважають нижньою основою. Це не обов'язково. Зображені на малюнку 60 чотирикутники — також трапеції. Їхні основи — *AB* і *CD*.



Мал. 60

Чи одне й те саме означають терміни *відстань між основами трапеції* і *відстань між прямими, на яких лежать основи трапеції*? Не завжди. Наприклад, на малюнку 61 зображено трапецію, відстань між основами якої дорівнює довжині діагоналі *BD* (відстані між найближчими точками відрізків *AD* і *BC*). А відстанню між прямими *AD* і *BC* є перпендикуляр *BH* і $BH < BD$.



Мал. 61

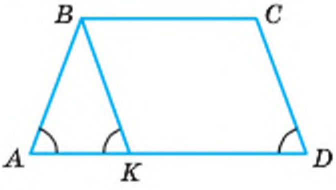
Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення трапеції.
2. Як називають сторони трапеції?
3. Якими бувають трапеції? Сформулюйте їх означення.
4. Чому дорівнює сума двох кутів трапеції, що прилягають до однієї бічної сторони?
5. Сформулюйте означення середньої лінії трапеції?
6. Сформулюйте і доведіть теорему про середню лінію трапеції.

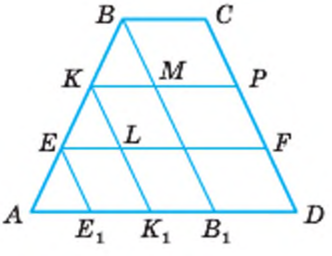
Виконаємо разом

1 **Кути при основі рівнобічної трапеції рівні.** Доведіть.

• Нехай $ABCD$ — трапеція, у якої $AB = CD$. Доведемо, що $\angle A = \angle D$ (мал. 62). Проведемо відрізок BK, паралельний CD. Оскільки $BC \parallel KD$ і $BK \parallel CD$, то $BCDK$ — паралелограм, $BK = CD = BA$. Отже, $\triangle ABK$ — рівнобедрений, тому $\angle A = \angle BKA$. $\angle BKA = \angle D$ — як відповідні кути, утворені січною KD із паралельними прямими BK і CD. Тому $\angle A = \angle D$, що й треба було довести.



Мал. 62



Мал. 63

2 Основи трапеції дорівнюють 4 дм і 10 дм. Знайдіть довжини відрізків, паралельних основам, якщо кінці цих відрізків кожну з бічних сторін трапеції ділять на три рівні частини.

• Нехай $ABCD$ — трапеція з основами $AD = 10$ дм і $BC = 4$ дм, а точки E, K, F, P такі, що $AE = EK = KB$, $EF \parallel AD$ і $KP \parallel AD$ (мал. 63). Проведемо відрізки EE_1, KK_1 і BB_1, паралельні CD. Утворені при цьому чотирикутники B_1BCD, K_1KMB_1, E_1ELK_1 — паралелограми.
$AB_1 = AD - BC = 6$ дм. За теоремою Фалеса $AE_1 = E_1K_1 = K_1B_1 = 6 : 3 = 2$.
Отже, $KP = KM + MP = 2 + 4 = 6$ (дм), $EF = EL + LF = 2 + 6 = 8$ (дм).

Спробуйте розв'язати цю задачу, використовуючи властивість середньої лінії трапеції.

Задачі і вправи

Виконайте усно

195. Чи існує трапеція, сторони якої дорівнюють 1 м, 2 м, 3 м і 7 м?

196. Один кут рівнобічної трапеції дорівнює 100°. Знайдіть інші її кути.

197. Сума трьох кутів трапеції дорівнює 280°. Знайдіть її четвертий кут.

198. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо сума трьох із них дорівнює 300°.

199. Два кути трапеції в сумі становлять 200°. Чи правильно, що вони — протилежні? Знайдіть суму двох інших кутів.

200. Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 20 см, а сума її основ — 12 см. Знайдіть довжину бічної сторони.

А

201. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо один із них на $10°$ більший за другий.

202. Знайдіть кути трапеції, якщо її можна розрізати на паралелограм і рівносторонній трикутник.

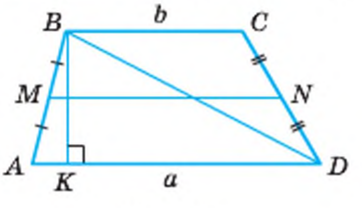
203. Сторони трапеції дорівнюють a, a, a і $2a$. Знайдіть її кути.

204. Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює бічній стороні, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть кути трапеції.

205. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо один із них на $30°$ більший за протилежний.

206. Установіть відповідність між елементами трапеції $ABCD$ (1–4) і відповідними відрізками (А–Д) (мал. 64).

1	Основа	А	BD
2	Бічна сторона	Б	MN
3	Середня лінія	В	CD
4	Діагональ	Г	BC
		Д	BK



Мал. 64

207. Доведіть, що:

а) **діагоналі рівнобічної трапеції рівні;**

б) коли діагоналі трапеції рівні, то вона рівнобічна.

208. Кути при основі рівнобічної трапеції рівні. Сформулюйте обернене твердження. Чи правильне воно?

209. Знайдіть кути трикутника, якщо пряма, паралельна його стороні, відтинає від нього рівнобічну трапецію з кутом $100°$.

210. Два кути трапеції — $100°$ і $50°$. Знайдіть інші її кути.

211. BC і AD — основи рівнобічної трапеції $ABCD$. BM і CK — перпендикуляри до прямої AD. Доведіть, що $\triangle ABM = \triangle DCK$.

212. У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює 17 см, бічна сторона — 10 см, а кут між ними — $60°$. Знайдіть її периметр.

213. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 8 см і 14 см. Знайдіть периметр трапеції, якщо її гострий кут дорівнює $60°$.

214. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 7 см і 4 см, а гострий кут — $45°$. Знайдіть довжину меншої бічної сторони.

215. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 5 см і 9 см, а тупий кут — $135°$. Знайдіть відстань між основами трапеції.

216. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута. Знайдіть сторони трапеції, якщо її основи пропорційні числам 2 і 5, а периметр дорівнює 33 см.

217. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута. Знайдіть більшу основу трапеції, якщо її менша основа дорівнює 6 см і менший кут — $60°$.

218. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою тупого кута, а основи дорівнюють 3 см і 7 см. Знайдіть периметр трапеції.

219. Основи трапеції дорівнюють 0,5 м і 0,7 м. Знайдіть довжину її середньої лінії.

220. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 10 см. Знайдіть відрізки, на які діагональ ділить її середню лінію.

221. Діагональ ділить середню лінію трапеції на відрізки, довжини яких дорівнюють 2 см і 5 см. Знайдіть основи трапеції.

222. Середня лінія трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) дорівнює 30 см. Знайдіть основи трапеції, якщо:
а) AD більша за BC на 6 см;
б) AD більша за BC у 5 разів;
в) $AD : BC = 3 : 2$.

223. Перпендикуляр, проведений із вершини тупого кута прямокутної трапеції на її основу, ділить її на відрізки завдовжки 20 см і 30 см. Знайдіть довжину середньої лінії трапеції.

224. Кінці відрізка, що не перетинає пряму, віддалені від цієї прямої на 6 см і 14 см. Знайдіть відстань від середини відрізка до цієї прямої.

225. Знайдіть довжини основ трапеції, якщо вони пропорційні числам 4 і 5, а середня лінія трапеції дорівнює 36 см.

226. Основи трапеції дорівнюють 4 см і 10 см. Знайдіть довжину відрізка середньої лінії, який лежить між діагоналями.

Б

227. Сторону AB $\triangle ABC$ поділено на 3 рівні частини і через точки поділу проведено прямі, паралельні AC. Знайдіть довжини відрізків, які лежать між сторонами AB і BC, якщо найменший із них дорівнює 5 см.

228. Бічну сторону трапеції поділили на 4 рівні частини і через точки поділу провели прямі, паралельні основам. Знайдіть довжини відрізків, які містяться між бічними сторонами трапеції, якщо її основи дорівнюють 4 см і 10 см.

229. Бісектриса тупого кута B трапеції $ABCD$ паралельна бічній стороні CD і перетинає сторону AD у точці M. Знайдіть периметр трапеції, якщо $MD = 3$ см, а периметр $\triangle ABM$ дорівнює 13 см.

230. Бісектриса тупого кута B рівнобічної трапеції $ABCD$ паралельна бічній стороні CD і перетинає сторону AD у точці M. Знайдіть сторони трапеції, якщо її периметр 32 см і $AM : MD = 2 : 1$.

231. У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) діагоналі перпендикулярні, $\angle CAD = 30°$. Знайдіть довжину діагоналі BD, якщо основи трапеції дорівнюють 5 см і 9 см.

232. Діагоналі трапеції перпендикулярні, й одна з них утворює з більшою основою кут 30°. Доведіть, що друга діагональ дорівнює середній лінії трапеції.

233. Сторони трапеції дорівнюють a, a, a і $2a$. Знайдіть її кути і кут між діагоналями. Чи існує точка, рівновіддалена від усіх вершин трапеції?

234. Кінці діаметра кола віддалені від дотичної до цього кола на 2 см і 7 см. Знайдіть радіус кола.

235. Діагоналі трапеції перетинають її середню лінію KP у точках E і F. Доведіть, що $KE = FP$.

236. Діагоналі трапеції ділять її середню лінію на три рівні частини. Як відносяться основи трапеції?

237. Доведіть, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний основам трапеції і дорівнює їх піврізниці.

238. Доведіть, що бісектриси кутів A і B трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) перетинаються під прямим кутом і точка їх перетину лежить на середній лінії трапеції.

239. Основи трапеції a і $2a$. Дві прямі, паралельні її основам, ділять одну з бічних сторін на три рівні відрізки. Знайдіть довжини відрізків цих прямих, що лежать усередині трапеції.

240. Бічна сторона рівнобічної трапеції $ABCD$ дорівнює 5 см, а основа BC — 4 см. Яку з двох цих сторін трапеції перетинає бісектриса її кута A?

241. У трапеції з основами AD і BC кути ABD і ACD прямі. Доведіть, що вона рівнобічна.

242. Діагоналі трапеції перпендикулярні. Доведіть, що середня лінія трапеції дорівнює відрізку, який з'єднує середини її основ.

243. Чи правильно, що довільну трапецію можна розрізати на два чотирикутники, із яких можна скласти паралелограм?

Практичне завдання

244. Виріжте з паперу дві рівні трапеції і складіть із них паралелограм. Скільки різних паралелограмів можна скласти з них? Чи рівні периметри таких паралелограмів?

Задачі для повторення

245. Знайдіть периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін чотирикутника із сумою діагоналей d.

246. Основа рівнобедреного трикутника на 2 см менша за бічну сторону. Знайдіть сторони трикутника, якщо периметр трикутника, утвореного середніми лініями, дорівнює 11 см.

247. Знайдіть кути паралелограма, якщо сума двох із них дорівнює 136°.

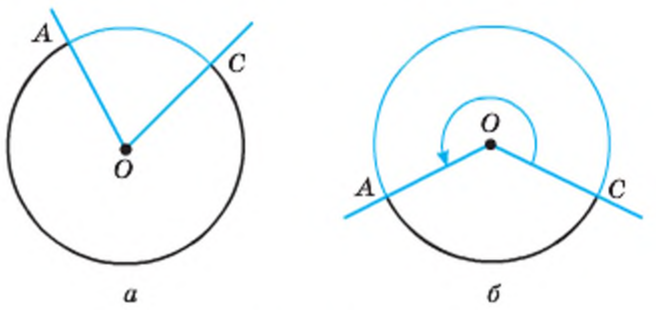
248. Бісектриси кутів A і B прямокутника $ABCD$ перетинаються на стороні DC. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 24 см.

249. З точки A до кола з центром O проведено дотичні AB і AC. Доведіть, що точка O лежить на бісектрисі $\angle BAC$.

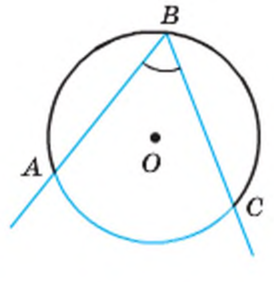
§ 6 Центральні і вписані кути

Далі розглядатимемо властивості чотирикутників, вписаних у коло і описаних навколо кола. Для цього введемо поняття центрального кута і вписаного кута.

Кут, вершина якого збігається з центром кола, називається **центральним кутом.** Сторони центрального кута ділять коло на дві *дуги*. Одна з них лежить у внутрішній області центрального кута. Говорять, що вона *відповідає* даному куту. Наприклад, виділена на малюнку 65, *а* дуга AC відповідає центральному куту AOC, і навпаки: центральний кут AOC відповідає дузі AC. Центральний кут може бути і більшим від розгорнутого (мал. 65, *б*).



Мал. 65



Мал. 66

Кожна дуга кола має певну *кутову міру* — міру відповідного їй центрального кута. Кажуть також, **що центральний кут вимірюється дугою, яка йому відповідає.** Наприклад, якщо $\angle AOC = 60°$, то і кутова міра дуги AC дорівнює $60°$. Пишуть: $\smile AC = 60°$. Кутова міра всього кола дорівнює $360°$.

Кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають коло, називається **вписаним кутом.** Якщо дуга AC лежить у внутрішній області вписаного кута ABC, то говорять, що даний вписаний *кут спирається на дугу AC* (мал. 66).

ТЕОРЕМА 10

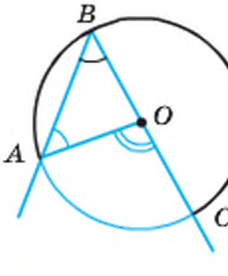
Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.

ДОВЕДЕННЯ.

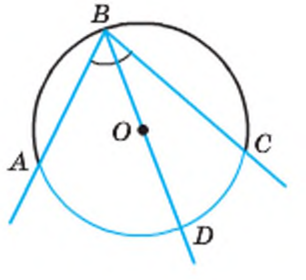
Розглянемо спочатку випадок, коли одна сторона вписаного кута ABC, наприклад BC, проходить через центр кола O (мал. 67). Сполучивши точки A і O відрізком, одержимо трикутник AOB, у якому

$OA = OB$, отже, $\angle A = \angle B$. За властивістю зовнішнього кута трикутника $\angle AOC = \angle A + \angle B = 2\angle B$, звідки

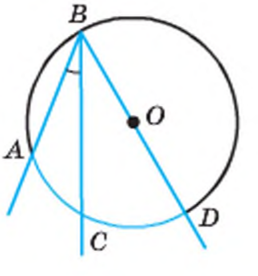
$$\angle B = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$$



Мал. 67



Мал. 68



Мал. 69

Якщо жодна із сторін вписаного кута ABC не проходить через центр кола (мал. 68, 69), то, провівши діаметр BD, матимемо:

$$\angle ABD = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} \text{ і } \angle DBC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC}$$

Якщо центр кола лежить у внутрішній області $\angle ABC$ (мал. 68), то

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}.$$

Якщо центр кола лежить поза кутом ABC (мал. 69), то

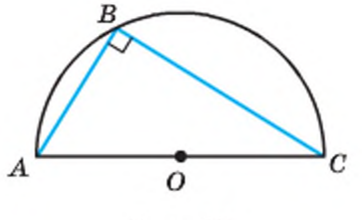
$$\angle ABC = \angle ABD - \angle DBC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{DC}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}.$$

Розглянуто всі можливі випадки.

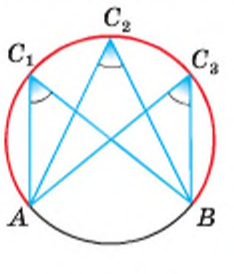
Отже, кожний вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається. □

Наслідки

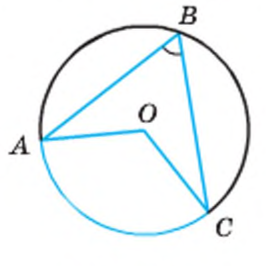
1. **Вписаний кут, що спирається на діаметр, — прямий** (мал. 70).
2. **Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, — рівні** (мал. 71).



Мал. 70



Мал. 71



Мал. 72

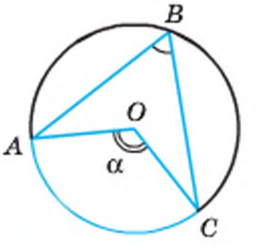
Центральний кут AOC називається *відповідним* вписаному куту ABC, якщо він спирається на дугу AC, яка не містить точку B (мал. 72).

ТЕОРЕМА 11

Вписаний кут дорівнює половині відповідного центрального кута.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай $\angle AOC = \alpha$ (мал. 73), тоді $\overset{\smile}{AC} = \alpha$. Вписаний $\angle ABC$ спирається на дугу AC. Тому $\angle ABC = \frac{\alpha}{2}$. Отже, $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$. □



Мал. 73

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

ТЕОРЕМА 12

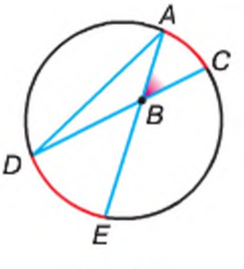
Кут, вершина якого лежить усередині кола, вимірюється півсумою двох дуг, на які спираються даний і вертикальний до нього кути.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай прямі AE і CD перетинаються в точці B, що міститься всередині кола (мал. 74). Доведемо, що кут ABC вимірюється півсумою дуг AC і DE.

Проведемо відрізок AD. $\angle ABC = \angle A + \angle D$ як зовнішній кут $\triangle ABD$. Кути A і D вписані, тому

$$\angle ABC = \angle A + \angle D = \frac{1}{2}\overset{\smile}{DE} + \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC} = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{DE} + \overset{\smile}{AC}).$$ □



Мал. 74

ТЕОРЕМА 13

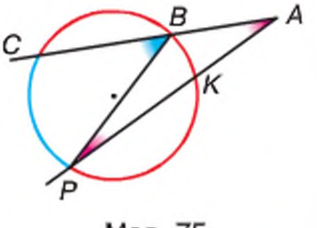
Кут, сторони якого перетинають коло, а вершина лежить поза колом, вимірюється піврізницею дуг цього кола, що лежать усередині кута.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай сторони довільного кута A перетинають коло в точках, позначених на малюнку 75. За властивістю зовнішнього кута трикутника $\angle A = \angle CBP - \angle P$.

Кути CBP і P вписані, вони спираються відповідно на дуги CP і BK і вимірюються їх половинами. Тому

$$\angle A = \frac{1}{2}\overset{\smile}{CP} - \frac{1}{2}\overset{\smile}{BK} = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{CP} - \overset{\smile}{BK}).$$ □



Мал. 75

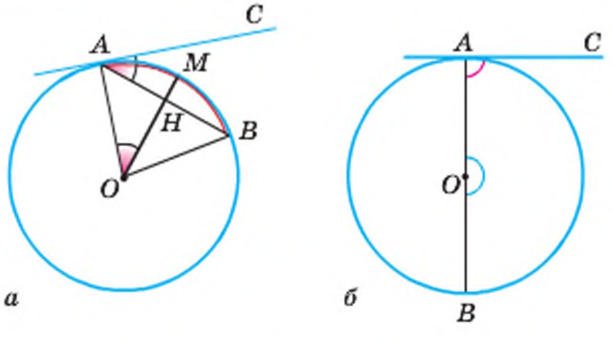
Запитання і завдання для самоконтролю

1. Який кут називають центральним? Який вписаним?
2. Що означає вислів «кут спирається на дугу»?
3. Як знайти міру центрального кута?
4. Сформулюйте і доведіть теорему про вписані кути.
5. Яку міру має вписаний кут, що спирається на діаметр?

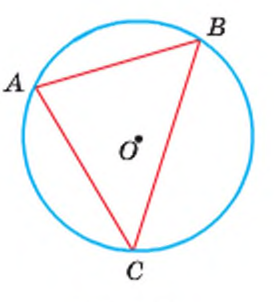
Виконаємо разом

1 Доведіть, що **кут між хордою і дотичною, проведеною через кінець хорди, вимірюється половиною дуги, що лежить між ними.**

- Нехай у колі з центром O проведено хорду AB, а через точку A — дотичну AC (мал. 76, *а*). Тоді дуга AMB, що лежить усередині кута CAB, є дугою між хордою AB і дотичною AC. Якщо M — середина дуги AB і промінь OM перетинає дану хорду в точці H, то $\angle OHA = 90°$. Адже OH — бісектриса кута при вершині рівнобедреного $\triangle OAB$, а вона, як відомо, є водночас і його висотою.
Оскільки $\angle OHA = 90°$, то $\angle AOH = 90° - \angle OAH$. І $\angle CAB = 90° - \angle OAH$. Отже, кут CAB дорівнює $\angle AOM$, який вимірюється половиною дуги AMB. Тому й кут CAB вимірюється половиною цієї дуги.
Якщо хорда AB — діаметр кола (мал. 76, *б*), доведене твердження також правильне, бо в цьому випадку кут CAB прямий, а півколо, що лежить усередині цього кута, має 180°.



Мал. 76



Мал. 77

2 Точки A, B і C ділять коло на три дуги, одна з яких дорівнює 100°, а друга на 40° більша за третю. Знайдіть кути $\triangle ABC$.

- Нехай кутова міра дуги AC (мал. 77) дорівнює x. Тоді кутова міра дуги BC дорівнює $x + 40°$. Знаючи, що дуга AB містить 100°, отримаємо рівняння $x + x + 40° = 260°$, звідки $x = 110°$. Отже, кутова міра дуги AC дорівнює 110°, а дуги BC — 150°. Тоді за властивістю вписаних кутів отримаємо: $\angle A = 75°$, $\angle B = 55°$, $\angle C = 50°$.

Задачі і вправи

Виконайте усно

250. Чи може центральний кут бути тупим? А розгорнутим?

251. Вписаний кут прямий. Яким є відповідний йому центральний кут?

252. Які значення мають бути у порожніх клітинах таблиці?

Центральний кут	60°	100°				$n°$
Вписаний кут			35°	120°	$m°$	

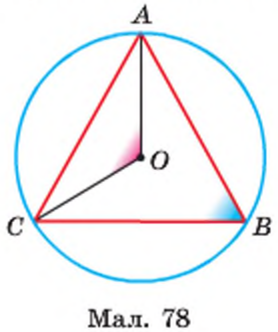
253. Який центральний кут більший від відповідного йому вписаного кута на 70°?

254. Чи може вписаний кут бути більшим від відповідного йому центрального кута?

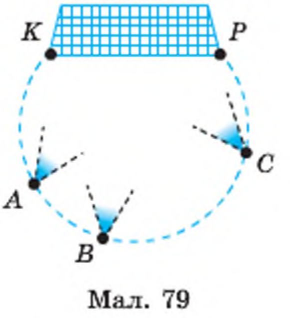
255. Чому дорівнює центральний кут, який спирається на дугу, що становить $\frac{1}{6}$ кола?

256. Коло з центром O точками A, B, C поділено на три рівні дуги. Знайдіть міри кутів ABC і AOC (мал. 78).

257. М'ячі A, B, C і штанги воріт K та P розміщені на одному колі (мал. 79). Який із кутів більший: KAP, KBP чи KCP?

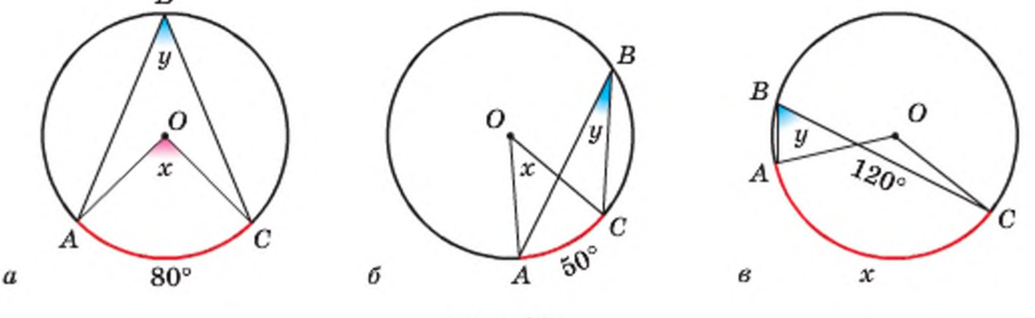


Мал. 78

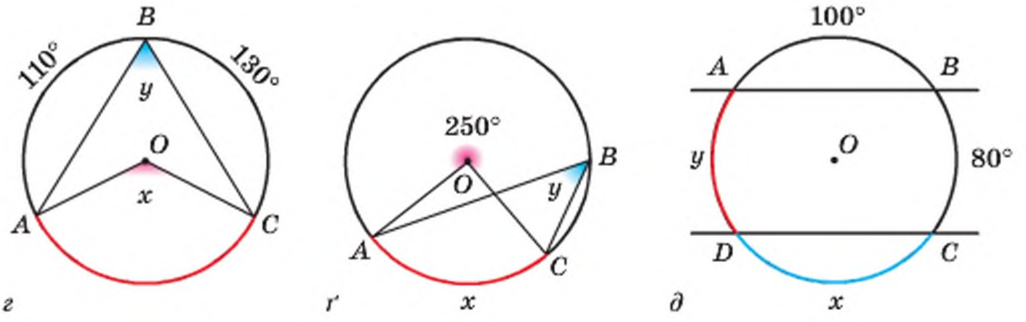


Мал. 79

258. Користуючись малюнками 80, *а*, *б*, *в*, *г*, *ґ* і *д*, знайдіть невідомі елементи x і y.

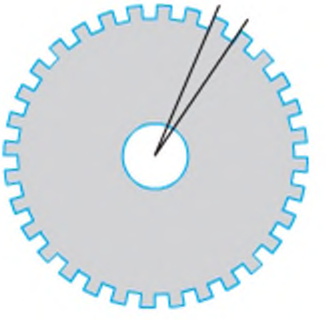


Мал. 80



Мал. 80

А



Мал. 81

259. Позначте на колі точки A і B та побудуйте центральний кут, що відповідає дузі AB.

260. Знайдіть кутову міру: а) півкола; б) чверті кола.

261. Як співвідносяться кутові міри дуг, на які коло розбиває його центральний кут 60°?

262. Шестерня (мал. 81) має 32 зубці. Знайдіть міру центрального кута, який відповідає одному зубцеві й западині.

263. Знайдіть міру вписаного кута, який спирається на третю частину кола.

264. Міра вписаного кута 70°. Знайдіть кутову міру дуги, на яку він спирається.

265. У колі проведено дві хорди AB і AC. Знайдіть міру кута BAC, якщо кутові міри дуг AC і AB дорівнюють $32°15'$ і $78°55'$.

266. Кут між двома радіусами кола дорівнює $105°34'$. Знайдіть кут між дотичними, проведеними через кінці цих радіусів.

267. Дві точки ділять коло у відношенні 11 : 13. Знайдіть кут між дотичними, що проходять через ці точки.

268. Коло точками A, B, C, ..., K поділено на 10 рівних дуг. Знайдіть міри кутів: AKB, AKC, KAB, KAC.

269. Навколо трикутника ABC, у якого $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$, описано коло. Знайдіть кутові міри дуг AB, BC і CA.

270. Точки A, B і C ділять коло на три дуги, кутові міри яких пропорційні числам 6, 7 і 11. Знайдіть кути трикутника ABC.

271. Один із кутів прямокутного трикутника дорівнює 40°. Знайдіть кутові міри дуг, на які вершини трикутника розбивають описане коло.

272. Хорда ділить коло на дві дуги, одна з яких у 5 разів більша за другу. Знайдіть міри вписаних кутів, які опираються на цю хорду.

273. Хорда ділить коло на дві дуги, одна з яких на 46° менша за другу. Знайдіть міри вписаних і центральних кутів, які опираються на цю хорду.

Б

274. Доведіть, що **рівні хорди стягують рівні дуги.**

275. На стороні AC $\triangle ABC$, як на діаметрі, побудовано коло, яке перетинає сторони AB і BC у точках M і N відповідно. Доведіть, що AN і CM — висоти $\triangle ABC$.

276. Коло, вписане в $\triangle ABC$, дотикається до нього у точках M, N, K. Знайдіть кути $\triangle MNK$, якщо $\angle A = 56°$, $\angle B = 48°$.

277. Кути $\triangle ABC$ пропорційні числам 2, 3 і 5. Яким числам пропорційні кути $\triangle EFK$, якщо E, F і K є точками, в яких коло, вписане в $\triangle ABC$, дотикається до його сторін?

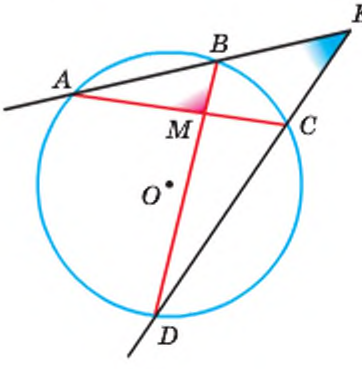
278. ***Відкрита задача.*** Дві рівні хорди одного кола AB і CD не мають спільних точок. Доведіть, що $ABCD$ — ... .

279. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 40°. На бічній стороні, як на діаметрі, побудовано півколо, яке ділиться сторонами трикутника на 3 частини. Знайдіть кутові міри утворених дуг.

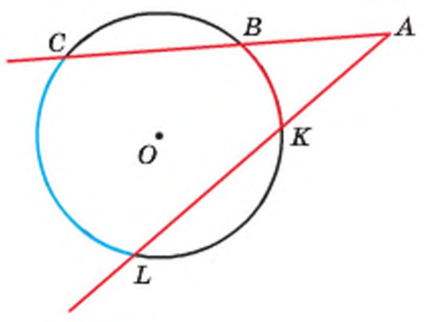
280. Хорди AB і CD перетинаються в точці M, $\angle AMC = 80°$. Знайдіть кутові міри дуг AC і BD, якщо дуга BD на 20° більша за дугу AC.

281. На колі послідовно взято точки A, B, C, D, які ділять коло на частини, пропорційні числам 6, 5, 12 і 13. Знайдіть $\angle AMB$ і $\angle AKD$, де M — точка перетину хорд AC і BD, а K — точка перетину прямих AB і CD (мал. 82).

282. Сторони $\angle A = 40°$ перетинають коло в точках B, C, K і L (мал. 83). Знайдіть кутові міри дуг CL і BK, якщо $\smile CB = \smile LK = 100°$.



Мал. 82



Мал. 83

283. Через кінець хорди, яка ділить коло у відношенні 3 : 5, проведено дотичну. Знайдіть гострий кут між даною хордою і дотичною.

284. Якщо дві рівні хорди перетинаються і одна з них точкою перетину ділиться на відрізки m і n, то на такі самі відрізки ділиться і друга хорда. Доведіть.

Практичне завдання

285. Із цупкого різнокольорового паперу виріжте два круга одного радіуса. Розріжте кожен із них по радіусу (мал. 84, *а*). Вкладіть один круг в інший через прорізи, щоб утворився центральний кут, як на малюнку 84, *б*. Покажіть за допомогою виготовленої моделі центральні кути: а) 180°; б) 120°; в) 45°; г) 30°.

а *б*

Мал. 84

Задачі для повторення

286. Обчисліть кути рівнобічної трапеції, якщо один із них на 42° більший за інший.

287. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 6 см і 15 см. Знайдіть периметр трапеції, якщо її гострий кут дорівнює 60°.

288. Один із відрізків, на які діагональ ділить середню лінію трапеції, утричі більший за другий. Знайдіть відношення основ.

289. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 23,6 см, а висота — 11,8 см. Знайдіть тупий кут між бісектрисами кутів при основі.

290. Точка дотику кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, ділить бічну сторону на відрізки 3 см і 7 см. Знайдіть периметр трикутника. Скільки розв'язків має задача?

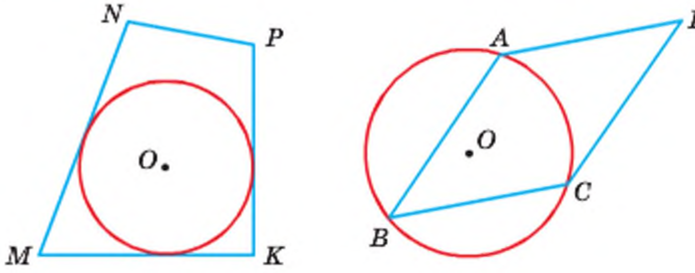
§ 7 Вписані й описані чотирикутники

Ви вже знаєте, які трикутники називаються вписаними в коло і які — описаними навколо нього (пригадайте!). Подібно визначаються вписані й описані чотирикутники.

Якщо всі вершини чотирикутника лежать на колі, його називають **вписаним** у коло, а коло — **описаним** навколо чотирикутника. Якщо коло дотикається до всіх сторін чотирикутника, такий чотирикутник називають **описаним** навколо кола, а коло — **вписаним** у чотирикутник.

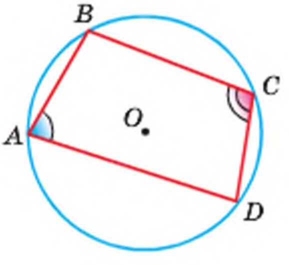
Як і в трикутнику, центр кола, вписаного в чотирикутник, знаходиться в точці перетину бісектрис його кутів, а центр кола, описаного навколо чотирикутника, — у точці перетину серединних перпендикулярів, проведених до його сторін.

Не в кожний чотирикутник можна вписати коло і не навколо кожного чотирикутника — описати коло (мал. 85, *а*, *б*).



а *б*

Мал. 85



Мал. 86

Розглянемо найважливіші властивості чотирикутників, описаних навколо кола і вписаних у коло.

ТЕОРЕМА 14

Сума двох протилежних кутів чотирикутника, вписаного в коло, дорівнює 180°.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай $ABCD$ — вписаний у коло чотирикутник (мал. 86). Його протилежні кути A і C вписані; перший вимірюється половиною дуги BCD, другий — половиною дуги BAD. Сума кутів A і C вимірюється півсумою цих дуг, тобто півколом. Півколу відповідає 180°. Отже, $\angle A + \angle C = 180°$.

Аналогічно можна показати, що $\angle B + \angle D = 180°$. □

Для сформульованої теореми правильна також обернена теорема.

ТЕОРЕМА 15

Якщо сума двох протилежних кутів чотирикутника дорівнює 180°, то цей чотирикутник можна вписати в коло.

Доведення цієї теореми дивіться у рубриці «Для допитливих».

Наслідки
1. **Навколо кожного прямокутника можна описати коло.**
2. **Навколо кожної рівнобічної трапеції можна описати коло.**

Сформулюємо теореми 14 і 15 у вигляді однієї теореми:

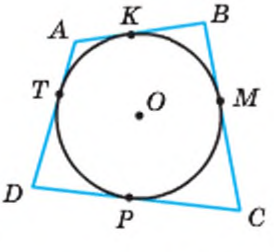
Чотирикутник вписаний в коло тоді й тільки тоді, коли сума двох його протилежних кутів дорівнює 180°.

ТЕОРЕМА 16

Якщо чотирикутник описаний навколо кола, то сума двох його протилежних сторін дорівнює сумі двох інших його сторін.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай чотирикутник $ABCD$ описаний навколо кола. Доведемо, що $AB + CD = BC + AD$ (мал. 87). Позначимо точки дотику сторін чотирикутника до вписаного кола буквами K, M, P, T. Оскільки відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, рівні, то $AK = AT$, $BK = BM$, $CP = CM$, $DP = DT$. Додавши почленно всі ці рівності, дістаємо: $AK + BK + CP + DP = BM + CM + DT + AT$, або $AB + CD = BC + AD$. □



Мал. 87

Має місце й обернена теорема.

ТЕОРЕМА 17

Якщо сума двох протилежних сторін опуклого чотирикутника дорівнює сумі двох інших його сторін, то такий чотирикутник можна описати навколо кола.

Цю теорему можна довести методом від супротивного. Спробуйте зробити це самостійно.

Теореми 16 і 17 сформулюємо у вигляді однієї теореми:

Опуклий чотирикутник описаний навколо кола тоді й тільки тоді, коли сума двох його протилежних сторін дорівнює сумі двох інших сторін.

Зауваження. Чотирикутник, вписаний у коло, іноді називають вписаним, а чотирикутник, описаний навколо кола, — описаним чотирикутником.

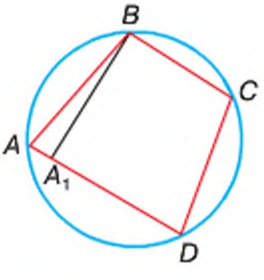
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Доведемо твердження, сформульоване в теоремі 15.

Якщо сума двох протилежних кутів чотирикутника дорівнює 180°, то цей чотирикутник можна вписати в коло.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай дано чотирикутник $ABCD$, у якому $\angle A + \angle C = 180°$ (мал. 88). Покажемо, що навколо нього можна описати коло. Через точки B, C і D можна описати єдине коло. Воно обов'язково пройде і через точку A. Бо коли б те коло перетинало пряму AD не в точці A, а в іншій точці A_1, то був би вписаний чотирикутник A_1BCD і ми б мали: $\angle BA_1D + \angle C = 180°$. За умовою $\angle BAD + \angle C = 180°$. Із цих двох рівностей випливає, що $\angle BAD = \angle BA_1D$, тобто зовнішній кут трикутника AA_1B дорівнює його внутрішньому куту. Цього не може бути. Отже, зроблене припущення неправильне. За умови $\angle A + \angle C = 180°$ коло, яке проходить через точки B, C, D, обов'язково проходить і через точку A. □



Мал. 88

Запитання і завдання для самоконтролю

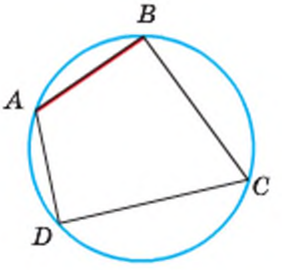
1. Який чотирикутник називається вписаним у коло?
2. Який чотирикутник називається описаним навколо кола?
3. Чи в будь-який чотирикутник можна вписати коло?
4. Чи навколо будь-якого чотирикутника можна описати коло?
5. Поясніть, яку властивість мають кути чотирикутника, вписаного в коло.
6. Поясніть, яку властивість мають сторони чотирикутника, описаного навколо кола.
7. Чи правильно, що коло, описане навколо чотирикутника $ABCD$, є також описаним навколо трикутника ABC?
8. Чи правильно, що коло, вписане в чотирикутник $ABCD$, є також вписаним у трикутник ABC?

Виконаємо разом

1 У коло вписано чотирикутник, два послідовні кути якого дорівнюють 100° і 90°. Знайдіть міри двох інших його кутів.

- Нехай у вписаному чотирикутнику $ABCD$ $\angle A = 100°$, $\angle B = 90°$ (мал. 89). Тоді

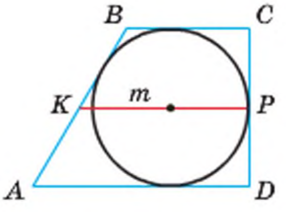
$$\angle C = 180° - \angle A = 80°,$$
$$\angle D = 180° - \angle B = 90°.$$



Мал. 89

2 Середня лінія трапеції, описаної навколо кола, дорівнює m. Знайдіть периметр трапеції.

- Сума основ трапеції вдвічі більша від її середньої лінії, тому дорівнює $2m$. В описаному чотирикутнику сума двох протилежних сторін дорівнює сумі двох інших його сторін (мал. 90). Тому сума бічних сторін трапеції також дорівнює $2m$. А периметр трапеції дорівнює $4m$.



Мал. 90

Задачі і вправи

Виконайте усно

291. Чотирикутник вписано в коло. Сформулюйте цей вислів іншими словами.

292. Коло вписано в чотирикутник. Скажіть це іншими словами.

293. Чи правильно, що кожний описаний чотирикутник опуклий?

294. Чи правильно, що кожний опуклий чотирикутник є описаним?

295. Наведіть приклад чотирикутника, який є водночас вписаним і описаним.

296. Наведіть приклад чотирикутника, який є вписаним, але не є описаним. А описаним, але не вписаним?

297. Знайдіть периметр квадрата, описаного навколо кола радіуса r.

298. Знайдіть діагональ квадрата, вписаного в коло радіуса r.

299. Доведіть, що навколо будь-якого прямокутника можна описати коло.

А

300. Три послідовні сторони описаного чотирикутника дорівнюють 2 см, 3 см і 4 см. Знайдіть четверту сторону.

301. Два послідовні кути вписаного чотирикутника дорівнюють 80° і 120°. Знайдіть два інші його кути.

302. Три послідовні сторони описаного чотирикутника пропорційні числам 3, 4 і 6. Знайдіть їх, якщо довжина четвертої сторони дорівнює 20 см.

303. Три послідовні сторони описаного чотирикутника пропорційні числам 3, 6 і 7, а його периметр 40 м. Знайдіть довжину четвертої сторони.

304. Чи можна описати коло навколо чотирикутника, кути якого, взяті послідовно, пропорційні числам: а) 2, 5, 7 і 4; б) 3, 4, 7 і 5?

305. Доведіть, що точка перетину діагоналей квадрата є центром кола: а) вписаного в квадрат; б) описаного навколо квадрата.

306. Доведіть, що центр кола, описаного навколо прямокутника, знаходиться в точці перетину його діагоналей.

307. Менша сторона прямокутника дорівнює 12 см, а кут між діагоналями дорівнює 60°. Знайдіть радіус кола, описаного навколо прямокутника.

308. Менша сторона прямокутника дорівнює 5 см і утворює з діагоналлю кут 60°. Знайдіть радіус описаного кола.

309. Діагональ трапеції перпендикулярна до бічної сторони, що дорівнює 6 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції, якщо її гострий кут дорівнює 60°.

310. Діагональ трапеції перпендикулярна до бічної сторони. Доведіть, що центр кола, описаного навколо трапеції, лежить на середині більшої сторони.

311. Кути трапеції пропорційні числам 1 і 2, а діагональ є бісектрисою гострого кута. Знайдіть радіус описаного кола, якщо бічна сторона трапеції дорівнює 12 см.

312. Периметр квадрата дорівнює 20 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в квадрат.

313. Різниця основ прямокутної трапеції дорівнює 3 см, а гострий кут 45°. Знайдіть радіус вписаного кола.

314. Периметр трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 8 м. Знайдіть її середню лінію.

315. Знайдіть периметр прямокутної трапеції, описаної навколо кола радіуса r, якщо один із її кутів 30°.

316. Основи рівнобічної трапеції пропорційні числам 2 і 7, а бічна сторона дорівнює 18 см. Знайдіть основи трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

317. У трапецію, середня лінія якої дорівнює 20 см, вписано коло. Знайдіть периметр трапеції.

318. У трапецію $ABCD$ ($AD \parallel BC$) вписано коло з центром O. Доведіть, що $\angle AOB = 90°$.

319. Сторона ромба дорівнює 6 см, а гострий кут 30°. Знайдіть радіус кола, вписаного в ромб.

320. Доведіть, що діаметр кола, вписаного в ромб, менший за меншу діагональ.

321. У ромб, один із кутів якого на 46° більший за інший, вписано коло. Знайдіть кутові міри дуг, на які коло ділиться точками дотику.

322. Чи можна вписати коло в паралелограм, відмінний від ромба?

323. Чи можна описати коло навколо паралелограма, відмінного від прямокутника? Чому?

324. Доведіть, що вписана в коло трапеція рівнобічна.

Б

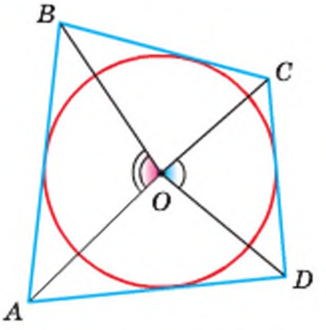
325. Чи можна описати коло навколо прямокутної трапеції? Чому?

326. Доведіть, що периметр трапеції, описаної навколо кола радіуса r, більший за $8r$.

327. Якщо вписане в чотирикутник $ABCD$ коло дотикається до його сторін AB і CD в точках K і P, то $\angle AKP = \angle KPD$. Доведіть.

328. Доведіть, що коли у вписаному чотирикутнику дві протилежні сторони рівні, то цей чотирикутник — трапеція.

329. Сума двох кутів, під якими з центра кола, вписаного в чотирикутник, видно дві його протилежні сторони, дорівнює 180°. Доведіть (мал. 91).

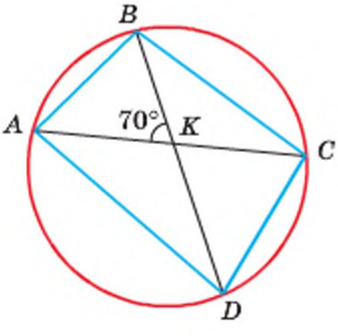


Мал. 91

330. У квадрат, периметр якого дорівнює 24 см, вписано коло. До кола проведено дотичну, яка перетинає дві сторони квадрата. Знайдіть периметр утвореного трикутника.

331. Діагоналі чотирикутника ділять його кути навпіл. Доведіть, що в такий чотирикутник можна вписати коло.

332. Діагоналі чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, перетинаються в точці K, $\angle AKB = 70°$ (мал. 92). Знайдіть кутові міри дуг BC і AD, якщо одна з них на 60° більша за другу.



Мал. 92

333. У ромб зі стороною 8 см і гострим кутом 60° вписано коло. Знайдіть відрізки, на які точка дотику ділить сторону ромба.

334. У ромб, тупий кут якого дорівнює 120°, вписано коло. У якому відношенні точка дотику ділить сторону ромба?

335. У чотирикутнику $ABCD$, вписаному в коло, діагональ BD перпендикулярна до діагоналі AC і ділить її навпіл. Знайдіть кути чотирикутника, якщо $\angle B = 68°$.

336. У рівнобічній трапеції кут при основі дорівнює 50°, а кут між діагоналями, який спирається на бічну сторону, дорівнює 30°. Де лежить центр описаного кола: всередині трапеції чи поза нею?

337. У рівнобічній трапеції з кутом 100° діагональ є бісектрисою гострого кута. Доведіть, що центр описаного кола лежить усередині трапеції.

338. Коло, вписане в рівнобічну трапецію, ділить точкою дотику бічну сторону на відрізки, один із яких на 2 см більший за інші. Знайдіть сторони трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 20 см.

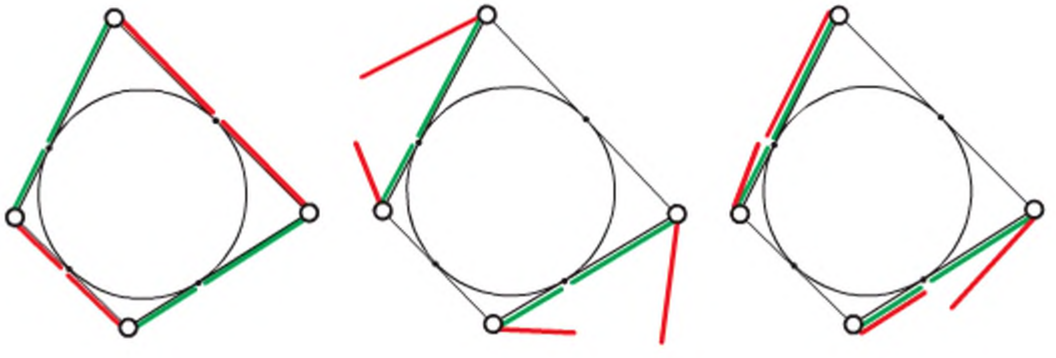
339. Радіус кола, вписаного в прямокутну трапецію, дорівнює 5 см, а гострий кут 30°. Знайдіть середню лінію трапеції.

340. Доведіть, що коли три кути описаного чотирикутника рівні, то він — дельтоїд.

341. Дослідіть, яким є:
а) вписаний чотирикутник, три кути якого рівні;
б) вписаний чотирикутник, три сторони якого рівні;
в) описаний чотирикутник, три сторони якого рівні.

Практичне завдання

342. Із цупкого різнокольорового паперу виготовте модель, за допомогою якої можна показати правильність теореми 16. Скористайтеся малюнком 93.



а *б* *в*

Мал. 93

Задачі для повторення

343. Точки A і B ділять коло на частини, одна з яких на 80° більша за другу. Знайдіть міри вписаних кутів, які спираються на хорду AB.

344. Точки M, N, P ділять коло на частини, пропорційні числам 2, 5 і 11. Знайдіть кути $\triangle MNP$.

345. Кут між хордою AB і дотичною, проведеною через точку A, дорівнює 72°. Знайдіть кутові міри дуг, на які хорда AB розбиває коло.

346. До кіл, радіуси яких 12 см і 17 см, проведено спільну внутрішню дотичну, яка перетинає лінію центрів під кутом 45°. Знайдіть відстань між точками дотику.

347. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою тупого кута. Знайдіть периметр трапеції, якщо її основи дорівнюють 5 см і 7 см.

Задачі за готовими малюнками

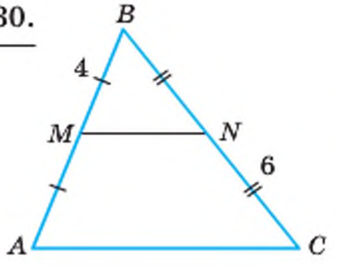
А | **Б**

1

А

$P_{\triangle ABC} = 30$.

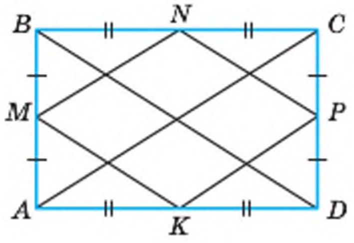
MN



Б

$ABCD$ — прямокутник.
$AC = 16$.

P_{MNPK}

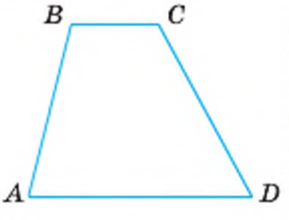


2

А

$ABCD$ — трапеція.
$\angle B - \angle A = 30°$.

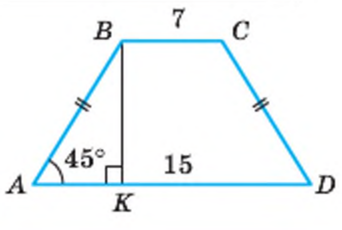
$\angle A$, $\angle B$



Б

$ABCD$ — трапеція.
$BC = 7$, $AD = 15$, $\angle A = 45°$.

BK

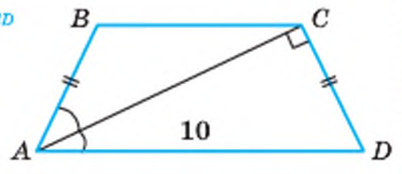


3

А

$ABCD$ — трапеція.
$AD = 10$, $\angle A = 60°$.

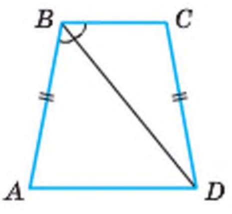
P_{ABCD}



Б

$ABCD$ — трапеція.
$BC : AD = 2 : 3$.
$P_{ABCD} = 66$.

BC, AD

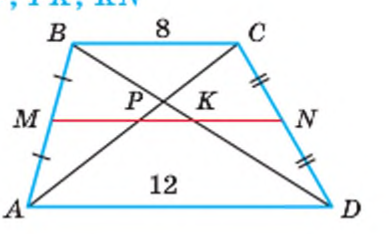


4

А

$ABCD$ — трапеція.
$BC = 8$, $AD = 12$.

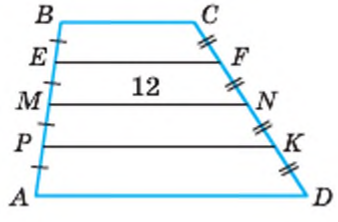
MP, PK, KN



Б

$ABCD$ — трапеція.
$AD : BC = 5 : 3$, $MN = 12$.

EF, PK



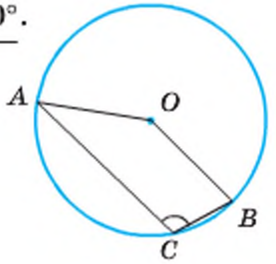
А **Б**

5

А

$\angle AOB = 130°$.

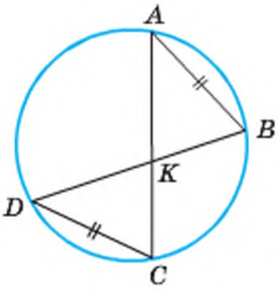
$\angle ACB$



Б

$AB = CD$.

Довести:
$BK = KC$.

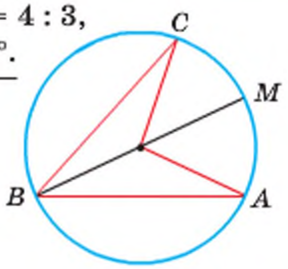


6

А

$\overset{\frown}{AM} : \overset{\frown}{MC} = 4 : 3$,
$\angle ABC = 70°$.

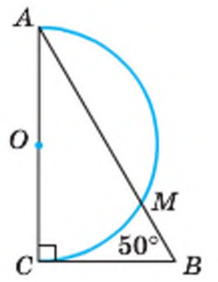
$\angle A$, $\angle C$



Б

$\angle B = 50°$.

$\overset{\frown}{AM}$, $\overset{\frown}{MC}$

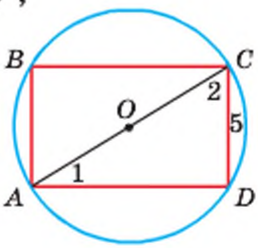


7

А

$ABCD$ — прямокутник.
$\angle 2 - \angle 1 = 30°$,
$CD = 5$.

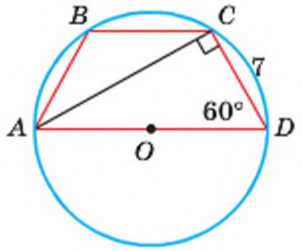
R



Б

$ABCD$ — трапеція.
$CD = 7$,
$\angle D = 60°$.

R

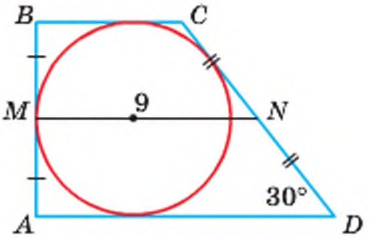


8

А

$ABCD$ — трапеція.
$MN = 9$, $\angle D = 30°$.

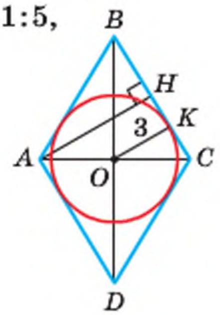
AB, CD



Б

$ABCD$ — ромб.
$\angle ABC : \angle BCD = 1 : 5$,
$r = 3$.

AB



Самостійна робота 2

Варіант 1

1°. Кути трапеції дорівнюють $70°$ і $80°$. Знайдіть інші кути трапеції.

2°. Точки P і K ділять коло на дві частини, пропорційні числам 2 і 7. Знайдіть міри вписаних кутів, які спираються на хорду PK.

3•. Діагоналі рівнобічної трапеції ділять середню лінію на три рівні відрізки. Знайдіть бічну сторону трапеції, якщо її менша основа дорівнює 7 см і в трапецію можна вписати коло.

Варіант 2

1°. Сума двох кутів рівнобічної трапеції дорівнює $140°$. Знайдіть кути трапеції.

2°. Точки E і F ділять коло на дві частини, одна з яких дорівнює третині другої. Знайдіть міри вписаних кутів, які спираються на хорду EF.

3•. Діагоналі рівнобічної трапеції ділять середню лінію на три рівні відрізки. Знайдіть основи трапеції, якщо її бічна сторона дорівнює 15 см і в трапецію можна вписати коло.

Варіант 3

1°. Кути трапеції дорівнюють $60°$ і $70°$. Знайдіть інші кути трапеції.

2°. Точки A і B ділять коло на дві частини, одна з яких у 5 разів більша за другу. Знайдіть міри вписаних кутів, які спираються на хорду AB.

3•. Діагоналі рівнобічної трапеції ділять середню лінію на три рівні відрізки. Знайдіть бічну сторону трапеції, якщо її більша основа дорівнює 12 см і в трапецію можна вписати коло.

Варіант 4

1°. Сума двох кутів рівнобічної трапеції дорівнює $220°$. Знайдіть кути трапеції.

2°. Точки M і N ділять коло на дві частини, одна з яких на $80°$ більша за другу. Знайдіть міри вписаних кутів, які спираються на хорду MN.

3•. Діагоналі рівнобічної трапеції ділять середню лінію на три рівні частини, одна з яких дорівнює 7 см. Знайдіть основи та бічну сторону трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

Тестові завдання 2

1	Знайдіть периметр трикутника, якщо його середні лінії дорівнюють 3 см, 5 см і 7 см.	а) 15 см; в) 7,5 см; б) 30 см; г) 7 см.
2	Радіус кола, вписаного в квадрат зі стороною 4 см, дорівнює:	а) 2 см; в) 8 см; б) 4 см; г) 6 см.
3	Основи трапеції дорівнюють 4 см і 10 см. Знайдіть середню лінію трапеції.	а) 14 см; в) 3 см; б) 6 см; г) 7 см.
4	Центральний кут дорівнює 36°. Чому дорівнює відповідний вписаний кут?	а) 18°; в) 72°; б) 36°; г) 12°.
5	Бічна сторона рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 7 см. Знайдіть довжину середньої лінії.	а) 7 см; в) 3,5 см; б) 14 см; г) 21 см.
6	Знайдіть радіус кола, описаного навколо прямокутника, менша сторона якого дорівнює 4 см, а кут між діагоналями 60°.	а) 8 см; в) 4 см; б) 2 см; г) 6 см.
7	Радіус кола, вписаного в трапецію, дорівнює r. Знайдіть відстань між прямими, яким належать основи трапеції.	а) $\frac{r}{2}$; в) $2r$; б) r; г) не можна встановити.
8	Периметр рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 20 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.	а) 10 см; в) 5 см; б) 2,5 см; г) 7,5 см.
9	Радіус кола, описаного навколо чотирикутника $ABCD$, дорівнює 5 см. Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо $\triangle ABC$?	а) 10 см; в) 5 см; б) 2,5 см; г) 7,5 см.
10	Діагональ трапеції, вписаної в коло, перпендикулярна до бічної сторони. Де лежить центр кола?	а) усередині трапеції; б) на середині більшої основи; в) поза трапецією; г) не можна встановити.

Типові задачі для контрольної роботи

1°. Поділіть відрізок завдовжки 9 см на 7 рівних частин.

2°. Середня лінія рівнобедреного трикутника дорівнює 7 см, а одна з його сторін 10 см. Знайдіть периметр трикутника. Розгляньте два випадки.

3°. $\triangle ABC$ вписаний у коло з центром O. Знайдіть $\angle AOC$, якщо $\angle A = 40°$, а $\angle B$ удвічі більший.

4°. Діагональ трапеції ділить середню лінію завдовжки 15 см на два відрізки, один із яких на 8 см менший за другий. Знайдіть основи трапеції.

5•. Знайдіть кути прямокутної трапеції, якщо один із них удвічі більший за інший. Скільки розв'язків має задача?

6•. Периметр трикутника, утворений середніми лініями $\triangle ABC$, дорівнює 15 см. Знайдіть сторони $\triangle ABC$, якщо одна з них на 2 см менша від другої й удвічі менша за третю.

7•. Знайдіть периметр рівнобічної трапеції, основи якої пропорційні числам 2 і 5, тупий кут дорівнює 120°, а бічні сторони — 6 см.

8•. На основі AC рівнобедреного $\triangle ABC$, як на діаметрі, побудовано півколо, яке перетинає сторони AB і BC у точках M і N відповідно. Знайдіть кутову міру дуги MN, якщо $\angle B = 70°$.

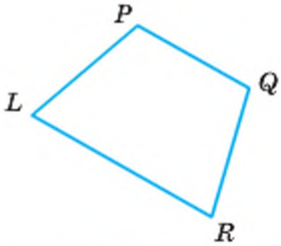
9••. Кути трапеції пропорційні числам 1 і 2, а діагональ є бісектрисою гострого кута. Знайдіть периметр трапеції, якщо радіус описаного кола дорівнює 8 см.

10••. У ромб із кутом 60° вписано коло. У якому відношенні точка дотику ділить сторону ромба?

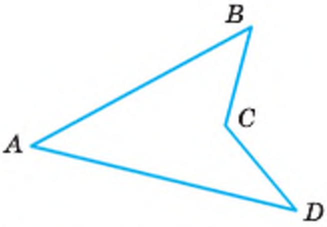
Геометрія є пізнання всього існуючого.
Платон

Головне в розділі 1

Чотирикутник — фігура, яка складається з чотирьох точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій, і чотирьох відрізків, які з'єднують послідовно ці точки і не перетинаються. Фігуру, що складається з чотирикутника і його внутрішньої області, також називають чотирикутником. Основні елементи чотирикутника — *сторони, кути, діагоналі*. Чотирикутники бувають опуклі і неопуклі.



Опуклий чотирикутник



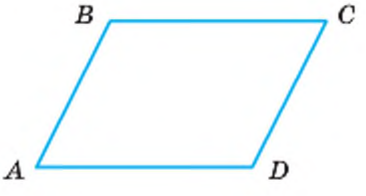
Неопуклий чотирикутник

Сума всіх кутів кожного чотирикутника дорівнює 360°. Кожна сторона чотирикутника менша від суми трьох інших сторін.

Чотирикутник, кожна сторона якого паралельна протилежній стороні, називається **паралелограмом**.

Ознаки паралелограма. Чотирикутник є паралелограмом, якщо:

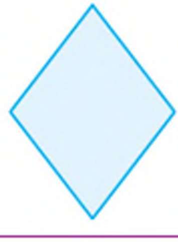
1) **кожна його сторона дорівнює протилежній стороні,** або
2) **дві його сторони паралельні й рівні,** або
3) **його діагоналі точкою перетину діляться навпіл.**



Властивості паралелограма. **У паралелограмі:**

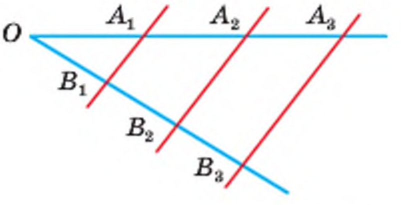
- **діагональ ділить його на два рівні трикутники;**
- **протилежні сторони рівні;**
- **протилежні кути рівні;**
- **сума кутів, прилеглих до однієї сторони, дорівнює 180°;**
- **діагоналі, перетинаючись, діляться навпіл.**

Окремі види паралелограмів:

Прямокутники	Ромби	Квадрати
		

Діагоналі прямокутника рівні. Діагоналі ромба перпендикулярні і ділять кути ромба навпіл. Діагоналі квадрата рівні, перпендикулярні і ділять його кути навпіл.

Користуючись властивостями паралелограма, можна довести теорему Фалеса.

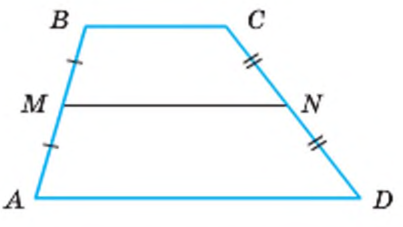
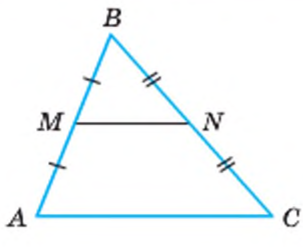


Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній із них рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки і на другій стороні.

Якщо $A_1A_2 = A_2A_3$ і $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, то $B_1B_2 = B_2B_3$.

Чотирикутник, тільки дві сторони якого паралельні, — **трапеція**. Паралельні сторони трапеції — її основи, дві інші — бічні сторони. Окремі види трапецій — рівнобічні і прямокутні трапеції. Відрізок, що сполучає середини бічних сторін трапеції, — її *середня лінія*. **Середня лінія трапеції паралельна її основам і дорівнює їх півсумі.**

Відрізок, що сполучає середини двох сторін трикутника, називають його *середньою лінією*. **Середня лінія трикутника паралельна одній із його сторін і дорівнює її половині.**

Середня лінія трапеції	**Середня лінія трикутника**
	
$MN \parallel AD,\ MN \parallel BC,\ MN = \dfrac{BC + AD}{2}$	$MN \parallel AC,\ MN = \dfrac{AC}{2}$

Кут із вершиною в центрі кола називають *центральним кутом*. Кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають коло, називають *вписаним*. *Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку спирається.*

Чотирикутник називається *вписаним* в коло, якщо всі його вершини лежать на колі. **Чотирикутник вписаний в коло тоді й тільки тоді, коли сума двох його протилежних кутів дорівнює 180°.**

Чотирикутник називається *описаним* навколо кола, якщо кожна його сторона дотикається до кола. **Опуклий чотирикутник описаний навколо кола тоді й тільки тоді, коли сума двох його протилежних сторін дорівнює сумі двох інших сторін.**

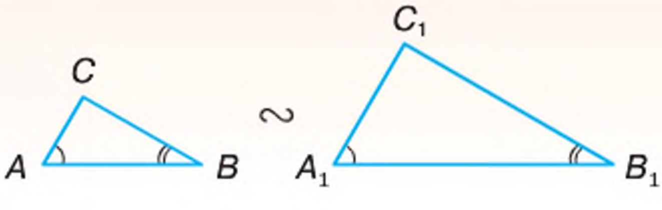
Найбільшою шкодою з усіх є лінощі учнів, котрі вагаються взяти на себе труд, рівний справі, якої вони прагнуть.

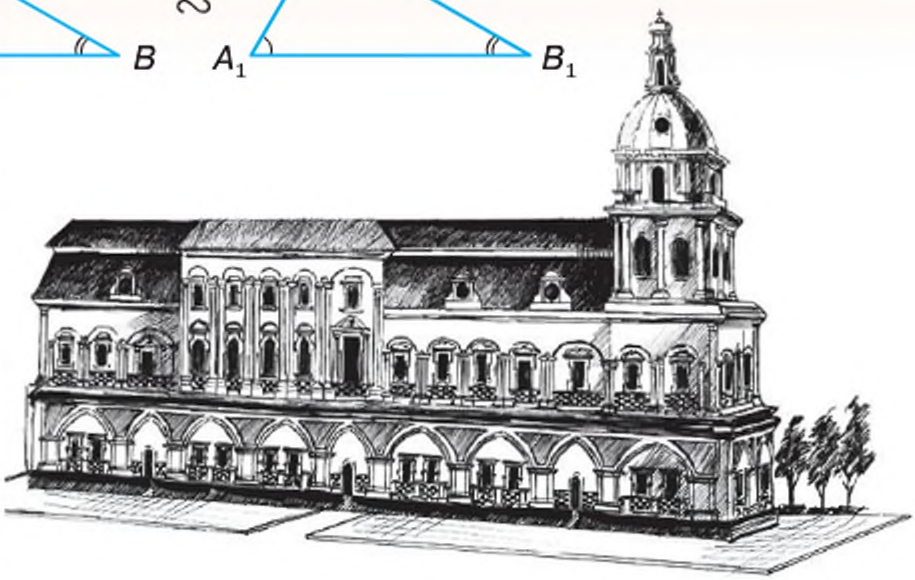
ФЕОФАН ПРОКОПОВИЧ

(1681–1736)

Талановитий український вчений, просвітитель, культурний діяч

- Перший прочитав курс математики (арифметику і геометрію) в Києво-Могилянській академії.
- Описав більше десяти різних вимірювальних приладів, які діяли на основі подібності фігур.





Розділ 2 | Section 2

Подібність трикутників | Triangles Similarity

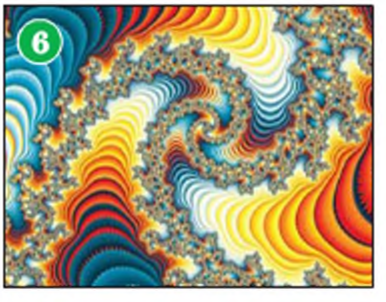
Подібність геометричних фігур — одне з найважливіших відношень. Коли зображають слона, будинок, континент чи й усю Землю на невеликому аркуші паперу, користуються властивостями подібності. Кожна модель чимось подібна до оригіналу. Геометрія ж здебільшого займається дослідженням геометричних моделей.

Для чого вивчати подібність фігур?

У повсякденному житті нам часто доводиться мати справу з предметами однакової форми, але різних розмірів. На площині це картина та її репродукція, плани однієї квартири різних розмірів [1].

У просторі подібними є копії архітектурних споруд [2], картини [3] тощо.

Подібність — це настільки важлива властивість фігур, що люди створили спеціальні засоби, за допомогою яких створюють подібні фігури: фотоапарати, телескопи [4], мікроскопи [5], проектори, комп'ютери тощо.



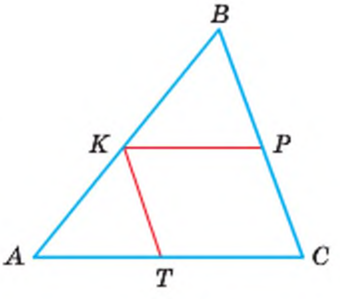
Сучасним розділом математики є фрактальна геометрія, предметом вивчення якої є фрактали [6] — складні за своєю внутрішньою структурою фігури, в тій чи іншій мірі подібні самі собі.

А де ще застосовується подібність фігур? Наведіть свої приклади.

Цей розділ важливий також тому, що на його основі будується майже вся геометрія, яку ви далі вивчатимете: за допомогою подібності трикутників доводиться теорема Піфагора, а на її основі — інші теореми геометрії.

§ 8 Пропорційні відрізки

У геометрії та інших прикладних науках часто доводиться визначати *відношення відрізків*. Нагадаємо, що **відношенням двох відрізків називають відношення їх довжин, виражених у тих самих одиницях довжини.** Наприклад, якщо маємо відрізки $a = 2$ см і $b = 5$ см, то їх відношення $a : b = 2 : 5$.



Мал. 94

Якщо K, P, T — середини сторін $\triangle ABC$ (мал. 94), то $AK : AB = 1 : 2$, $AT : AC = 1 : 2$, $KT : BC = 1 : 2$. Отже, $AK : AB = AT : AC = KT : BC$.

Із кожних двох таких відношень можна скласти пропорцію, тому в такому випадку кажуть, що відрізки AK, AT, KT пропорційні відрізкам AB, AC і BC. У розглядуваному випадку кожне з відношень дорівнює 0,5, тому попереднє твердження можна уточнити: відрізки AK, AT, KT пропорційні відрізкам AB, AC і BC з коефіцієнтом пропорційності $k = 0,5$.

Пропорційними можуть бути дві, три чи більше пар відрізків. Відрізки x, y, ..., z називають пропорційними відрізкам a, b, ..., c, якщо

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \ldots = \frac{z}{c}.$$

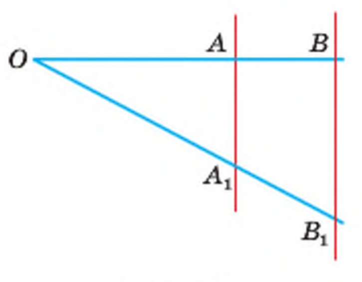
Для дослідження властивостей пропорційних відрізків важливу роль відіграє така узагальнена теорема Фалеса.

ТЕОРЕМА 18

Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають від них пропорційні відрізки.

Нехай паралельні прямі AA_1 і BB_1 перетинають сторони кута O, як показано на малюнку 95. Тоді відрізки OA, OB, AB пропорційні відрізкам OA_1, OB_1, A_1B_1. Тобто

$$\frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$



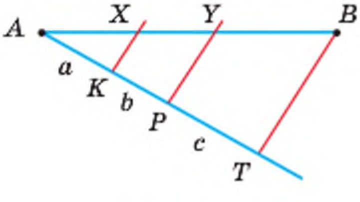
Мал. 95

Отже, існує таке число k, що $OA = kOA_1$, $OB = kOB_1$, $AB = kA_1B_1$.

Узагальнена теорема Фалеса показує, як можна довільний відрізок поділити на частини, пропорційні даним відрізкам (або числам — довжинам певних відрізків).

Наприклад, поділимо даний відрізок на частини, пропорційні довжинам a, b і c.

Нехай дано відрізок AB (мал. 96). Проведемо довільний промінь AT і відкладемо на ньому відрізки $AK = a$, $KP = b$, $PT = c$. Прямі, що проходять через точки K і P паралельно TB, ділять відрізок AB точками X і Y у потрібному відношенні:



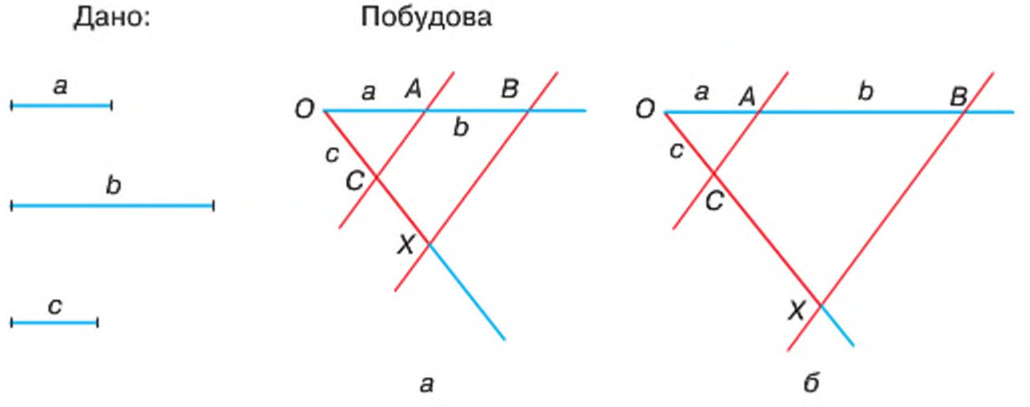
Мал. 96

$$AX : a = XY : b = YB : c.$$

Якщо треба поділити даний відрізок AB на частини, пропорційні, наприклад, числам 3, 2 і 4, відкладають на промені AT відрізки $AK = 3n$, $KP = 2n$, $PT = 4n$, де n — якийсь невеликий відрізок, і виконують побудову, як показано вище.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

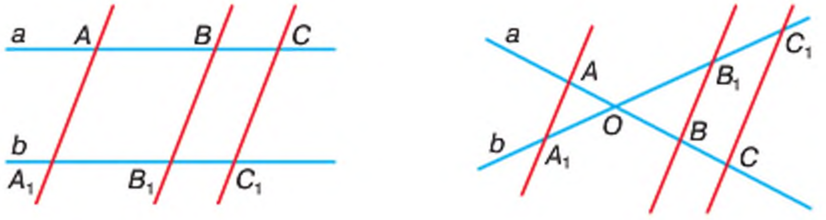
Якщо відрізки a, b, c, x такі, що $a : b = c : x$, то x називають **четвертим пропорційним** трьох даних відрізків a, b і c. Побудувати четвертий пропорційний трьох даних відрізків можна так. На одній стороні довільного нерозгорнутого кута O слід відкласти $OA = a$, $OB = b$, а на другій стороні — $OC = c$. Далі треба провести пряму AC і паралельну їй пряму BX. Відрізок OX — четвертий пропорційний трьох даних відрізків. Бо $OA : OB = OC : OX$ (мал. 97, a).



Мал. 97

Зауваження.

Побудову можна виконати й так, як зображено на малюнку 97, *б*. Теорему 18 можна узагальнити на випадок довільних прямих однієї площини, а не тільки сторін кута. **Паралельні прямі, які перетинають прямі *a* і *b*, відтинають від них пропорційні відрізки.** Така теорема правильна також і у випадках, коли прямі *a* і *b* паралельні (мал. 98, *а*) або перетинаються в точці, що лежить між даними паралельними прямими (мал. 98, *б*). Пропонуємо ці випадки розглянути самостійно.



а *б*

Мал. 96

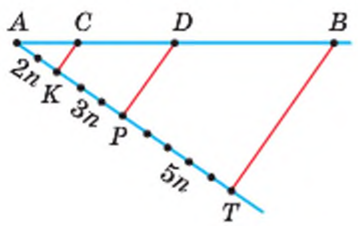
Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що розуміють під відношенням двох відрізків?
2. Чому дорівнює відношення відрізків завдовжки 6 дм і 1 м?
3. Які відрізки називають пропорційними відрізкам a, b і c?
4. Сформулюйте узагальнену теорему Фалеса.

Виконаємо разом

1 Поділіть даний відрізок на три частини, пропорційні числам 2, 3 і 5.

- З кінця даного відрізка AB під довільним кутом до нього проведемо промінь AT і відкладемо на ньому послідовно 2, 3 і 5 довільних, але рівних відрізків (мал. 99). Отримаємо відрізки AK, KP і PT, пропорційні даним числам 2, 3 і 5.
  Проведемо пряму TB і паралельні їй прямі через точки K і P. Ці прямі перетнуть даний відрізок AB у таких точках C і D, що відрізки AC, CD і DB будуть ті, які треба було визначити. Адже, згідно з узагальненою теоремою Фалеса, відрізки AC, CD і DB пропорційні відрізкам AK, KP і PT, які пропорційні числам 2, 3 і 5.



Мал. 99

2 **Знайдіть відношення сторони ромба до його півпериметра.**

- Нехай довжина сторони ромба дорівнює c. Тоді його периметр — $4c$, а півпериметр — $2c$.

$$c : 2c = 1 : 2 = 0{,}5.$$

3 **Відрізок AB точками K і P поділено на 3 частини пропорційно числам 2, 3 і 6. Знайдіть відношення $AK : KB$ і $AP : AK$.**

- Якщо відрізки пропорційні числам 2, 3 і 6, то існує таке число x, що $AK = 2x$, $KP = 3x$, $PB = 6x$. Тоді $KB = 3x + 6x = 9x$ і $AK : KB = 2x : 9x = 2 : 9$.
Аналогічно, $AP = 2x + 3x = 5x$. Тоді $AP : AK = 5x : 2x = 5 : 2$.

Задачі і вправи

Виконайте усно

348. Поділіть число 6 на дві частини, пропорційні числам 1 і 2.
349. Поділіть число 10 на частини, пропорційні числам 1, 2 і 2.
350. Поділіть відрізок завдовжки 20 см на частини, пропорційні числам 1, 2 і 2.
351. Відрізок завдовжки 10 см поділено на дві частини, одна з яких дорівнює 2 см. У якому відношенні поділено даний відрізок?
352. Більша частина відрізка, поділеного у відношенні 2 : 3, дорівнює 9 м. Яка довжина всього відрізка?
353. Менша частина відрізка, поділеного на частини, пропорційні числам 1, 2 і 4, дорівнює 3 см. Знайдіть довжини двох інших частин.

А

354. Накресліть довільний відрізок і поділіть його у відношенні 1 : 3.
355. Відрізок завдовжки 1 м поділено на частини, пропорційні числам 3, 6 і 11. Знайдіть довжини утворених частин.
356. Відрізок AB точками C і D поділено пропорційно числам 2, 3 і 5. Знайдіть відношення відрізків:
а) $AC : DB$; б) $CD : AD$; в) $AC : AB$; г) $DB : AD$.
357. Відрізок a вдвічі довший за c. Поділіть відрізок завдовжки 9 м на частини, пропорційні відрізкам a і c.
358. Більша частина відрізка, поділеного у відношенні 5 : 8, дорівнює 5,6 дм. Який завдовжки весь відрізок?
359. На скільки треба подовжити відрізок KL завдовжки 32 см, щоб отримати відрізок KM, який задовольняє пропорцію $KM : KL = 9 : 4$?

360. Відрізок завдовжки 28 см поділено на дві частини так, що одна з них дорівнює 21 см. У якому відношенні поділено відрізок?

361. Відрізок поділено на дві частини, відношення яких дорівнює 2 : 11, причому менша частина відрізка коротша за більшу на 27 см. Знайдіть довжину кожної частини відрізка.

362. Точка M ділить відрізок AB у відношенні $AM : MB = 7 : 2$. Знайдіть відношення $AM : AB$ і $MB : AB$.

363. Точка K ділить відрізок AB у відношенні $m : n$. Знайдіть відношення $AK : AB$ і $KB : AB$.

364. На відрізку AB завдовжки 6 см дано точку C. Відстань від цієї точки до A дорівнює 3,6 см. На продовженні відрізка AB за точку B взято таку точку D, що $AD : DB = AC : BC$. Знайдіть відношення $AB : BD$ і $AD : AB$.

365. Один із кутів прямокутного трикутника дорівнює 60°. Знайдіть відношення його меншого катета до гіпотенузи.

366. Знайдіть відношення катетів прямокутного рівнобедреного трикутника.

367. Знайдіть відношення сторони рівностороннього трикутника до його півпериметра.

368. Знайдіть відношення сторони квадрата до його півпериметра.

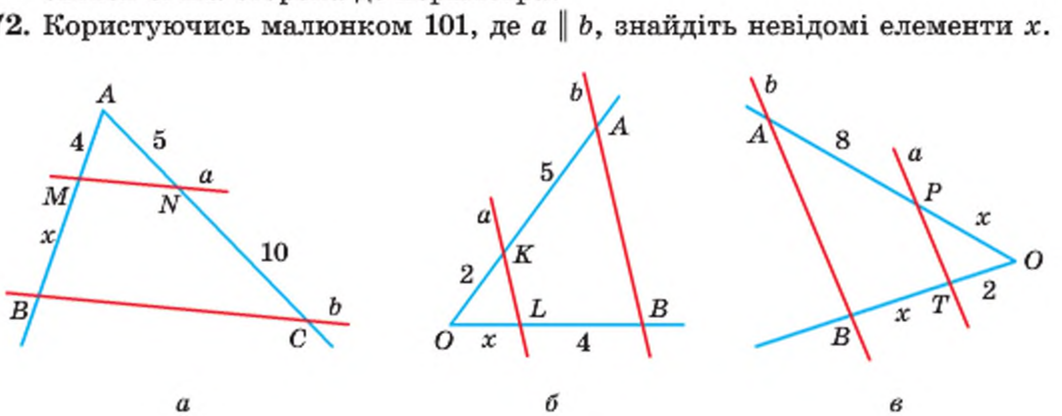
369. Виміряйте відстань між двома пунктами на карті (мал. 100). Яка справжня відстань між цими пунктами (по прямій), якщо масштаб карти 1 : 3 500 000?

Мал. 100

370. Визначте масштаб карти, на якій відстані на місцевості завдовжки 200 км відповідає 5 см.

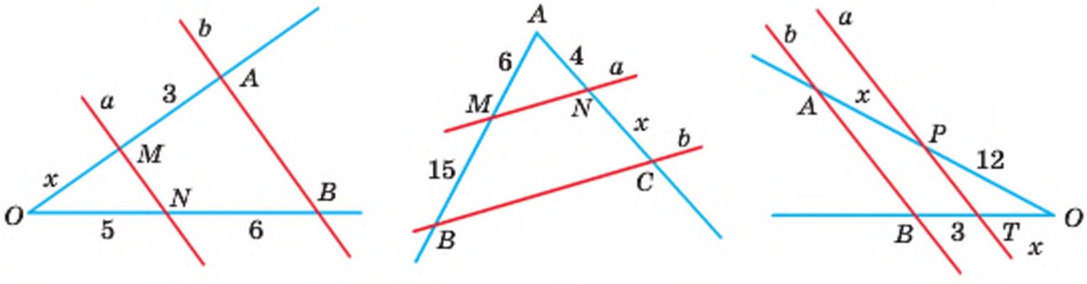
371. Основа рівнобедреного трикутника відноситься до бічної сторони як 2 : 3. Як відноситься його основа до периметра? Як відноситься бічна сторона до периметра?

372. Користуючись малюнком 101, де $a \parallel b$, знайдіть невідомі елементи x.



Мал. 101

373. Користуючись малюнком 102, де $a \parallel b$, знайдіть невідомі елементи x.



а *б* *в*

Мал. 102

374. На сторонах AB і AC трикутника ABC взято точки M і H так, що $MH \parallel BC$ і $AM : MB = 2 : 3$. Знайдіть HC, якщо $AC = 15$.

Б

375. Відрізок завдовжки 7 дюймів поділили на частини, пропорційні числам 2, 3, 4 і 5. Знайдіть довжини (у сантиметрах) найбільшої і найменшої частин (вважати, що 1 дюйм = 2,54 см).

376. Відрізок завдовжки a поділено на частини, пропорційні числам 5, 1 і 4. Знайдіть довжини утворених частин.

377. Відрізок завдовжки a поділили на частини у відношенні $m : n$. Знайдіть довжини утворених частин.

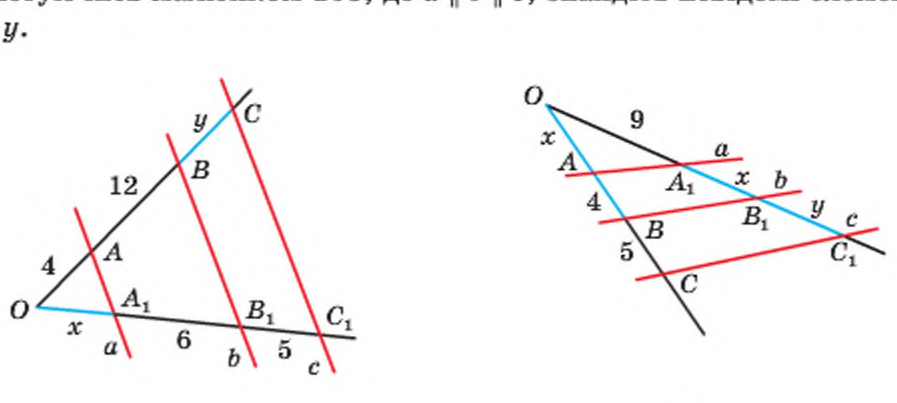
378. Знайдіть відношення радіуса кола, вписаного в рівносторонній трикутник: а) до радіуса описаного кола; б) до висоти трикутника.

379. Чи пропорційні відрізки a, b, c, d, якщо:

а) два перші відносяться як $2 : 3$, а два другі — як $3 : 4$;

б) $a : b = 2,4 : 5,6$; $c : d = 9,1 : 21,7$?

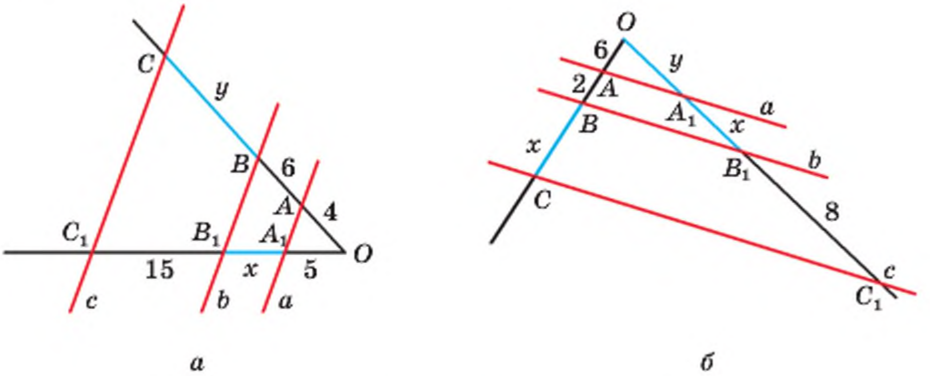
380. Користуючись малюнком 103, де $a \parallel b \parallel c$, знайдіть невідомі елементи x та y.



а *б*

Мал. 103

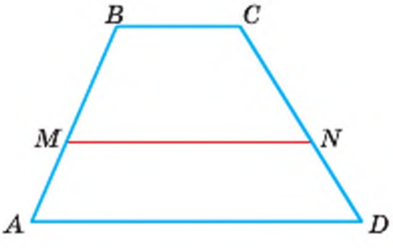
381. Користуючись малюнком 104, де $a \parallel b \parallel c$, знайдіть невідомі елементи x та y.



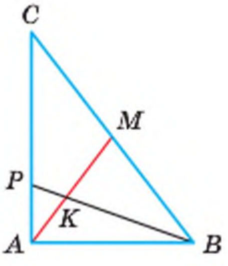
Мал. 104

382. У трапеції $ABCD$ (мал. 105) $AB = 10$ см, $MN \parallel AB$, $BM - AM = 2$ см. Знайдіть CD, якщо $DN = 6$ см.

383. AM — медіана $\triangle ABC$ (мал. 106). $AK : KM = 2 : 3$. Знайдіть відношення $AP : PC$ і $AP : AC$.



Мал. 105



Мал. 106

384. Точка M ділить сторону AB $\triangle ABC$ у відношенні $AM : MB = 3 : 2$, а точка N ділить сторону BC $\triangle ABC$ у відношенні $BN : NC = 5 : 4$. Відрізки AN і CM перетинаються в точці O. Знайдіть відношення $AO : ON$ і $CO : OM$.

385. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 10 см, а бічні сторони 5 см і 8 см. На скільки треба продовжити бічні сторони, щоб вони перетнулися?

386. На стороні AB трикутника ABC позначено точку K таку, що $AK = 10$ см, $KB = 5$ см. Знайдіть відношення відстаней від точок K і B до прямої AC.

387. Побудуйте відрізок, четвертий пропорційний відрізкам a, b і c, та знайдіть його довжину, якщо:

а) $a = 4$ см; $b = 2$ см; $c = 3$ см;

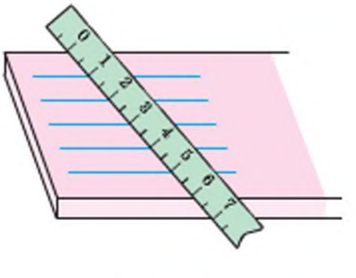
б) $a = 4$ см; $b = 10$ см; $c = 6$ см;

в) $a = 4{,}8$ см; $b = 4$ см; $c = 2{,}1$ см;

г) $a = 1{,}5$ см; $b = 4{,}5$ см; $c = 2$ см.

388. Дано відрізки a, b, c. Побудуйте:
а) їх четвертий пропорційний відрізок;
б) середній арифметичний відрізок.

389. Користуючись малюнком 107, поясніть, як можна поділити ширину дошки на потрібну кількість рівних частин.



Мал. 107

Практичне завдання

390. Накресліть кут O, градусна міра якого 60°. Із його вершини, як із центра, проведіть дуги радіусів $r = 2$ см і $2r$. Позначте буквами точки перетину сторін кута цими дугами і послідовно сполучіть їх відрізками. Який чотирикутник утворився? Знайдіть його кути, сторони і периметр.

Задачі для повторення

391. Радіус OB кола з центром O ділить вписаний кут ABC на два кути так, що один із них на 15° більший за другий. Знайдіть ці кути, якщо $\overset{\frown}{AC} = 110°$.

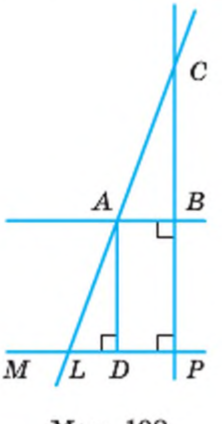
392. Чи можна описати коло навколо ромба, відмінного від квадрата? Чому?

393. Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3, 5 і 8.

394. Суміжні кути відносяться як $2{,}5 : \frac{1}{2}$. Знайдіть ці кути.

395. За допомогою малюнка 108 установіть, який знак (1–5) слід поставити замість * між відрізками (А–Г).

1	$=$	**А**	CP * AB
2	$\in$	**Б**	AB * MP
3	$\parallel$	**В**	AD * BP
4	$\perp$	**Г**	AL * DA
5	$>$		



Мал. 108

§ 9 Подібність фігур

Усім нам часто доводиться мати справу з предметами різних розмірів, але однакової форми. Наприклад, зменшена модель автомобіля схожа на справжній автомобіль, хоча менша за розмірами. Але їх розміри — відповідно пропорційні. Якщо, наприклад, довжина моделі літака в 100 разів менша від довжини справжнього літака, то і довжина крила моделі має бути в 100 разів меншою від довжини крила справжнього літака і т. д. Якщо дві фігури подібні, то всі їх відповідні розміри пропорційні.

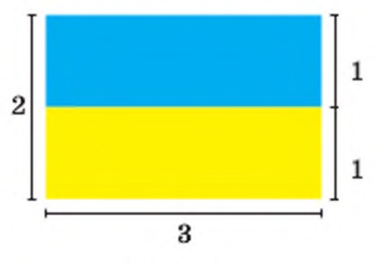
Фігури однакової форми називають **подібними фігурами.** Кожне коло подібне іншому колу, кожний півкруг подібний іншому півкругу, кожний квадрат подібний іншому квадрату, кожний рівносторонній трикутник подібний іншому рівносторонньому трикутнику. Роздруковані з комп'ютера літери

A, A, A, A, A, A, A, A

як геометричні фігури подібні одна одній. Проте жодна з них не подібна фігурі **а**, що позначає цю саму літеру.

Розглянемо ще один приклад. Державний прапор України можна зображувати різних розмірів (мал. 109), проте співвідношення ширини прапора до його довжини завжди має бути сталим, а саме 2 : 3 (мал. 110). Усі зображення прапора подібні до оригіналу, а значить — і між собою.

Мал. 109



Мал. 110

У геометрії подібність фігур використовується часто, тому існує і загальноприйнятий знак подібності $\sim$. Щоб виразити, що трикутник ABC подібний трикутнику KPT, пишуть $\triangle ABC \sim \triangle KPT$.

Два трикутники називаються *подібними*, якщо їх відповідні кути рівні, а сторони пропорційні.

Якщо $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то правильні такі рівності:

$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$

і $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1 = CA : C_1A_1$.

Наступна теорема наводить простий і дуже важливий приклад утворення подібних трикутників.

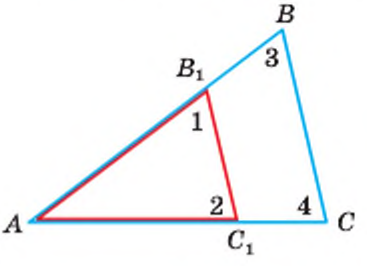
ТЕОРЕМА 19

Січна пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає від нього трикутник, подібний даному.

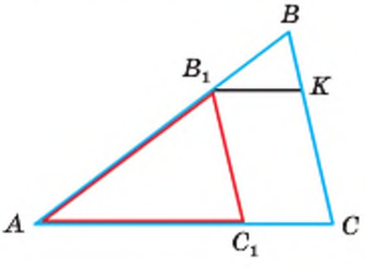
ДОВЕДЕННЯ.

Нехай ABC — довільний трикутник, а пряма B_1C_1, яка перетинає його, паралельна стороні BC (мал. 111). Доведемо, що $\triangle AB_1C_1 \sim \triangle ABC$.

Кут A у цих трикутників спільний, $\angle 1 = \angle 3$ і $\angle 2 = \angle 4$, як відповідні кути при паралельних прямих BC і B_1C_1. Отже, відповідні кути цих трикутників рівні. Залишається довести, що їх сторони пропорційні. За узагальненою теоремою Фалеса $AB : AB_1 = AC : AC_1$.



Мал. 111



Мал. 112

Проведемо відрізок B_1K, паралельний AC (мал. 112). Оскільки KCC_1B_1 — паралелограм, то $B_1C_1 = KC$. А за попередньою теоремою $BC : KC = BA : B_1A$. З двох останніх пропорцій випливає рівність трьох відношень:

$$AB : AB_1 = AC : AC_1 = BC : B_1C_1.$$

Отже, відповідні кути трикутників ABC і AB_1C_1 рівні, а сторони пропорційні, тому ці трикутники подібні. □

На доведену теорему далі посилатимемося часто, тому називатимемо її *основною теоремою про подібність трикутників*.

Якщо трикутники ABC і AB_1C_1 подібні, то $AB : AB_1 = AC : AC_1 = BC : B_1C_1 = k$, де k — деяке додатне число. Це число називають *коефіцієнтом подібності*. У цьому випадку всі лінійні розміри трикутника ABC у k разів більші (якщо $k > 1$) або у k разів менші (якщо $0 < k < 1$) за відповідні розміри трикутника AB_1C_1.

У подібних трикутниках не тільки сторони, а й їхні відповідні медіани (m і m_1), бісектриси (l і l_1), висоти (h і h_1), периметри (P і P_1), радіуси (r і r_1) вписаних чи описаних кіл пропорційні з тим самим коефіцієнтом. Якщо $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то:

$$AB = kA_1B_1,\ P = kP_1,\ h = kh_1,$$
$$AC = kA_1C_1,\ m = km_1,\ r = kr_1,$$
$$BC = kB_1C_1,\ l = kl_1.$$

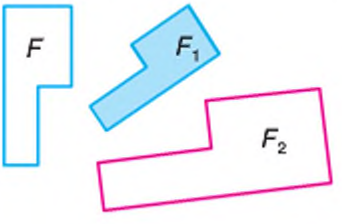
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Подібність геометричних фігур — це відношення (як і відношення рівності, паралельності тощо). Воно має такі властивості:

$F \sim F$.

Якщо $F \sim F_1$, то і $F_1 \sim F$.

Якщо $F \sim F_1$ і $F_1 \sim F_2$, то $F \sim F_2$ (мал. 113).



Мал. 113

Мал. 114

Докладніше про подібні фігури ви дізнаєтесь у старших класах, а тут обмежимося розгляданням подібних трикутників.

Зобразимо діаграмою співвідношення між поняттями «рівні трикутники» і «подібні трикутники».

Якщо два трикутники рівні, то і їх відповідні кути рівні, а сторони одного пропорційні відповідним сторонам другого, бо кожне з відношень дорівнює 1. Отже, два рівні трикутники є водночас і подібними трикутниками. Проте не завжди подібні трикутники дорівнюють один одному (мал. 114).

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Які фігури називають подібними? Наведіть приклади подібних фігур.
2. Які два трикутники називають подібними?
3. Трикутники ABC і KPT рівні. Чи подібні вони?
4. Трикутники ABC і KPT подібні. Чи завжди вони рівні?
5. Сформулюйте основну теорему про подібність трикутників.

Виконаємо разом

1 Доведіть, що відношення периметрів подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності.

- Нехай трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні з коефіцієнтом подібності k. Тоді

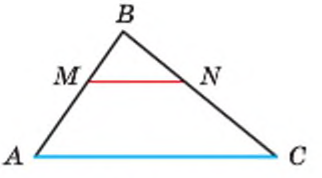
$$AB = kA_1B_1,\ BC = kB_1C_1,\ CA = kC_1A_1.$$

Відношення периметрів даних трикутників:

$$P_{ABC} : P_{A_1B_1C_1} = (AB + BC + CA) : (A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1) = (kA_1B_1 + kB_1C_1 + kC_1A_1) :$$
$$: (A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1) = k(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1) : (A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1) = k.$$

Отже, $P_{ABC} : P_{A_1B_1C_1} = k$.

2 Точка M ділить сторону AB $\triangle ABC$ у відношенні $AM : BM = 3 : 2$ (мал. 115). Знайдіть MN, якщо $AC = 15$ см, $MN \parallel AC$, $N \in BC$.



Мал. 115

● $\triangle MBN \sim \triangle ABC$ за основною теоремою про подібні трикутники. Якщо трикутники подібні, то їх сторони пропорційні, тобто $\frac{MB}{AB} = \frac{MN}{AC}$, $\frac{2}{5} = \frac{MN}{15}$, звідки $MN = 6$ (см).

Задачі і вправи

Виконайте усно

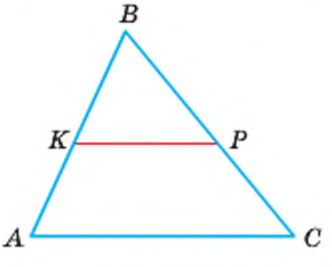
396. KP — середня лінія трикутника ABC (мал. 116).

а) Чи подібні трикутники ABC і KBP?

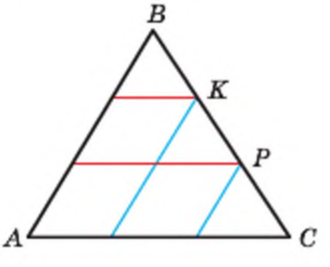
б) Чи пропорційні відрізки BP і BC відрізкам KP і AC? А відрізки BP і PC відрізкам KP і AC?

в) Знайдіть відношення $KB : AB$, $BP : PC$, $KP : AC$.

г) У скільки разів $P_{\triangle ABC}$ більший від $P_{\triangle KBP}$?



Мал. 116



Мал. 117

397. Через точки K і P на стороні BC трикутника ABC проведено прямі, паралельні AB і AC (мал. 117). Скільки пар подібних трикутників утворилося?

398. Чи подібні два трикутники, якщо сторони одного дорівнюють 2 м, 3 м і 4 м, а другого — 3 м, 4 м і 5 м?

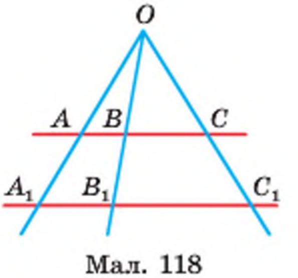
399. Чи можуть бути подібними прямокутний і тупокутний трикутники?

400. Чи правильно, що трикутник, подібний рівнобедреному трикутнику, рівнобедрений?

А

401. K і P — такі точки на сторонах AB і BC $\triangle ABC$, що $KP \parallel AC$ і $BK : BA = 1 : 3$. Чи подібні трикутники ABC і KBP? Чому? Знайдіть:
а) відношення $KB : AK$, $BP : PC$, $KP : AC$;
б) периметри трикутників ABC і KBP, якщо $AK = KP = PB = 8$ см.

402. Промені OA, OB і OC перетинають паралельні прямі AB і A_1B_1 (мал. 118). При цьому $OA : OA_1 = 2 : 3$.
а) Знайдіть відношення $OB : OB_1$, $OC : OC_1$, $AB : A_1B_1$, $OA : AA_1$, $OB : BB_1$, $OC : CC_1$.
б) Складіть кілька пропорцій із таких відношень.
в) Чи правильні пропорції: $OA : AA_1 = OB : BB_1$, $AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1$, $OA : OB = OB : OC$?



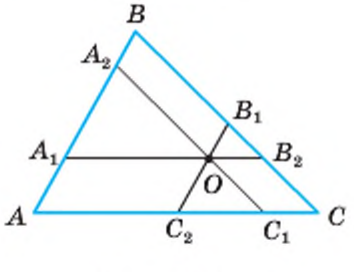
Мал. 118

403. У трикутнику ABC через точку K сторони AC проведено пряму, паралельну стороні BC, до перетину зі стороною AB у точці L. Знайдіть:
а) відрізок KL, якщо $BC = 27$ см і $AK : KC = 4 : 5$;
б) периметр $\triangle AKL$, якщо $AB = 30$ см, $BC = 36$ см, $AC = 42$ см, $LK = 12$ см.

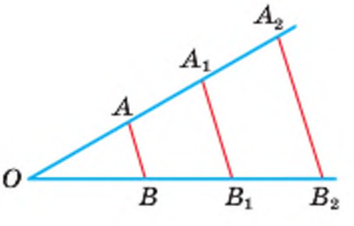
404. Основа трикутника дорівнює 36 см, бічна сторона поділена на 4 рівні частини, і через точки поділу проведено прямі, паралельні основі. Знайдіть відрізки цих прямих, обмежених бічними сторонами.

405. На сторонах AB і BC $\triangle ABC$ взято точки M і N відповідно так, що $MN \parallel AC$, $AM = BN$, $MB = 4$ см, $NC = 9$ см, $MN = 8$ см. Знайдіть AC і BN.

406. Через довільну точку O, що лежить всередині $\triangle ABC$, проведено прямі, паралельні його сторонам (мал. 119). Скільки при цьому утворилося трикутників? Чи подібні будь-які два з них? Напишіть кілька відповідних пропорцій.



Мал. 119



Мал. 120

407. На малюнку 120 $AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2$. Напишіть пропорції, що починаються відношеннями:
$OA : OB$, $OA : AB$, $AB : A_1B_1$, $A_2B_2 : OB_2$.

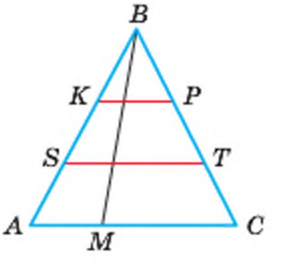
408. З точки D гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC опущено перпендикуляр DE на катет BC. Доведіть, що $\triangle ABC \sim \triangle DBE$.

409. На сторонах AB і BC трикутника ABC взято точки M і K такі, що $MK \parallel AC$. Знайдіть відношення $AB : MB$, $MK : AC$ і $BK : KC$, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 21 см, а периметр трикутника MBK дорівнює 7 см.

410. Скільки пар подібних трикутників зображено на малюнку 121?

411. У трикутнику проведено всі його середні лінії. Скільки утворилося трикутників, подібних даному трикутнику?

412. Пряма MN, паралельна стороні AB $\triangle ABC$, ділить його сторону AC у відношенні $AM : MC = 3 : 5$. Знайдіть відношення периметрів утворених трикутників.



Мал. 121

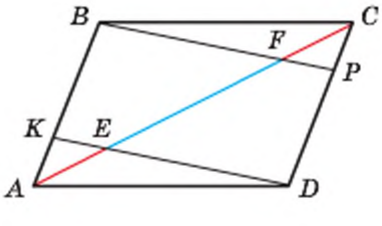
Б

413. K і P — середини сторін BC і AD паралелограма $ABCD$. Доведіть, що: а) $AK \parallel CP$; б) відрізки AK і CP ділять діагональ BD на 3 рівні частини; в) $\triangle ABK \sim \triangle CDP$.

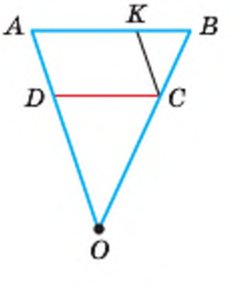
414. Основи AD і BC рівнобічної трапеції дорівнюють 30 см і 20 см. Прямі AB і CD перетинаються в такій точці P, що $PB = 10$ см. Знайдіть довжини бічних сторін трапеції.

415. KP — середня лінія $\triangle ABC$, а MH — середня лінія $\triangle KBP$. Кожен із цих відрізків паралельний AC. Як відносяться відрізки MH і AC, AB і MB? Як відносяться периметри трикутників ABC і MBH?

416. На сторонах AB і CD паралелограма $ABCD$ взято точки K і P такі, що $AK = CP = 0{,}25\ AB$. Як відносяться відрізки, на які діагональ AC паралелограма ділиться прямими KD і BP (мал. 122)? Знайдіть відношення $KE : BF$.



Мал. 122

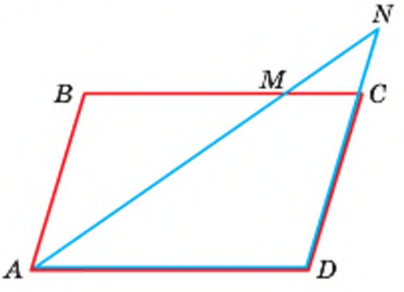


Мал. 123

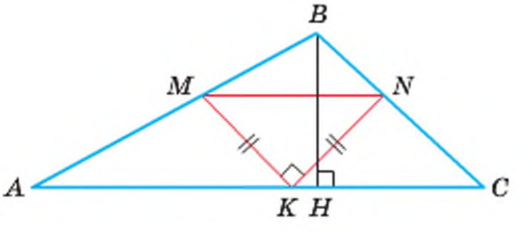
417. На малюнку 123 $AB \parallel DC$ і $KC \parallel AD$. Доведіть, що $\triangle KCB \sim \triangle DOC$.

418. Зобразіть прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см. Паралельно гіпотенузі проведіть пряму так, щоб периметр утвореного трикутника був у 2 рази менший. Чому дорівнюють катети цього трикутника?

419. Через точку M, взяту на стороні BC паралелограма $ABCD$, проведено пряму AM (мал. 124), яка перетинає пряму CD у точці N, $AM : MN = 5 : 2$. Знайдіть периметри $\triangle AND$ і $\triangle MNC$, якщо їх різниця дорівнює 16 см.



Мал. 124



Мал. 125

420. У $\triangle ABC$ вписано прямокутний рівнобедрений $\triangle MKN$ так, що гіпотенуза $MN \parallel AC$, а $K \in AC$ (мал. 125). Знайдіть MN, якщо $AC = 30$ см, а висота $BH = 10$ см.

421. На кожній стороні ромба лежить по одній вершині квадрата, сторони якого паралельні діагоналям ромба. Знайдіть сторону квадрата, якщо діагоналі ромба дорівнюють 8 см і 12 см.

422. На малюнку 126, *а* зображено квадрат. Поділимо його на 4 рівних квадрати, а потім один із утворених квадратів ще раз поділимо на 4 менших квадрати. Повторимо такі самі дії, щоб вийшли квадрати, як на малюнку 126, *б*. Скільки квадратів зображено на малюнку 126, *б*? Чим вони відрізняються? Чи будуть подібними такі квадрати? У скільки разів периметр найбільшого квадрата більший за периметр найменшого квадрата?

а *б*

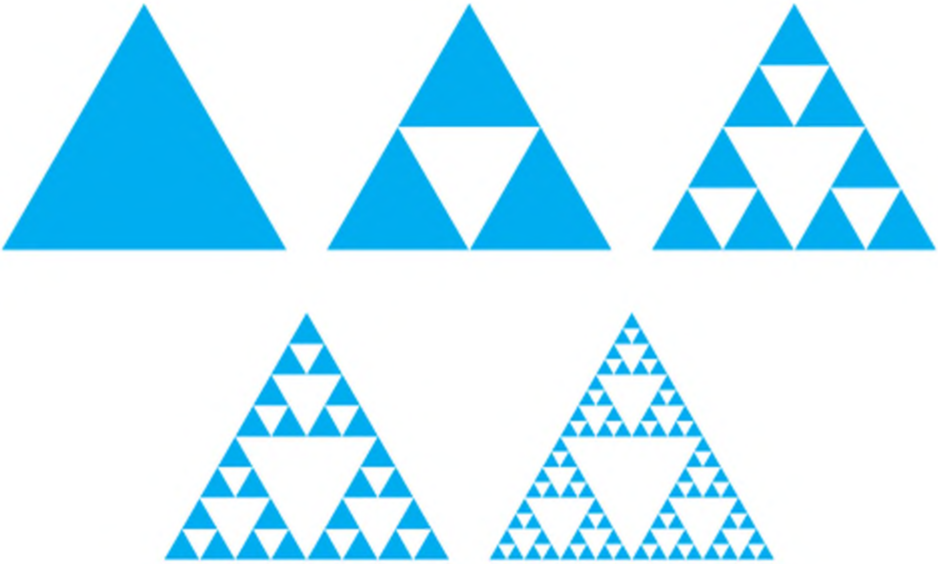
Мал. 126

423. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 16 см і 12 см, а бічна сторона — 7 см. На скільки треба подовжити бічні сторони, щоб вони перетнулися?

424. Основи трапеції дорівнюють 48 см і 72 см, а бічні сторони — 24 см і 22 см. На скільки треба подовжити кожну з бічних сторін, щоб вони перетнулися?

Практичне завдання

425. Розгляньте малюнок 127, на якому зображено послідовну побудову *трикутника (решітки) Серпінського**. Подумайте і встановіть алгоритм побудови такого трикутника. Спробуйте самостійно намалювати такий трикутник з найбільшою кількістю «отворів». Скільки синіх трикутників утворюється на кожному етапі? Доведіть, що всі сині трикутники подібні між собою.



Мал. 127

Задачі для повторення

426. Відрізок завдовжки 20 см поділили на частини, пропорційні числам 3, 4, 5 і 8. Знайдіть довжину кожної частини.

427. Поділіть даний відрізок на частини, пропорційні числам 2, 5 і 7.

428. У трапеції $ABCD$ $MN \parallel AD$, $M \in AB$, $N \in CD$. Знайдіть AM і BM, якщо $AB = 24$ см і $CN : ND = 5 : 7$.

429. Точка M — основа перпендикуляра, опущеного з точки перетину діагоналей ромба $ABCD$ на сторону BC. Знайдіть відношення $BM : MC$, якщо $\angle B = 60°$.

430. Діагоналі паралелограма дорівнюють 10 см і 14 см. Знайдіть периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін паралелограма.

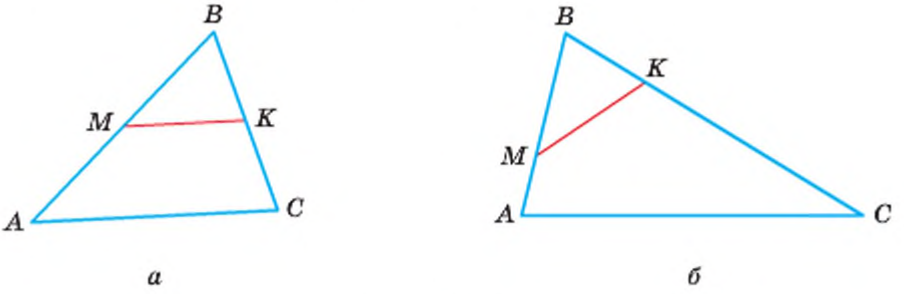
* **Ва́цлав Серпі́нський** (1882–1969) — видатний польський математик.

§ 10 Ознаки подібності трикутників

Ви вже знаєте, що трикутники подібні, якщо їх кути рівні, а сторони пропорційні. Чи завжди потрібно перевіряти виконання всіх цих умов для того, щоб довести подібність двох трикутників? Виявляється, що ні, не завжди.

Розглянемо трикутники ABC і MBK (мал. 128, *а*). Якщо $MK \parallel AC$, то за основною теоремою про подібність трикутників $\triangle ABC \sim \triangle MBK$.

А якщо MK не паралельна AC. Чи можуть у цьому випадку бути подібними трикутники ABC і MBK (мал. 128, *б*)?



Мал. 128

Щоб відповісти на це та багато інших запитань щодо подібності трикутників, використовують ознаки подібності трикутників.

Ознаки подібності трикутників аналогічні ознакам рівності трикутників.

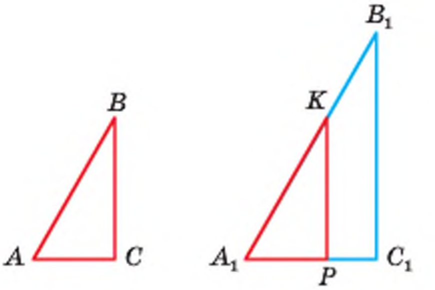
ТЕОРЕМА 20

(Перша ознака подібності трикутників.) **Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай дано трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$ і $\angle B = \angle B_1$. Доведемо, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

За такої умови розглядувані трикутники можуть бути рівними, а рівні трикутники — подібні. Якщо дані трикутники нерівні і, наприклад, другий більший за перший, то на стороні A_1B_1 відкладемо відрізок A_1K, що дорівнює AB (мал. 129).



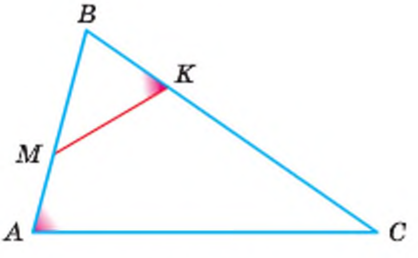
Мал. 129

Провівши відрізок KP, паралельний B_1C_1, утворимо трикутник A_1KP, що дорівнює $\triangle ABC$. Адже $A_1K = AB$, $\angle A_1 = A$, $\angle A_1KP = \angle B_1 = \angle B$.

За теоремою про подібні трикутники $\triangle A_1B_1C_1$ подібний $\triangle A_1KP$, а він дорівнює $\triangle ABC$. Отже, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. □

Розглянемо трикутники, зображені на малюнку 130. Кут B у них спільний. Якщо, наприклад, $\angle BAC = \angle MKB$, то $\triangle ABC$ подібний $\triangle KBM$ за першою ознакою.

Можна довести ще дві ознаки **подібності трикутників**. Спробуйте довести їх самостійно.



Мал. 130

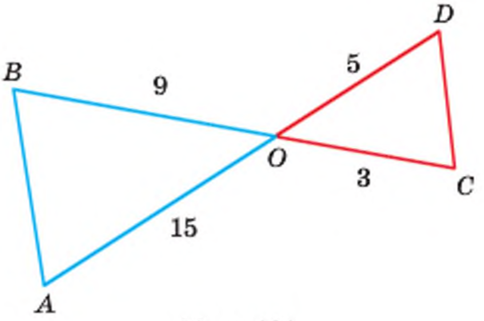
ТЕОРЕМА 21

(Друга ознака подібності трикутників.) **Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого і кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні.**

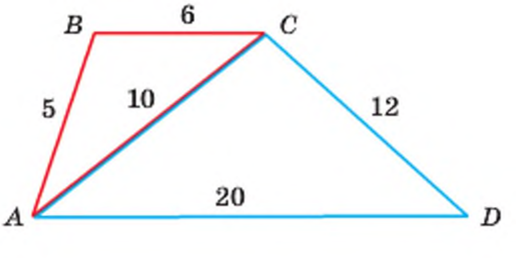
ТЕОРЕМА 22

(Третя ознака подібності трикутників.) **Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого, то такі трикутники подібні.**

Чи будуть подібними трикутники, зображені на малюнку 131?



Мал. 131



Мал. 132

Розглянемо $\triangle AOB$ і $\triangle DOC$. $\angle AOB = \angle COD$ як вертикальні. $AO : OD = 15 : 5 = 3 : 1$, $BO : OC = 9 : 3 = 3 : 1$, тому $AO : OD = BO : OC$. Отже, $\triangle AOB$ і $\triangle DOC$ подібні за другою ознакою.

Розглянемо ще один приклад.

Чи подібні трикутники ABC і ACD, зображені на малюнку 132?

Оскільки $AB : AC = BC : CD = AC : AD = 1 : 2$, то сторони трикутників пропорційні. Отже, $\triangle ABC$ і $\triangle ACD$ подібні за третьою ознакою.

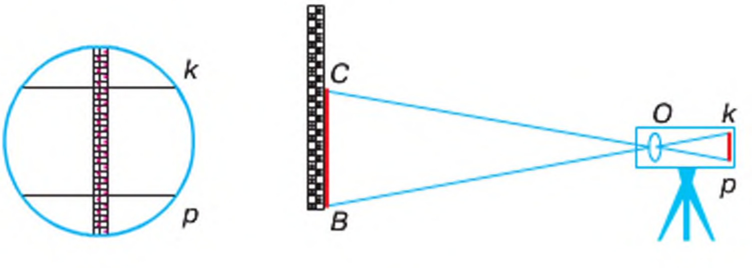
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Мал. 133

Властивості подібних трикутників використовуються в багатьох геодезичних приладах, зокрема — в далекомірах. Коли створюють план, прокладають дорогу, будують греблю, завод чи будь-яку іншу велику споруду, доводиться робити чимало вимірювань відстаней. Тепер це найчастіше роблять, користуючись далекомірами.

Уявіть, що геодезист має визначити відстань між пунктами A, у якому він перебуває, і B, у якому помічник тримає вертикальну рейку, поділену на дециметри і сантиметри (мал. 133). В об'єктиві зорової труби, в яку дивиться геодезист, є дві горизонтальні тонкі лінії k і p (мал. 134). Якщо між ними вміщається, наприклад, 97 см рейки, яку тримає його помічник, це означає, що шукана відстань між ними дорівнює 97 м. Бо трикутники OBC і OKP, схематично зображені на малюнку, подібні, і коефіцієнт подібності підібрано так, щоб кількість сантиметрів геодезичної рейки, що вміщуються в об'єктиві між лініями k і p, дорівнювала кількості метрів у відстані AB. При цьому додається певна стала у кілька сантиметрів.

Завдяки сучасним далекомірам можна визначати подібні відстані з точністю до сантиметра. Вимірювання таких відстаней безпосередньо мірною стрічкою чи рулеткою дає більшу похибку.



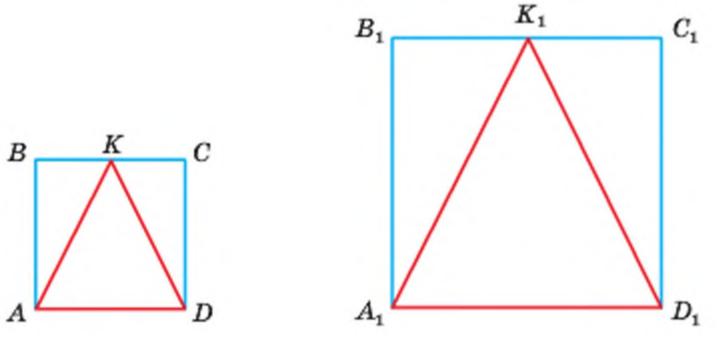
Мал. 134

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Які трикутники називають подібними?
2. Наведіть приклади не подібних трикутників.
3. Сформулюйте ознаку подібності трикутників за двома кутами.
4. Сформулюйте ознаку подібності трикутників за двома сторонами і кутом між ними.
5. Сформулюйте ознаку подібності трикутників за трьома сторонами.

Виконаємо разом

1 $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ — два квадрати (мал. 135). K і K_1 — середини їх сторін BC і B_1C_1. Чи подібні трикутники ABK і $A_1B_1K_1$? А трикутники AKD і $A_1K_1D_1$?



Мал. 135

- Кути B і B_1 трикутників ABK і $A_1B_1K_1$ рівні, бо прямі. $BK : BA = 1 : 2$ і $B_1K_1 : B_1A_1 = 1 : 2$. Тому за другою ознакою подібності $\triangle ABK \sim \triangle A_1B_1K_1$. З доведеного випливає, що $AK : A_1K_1 = AB : A_1B_1$. А оскільки $AK = KD$, $A_1K_1 = K_1D_1$, $AB = AD$ і $A_1B_1 = A_1D_1$, то $AK : A_1K_1 = AD : A_1D_1 = KD : K_1D_1$. За третьою ознакою подібності трикутників $\triangle AKD \sim \triangle A_1K_1D_1$.

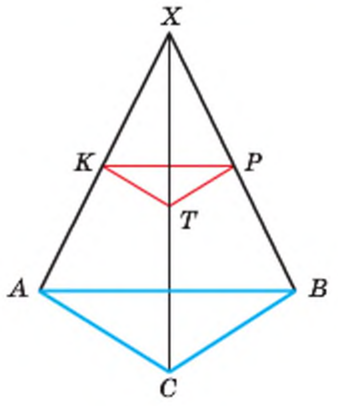
2 Нехай ABC — довільний трикутник, X — довільна точка, а K, P, T — середини відрізків XA, XB, XC (мал. 132). Доведіть, що $\triangle KPT \sim \triangle ABC$.

- Відрізки KP, PT, TK — середні лінії трикутників XAB, XBC, XCA. Тому

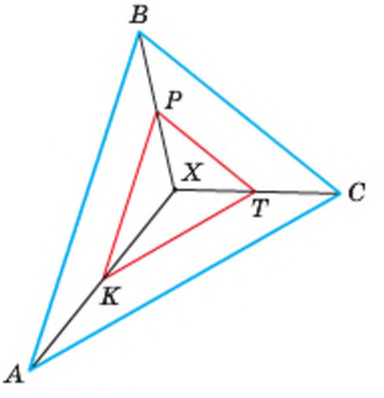
$$KP : AB = PT : BC = TK : AC = 1 : 2.$$

Сторони $\triangle ABC$ пропорційні сторонам $\triangle KPT$, тому ці трикутники подібні (за третьою ознакою).

На малюнку 136 точка X лежить поза межами трикутника ABC. Проте вона може бути і всередині трикутника (мал. 137), і на його стороні чи будь-де, навіть поза площиною ABC.



Мал. 136



Мал. 137

Задачі і вправи

Виконайте усно

431. Чи подібні будь-які два рівносторонні трикутники? Чому?

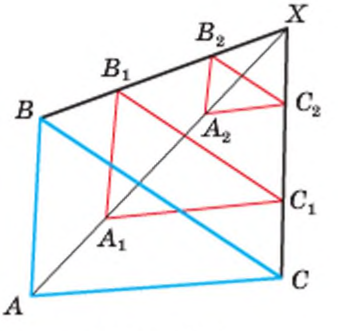
432. Доведіть, що два будь-які прямокутні рівнобедрені трикутники подібні.

433. K, P, M — середини сторін $\triangle ABC$. Чи подібні трикутники PMK і ABC? Чому?

434. Довжини сторін одного трикутника дорівнюють a, b, c, а другого — $3a$, $3b$ і $3c$. Чи подібні ці трикутники?

435. Чи подібні два прямокутні трикутники, якщо один із них має кут $30°$, а другий — $60°$?

436. ABC — довільний трикутник, а X — точка (мал. 138). A_1 і A_2, B_1 і B_2, C_1 і C_2 ділять відрізки XA, XB, XC на 3 рівні частини. Доведіть, що кожний із трикутників $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ подібний $\triangle ABC$.



Мал. 138

А

437. Чи подібні трикутники ABC і KPT, якщо $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$, $\angle P = 60°$, $\angle T = 70°$?

438. Доведіть, що **два рівнобедрені трикутники подібні, якщо кут при основі одного з них дорівнює куту при основі другого трикутника.** А якщо рівні їхні кути при вершинах?

439. Чи подібні два трикутники, якщо їхні сторони мають довжини:
1) 2 см, 3 см, 4 см і 3 см, 4 см, 5 см;
2) 3 см, 4 см, 6 см і 9 дм, 14 дм, 18 дм;
3) 2 см, 4 см, 3 см і 10 м, 15 м, 20 м?

440. Сторони одного трикутника дорівнюють 7 м, 9 м і 11 м. Знайдіть сторони трикутника, подібного даному, якщо його найменша сторона дорівнює 28 м.

441. У двох рівнобедрених трикутниках кути при вершині мають по 52°. Чи подібні ці трикутники?

442. Кут при основі одного рівнобедреного трикутника дорівнює 50°. Кут при вершині другого рівнобедреного трикутника дорівнює 80°. Чи подібні ці трикутники?

443. Чи подібні прямокутні трикутники, в одного з яких є гострий кут 42°, а в другого — гострий кут 48°?

444. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а бічна сторона — 18 см. Визначте периметр подібного трикутника, якщо його бічна сторона дорівнює 6 см.

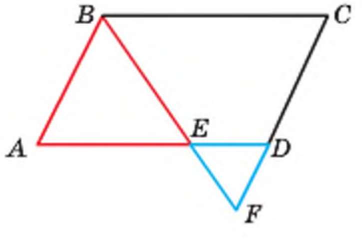
445. Всередині даного трикутника міститься другий трикутник, сторони якого паралельні сторонам даного. Чи подібні ці трикутники?

446. Дано трикутник ABC зі сторонами $AB = 40$ см і $AC = 56$ см. На AB відкладено відрізок $AD = 15$ см і проведено пряму $DE \parallel AC$. Визначте: а) DE; б) $EC : BC$.

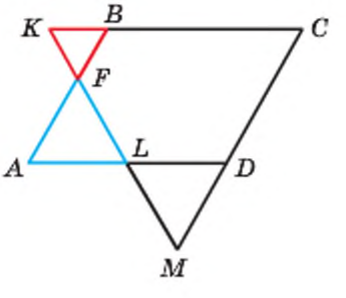
447. Дано $ABCD$ — паралелограм (мал. 139). Доведіть, що:
а) $\triangle ABE \sim \triangle DFE$;
б) $\triangle BCF \sim \triangle EAB$.

448. Дано $ABCD$ — паралелограм (мал. 140). Доведіть, що:
а) $\triangle KBF \sim \triangle LAF$;
б) $\triangle KBF \sim \triangle LDM$;
в) $\triangle AFL \sim \triangle CMK$.

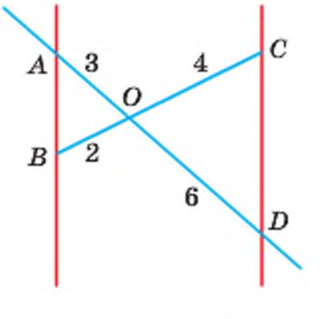
449. Користуючись малюнком 141, доведіть, що $AB \parallel CD$.



Мал. 139



Мал. 140



Мал. 141

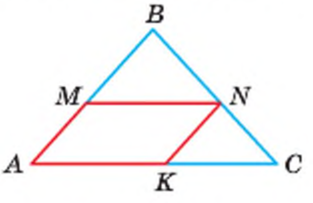
450. Сторони трикутника пропорційні числам 3, 5 і 6. Визначте сторони подібного йому трикутника, у якого:

а) сума найбільшої і найменшої сторін дорівнює 18 см;
б) різниця найбільшої і найменшої сторін дорівнює 27 см;
в) середнє арифметичне сторін дорівнює 21 см;
г) периметр дорівнює 28 см.

451. У $\triangle ABC$ $AB = 15$ см, $BC = 9$ см, $AC = 12$ см. Із точки M сторони AB проведено прямі MN і MK ($N \in BC$, $K \in AC$), паралельні AC і BC. Знайдіть MN, MK, AK, якщо $AM = 5$ см.

452. Основи трапеції дорівнюють 16 см і 20 см, а діагоналі 12 см і 18 см. Знайдіть відрізки, на які діагоналі трапеції діляться в точці перетину.

453. У трикутник вписано паралелограм, кут якого збігається з кутом трикутника (мал. 142). Сторони трикутника, що утворюють цей кут, дорівнюють 6 см і 9 см, а відповідні паралельні їм сторони паралелограма пропорційні числам 2 і 3. Знайдіть сторони паралелограма.



Мал. 142

454. У трикутник вписано паралелограм, кут якого збігається з кутом трикутника (мал. 142). Сторони трикутника, що утворюють цей кут, дорівнюють 6 см і 15 см, а різниця відповідних паралельних їм сторін паралелограма дорівнює 8 см. Знайдіть сторони паралелограма.

Б

455. Пряма, що проходить через точку перетину діагоналей трапеції, ділить одну з її основ у відношенні $m : n$. У якому відношенні вона ділить другу основу?

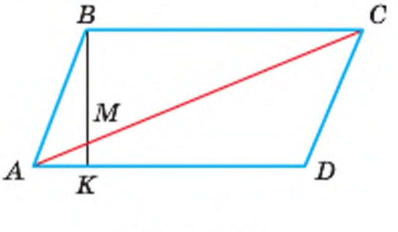
456. Чи може пряма, не паралельна жодній стороні трикутника, відтинати від нього трикутник, подібний даному?

457. На сторонах AC і AB $\triangle ABC$ позначено точки K і P такі, що $\angle AKP = \angle B$. Доведіть, що $\triangle AKP \sim \triangle ABC$.

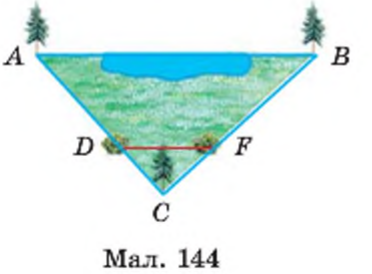
458. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо бісектриса кута при основі відтинає від нього трикутник, подібний даному.

459. Сторону AD паралелограма $ABCD$ поділено на n рівних частин і першу точку поділу K сполучено з вершиною B (мал. 143). У якому відношенні відрізок BK ділить діагональ AC?

460. Знайдіть за малюнком 144 відстань AB, якщо $AC = 300$ м, $DC = 10$ м, $BC = 360$ м, $CF = 12$ м, $DF = 13$ м.



Мал. 143



Мал. 144

461. У трикутнику ABC проведено відрізок DE так, що $DE \parallel AC$, $D \in AB$, $E \in BC$. Знайдіть DE, якщо:
а) $AB = c$, $AC = b$, $DB = m$;
б) $AC = b$, $AB = c$, $AD = n$.

462. Доведіть, що в подібних трикутниках відповідні висоти (бісектриси, медіани) пропорційні відповідним сторонам.

463. У $\triangle ABC$ $AC = 10$ см, $BC = 12$ см. На стороні BC взято точку M так, що $\angle AMC = \angle BAC$. Знайдіть MB і MC.

464. У $\triangle ABC$ $AB = 18$ см, $BC = 16$ см, $AC = 24$ см. На сторонах AB і BC взято точки M і N так, що $\angle MNB = \angle BAC$ і $BN : NC = 3 : 5$. Знайдіть MN.

465. Бічні сторони трапеції дорівнюють 8 см і 12 см, а більша основа — 27 см. Знайдіть довжину меншої основи, якщо діагональ ділить трапецію на два подібні трикутники.

466. Основи трапеції дорівнюють a і b. У якому відношенні діляться діагоналі трапеції точкою їх перетину?

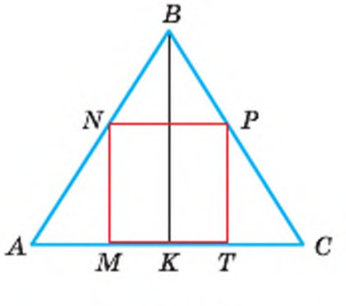
467. O — точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$, $OB = 14$ см, $OD = 18$ см, $AC = 24$ см. Знайдіть довжини відрізків OA і OC.

468. У трапеції точка перетину діагоналей ділить одну з діагоналей на частини 12 см і 16 см, а частина другої діагоналі дорівнює 8 см. Визначте другу діагональ і меншу основу, якщо більша основа дорівнює 20 см.

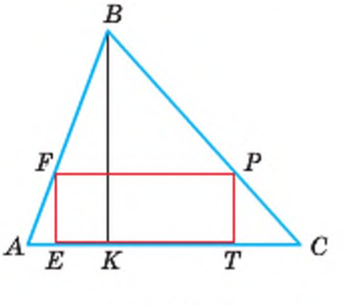
469. На скільки треба продовжити бічну сторону трапеції завдовжки 12 см, щоб вона перетнула продовження другої бічної сторони, якщо основи трапеції пропорційні числам 5 і 9?

470. Знайдіть відстані від точки перетину діагоналей до основ трапеції, які дорівнюють 8 см і 12 см, якщо висота трапеції дорівнює 15 см.

471. У рівнобедрений $\triangle ABC$ з основою $AC = 10$ см і висотою $BK = 6$ см вписано квадрат (мал. 145). Знайдіть периметр квадрата.



Мал. 145



Мал. 146

472. У $\triangle ABC$ зі стороною $AC = 27$ см і висотою $BK = 30$ см вписано прямокутник (мал. 146). Знайдіть сторони прямокутника, якщо вони пропорційні числам 5 і 9.

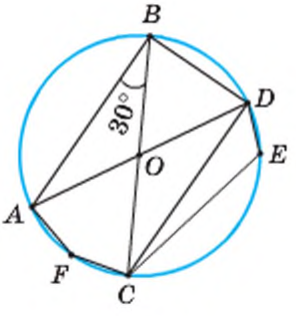
Практичне завдання

473. Виріжте з паперу два подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. Розташуйте їх на столі так, щоб прямі AA_1, BB_1, CC_1 перетиналися в одній точці. Скількома способами це можна зробити?

Задачі для повторення

474. На малюнку 147 зображено коло з центром у точці O. Градусна міра кута ABC дорівнює $30°$. Установіть відповідність між кутами (1–4) і градусними мірами цих кутів (А–Д).

1 $\angle AOC$	**А** $30°$
2 $\angle ABD$	**Б** $150°$
3 $\angle CED$	**В** $90°$
4 $\angle AFC$	**Г** $60°$
	Д $120°$



Мал. 147

475. Радіус одного кола дорівнює 5 см, а діаметр другого 14 см. Чи подібні ці кола? Якщо так, то знайдіть коефіцієнт подібності.

476. Визначте висоту дерева, якщо довжина тіні від нього дорівнює 25 м, а довжина тіні людини зростом 1,8 м дорівнює 3,6 м.

477. Знайдіть радіус кола, вписаного у прямокутний трикутник зі сторонами 6 см, 8 см і 10 см.

478. Зовнішні кути трикутника пропорційні числам 2, 3 і 4. Знайдіть внутрішні кути трикутника.

§ 11 Застосування подібності трикутників

Властивості подібності трикутників можна застосовувати до доведення теорем і розв'язування багатьох задач. Розглянемо, як на основі ознак подібності можна доводити важливі властивості бісектрис і медіан трикутника, хорд кола.

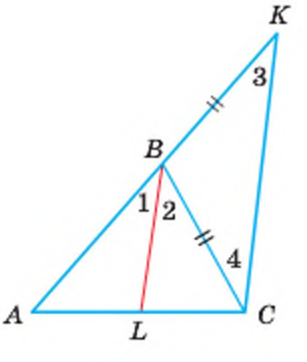
ТЕОРЕМА 23

Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай ABC — довільний трикутник, а BL — його бісектриса (мал. 148). Покажемо, що $AL : LC = AB : BC$.

Проведемо пряму CK, паралельну BL, до перетину з прямою AB у деякій точці K. Занумеруємо кути, як на малюнку. Тоді $\angle 1 = \angle 3$, як відповідні кути при паралельних прямих BL і KC і січній AK, $\angle 2 = \angle 4$, як внутрішні різносторонні кути при тих самих паралельних прямих і січній BC. Оскільки $\angle 1 = \angle 2$, то і $\angle 3 = \angle 4$, тобто трикутник BKC — рівнобедрений, $BK = BC$.



Мал. 148

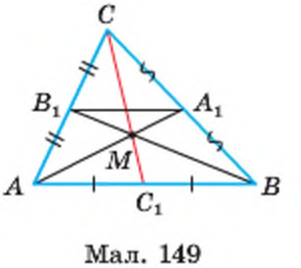
За узагальненою теоремою Фалеса $AL : LC = AB : BK$. Замінивши в пропорції BK рівним йому відрізком BC, матимемо: $AL : LC = AB : BC$. □

ТЕОРЕМА 24

Усі три медіани трикутника проходять через одну точку і діляться цією точкою у відношенні 1 : 2.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай медіани AA_1 і BB_1 трикутника ABC перетинаються в точці M (мал. 149). A_1B_1 — середня лінія $\triangle ABC$, тому $A_1B_1 \parallel AB$ і $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$. $\triangle MAB \sim \triangle MA_1B_1$ за двома кутами, звідки $A_1M : MA = B_1M : MB = A_1B_1 : AB = 1 : 2$. Отже, медіани AA_1 і BB_1 точкою перетину діляться у відношенні $1 : 2$.



Мал. 149

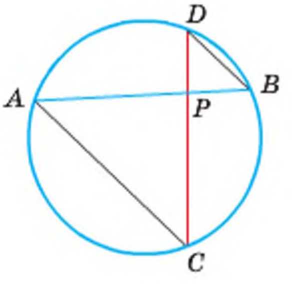
Медіани AA_1 і CC_1 точкою перетину також діляться у відношенні 1 : 2. А точка, яка ділить медіану AA_1 у відношенні 1 : 2, починаючи від основи, одна — точка M. Отже, і медіана CC_1 проходить через точку M і ділиться нею у відношенні 1 : 2. □

ТЕОРЕМА 25

Добутки відрізків хорд одного кола, що перетинаються, рівні.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай хорди AB і CD перетинаються в точці P (мал. 150). Проведемо відрізки AC і BD. За властивістю вписаних кутів $\angle A = \angle D$ і $\angle C = \angle B$, тому трикутники ACP і DBP подібні. Отже, $AP : DP = CP : BP$, звідки $AP \cdot BP = CP \cdot DP$. А це й треба було довести. □

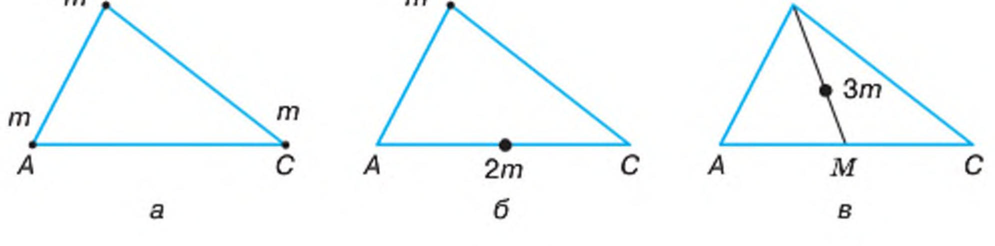


Мал. 150

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Точку перетину медіан трикутника називають *центроїдом* трикутника. Нерідко стверджують, що центроїд трикутника є його центром мас. Це твердження потребує уточнення. Бажано розрізняти три ситуації: 1) центр трьох рівних мас, зосереджених у вершинах трикутника; 2) центр мас трикутної пластинки (частини площини, обмеженої замкненою ламаною із трьох ланок); 3) центр мас трикутника як замкненої ламаної із трьох ланок.

У першому випадку (мал. 151, *а*, *б*, *в*) дві рівні маси, розташовані у вершинах A і C, можна замінити удвічі більшою масою, зосередженою на середині сторони AC. А маси m і $2m$, розміщені на кінцях медіани трикутника, можна замінити масою $3m$ у точці, яка ділить цю медіану у відношенні 1 : 2, тобто в центроїді трикутника.

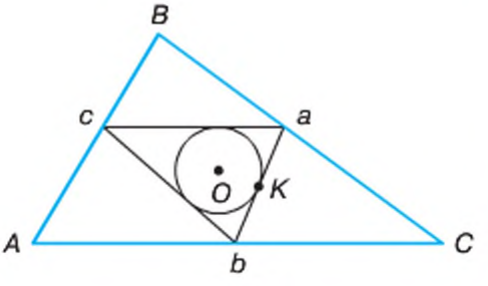


Мал. 151

Центр мас трикутної пластинки (другий випадок) також лежить у центроїді трикутника. Переконайтеся в цьому, розбивши уявно трикутник на тоненькі смужки паралельно сторонам трикутника. Центр мас кожної смужки буде розміщений в її середині, а всі разом — на відповідній медіані трикутника. Оскільки трикутник має один центр мас і він лежить на кожній із медіан трикутника, то це — центроїд трикутника.

У третьому випадку (каркасний трикутник) центр мас трикутника збігається з його центроїдом тільки тоді, коли цей трикутник рівносторонній. Розглянемо загальний випадок.

Якщо сторони трикутника дорівнюють a, b, c, то такими можна вважати і їхні маси, зосереджені на серединах сторін. Маси a і b можна замінити однією масою $a + b$, розміщеною на середній лінії трикутника у такій точці K, яка ділить середню лінію на частини, обернено пропорційні масам a і b, тобто в основі бісектриси $\triangle abc$, проведеної з вершини c. Використовуючи властивості бісектрис трикутника для інших кутів, покажіть, що центр мас каркасного трикутника лежить у центрі кола, вписаного в його серединний трикутник (мал. 152).



Мал. 152

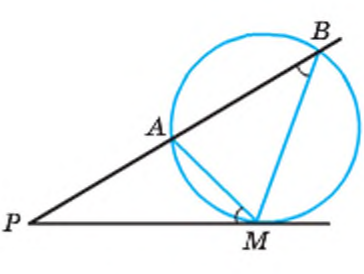
Запитання і завдання для самоконтролю

1. Які два трикутники називаються подібними?
2. Сформулюйте ознаки подібності трикутників.
3. Сформулюйте теорему про властивість бісектриси трикутника.
4. Сформулюйте теорему про властивість медіан трикутника.
5. Сформулюйте теорему про властивість хорд, що перетинаються.

Виконаємо разом

1 **Якщо з однієї точки P, що поза колом, провести до кола дотичну PM (M — точка дотику) і січну, яка перетинає коло в точках A і B, то $PA \cdot PB = PM^2$.** Доведіть (мал. 153).

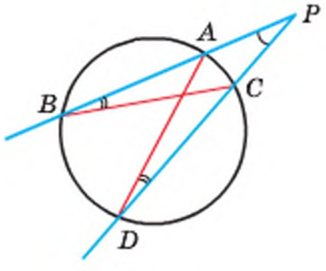
- Сполучивши точку M з A і B відрізками, одержимо трикутники PAM і PMB. Вони подібні, бо мають спільний кут P і $\angle B = \angle AMP$. Отже, $PA : PM = PM : PB$, звідки $PA \cdot PB = PM^2$.



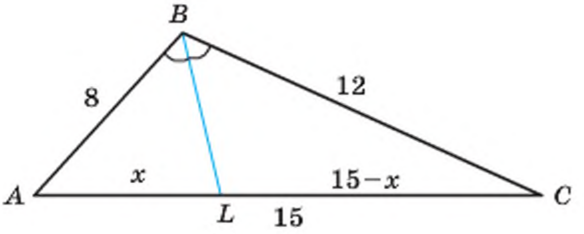
Мал. 153

2 **Якщо з точки *P*, що поза колом, провести до кола дві січні, які перетинають коло в точках *A*, *B* та *C*, *D* (мал. 154), то $AP \cdot BP = CP \cdot DP$.**

● Трикутник PAD подібний трикутнику PCB, бо мають спільний кут P і $\angle B = \angle D$, як вписані, що спираються на одну дугу. Тоді $AP : PC = PD : PB$, звідки $AP \cdot PB = PC \cdot PD$.



Мал. 154



Мал. 155

3 Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 12 см і 15 см. Знайдіть, на які відрізки бісектриса трикутника ділить його найбільшу сторону.

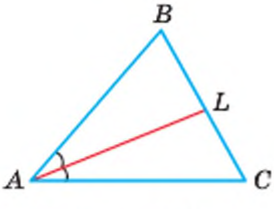
● Нехай $AL = x$, тоді $CL = 15 - x$ (мал. 155). За властивістю бісектриси кута трикутника $AL : CL = AB : BC$, тобто $\frac{x}{15-x} = \frac{8}{12}$ або $\frac{x}{15-x} = \frac{2}{3}$.

Звідси $3x = 2(15 - x)$. Маємо:
$3x = 30 - 2x$, $5x = 30$, $x = 6$.
Отже, $AL = 6$ см, $CL = 9$ см.

Задачі і вправи

Виконайте усно

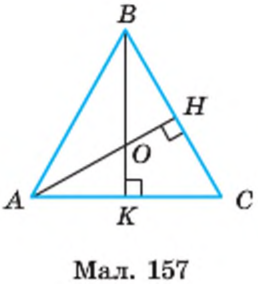
479. AL — бісектриса $\angle A$ $\triangle ABC$ і $AB = 0{,}6AC$ (мал. 156). Знайдіть:
а) відношення $BL : LC$;
б) відношення $BL : BC$;
в) BL, якщо $CL = 15$ см;
г) CL, якщо $BL = 12$ см.



Мал. 156

480. Порівняйте відрізки, на які бісектриса BM $\triangle ABC$ ділить сторону AC, якщо $AB > BC$.

481. У якому відношенні діляться висоти рівностороннього трикутника точкою перетину (мал. 157)?



Мал. 157

482. Чи можуть бісектриси рівностороннього трикутника точкою перетину ділитися на частини: а) 2 см і 8 см; б) 5 см і 10 см?

483. Через точку перетину медіан трикутника проведено пряму, паралельну одній зі сторін. У якому відношенні ця пряма ділить інші сторони трикутника?

А

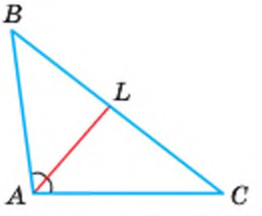
484. AL — бісектриса $\angle A$ $\triangle ABC$ (мал. 158). Знайдіть:

а) BL і LC, якщо $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $AC = 12$ см;

б) AC, якщо $AB = 16$ см і $BL : LC = 4 : 5$;

в) $P_{\triangle ABC}$, якщо $BL = 3$ см, $CL = 5$ см, $AC - AB = 4$ см;

г) BC, якщо $AB = 15$ см, $AC = 12$ см і BL на 2 см більша за CL.



Мал. 158

485. Чи є BK бісектрисою $\triangle ABC$, якщо $AB = 15$ см, $BC = 20$ см, $AK = 12$ см, $CK = 16$ см?

486. Бісектриса одного кута прямокутника $ABCD$ ділить діагональ на відрізки, пропорційні числам 5 і 9. Знайдіть сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 140 см.

487. Діагональ AC рівнобічної трапеції $ABCD$ є бісектрисою гострого кута A. У якому відношенні вона ділить другу діагональ і висоту BH, якщо основи трапеції дорівнюють 6 см і 10 см?

488. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 24 см, а бічна сторона 20 см. Знайдіть, у якому відношенні бісектриса кута при основі ділить висоту, проведену до основи. Знайдіть довжини цих відрізків, якщо висота дорівнює 16 см.

489. У рівнобедреному $\triangle ABC$ $AB = BC = 10$ см, $AC = 12$ см. Знайдіть радіус вписаного кола, якщо висота BH дорівнює 8 см.

490. У рівнобедреному трикутнику центр вписаного кола ділить висоту, проведену до основи, у відношенні 5 : 12, а бічна сторона дорівнює 36 см. Знайдіть периметр трикутника.

491. Висота рівностороннього трикутника дорівнює 12 см. Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл.

492. У трикутнику зі сторонами 12 см, 15 см і 21 см через точку перетину медіан проведено пряму, паралельну одній зі сторін. Обчисліть сторони утвореного трикутника.

493. Медіани трикутника дорівнюють 12 см, 15 см і 18 см. Знайдіть довжини частин, на які вони діляться точкою їх перетину.

494. Хорди AB і CD перетинаються в точці M. Знайдіть CM, якщо $AM = 8$ см, $BM = 3$ см, $DM = 6$ см.

495. Хорди AB і CD перетинаються в точці F так, що $FB - FC = 5$ см, $AF = 10$ см, $FD = 12$ см. Знайдіть довжини хорд.

496. Хорди AB і CD перетинаються в точці M, яка ділить хорду AB на відрізки, пропорційні числам 1 і 3. Знайдіть їх довжини, якщо $CM = 9$ см, $DM = 12$ см.

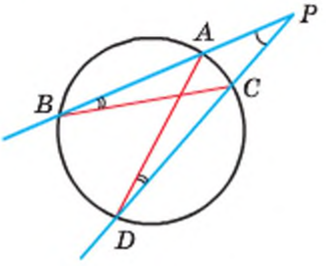
497. Хорди MN і EF перетинаються в точці K, яка ділить хорду MN навпіл. Знайдіть MN, якщо $KE = 4$ см, $KF = 16$ см.

498. Із точки до кола проведено січну і дотичну. Визначте довжину відрізка січної, якщо довжина відрізка дотичної до точки дотику дорівнює 12 см, а зовнішня частина січної 8 см.

499. Із точки до кола проведено січну і дотичну. Знайдіть довжину відрізка дотичної до точки дотику, якщо внутрішня частина січної дорівнює 9 см, а зовнішня частина на 7 см більша.

500. Із точки до кола проведено січну і дотичну. Відношення внутрішньої і зовнішньої частин січної дорівнює 8 : 1, а довжина дотичної 12 см. Знайдіть довжину січної.

501. Із точки P до кола проведено дві січні, які перетинають коло у точках A, B та C, D. Знайдіть PD і CD, якщо $PA = 4$ см, $PB = 10$ см, $PC = 5$ см (мал. 159).



Мал. 159

Б

502. Бісектриси кутів B і C прямокутника $ABCD$ перетинаються в точці K, $K \in AD$. а) Знайдіть, на які відрізки бісектриса кута B ділить діагональ AC, якщо $AC = 18$ см; б) доведіть, що бісектриси кутів B і D ділять діагональ AC на три рівні відрізки.

503. У тупокутний трикутник ABC (кут B — тупий) вписано ромб $MBKP$ так, що кут B — спільний, а точка P ділить сторону AC на відрізки 10 см і 16 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр 65 см.

504. У прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$) вписано квадрат $CMNK$ так, що точки M і K лежать на катетах, а точка N — на гіпотенузі. Знайдіть AN і BN, якщо $AC = 21$ см, $BC = 28$ см, $AB = 35$ см.

505. У $\triangle ABC$ вписано ромб $AMNK$ так, що $\angle A$ в них спільний і $N \in BC$. Точка N ділить сторону BC на відрізки, різниця яких дорівнює 4 см. Знайдіть BC, якщо $AB = 10$ см, $AC = 15$ см.

506. ***Відкрита задача.*** У $\triangle ABC$ зі сторонами 10 см і 12 см вписано чотирикутник $AMNK$ так, що кут A у них спільний і $M \in AB$, $N \in BC$, $K \in AC$, $MN \parallel AC$, $NK \parallel AB$. Знайдіть периметр чотирикутника $MNPK$, якщо він є ... , а про його сторони відомо таке: ... .

507. E — середина дуги BC кола, описаного навколо $\triangle ABC$ зі сторонами $AB = 15$ см, $BC = 18$ см, $AC = 12$ см. Знайдіть відрізки, на які пряма AE ділить BC.

508. У трикутник зі сторонами 10 см, 14 см і 18 см вписано півколо, яке дотикається до двох сторін трикутника і центр якого лежить на більшій стороні. Знайдіть, на які частини центр кола ділить більшу сторону.

509. У трикутник зі сторонами 4 см, 16 см і 18 см вписано ромб, який має з трикутником спільний найбільший кут. Знайдіть відрізки, на які вершина ромба ділить найбільшу сторону.

510. У рівнобедреному трикутнику, периметр якого 72 см, радіус вписаного кола становить $\frac{5}{18}$ висоти, проведеної до основи. Знайдіть сторони трикутника.

511. Через точку перетину медіан трикутника проведено пряму, паралельну одній зі сторін. Знайдіть довжину відрізка цієї прямої, що міститься між сторонами трикутника, якщо середня лінія трикутника, паралельна їй, дорівнює 4 см.

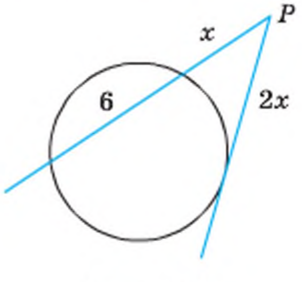
512. Знайдіть довжини медіан трикутника, якщо відстані від точки їх перетину до вершин трикутника дорівнюють 26 см, 14 см і 18 см.

513. Знайдіть довжини висот трикутника, якщо відстані від точки перетину медіан трикутника до його сторін дорівнюють 5 см, 7 см і 8 см.

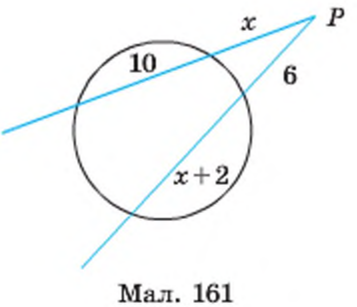
514. Знайдіть довжини хорд AB і CD, які перетинаються в точці K так, що $AK = 18$ см, $CK = 20$ см, $KB + KD = 19$ см.

515. Точка P розташована всередині кола радіуса 11 см, віддалена від центра на 5 см і ділить хорду AB у відношенні 2 : 3. Знайдіть довжину хорди AB.

516. Знайдіть довжини відрізків, позначених на малюнку 160 буквою x.



Мал. 160



Мал. 161

517. За даними малюнка 161 знайдіть x.

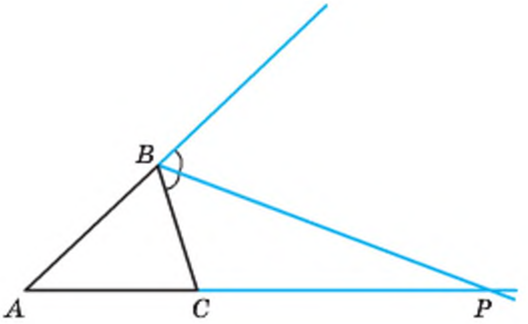
518. Бісектриси кутів при основі рівнобедреного трикутника перетинають бічні сторони в точках P і K. Знайдіть PK, якщо довжина бічної сторони дорівнює m, а довжина основи n.

519. AK — бісектриса $\triangle ABC$ — ділить сторону BC на відрізки, один із яких дорівнює одній зі сторін AB чи AC. Знайдіть BC, якщо $AB = 16$ см, $AC = 20$ см.

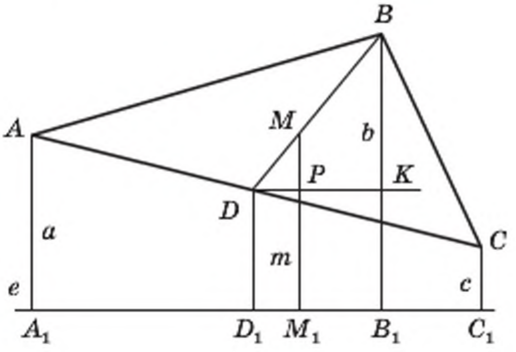
520. $ABCD$ — трапеція, на більшій основі якої знаходиться точка O — центр півкола, яке дотикається до бічних сторін трапеції. Знайдіть, у якому відношенні точка O ділить основу AD, якщо $AB = 12$ см, $CD = 20$ см, $BC : AD = 5 : 9$.

521. BH — висота трикутника ABC. O_1 і O_2 — центри кіл, вписаних у трикутники ABH і CBH. Прямі BO_1 і BO_2 перетинають сторону AC у точках M і P відповідно. Знайдіть MP, якщо $AB = 13$ см, $BC = 20$ см, $AH = 5$ см, $CH = 16$ см, $BH = 12$ см.

522. Бісектриса зовнішнього кута трикутника ABC при вершині B перетинає сторону AC у точці P (мал. 162). Доведіть, що $AP : AB = PC : BC$.



Мал. 162



Мал. 163

523. Відстань від центроїда трикутника до довільної прямої, яка не перетинає трикутник, дорівнює середньому арифметичному відстаней від усіх його вершин до цієї прямої. Доведіть це, користуючись малюнком 163.

Практичне завдання

524. Виріжте із цупкого паперу гострокутний, прямокутний і тупокутний трикутники. У кожному з них проведіть медіани та позначте їх точки перетину. Переконайтеся на практиці, що для кожного з цих трикутників точка перетину медіан буде центром мас (мал. 164).

Мал. 164

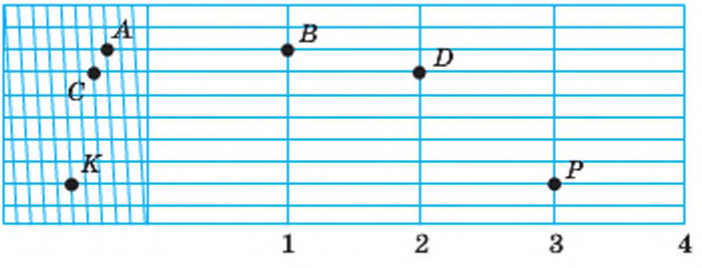
Задачі для повторення

525. Сторони трикутника пропорційні числам 4, 5 і 8. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, якщо його периметр дорівнює 34 см.

526. Кути $\triangle ABC$ пропорційні числам 3, 5 і 10. Один із кутів $\triangle MNK$ на $20°$ більший за другий і на $50°$ менший за третій. Чи подібні ці трикутники?

527. Діагоналі трапеції точкою перетину діляться у відношенні 3 : 5. Як відносяться основи трапеції?

528. На малюнку 165 зображено лінійку з поперечним масштабом, якою можна виміряти відстані з точністю до 0,1 мм. Знайдіть відстані AB, CD, KP. Відповідь поясніть.



Мал. 165

529. Діагональ прямокутника утворює зі стороною кут $17°$. Знайдіть кутові міри дуг, на які вершини прямокутника розбивають описане навколо нього коло.

Геометрія навколо нас

Макет будинку з дерева

§ 12 Подібність прямокутних трикутників

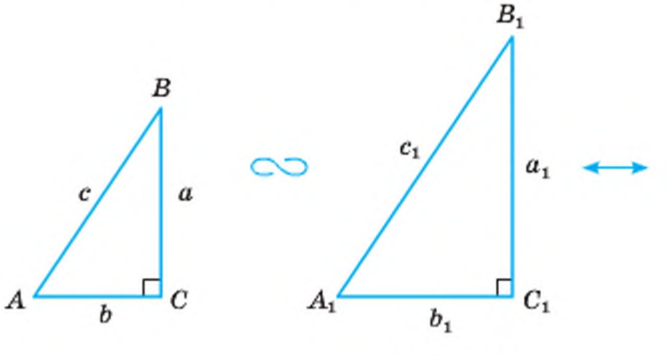
Один кут у кожному прямокутному трикутнику прямий, а всі прямі кути рівні. Тому з двох перших загальних ознак подібності трикутників (див. с. 89–90) випливають такі ознаки подібності прямокутних трикутників.

Два прямокутні трикутники подібні, якщо гострий кут одного дорівнює гострому куту другого трикутника.
Два прямокутні трикутники подібні, якщо катети одного пропорційні катетам другого трикутника.

Правильна і така ознака.

Два прямокутні трикутники подібні, якщо катет і гіпотенуза одного пропорційні катету і гіпотенузі другого трикутника.

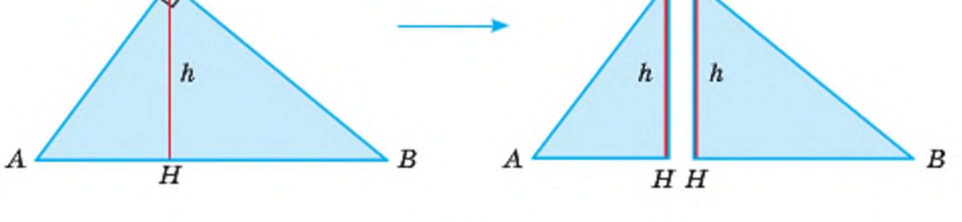
Схематично три сформульовані ознаки подібності прямокутних трикутників можна зобразити так (мал. 166):



$\angle A = \angle A_1$
або
$a : b = a_1 : b_1$
або
$a : c = a_1 : c_1$

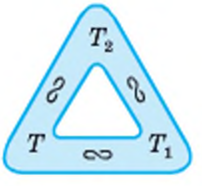
Мал. 166

Цікаву властивість має висота h прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи (мал. 167).



Мал. 167

Вона розбиває даний трикутник на два менші прямокутні трикутники, подібні даному. Якщо кут C трикутника ABC прямий, а CH — висота, то кожний із трикутників ACH і CBH подібний $\triangle ABC$. Адже $\triangle ACH$ і $\triangle ABC$ мають спільний кут A, а трикутники CBH і ABC — спільний кут B. Кожний із цих прямокутних трикутників подібний кожному іншому з них. Позначивши їх літерами T, T_1 і T_2, схематично це можна зобразити так:



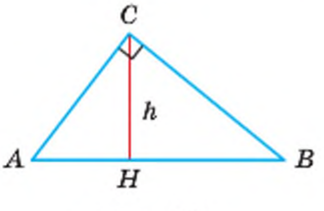
Важливу роль у геометрії відіграють теореми про середні пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику. Нагадаємо, що відрізок або додатне число x називають середнім пропорційним відрізків або додатних чисел a і b, якщо правильною є пропорція $a : x = x : b$ (або рівнозначні їй рівності $x^2 = ab$, $x = \sqrt{ab}$).

ТЕОРЕМА 26

Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, є середнім пропорційним відрізків, на які ця висота ділить гіпотенузу.

ДОВЕДЕННЯ.

Оскільки висота h розбиває прямокутний трикутник ABC на подібні йому трикутники ACH і CBH (мал. 168), то $AH : h = h : HB$. А це означає, що відрізок h — середній пропорційний відрізків AH і HB. Отже, $h^2 = AH \times$ $\times HB$. □



Мал. 168

ТЕОРЕМА 27

Катет прямокутного трикутника є середнім пропорційним гіпотенузи і проекції цього катета на гіпотенузу.

Наприклад, $AC^2 = AB \cdot AH$ (мал. 168).

ДОВЕДЕННЯ.

Оскільки $\triangle ACH \sim \triangle ABC$, то $AH : AC = AC : AB$, звідки $AC^2 = AB \cdot AH$. □

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

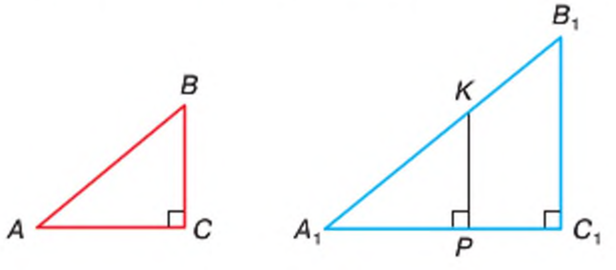
Доведемо третю ознаку подібності прямокутних трикутників, сформульовану вище.

ТЕОРЕМА 28

Два прямокутні трикутники подібні, якщо катет і гіпотенуза одного пропорційні катету і гіпотенузі другого трикутника.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ такі, у яких кути C і C_1 прямі, а $BC : AB = B_1C_1 : A_1B_1$ (мал. 169). Доведемо, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.



Мал. 169

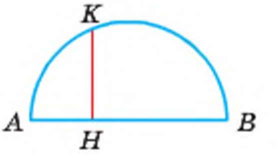
Якщо, наприклад, $A_1B_1 > AB$, то на стороні A_1B_1 відкладемо відрізок $A_1K = AB$ і з точки K опустимо перпендикуляр KP на пряму A_1C_1. $KP \parallel B_1C_1$, тому згідно з основною теоремою про подібність трикутників $\triangle A_1KP \sim \triangle A_1B_1C_1$, тобто $KP : A_1K = B_1C_1 : A_1B_1$. Оскільки $A_1K = AB$, то $KP : AB = B_1C_1 : A_1B_1$. За умовою $BC : AB = B_1C_1 : A_1B_1$, тому $KP = BC$. Отже, $\triangle ABC = \triangle A_1KP$ — за гіпотенузою і катетом. Крім того, $\triangle A_1KP \sim \triangle A_1B_1C_1$, тому $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. $\square$

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте три ознаки подібності для довільних трикутників.
2. Сформулюйте ознаки подібності прямокутних трикутників.
3. Яку властивість має висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута?
4. Що називають середнім пропорційним двох відрізків?
5. Сформулюйте та доведіть теореми про середні пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику.

Виконаємо разом

1 Знайдіть довжину перпендикуляра KH, опущеного з деякої точки K кола на діаметр AB, якщо $AH = 3$ см, $HB = 12$ см (мал. 170).

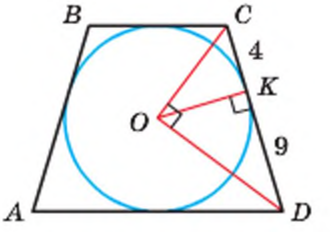


Мал. 170

- Сполучимо точку K відрізками з A і B. Оскільки кут AKB вписаний і спирається на діаметр кола, то він прямий. KH — висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи. Згідно з теоремою 26 вона є середнім пропорційним відрізків AH і HB.

$$KH^2 = AH \cdot HB = 3 \cdot 12 = 36 \text{ (см}^2\text{)},\ KH = 6 \text{ см.}$$

2 Коло, вписане в рівнобічну трапецію, точкою дотику ділить бічну сторону на відрізки 4 см і 9 см. Знайдіть радіус кола.



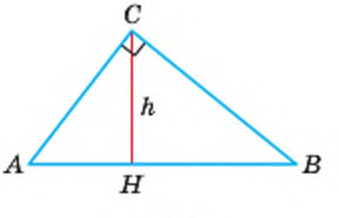
Мал. 171

- Якщо точка O — центр вписаного кола, то OC і OD — бісектриси кутів C і D (мал. 171). Оскільки $\angle C + \angle D = 180°$, то $\angle OCD + \angle ODC = 90°$, тоді $\angle COD = 90°$. Радіус OK — висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута. Тоді $OK^2 = CK \cdot KD$, тобто $OK^2 = 4 \cdot 9 = 36$. Отже, $OK = 6$ см.

Задачі і вправи

Виконайте усно

Вправи 530–536 виконайте за малюнком 172.



Мал. 172

530. Назвіть усі висоти прямокутного трикутника ABC. Яка з них найменша? Чому?

531. Назвіть проекцію катета AC на гіпотенузу AB, на пряму CH, на пряму BC.

532. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо:
а) $\angle ACH = 30°$; б) $\angle HCB = 75°$; в) $\angle B = 35°$;
г) $\angle ACH = n°$.

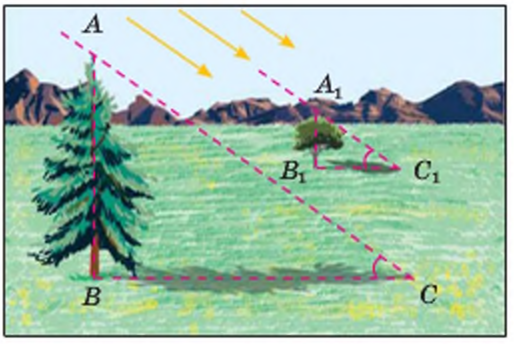
533. Чому подібні трикутники ACH і CBH?

534. Знайдіть $BC : CH$, $HA : AC$ і $AC : AB$, якщо $\angle A = 60°$.

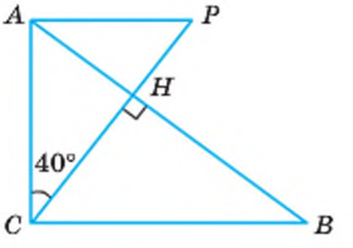
535. Чи те саме означають вислови:
«висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи»;
«висота прямокутного трикутника, проведена з вершини його прямого кута»;
«найменша висота прямокутного трикутника»?

А

536. Довжина тіні від сосни 14 м, а від двометрового клена 1 м. Знайдіть висоту сосни (мал. 173).



Мал. 173

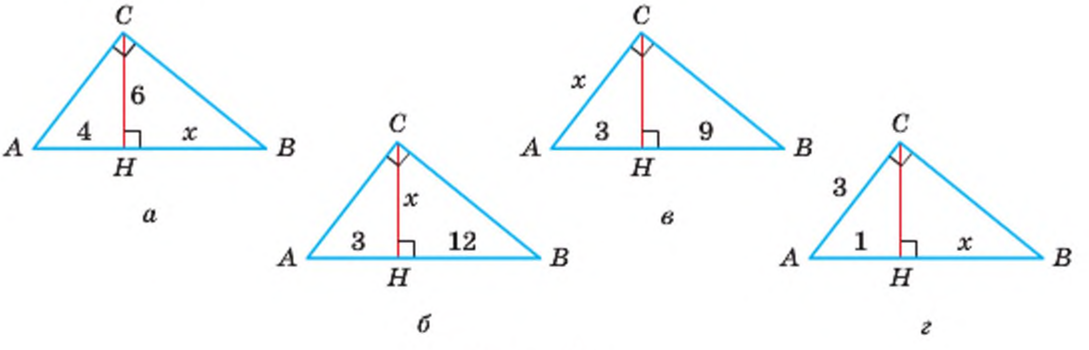


Мал. 174

537. Знаючи, що $AC \perp AP$, $AC \perp CB$, $\angle ACP = 40^\circ$ (мал. 174), знайдіть: а) $\angle B$; б) $\angle P$; в) $\angle HAC - \angle HCB$.

538. Скільки різних трикутників зображено на малюнку 174? Чи всі ці трикутники подібні один одному? Чому?

539. Знайдіть довжини відрізків, позначених на малюнку 175 (*а*, *б*, *в* і *г*) буквою x.



Мал. 175

540. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 8 см, а один із гострих кутів — 60°. Знайдіть проекції катетів на гіпотенузу.

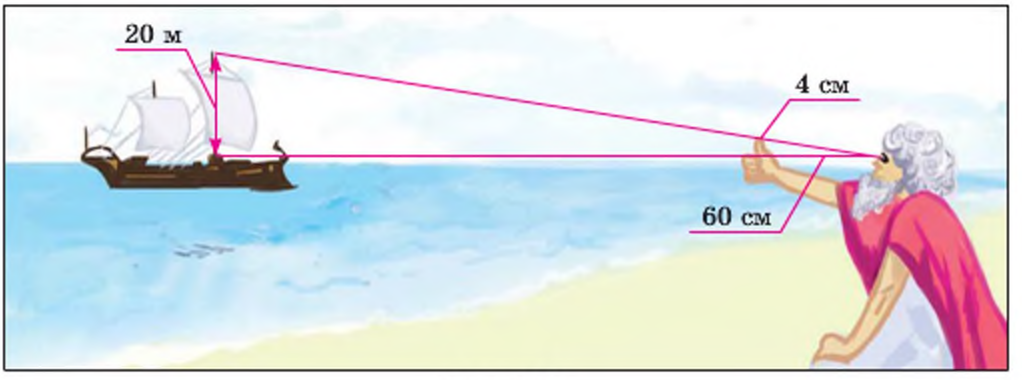
541. Один із кутів прямокутного трикутника дорівнює 30°, а проекція меншого катета на гіпотенузу 5 см. Знайдіть проекцію більшого катета на гіпотенузу і найменшу висоту трикутника.

542. Знайдіть довжину перпендикуляра, опущеного з вершини прямокутника на діагональ, якщо він ділить цю діагональ на відрізки завдовжки 4 см і 9 см.

543. Знайдіть проекції сторін прямокутника на його діагональ завдовжки 18 см, яка зі стороною прямокутника утворює кут 30°.

544. Перпендикуляр, опущений з центра ромба на його сторону, ділить її на відрізки завдовжки 3 см і 12 см. Знайдіть відстань між протилежними сторонами ромба.

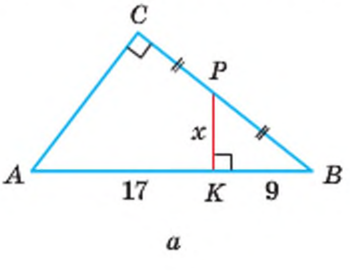
545. Задача Фалеса. Визначте відстань від берега до корабля в морі, знаючи висоту щогли. Розв'язання легко зрозуміти, скориставшись малюнком 176.



Мал. 176

Б

546. За двома даними елементами прямокутного трикутника знайдіть значення довжини x (мал. 177).



Мал. 177

547. Один із гострих кутів прямокутного трикутника на 18° більший за другий. Знайдіть відношення мір кутів, утворених найменшою висотою трикутника з його катетами.

548. Відстань між протилежними сторонами ромба дорівнює a, а проекція його меншої діагоналі на сторону — c. Обчисліть сторони ромба, якщо $a = 18$ см, $c = 8$ см.

549. Доведіть, що діаметр кола, вписаного в рівнобічну трапецію, є середнім пропорційним основ трапеції.

550. Доведіть, що **в кожному прямокутному трикутнику відношення квадратів катетів дорівнює відношенню їх проекцій на гіпотенузу.**

551. Катети прямокутного трикутника відносяться як 2 : 3, а висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 42 дм. Знайдіть проекції катетів на гіпотенузу.

552. Гіпотенуза трикутника дорівнює 122 дм, а катети відносяться як 5 : 6. Знайдіть проекції катетів на гіпотенузу.

553. Знайдіть довжину гіпотенузи, якщо катети відносяться як 2 : 3, а проекція одного катета на гіпотенузу на 2 см більша за проекцію другого.

554. Кут C $\triangle ABC$ прямий, проекції гіпотенузи AB на прямі AC і BC дорівнюють 15 см і 20 см. Знайдіть проекції катетів на гіпотенузу.

555. Коло, вписане в прямокутну трапецію, ділить точкою дотику більшу бічну сторону на відрізки 3 см і 12 см. Знайдіть периметр трапеції.

556. Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть периметр трапеції, якщо бічна сторона дорівнює 15 см, а радіус описаного кола 12,5 см.

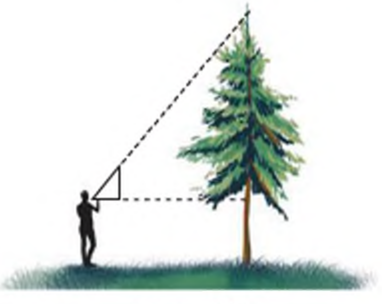
557. Доведіть, що **в кожному прямокутному трикутнику добуток катетів дорівнює добутку його найменшої висоти і гіпотенузи.**

558. Доведіть геометрично нерівність: якщо $a > 0$ і $b > 0$, то

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Практичне завдання

559. Виріжте із картону прямокутний трикутник і визначте за його допомогою висоту обраного вами об'єкта (мал. 178). Порівняйте цей спосіб із тим, що запропонував Жуль Верн у романі «Таємничий острів» (мал. 179). У чому їх схожість, а в чому — відмінність?



Мал. 178

Мал. 179

Задачі для повторення

560. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо один із них на 30° більший за другий.

561. Знайдіть периметр ромба з кутом 30°, описаного навколо кола радіуса $r = 3$ см.

562. Доведіть, що висота рівностороннього трикутника втричі більша за радіус вписаного кола.

563. Знайдіть довжину хорди, перпендикулярної до діаметра кола, що ділить його на відрізки 2 дм і 8 дм.

Задачі за готовими малюнками

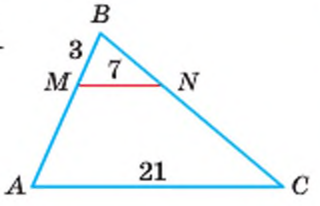
А

Б

1

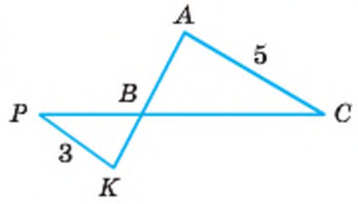
А. $MN \parallel AC$.

AM



Б. $KP \parallel AC$.

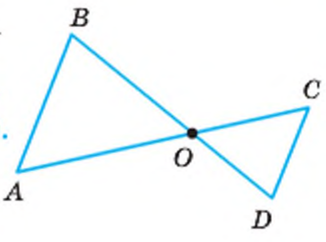
$PC : BC$,
$PB : PC$



2

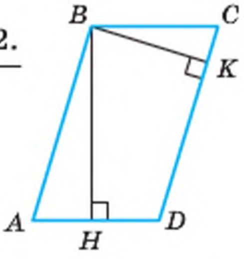
А. $AB \parallel CD$.

Довести:
$OC \cdot OB =$
$= OA \cdot OD$.



Б. ▱$ABCD$,
$BK : BH = 1 : 2$.

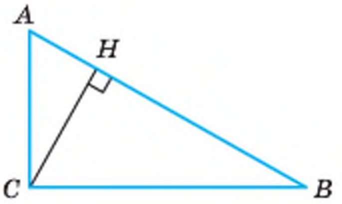
$AB : BC$



3

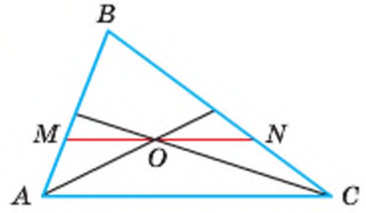
А. $AC \perp CB$, $CH \perp AB$,
$AH = 1$, $HB = 4$.

AC, CB, HC



Б. O — точка перетину медіан,
$MN \parallel AC$, $BM = 5$, $MN = 7$.

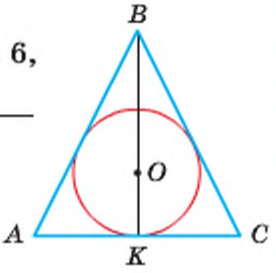
AB, AC



4

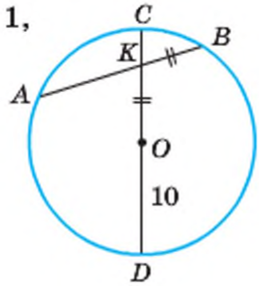
А. $AB = BC$,
$AB : AC = 8 : 6$,
$BK = 22$.

OK



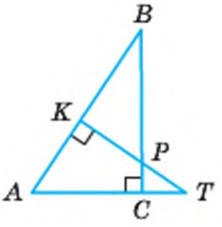
Б. $AK : KB = 3 : 1$,
$OD = 10$,
$OK = KB$.

CK, KD



Самостійна робота 3

Для виконання самостійної роботи № 3 використайте малюнок 180.



Мал. 180

Варіант 1

1°. На сторонах AB і AC $\triangle ABC$ взято точки M і N так, що $MN \parallel BC$. Знайдіть MN, якщо $AM = 6$ см, $BM = 4$ см, $BC = 15$ см.

2°. Укажіть трикутники, подібні $\triangle ABC$, і доведіть, що вони подібні (мал. 180).

3•. У $\triangle ABC$ сторона AB на 15 см менша за BC. Знайдіть периметр трикутника, якщо бісектриса $\angle B$ ділить сторону AC на відрізки 4 см і 14 см.

Варіант 2

1°. На сторонах AB і BC $\triangle ABC$ взято точки E і F так, що $EF \parallel AC$. Знайдіть AB, якщо $EF = 5$ см, $BE = 4$ см, $AC = 8$ см.

2°. Укажіть трикутники, подібні $\triangle AKT$, і доведіть, що вони подібні (мал. 180).

3•. У $\triangle ABC$ $AB = 12$ см, $BC = 24$ см, $AC = 30$ см. Знайдіть відрізки, на які бісектриса $\angle B$ ділить сторону AC.

Варіант 3

1°. На сторонах AC і BC $\triangle ABC$ взято точки K і P так, що $PK \parallel AB$. Знайдіть AB, якщо $CK = 5$ см, $AK = 4$ см, $PK = 3$ см.

2°. Укажіть трикутники, подібні $\triangle KBP$, і доведіть, що вони подібні (мал. 180).

3•. У $\triangle ABC$ сторона AC на 6 см більша за AB. Знайдіть периметр трикутника, якщо бісектриса $\angle A$ ділить сторону BC на відрізки 5 см і 10 см.

Варіант 4

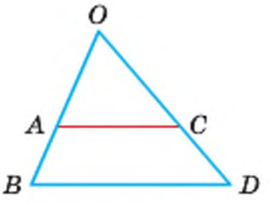
1°. На сторонах AB і BC $\triangle ABC$ взято точки D і E так, що $DE \parallel AC$. Знайдіть BE, якщо $AD = 7$ см, $BD = 3$ см, $BC = 15$ см.

2°. Укажіть трикутники, подібні $\triangle CPT$, і доведіть, що вони подібні (мал. 180).

3•. У $\triangle ABC$ $AB = 20$ см, $BC = 6$ см, $AC = 24$ см. Знайдіть відрізки, на які бісектриса $\angle C$ ділить сторону AB.

Тестові завдання 3

Для виконання завдань 1–6 скористайтеся малюнком 181, на якому $AC \parallel BD$.



Мал. 181

1	Знайдіть AO, якщо $OC : CD = 5 : 3$, $BO = 16$ см.	а) 10 см; в) 12 см; б) 6 см; г) 5 см.
2	Знайдіть відношення $AO : AB$, якщо $AC : BD = 3 : 5$.	а) 3 : 2; в) 3 : 5; б) 2 : 3; г) 5 : 3.
3	$OA : AB = 3 : 2$. Яке з тверджень хибне?	а) $OC : CD = 3 : 2$; б) $OA : OB = 3 : 5$; в) $AC : BD = 3 : 2$; г) $OD : OC = 5 : 3$.
4	$AO = 4$ см, $AB = 3$ см. Знайдіть периметр $\triangle OAC$, якщо $P_{\triangle BOD} = 21$ см.	а) 12 см; в) 28 см; б) 36,75 см; г) 15,75 см.
5	Знайдіть коефіцієнт подібності трикутників OBD і OAC, якщо $OA = 10$ см, $AB = 6$ см.	а) $k = \frac{5}{3}$; в) $k = \frac{8}{3}$; б) $k = \frac{3}{5}$; г) $k = \frac{8}{5}$.
6	$AC = 5$ см, $BD = 7$ см. Знайдіть CD, якщо $OD = 14$ см.	а) 10 см; в) 4 см; б) $8\frac{1}{6}$ см; г) $5\frac{5}{6}$ см.
7	Медіани AA_1 і BB_1 $\triangle ABC$ перетинаються в точці O. Знайдіть відношення $A_1O : A_1A$.	а) 1 : 2; в) 3 : 1; б) 2 : 1; г) 1 : 3.
8	Сторони трикутника дорівнюють 6 см, 18 см і 20 см. У якому відношенні ділить сторону бісектриса, проведена з вершини найбільшого кута?	а) 1 : 3; в) 5 : 9; б) 3 : 5; г) 1 : 2.
9	AM — бісектриса $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$, $M \in BC$). Який знак слід поставити замість*: $CM * MB$?	а) $<$; в) $=$; б) $>$; г) $\geq$.
10	Проекції катетів на гіпотенузу в прямокутному трикутнику дорівнюють 2 см і 8 см. Знайдіть довжину висоти, проведеної з вершини прямого кута.	а) 10 см; в) 4 см; б) 16 см; г) 5 см.

Типові задачі для контрольної роботи

1°. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Знайдіть невідомі сторони трикутників, якщо $AB = 15$ см, $BC = 17$ см, $A_1B_1 = 30$ см, $A_1C_1 = 48$ см.

2°. Через точку O перетину діагоналей трапеції $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає основи AD і BC у точках M і N відповідно. Доведіть, що $\triangle AOM \sim \triangle CON$.

3°. Сторони трикутника дорівнюють 3 см, 5 см і 7 см. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, периметр якого дорівнює 75 см.

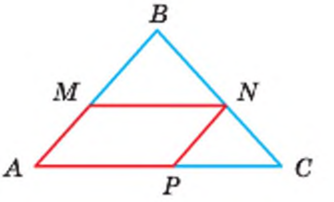
4°. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 10 см, а бічні сторони 4 см і 7 см. На скільки треба продовжити бічні сторони, щоб вони перетнулися?

5•. З вершини B прямокутника $ABCD$ опущено перпендикуляр BK на діагональ AC. Знайдіть AC, якщо $BK = 12$ см і $AK : KC = 4 : 9$.

6•. У колі радіуса 8 см проведено хорду AB, яку діаметр MN перетинає в точці P так, що $AP = PB = 2PN$. Знайдіть довжину хорди AB.

7•. З вершини тупого кута паралелограма на його сторони опущено перпендикуляри завдовжки 5 см і 8 см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 78 см.

8•. У $\triangle ABC$ (мал. 182) зі сторонами $AB = 12$ см і $AC = 15$ см вписано паралелограм так, що один кут у них спільний. Знайдіть сторони паралелограма, якщо одна з них на 6 см більша за другу.



Мал. 182

9••. У трикутник вписано півколо, яке дотикається до двох сторін трикутника і центр якого ділить третю сторону на відрізки 7,5 см і 10,5 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр 42 см.

10••. AM і A_1M_1 — медіани подібних трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. Доведіть, що $\triangle AMC \sim \triangle A_1M_1C_1$.

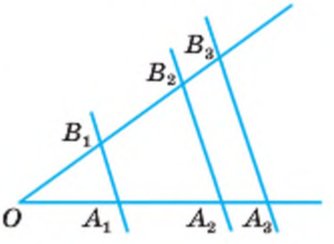
Геометрія — це мистецтво добре вимірювати.
П. Раме

Головне в розділі 2

Відрізки називають *пропорційними*, якщо пропорційні їх довжини. Відрізки a і b пропорційні відрізкам x і y, якщо правильна пропорція $a : x =$ $= b : y$.

Узагальнена теорема Фалеса. **Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають від них пропорційні відрізки.**

Якщо $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, то $\dfrac{B_1B_2}{B_2B_3} = \dfrac{A_1A_2}{A_2A_3}$.

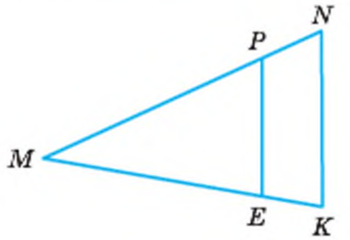


Подібними називають фігури, що мають схожі форми. У подібних трикутників усі відповідні кути рівні, а відповідні сторони пропорційні.

Основна теорема про подібність трикутників.

Січна пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає від нього трикутник, подібний даному.

$\triangle MPE \sim \triangle MNK$

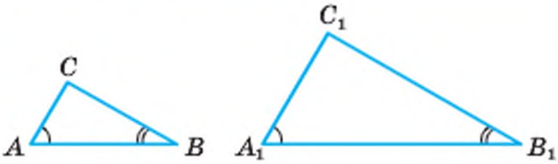
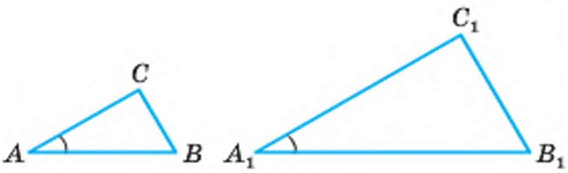
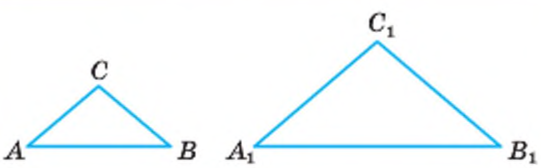


Ознаки подібності трикутників. **Два трикутники подібні, якщо:**

1) два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам другого; або

2) дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого, а кути між ними рівні; або

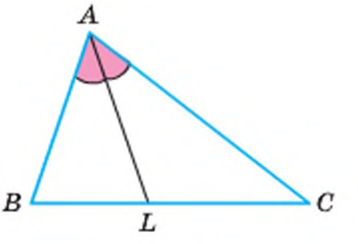
3) три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого.

1	За двома кутами		$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$
2	За двома сторонами і кутом між ними		$\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$ і $\angle A = \angle A_1$
3	За трьома сторонами		$\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} =$ $= \dfrac{AC}{A_1C_1}$

З ознак подібності трикутників випливають такі теореми:

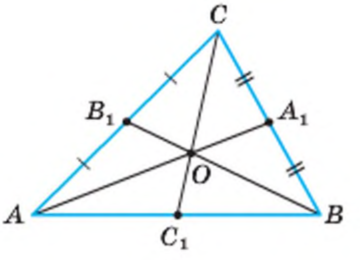
- **Бісектриса трикутника ділить його протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам.**

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$$



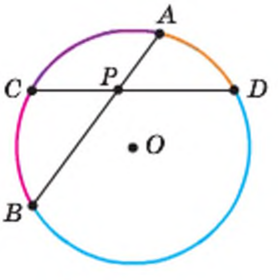
- **Усі три медіани трикутника проходять через одну точку і діляться нею у відношенні 1 : 2.**

$$AO : OA_1 = 2:1,\ BO : OB_1 = 2:1,$$
$$CO : OC_1 = 2:1$$



- **Добутки відрізків хорд одного кола, що перетинаються, рівні.**

$$PA \cdot PB = PD \cdot PC$$



Два прямокутні трикутники подібні, якщо:

1) гострий кут одного дорівнює куту другого трикутника; або
2) катети одного пропорційні катетам другого; або
3) катет і гіпотенуза одного пропорційні катету і гіпотенузі другого.

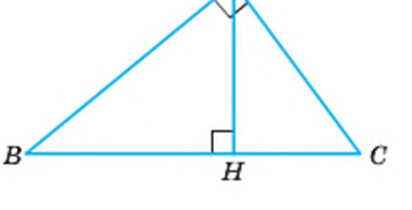
Відрізок x називають *середнім пропорційним відрізків* a і b, якщо правильною є пропорція $a : x = x : b$ (або рівнозначна їй рівність $x^2 = ab,\ x = \sqrt{ab}$).

Катет прямокутного трикутника є середнім пропорційним гіпотенузи і його проекції на гіпотенузу. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи є середнім пропорційним відрізків, на які ця висота ділить гіпотенузу.

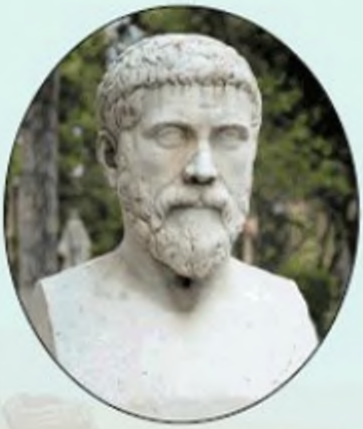
$$AH = \sqrt{BH \cdot HC}$$

$$AC = \sqrt{HC \cdot BC}$$

$$AB = \sqrt{BH \cdot BC}$$



До знань тягнись, юначе, до наук;
Хто розум має — не мозолить рук.
В людині розум більш за все цінім:
Вся сила і краса людини — в нім.



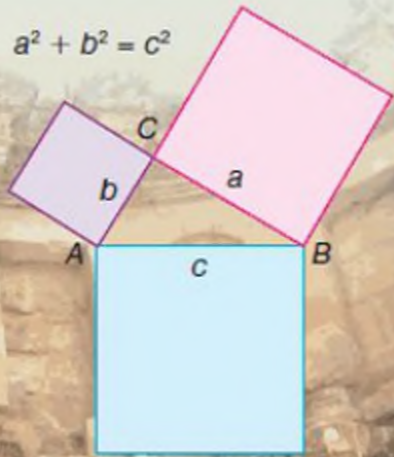
ПІФАГОР САМОСЬКИЙ

(пр. 580 – 500 до н.е.)

Найвідоміша постать людства.
Давньогрецький математик, філософ і педагог.
Засновник Піфагорійського союзу.
Досягнення стосувалися:

- геометрії;
- теорії чисел;
- гармонії;
- астрономії.

$a^2 + b^2 = c^2$



Розділ 3 | Section 3

Розв'язування прямокутних трикутників | Rectangular Triangles Solving

Розв'язати трикутник — це означає за кількома відомими його елементами знайти всі інші його елементи. Ще понад два тисячоліття тому було створено окрему науку про розв'язування трикутників — тригонометрію.

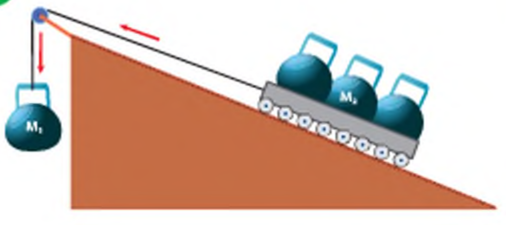
У цьому розділі ви ознайомитеся з найпростішими відомостями цієї науки про розв'язування прямокутних трикутників.

Для чого розв'язувати прямокутні трикутники?

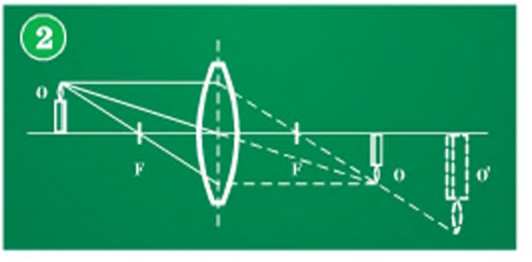
Прямокутні трикутники часто використовують як моделі реальних ситуацій, що існують в оточуючому нас світі.

Розв'язування прямокутних трикутників використовують у фізиці, коли, наприклад, обчислюють сили 1, досліджують заломлення променів 2, визначають напрями руху тощо.

1

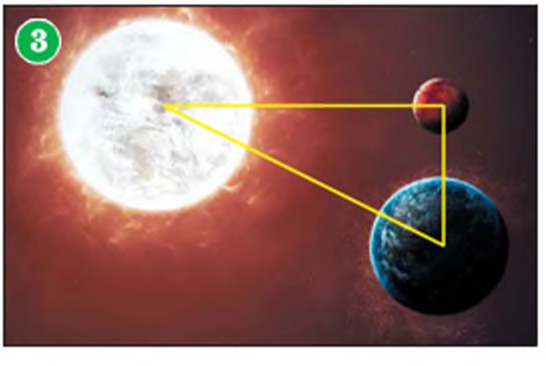


2

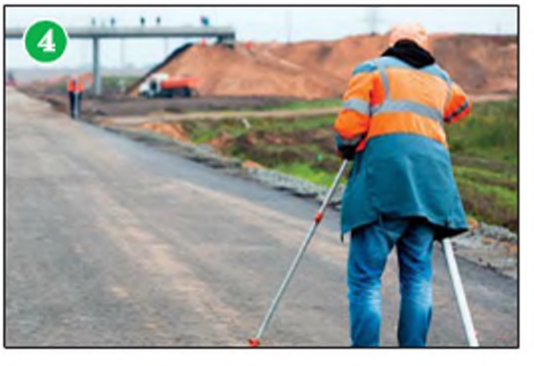


Розв'язування трикутників широко використовується в технічних науках, в астрономії 3, в кристалографії, в математиці, в геодезії 4.

3



4



Поміркуй, де ще використовують розв'язування прямокутних трикутників.

§ 13 Теорема Піфагора

Теорема Піфагора — одна з найцікавіших і найважливіших теорем геометрії. Доводити її можна різними способами, найкраще — з використанням властивостей подібних трикутників.

ТЕОРЕМА 29

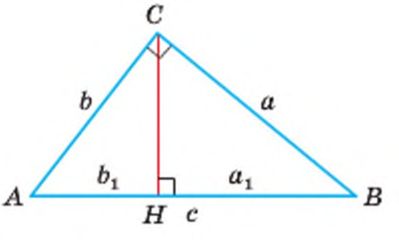
(Піфагора.) **У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай ACB — довільний прямокутний трикутник, а CH — висота, проведена з вершини прямого кута C (мал. 183). Позначимо: $CB = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AH = b_1$, $BH = a_1$.

Оскільки $\triangle AHC \sim \triangle ACB$, то $b_1 : b = b : c$, звідки $b^2 = cb_1$. Оскільки $\triangle CBH \sim \triangle ACB$, то $a_1 : a = a : c$, звідки $a^2 = ca_1$.

Отже, $a^2 + b^2 = ca_1 + cb_1 = c(a_1 + b_1) = c^2$, тобто $c^2 = a^2 + b^2$. □



Мал. 183

Теорема Піфагора дає змогу за двома будь-якими сторонами прямокутного трикутника знайти третю. Наприклад, якщо катети трикутника дорівнюють 3 і 4, то його гіпотенуза $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Взагалі, якщо катети трикутника a і b, то його гіпотенуза $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Якщо дано гіпотенузу c і катет b, то другий катет $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. Наприклад, якщо гіпотенуза трикутника дорівнює 52 см, а катет 48 см, то другий катет

$$\sqrt{52^2 - 48^2} = \sqrt{(52-48)(52+48)} = \sqrt{4 \cdot 100} = 20 \text{ (см)}.$$

ТЕОРЕМА 30

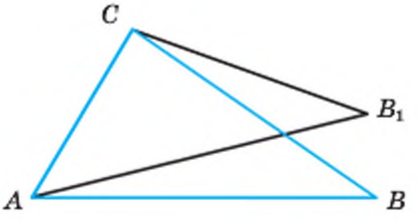
(Обернена до теореми Піфагора.) **Якщо в трикутнику ABC $AB^2 = AC^2 + CB^2$, то кут C цього трикутника прямий.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай у $\triangle ABC$ $AB^2 = AC^2 + CB^2$. Припустимо, що кут C не прямий. Побудуємо ще $\triangle AB_1C$, у якого $\angle C = 90°$ і $CB_1 = CB$ (мал. 184). Тоді

$$AB_1 = \sqrt{AC^2 + CB_1^2} = \sqrt{AC^2 + CB^2} = AB.$$

Трикутники ABC і AB_1C рівні за трьома сторонами. Отже, $\angle ACB = \angle ACB_1 = 90°$. □



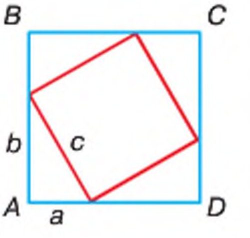
Мал. 184

За допомогою цієї теореми (оберненої до теореми Піфагора), знаючи сторони трикутника, можна встановити, чи має трикутник прямий кут.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Теорема Піфагора — одна з найважливіших і найвідоміших теорем евклідової геометрії. Відомо більше сотні її різних доведень. Найпростіше таке.

Нехай маємо довільний прямокутний трикутник із катетами a, b і гіпотенузою c. На кожній стороні квадрата зі стороною c добудуємо такий трикутник, як на малюнку 185. Утвориться квадрат зі стороною $a + b$. Визначимо його площу двома способами:



Мал. 185

$$S = (a+b)^2 \text{ і } S = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2.$$

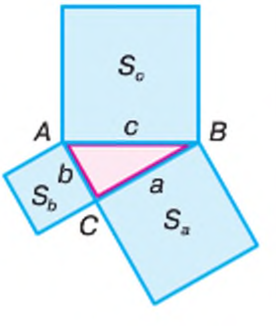
У результаті матимемо:

$$(a+b)^2 = 2ab + c^2,\ a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2,\ a^2 + b^2 = c^2.$$

Оскільки квадрати відрізків a, b, c дорівнюють площам квадратів з такими сторонами, то теорему Піфагора часто формулюють і так:

Площа квадрата, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на його катетах.

$$S_a + S_b = S_c \text{ (мал. 186)}$$



Мал. 186

Такий малюнок учням здавався схожим на штани (мал. 187), то ж з давніх часів до нас дійшли примовки:

«Піфагорові штанці файні є у три кінці»;

Інші вбачають у такій конфігурації не штани, а сорочку (мал. 188), тому примовляють: «Хто в сорочці Піфагора — піднось руки вгору».

Теорема Піфагора правильна лише в евклідовій геометрії, у якій визнається правильною аксіома Евкліда.

Мал. 187

Мал. 188

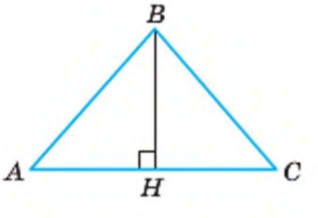
Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте ознаки подібності прямокутних трикутників.
2. Наведіть приклади пропорційних відрізків у прямокутному трикутнику. Сформулюйте їхні властивості.
3. Сформулюйте і доведіть теорему Піфагора.
4. Сформулюйте теорему, обернену до теореми Піфагора.
5. Як знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо відомі його катети?
6. Як знайти катет прямокутного трикутника, якщо відомі його гіпотенуза і другий катет?

Виконаємо разом

1 Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 16 см, а проведена до неї висота — 6 см.

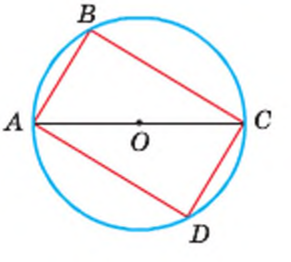
- Оскільки даний $\triangle ABC$ рівнобедрений (мал. 189), то $AH = 0,5AC = 8$ см, $\angle AHB = 90°$.
За теоремою Піфагора:
$AB^2 = AH^2 + HB^2$, $AB^2 = 64 + 36 = 100$, $AB = 10$.
Шуканий периметр:
$P = 16 + 2 \cdot 10 = 36$ (см).



Мал. 189

2 **Знайдіть сторони прямокутника, вписаного в коло радіуса 50 см, якщо вони відносяться як 3 : 4 (мал. 190).**

- Діагональ прямокутника, вписаного в коло, є діаметром цього кола. Отже, гіпотенуза AC прямокутного трикутника ABC дорівнює 100 см. Оскільки його катети пропорційні числам 3 і 4, то їхні довжини дорівнюють $3x$ і $4x$, де x — деяке число. За теоремою Піфагора $(3x)^2 + (4x)^2 = 100^2$, звідки $25x^2 = 10\ 000$, $x^2 = 400$, $x = 20$. $3x = 60$, $4x = 80$. Отже, сторони прямокутника 60 см, 80 см, 60 см і 80 см.



Мал. 190

Задачі і вправи

Виконайте усно

564. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють:

а) 3 см і 4 см; б) 1 дм і 2 дм; в) c і c.

565. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза і другий катет дорівнюють:

а) 5 см і 3 см; б) 10 дм і 1 дм; в) c і a.

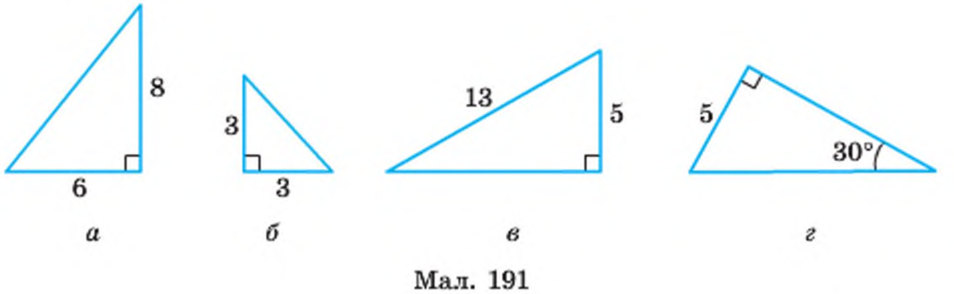
566. Знайдіть невідомі сторони трикутника, використовуючи таблицю, якщо a і b — катети прямокутного трикутника, а c — його гіпотенуза.

a	1	2	3	1	3	0,5
b	2	3	4	5		
c	$\sqrt{5}$				$\sqrt{19}$	1

567. За малюнком 191 знайдіть невідомі сторони трикутників.

568. Визначаючи вид трикутника зі сторонами 10 см, 24 см і 26 см, учень міркує: «Оскільки $10^2 + 24^2 = 676 = 26^2$, то за теоремою Піфагора цей трикутник прямокутний». Чи правильно міркує учень?

569. Сторони трикутника дорівнюють 6 м, 8 м і 10 м. Чи прямокутний цей трикутник?



Мал. 191

А

570. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють: 1) 9 м і 12 м; 2) 12 см і 16 см; 3) $3a$ і $4a$.

571. Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо інші його сторони дорівнюють: 1) 5 м і 4 м; 2) 13 см і 12 см; 3) $17m$ і $15m$.

572. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 5 см, а один із кутів 60°.

573. Заповніть порожні клітинки таблиці, якщо a і b — катети прямокутного трикутника, а c — його гіпотенуза.

a	5	8	7	9	11	12	13
b	12			40			
c		17	25		61	37	85

574. Точка M лежить усередині прямого кута ABC на відстані 5 см і 12 см від його сторін. Знайдіть BM.

575. Сторони прямокутника дорівнюють 32 см і 60 см. Знайдіть його діагональ.

576. Знайдіть сторони прямокутника, якщо:
а) одна зі сторін дорівнює 12 см, а діагональ 13 см;
б) діагональ дорівнює 12 см і утворює зі стороною кут 30°;
в) діагональ дорівнює 10 см, а кут між діагоналями 60°;
г) одна зі сторін удвічі більша за другу, а діагональ дорівнює 5 см;
ґ) одна зі сторін дорівнює 8 см, а друга на 4 см менша за діагональ.

577. Знайдіть висоту рівностороннього трикутника, якщо його сторона дорівнює a.

578. Знайдіть сторону рівностороннього трикутника, якщо його медіана дорівнює m.

579. Катет рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює a. Знайдіть його гіпотенузу.

580. Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює c. Знайдіть його катети.

581. Знайдіть відношення діагоналі квадрата до його сторони.

582. Діагоналі ромба 10 м і 24 м. Знайдіть його сторони.

583. У коло радіуса 34 см вписано прямокутник, відношення сторін якого 8 : 15. Знайдіть периметр прямокутника.

584. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо вони пропорційні числам 2 і 3, а гіпотенуза дорівнює $2\sqrt{13}$.

585. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 7 см і 24 см. Знайдіть радіус описаного кола.

586. Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а медіана, проведена до гіпотенузи, 5 см. Знайдіть периметр трикутника.

587. У рівнобедреному трикутнику знайдіть:

а) висоту, проведену до основи, якщо бічна сторона і основа відповідно дорівнюють 26 см і 20 см;

б) бічну сторону, якщо основа і висота, проведена до неї, дорівнюють відповідно 10 см і 20 см;

в) сторони, якщо бічна сторона відноситься до основи як 5 : 6, а висота, проведена до основи, дорівнює 12 см;

г) бічну сторону, якщо основа дорівнює 6 см, а кут при основі 45°.

588. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 11 см і 59 см, а бічна сторона 25 см. Знайдіть висоту трапеції.

589. У колі радіуса 17 см проведено хорду завдовжки 16 см. Знайдіть відстань від центра кола до хорди.

590. Хорда AB і перпендикулярний до неї радіус OC перетинаються в точці K. Знайдіть AB, якщо $OK = 9$ см, $KC = 32$ см.

591. Для транспортування матеріалів між двома фабричними будівлями споруджено похилий жолоб, кінці якого розміщено на висоті 8 м і 3 м. Відстань між будівлями — 10 м. Обчисліть довжину жолоба.

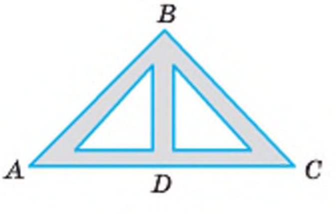
592. Діаметр колоди 12 см. Чи можна з цієї колоди витесати квадратний брус із ребром: а) 10 см; б) 8 см?

593. Дерево надломилось на висоті 6 м, і його вершина впала на землю на відстані 8 м від стовбура (мал. 192). Якою була висота дерева?

594. Відстань між деревами заввишки 13 м і 27 м дорівнює 48 м. Знайдіть відстань між вершинами дерев.

595. Кроквова ферма має крокви AB і BC по 9 м і прогін AC завдовжки 14 м. Визначте висоту ферми BD (мал. 193).

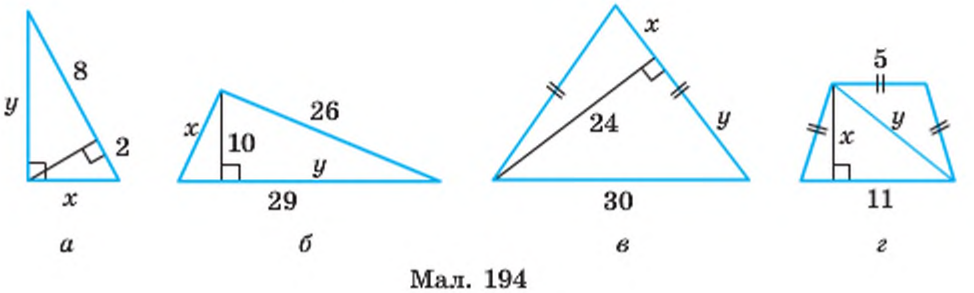
Мал. 192



Мал. 193

Б

596. За малюнком 194 знайдіть невідомі елементи x і y.



Мал. 194

597. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник зі сторонами 10 см, 10 см і 12 см.

598. Знайдіть периметр прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 20 см, а радіус вписаного кола — 4 см.

599. Бічна сторона рівнобедреного трикутника на 8 см більша за висоту, проведену до основи. Знайдіть периметр трикутника, якщо основа дорівнює 24 см.

600. ***Відкрита задача.*** Знайдіть периметр трикутника, якщо дві його сторони дорівнюють 12 см і 16 см і трикутник є **...** .

601. Катет прямокутного трикутника дорівнює 28 дм, а різниця двох інших сторін 8 дм. Знайдіть периметр трикутника.

602. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 9 см і 40 см. Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл.

603. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть: а) медіани трикутника; б) висоту, проведену до гіпотенузи.

604. На катеті BC прямокутного $\triangle ABC$ з гіпотенузою $AB = 50$ см взято точку M таку, що $AM = 41$ см і $CM : MB = 3 : 7$. Знайдіть катети трикутника.

605. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 22 см і 42 см, а бічна сторона 26 см. Знайдіть діагоналі трапеції.

606. Знайдіть діагоналі прямокутної трапеції з основами 3 см і 6 см та кутом 120°.

607. Доведіть, що в прямокутній трапеції різниця квадратів діагоналей дорівнює різниці квадратів основ.

608. У прямокутній трапеції менша основа дорівнює m, а більша бічна сторона і менша діагональ дорівнюють по n. Знайдіть більшу діагональ трапеції.

609. Знайдіть радіус кола, вписаного в рівнобічну трапецію з основами 4 см і 16 см.

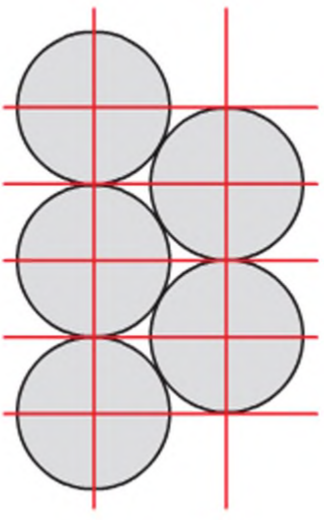
610. Знайдіть основи трапеції, вписаної в коло, якщо бічна сторона і діагональ відповідно дорівнюють 6 см і 8 см, а центр кола лежить на більшій стороні трапеції.

611. Радіуси двох концентричних кіл дорівнюють r і $2r$. Знайдіть довжину хорди більшого кола, яка дотикається до меншого кола.

612. У колі радіуса 15 см проведено дві паралельні хорди завдовжки 18 см і 24 см. Знайдіть відстань між хордами. Розгляньте два випадки.

613. З листа жерсті вирізали круги, дотичні один до одного (мал. 195). Знайдіть відстань між прямими, на яких розташовані центри кругів, якщо діаметр кожного круга дорівнює 28 см.

614. Відстань між центрами двох кіл, радіуси яких 10 см і 17 см, дорівнює 21 см. Знайдіть довжину спільної хорди.



Мал. 195

615. Радіуси двох кіл, що перетинаються, дорівнюють 13 см і 15 см, а спільна хорда дорівнює 24 см. Знайдіть відстань між центрами кіл.

616. Кола радіусів 8 см і 18 см дотикаються зовні. Знайдіть довжину спільної зовнішньої дотичної.

617. Радіуси двох кіл дорівнюють 2 см і 8 см, а відстань між їхніми центрами 15 см. Знайдіть довжину спільної: а) зовнішньої дотичної; б) внутрішньої дотичної.

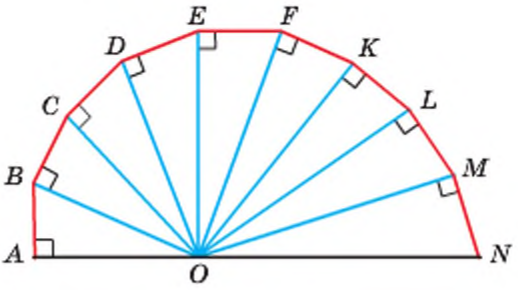
618. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b. Знайдіть висоту, проведену з вершини прямого кута.

619. Знайдіть висоту BH $\triangle ABC$, якщо $AB = 13$, $AC = 14$, $BC = 15$.

620. У прямокутному трикутнику катет завдовжки 18 см лежить проти кута 15°. Знайдіть довжину другого катета.

621. Доведіть, що квадрат найменшої медіани прямокутного трикутника менший від суми квадратів інших його медіан у 5 разів.

622. Дев'ять прямокутних трикутників розміщено, як показано на малюнку 196. Знайдіть відношення $OA : ON$, якщо всі ланки ламаної $ABCDEFKLMN$ — рівні відрізки і $OA = 2AB$.



Мал. 196

Практичне завдання

623. Підготуйте презентацію на тему:
1. Піфагор Самоський і його теорема.
2. Математичні здобутки в школі Піфагора.

Задачі для повторення

624. Знайдіть кути паралелограма, якщо один із них на 100° менший від суми трьох інших кутів.

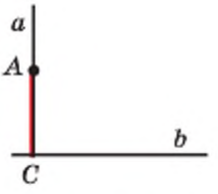
625. Дано опуклий чотирикутник $ABCD$, у якого $AB = AD = 3$ см, $CB = CD =$ $= 4$ см і $\angle B = 90°$. Доведіть, що в ньому кути B і D рівні, а діагоналі перпендикулярні. Чи можна навколо такого чотирикутника описати коло? Якщо можна, то який у нього радіус і де розташований його центр? Чи можна в такий чотирикутник вписати коло? Якщо можна, то знайдіть його радіус.

626. Укажіть вид трикутника, якщо його кути пропорційні числам: а) 2, 3 і 5; б) 5, 5 і 8; в) 3, 3 і 6.

627. Довжина тіні людини зростом 1,8 м дорівнює 2,5 м. Знайдіть висоту дерева, тінь від якого завдовжки 10 м.

§ 14 Перпендикуляр і похила

Як ви вже знаєте, дві прямі називають перпендикулярними, якщо вони перетинаються під прямим кутом. Якщо перпендикулярні прямі a і b перетинаються в точці C, а на прямій a взято довільну точку A, то відрізок AC називають **перпендикуляром**, опущеним з точки A на пряму b (мал. 197).



Мал. 197

Мал. 198

Нехай AC — перпендикуляр, опущений з A на пряму b, а B — будь-яка точка цієї прямої, відмінна від C. Відрізок AB називають **похилою,** проведеною з точки A до прямої b, точку B — основою похилої, а відрізок CB — проекцією похилої AB на пряму b (мал. 198).

Якщо з однієї точки до якої-небудь прямої провести похилу AB і перпендикуляр AC, то вони разом з проекцією похилої утворять прямокутний трикутник ABC. У 7 класі було доведено, що в кожному прямокутному трикутнику гіпотенуза більша кожного з катетів, тому:

- **кожна похила довша за перпендикуляр, проведений з тієї самої точки на ту саму пряму;**
- **проекція похилої коротша від самої похилої.**

Із ознак рівності прямокутних трикутників випливають такі твердження:

- **якщо з однієї точки до тієї самої прямої проведено дві рівні похилі, то їхні проекції рівні;**
- **якщо рівні проекції похилих, проведених з однієї точки до тієї самої прямої, то і ці похилі рівні.**

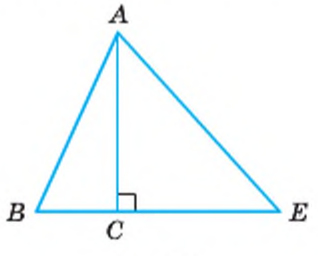
З теореми Піфагора випливають ще два твердження:

- **якщо з однієї точки до прямої проведено дві похилі, то з них більша та, проекція якої більша;**
- **якщо з однієї точки до прямої проведено дві похилі, то більша похила має більшу проекцію.**

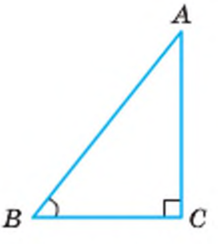
Тому що за теоремою Піфагора $AB^2 = AC^2 + CB^2$. Таким чином, при сталому значенні AC (одного катета) чим більше значення CB (другого катета), тим більше і значення AB (гіпотенузи), і навпаки.

Приклад. Нехай у $\triangle ABE$ AC — перпендикуляр, а AB і AE — похилі, проведені з точки A до прямої BE (мал. 199). Тоді якщо $AB < AE$, то і $BC < CE$.

Важливу роль відіграє *кут між похилою і її проекцією*. На малюнку 200 це кут B — кут між похилою AB і її проекцією BC. Він завжди більший за 0° і менший за 90°.



Мал. 199



Мал. 200

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

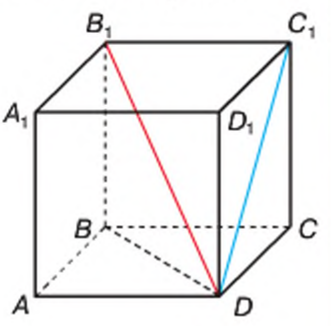
Перпендикуляр і похила та їхні властивості використовуються у будівництві, на транспорті, у побуті тощо (мал. 201).

Мал. 201

Зверніть увагу, що поняття «перпендикуляр», «похила», «проекція похилої» розглядають і в просторі. Розгляньте куб, зображений на малюнку 202.

Кожна з його граней — квадрат. Тому $C_1C \perp CD$ і $C_1C \perp CB$. Кажуть, що C_1C — перпендикуляр до площини $ABCD$, C_1D — похила, а CD — проекція цієї похилої на площину $ABCD$.

Чотирикутник BB_1D_1D — прямокутник (чому?). У ньому B_1B — перпендикуляр до площини $ABCD$, B_1D — похила, а BD — проекція цієї похилої на площину $ABCD$. Подивіться уважно на малюнок і назвіть інші перпендикуляри і похилі до площини $ABCD$. Спробуйте навести приклад перпендикуляра, похилої та її проекції до площини BB_1C_1C.



Мал. 202

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Які прямі називають перпендикулярними?
2. Що таке перпендикуляр? Похила?
3. Поясніть, що називають проекцією похилої.
4. Скільки різних похилих можна провести з даної точки до прямої? А скільки перпендикулярів?
5. Як залежить довжина похилої від її проекції?

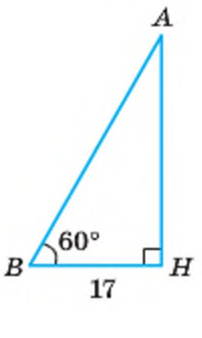
Виконаємо разом

1 Знайдіть довжину похилої, якщо довжина її проекції дорівнює 17 м, а кут між ними 60°.

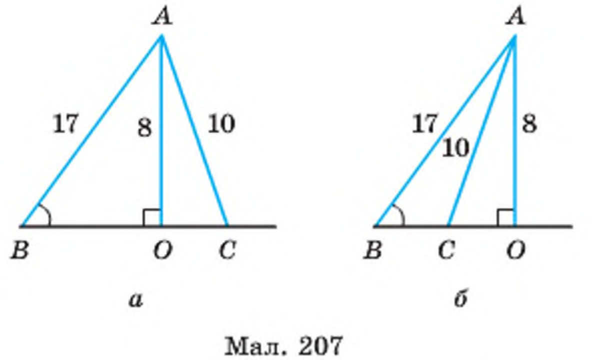
- Якщо похила BA, її проекція BH і кут між ними $\angle ABH = 60^\circ$, то $\angle A = 30^\circ$ (мал. 206).
А катет BH, який лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи. Тому шукана довжина похилої $AB = 2 \cdot BH = 34$ (м).

2 Із точки A, що лежить на відстані 8 см від прямої a, до цієї прямої проведено дві похилі, довжини яких дорівнюють 17 см і 10 см. Знайдіть відстань між основами похилих. Скільки розв'язків має задача?

- Відразу зауважимо, що задача має два розв'язки, залежно від того, як розміщені похилі відносно перпендикуляра OA (мал. 207, a, $б$).
З $\triangle AOB$ за теоремою Піфагора знайдемо OB:
$OB^2 = AB^2 - AO^2$,
$OB^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$, $OB = 15$ (см).
Аналогічно з $\triangle AOC$ знайдемо OC:
$OC^2 = AC^2 - AO^2$,
$OC^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$, $OC = 6$ (см).
Тоді $BC = BO + OC = 21$ см (у випадку a) і $BC = BO - CO = 9$ см (у випадку $б$).



Мал. 206

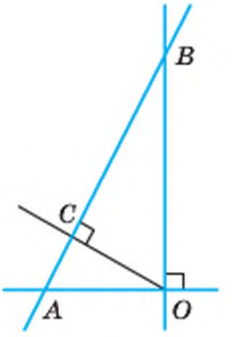


Мал. 207

Задачі і вправи

Виконайте усно

628. Назвіть: а) перпендикуляри до прямих AO, BO, AB; б) похилі до прямих AO, BO, AB, зображені на малюнку 203.



Мал. 203

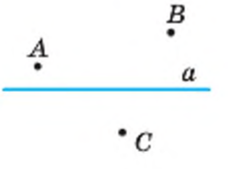
629. Скільки різних перпендикулярів можна провести через дану точку до даної прямої? А з даної точки до даної прямої?

630. З точки A до прямої a проведено перпендикуляр AH і похилу AB завдовжки 30 см. Кут між ними 30°. Знайдіть довжину проекції цієї похилої.

631. Проекція похилої, проведеної з A на пряму a, дорівнює 40 см і утворює з похилою кут 45°. Знайдіть відстань від точки A до прямої a.

А

632. Позначте в зошиті точки A, B, C і пряму a, як на малюнку 204, і проведіть з названих точок перпендикуляри до a.



Мал. 204

633. З точки P до прямої p проведено перпендикуляр PK і похилу PM, кут між якими 45°. Знайдіть довжину похилої та її проекції, якщо $PK = 37$ см.

634. З точки A, віддаленої від прямої a на 10 см, проведено похилу під кутом 60° до прямої a. Знайдіть довжину похилої та її проекцію на пряму a.

635. M — внутрішня точка прямого кута ABC. Проекції відрізка MB на сторони кута дорівнюють 9 см і 12 см. Знайдіть відстань від точки M до вершини кута.

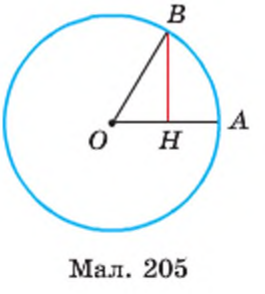
636. ABC — рівносторонній трикутник зі стороною a. Побудуйте проекцію сторони трикутника на пряму, на якій лежить інша його сторона. Знайдіть довжину цієї проекції.

637. Сторони трикутника дорівнюють 10 см, 10 см і 15 см. Знайдіть проекцію меншої сторони трикутника на пряму, якій належить його більша сторона.

638. Точка M кута ABC рівновіддалена від його сторін. Доведіть, що проекції відрізка MB на сторони кута рівні.

639. OA і OB — радіуси одного кола, $\angle AOB = 60°$. Знайдіть відношення радіуса OA до його проекції на OB.

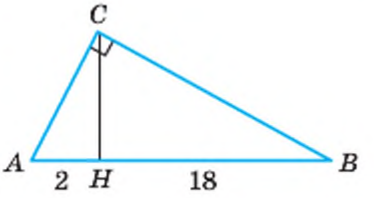
640. Знайдіть кут між радіусами кола, якщо проекція одного з них на другий становить четверту частину діаметра (мал. 205).



Мал. 205

641. Сторона AB рівностороннього трикутника ABC дорівнює a. Знайдіть її проекцію на пряму, якій належить висота BH цього трикутника.

642. Проекції катетів на гіпотенузу прямокутного трикутника дорівнюють 2 см і 18 см. Знайдіть усі три висоти трикутника (мал. 206).



Мал. 206

643. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 15 см і 20 см. Знайдіть їх проекції на гіпотенузу.

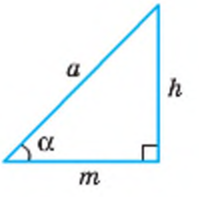
644. Знайдіть проекцію бічної сторони рівнобічної трапеції з основами 30 см і 60 см на її більшу основу.

645. Бічна сторона прямокутного рівнобедреного трикутника дорівнює a. Знайдіть її проекцію на гіпотенузу трикутника.

Б

646. Укажіть значення величин у порожніх клітинках таблиці, якщо h, a і m — відповідно перпендикуляр, похила та її проекція на деяку пряму, а α — кут між похилою та її проекцією (мал. 207).

h	2			4		8
a	4	6	10			
m		3		4	7	
α			60°		45°	30°

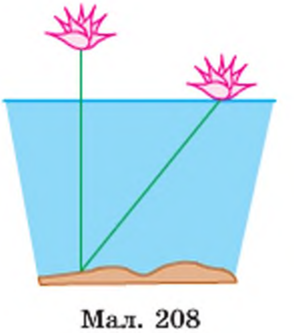


Мал. 207

647. Точка K — середина сторони AB квадрата $ABCD$. Знайдіть проекції відрізків KB, BC і CD на пряму KC, якщо $AB = 9$.

648. Сторони трикутника дорівнюють a, $2a$ і $2a$. Знайдіть проекції на одну бічну сторону двох інших сторін трикутника.

649. ***Задача Бхаскари.*** Квітка лотоса при вертикальному положенні стебла піднімалась над водою на $\frac{1}{2}$ фута. Вітер відхилив її на 2 фути від попереднього положення (по поверхні води). Після цього квітка лотоса опинилась нарівні води. Визначте глибину озера в цьому місці (мал. 208).



Мал. 208

650. Хорда CK ділить перпендикулярний їй діаметр кола на відрізки $AH = 18$ см і $HB = 8$ см. Знайдіть: а) відстані від C до A і B; б) проекції відрізків AH на AC і HB на CB.

651. AH і HB — проекції катетів трикутника ABC на гіпотенузу AB. AK і PB — їх проекції на катети AC і BC. Знайдіть відношення $AK : PB$, якщо: а) $AC = b$, $BC = a$; б) $\angle B = 30°$.

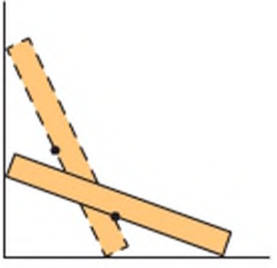
652. ***Задача Л. Пізанського*** (XII–XIII ст.). Дві вежі, одна з яких заввишки 40 футів, а друга — 30 футів, розташовані на відстані 50 футів одна від одної. До криниці, що була між ними, одночасно з кожної вежі злетіла пташка. Рухаючись із однаковою швидкістю, вони прилетіли до криниці одночасно. Знайдіть відстань від криниці до найближчої вежі (у футах).

653. Проекція сторони прямокутника на його діагональ становить третину діагоналі. Як відносяться сторони прямокутника?

654. Перпендикуляр, опущений з вершини прямокутника на його діагональ, ділить її у відношенні $m : n$. Як відносяться сторони прямокутника?

Практичне завдання

655. Лінійка переміщається так, що один її кінець лежить на одній стороні прямого кута, а другий — на другій стороні (мал. 209). Як при цьому переміщається середина лінійки? Як змінюються проекції лінійки на сторони кута? З'ясуйте це, переміщаючи лінійку в прямому куті стола.



Мал. 209

Задачі для повторення

656. Один з кутів рівнобічної трапеції дорівнює 50°. Знайдіть інші її кути.

657. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 16 см і 12 см. Визначте медіану, проведену до гіпотенузи.

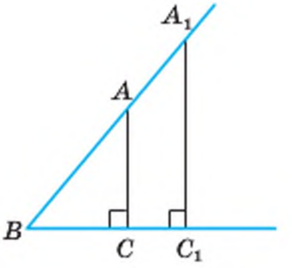
658. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 17 см, а основа 16 см. Обчисліть висоту трикутника.

659. Визначте сторони рівнобедреного трикутника, якщо його висота дорівнює 35 см, а основа відноситься до бічної сторони як 48 : 25.

660. Доведіть, що діагоналі рівнобічної трапеції ділять її на 4 трикутники, два з яких рівнобедрені, а два — рівні один одному.

§ 15 Синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника

Якщо в прямокутному трикутнику кут дорівнює 30°, то, знаючи гіпотенузу c, неважко визначити катети: один із них дорівнює половині гіпотенузи, а другий легко знаходиться за теоремою Піфагора. А як, знаючи гіпотенузу, знайти катети, якщо гострий кут прямокутного трикутника дорівнює, наприклад, 25°? Для цього треба скористатися поняттям синуса чи косинуса цього кута.



Мал. 210

Ви вже знаєте, що два прямокутні трикутники подібні, якщо гострий кут одного дорівнює гострому куту другого трикутника. Зокрема, яким би не був гострий кут B, відповідні сторони трикутників ABC і A_1BC_1, зображених на малюнку 210, пропорційні:

$$\frac{AC}{AB}=\frac{A_1C_1}{A_1B},\ \frac{BC}{AB}=\frac{BC_1}{BA_1},\ \frac{AC}{BC}=\frac{A_1C_1}{BC_1}.$$

Отже, якщо два прямокутні трикутники мають рівні гострі кути, то відношення їх відповідних сторін залежить тільки від міри цих кутів і не залежить від довжин сторін. У математиці такі відношення відіграють важливу роль, і в усьому світі їх називають однаково: *синус, косинус, тангенс*.

Синусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до гіпотенузи.

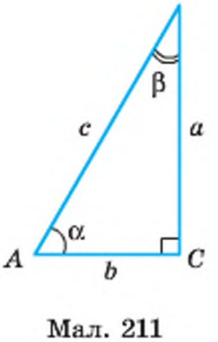
Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до гіпотенузи.

Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до прилеглого.

Синус, косинус, тангенс гострого кута α позначають відповідно так: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

Розглянемо довільний прямокутний трикутник. Домовимося позначати його прямий кут літерою C, гострі кути — літерами A, B, протилежні їм сторони — відповідними малими літерами c, a, b, а міри гострих кутів — грецькими літерами α (альфа) і β (бета) (мал. 211). Для трикутника з такими сторонами і кутами сформульовані вище означення можна записати у вигляді рівностей:

$$\sin\alpha=\frac{a}{c},\ \cos\alpha=\frac{b}{c},\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}. \qquad (1)$$



Мал. 211

Це — *співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника*.

Знаючи одну сторону прямокутного трикутника і його гострий кут, за допомогою цих формул можна визначити дві інші сторони трикутника. Значення синуса, косинуса чи тангенса даного кута наведено в таблиці (див. форзац 1).

З рівностей (1) катет прямокутного трикутника визначається так:

$$a = c \cdot \sin\alpha,\ b = c \cdot \cos\alpha,\ a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

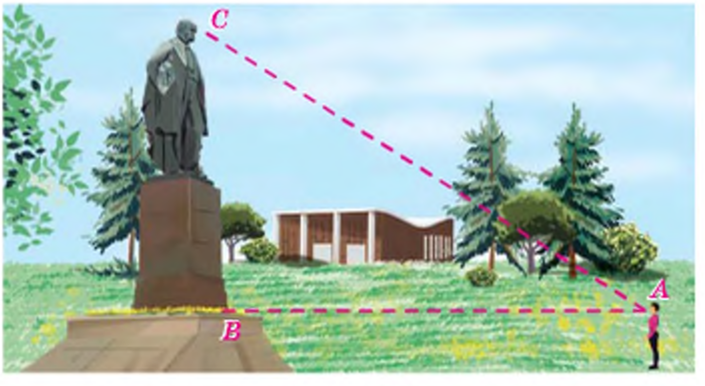
Отже, **катет прямокутного трикутника дорівнює добутку:**
- **гіпотенузи на синус протилежного кута,** або
- **гіпотенузи на косинус прилеглого кута,** або
- **другого катета на тангенс протилежного кута.**

З рівностей (1) гіпотенузу прямокутного трикутника можна знайти так:

$$c = \frac{a}{\sin\alpha},\ c = \frac{b}{\cos\alpha}.$$

Отже, **гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює частці від ділення:**
- **катета на синус протилежного кута** або
- **катета на косинус прилеглого кута.**

Задача. Як визначити висоту пам'ятника Тарасу Шевченку, якщо з точки A, віддаленої від точки B на 30 м, його видно під кутом 18° (мал. 212)?



Мал. 212

Розв'язання. Якщо шукана висота пам'ятника дорівнює h, то $\frac{h}{AB} = \operatorname{tg} A$.

Якщо AB = 30 м, $\angle A = 18°$, то $h = 30 \cdot \operatorname{tg} 18°$.

За таблицею знаходимо: $\operatorname{tg} 18° \approx 0{,}335$.
Отже, $h \approx 30 \cdot 0{,}335 \approx 10{,}05$ м.

Примітка. Пишуть tg A, sin A, cos A, а не tg $\angle A$.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Досі мова йшла про синус, косинус і тангенс лише гострого кута. У 9 класі ви ознайомитесь із синусом, косинусом і тангенсом довільного кута — в межах від 0° до 180°. А ще — з котангенсом кута. Котангенс кута α — це число, обернене до тангенса кута α:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Якщо для прямокутного трикутника

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \text{ то } \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Слова *косинус* і *котангенс* починаються префіксами «ко» — скороченням латинського *complementi* — «доповнення». Вони означають відповідно: синус доповнення і тангенс доповнення.

У прямокутному трикутнику один із гострих кутів доповнює інший до 90°. Такі кути називають *доповняльними*.

Якщо α і β — доповняльні кути одного прямокутного трикутника, то:

$$\sin\alpha = \cos\beta = \cos(90° - \alpha); \quad \cos\alpha = \sin\beta = \sin(90° - \alpha);$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}(90° - \alpha); \quad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(90° - \alpha).$$

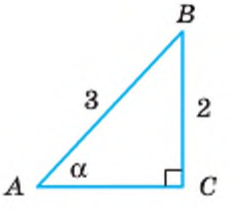
Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що називають синусом гострого кута прямокутного трикутника? А косинусом?
2. Що називають тангенсом гострого кута прямокутного трикутника?
3. Чому дорівнює синус кута 30°?
4. Чому дорівнює tg 45°?
5. Чому дорівнює відношення катетів прямокутного трикутника?
6. Як визначити катет прямокутного трикутника через його гіпотенузу і гострий кут?
7. Чи завжди косинус одного гострого кута прямокутного трикутника дорівнює синусу другого гострого кута?

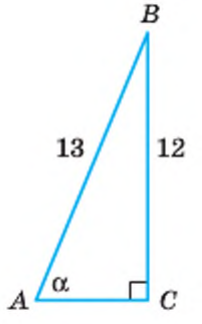
Виконаємо разом

1 Користуючись малюнком 213, знайдіть синус, косинус і тангенс кута α.

● За означенням $\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$. Отже, $\sin\alpha = \frac{2}{3}$. За теоремою Піфагора знайдемо катет AC. $AC = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$. Тоді $\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ і $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.



Мал. 213



Мал. 214

2 Синус гострого кута α прямокутного трикутника дорівнює $\frac{12}{13}$. Знайдіть $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

- Розглянемо $\triangle ABC$ (мал. 214), у якого $\angle C = 90^\circ$, $BC = 12$, $AB = 13$. Знайдемо катет AC.

  За теоремою Піфагора $AC = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$.

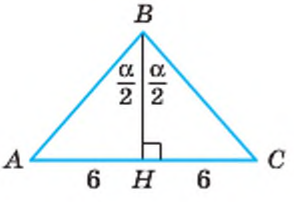
  За означенням $\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$.

3 Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см. Знайдіть проведену з вершини висоту і бічну сторону трикутника, якщо кут при його вершині дорівнює α.

- Нехай у $\triangle ABC$ $AB = BC$. Проведемо з вершини B висоту BH (мал. 215).

  Тоді $\angle BHA = 90^\circ$, $\angle HBA = \frac{\alpha}{2}$, а $AH = HC = 6$ см.

  Бічна сторона $\triangle ABC$ — це гіпотенуза $\triangle ABH$. Щоб знайти її, скористаємося формулою



Мал. 215

$$AB = \frac{AH}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \text{ Отже, } AB = \frac{6}{\sin\frac{\alpha}{2}} \text{ (см).}$$

Висота BH трикутника ABC — це катет трикутника ABH.

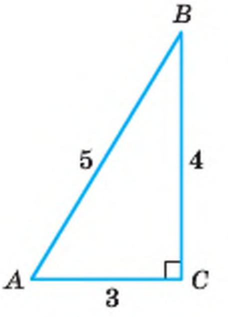
Знайдемо його за формулою $BH = \frac{AH}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Отже, $BH = \frac{6}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$ (см).

Задачі і вправи

Виконайте усно

661. Знайдіть sin A, sin B, cos A, cos B, tg A, tg B, якщо A і B — гострі кути єгипетського трикутника* (мал. 216).



Мал. 216

662. Катети прямокутного трикутника ABC дорівнюють 1 і 2. Знайдіть синус, косинус і тангенс його найменшого кута.

663. Тангенс гострого кута прямокутного трикутника дорівнює 1. Знайдіть синус і косинус цього кута.

664. Чи може бути більшим за 1:

а) синус гострого кута;

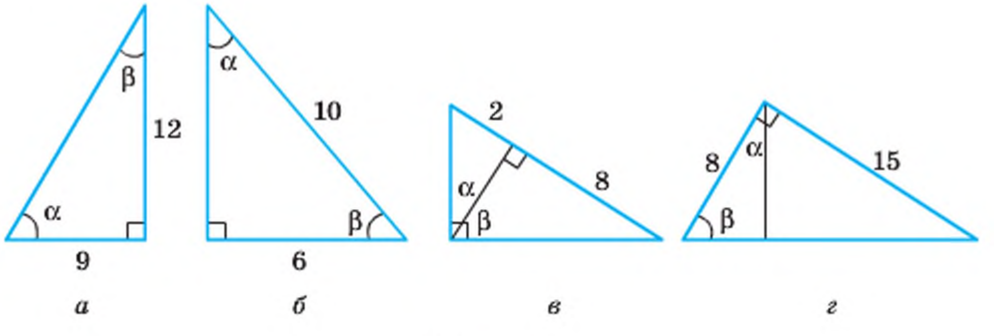
б) косинус гострого кута;

в) тангенс гострого кута?

А

665. Трикутник зі сторонами 6 м, 8 м і 10 м — прямокутний. Знайдіть синус, косинус і тангенс його гострих кутів.

666. Користуючись малюнком 217, знайдіть синус, косинус і тангенс кутів α і β.



Мал. 217

667. Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнюють 24 см і 25 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс гострих кутів трикутника.

668. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 12 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс гострих кутів трикутника.

669. Знайдіть синус, косинус і тангенс гострих кутів A і B прямокутного трикутника ABC, якщо: а) AC = 40 см, BC = 9 см; б) AB = 1,7 м, BC = 0,8 м; в) $AB = \sqrt{3}$ м, AC = 1 м; г) $CA = CB = \sqrt{2}$ см.

* Прямокутний трикутник зі сторонами 3, 4 і 5 називають єгипетським.

670. Знайдіть синус, косинус і тангенс гострих кутів A і B прямокутного трикутника ABC, якщо: а) $AB = 25$, $BC = 7$; б) $AC = 2{,}1$, $BC = 2$.

671. Сторони прямокутника дорівнюють 9 см і 12 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута, який утворює діагональ прямокутника з більшою стороною.

672. У ромбі $ABCD$ діагоналі AC і BD дорівнюють відповідно 24 см і 10 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута ABO, де O — точка перетину діагоналей.

673. Синус одного з гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює $\frac{4}{5}$. Знайдіть косинус і тангенс цього кута.

674. Косинус одного з гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 0,6. Знайдіть синус і тангенс цього кута.

675. Тангенс одного з гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 1,5. Знайдіть синус і косинус цього кута.

676. Дано три точки: $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$, $B(1;\ 1)$. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута OBA.

677. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута KAO, якщо $A(1;\ 0)$, $O(0;\ 0)$, $K(0;\ 2)$.

678. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює c, а один із кутів α. Знайдіть катети трикутника.

679. Драбину довжиною 12 м приставлено до карниза стіни будинку під кутом 27°. Знайдіть висоту стіни до карниза.

680. Катет прямокутного трикутника дорівнює m, а прилеглий кут α. Знайдіть другий катет і гіпотенузу трикутника.

681. Дерево при кутовій висоті Сонця 37° відкидає тінь завдовжки 10,2 м. Знайдіть висоту дерева.

682. Катет прямокутного трикутника дорівнює n, а протилежний кут α. Знайдіть гіпотенузу і другий катет трикутника.

683. Дерево заввишки 20 м, що росте на одному березі річки, з другого берега видно під кутом 15°. Знайдіть ширину річки. (Припускаємо, що основа дерева і око спостерігача — на одному рівні.)

684. Для завантаження силосної башти на висоті 4,5 м треба приладнати похилий жолоб із нахилом 12°. Якої довжини слід взяти жолоб?

Б

685. Дано прямокутний $\triangle ABC$ $(\angle C = 90°)$. Знайдіть:

а) BC, якщо $AB = 6$ см, $\sin A = 0{,}3$;

б) AB, якщо $BC = 5$ см, $\cos B = \frac{2}{5}$;

в) BC, якщо $AC = 8$ см, $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$.

686. Відомо, що a, b — катети $\triangle ABC$, α, β — протилежні до них кути. Перенесіть таблицю в зошит і заповніть порожні клітинки за умови, що c — гіпотенуза $\triangle ABC$.

№	a	b	c	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\beta$	$\cos\beta$
1	2			0,5			
2		3					$\frac{\sqrt{3}}{2}$
3			5			0,2	

687. Побудуйте чотирикутник $ABCD$ за координатами його вершин: $A(-2;\ 0)$, $B(0;\ 2)$, $C(1;\ 0)$, $D(0;\ -3)$. Знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс кутів: $\angle OAB$, $\angle OBA$, $\angle OBC$, $\angle OCB$, $\angle OCD$, $\angle ODC$, $\angle OAD$, $\angle ODA$, де $O(0;\ 0)$.

688. Знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс гострих кутів паралелограма $OABC$, якщо $O(0;\ 0)$, $A(0;\ 3)$, $B(4;\ 5)$, $C(4;\ 2)$.

689. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює b, а кут при вершині — α. Знайдіть: а) основу; б) висоти.

690. Діагональ прямокутника дорівнює d і утворює з більшою стороною кут α. Знайдіть меншу сторону прямокутника.

691. Для визначення висоти колони відміряли по прямій від основи колони 150 м. Вершину колони видно під кутом $20°$. Висота кутоміра дорівнює 1,5 м. Знайдіть висоту колони.

692. З точки, що лежить на відстані h від прямої, проведено похилу, яка утворює з прямою кут α. Знайдіть довжину похилої.

693. Прямокутний трикутник з гострим кутом α вписано в коло радіуса r. Знайдіть катети трикутника.

694. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює a, а кут при основі α. Знайдіть основу трикутника.

695. Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс найбільшого і найменшого кутів трикутника.

696. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють a і b, а гострий кут при основі α. Знайдіть бічну сторону і висоту трапеції.

Практичне завдання

697. Накресліть на міліметровому папері чверть кола радіуса 100 мм і поділіть його транспортиром на 9 рівних частин. Користуючись цим малюнком, складіть таблицю наближених значень синуса і косинуса для кутів $10°$, $20°$, $30°$, ..., $80°$.

Задачі для повторення

698. Сума двох кутів рівнобічної трапеції дорівнює 80°. Знайдіть кути трапеції.

699. Знайдіть периметр ромба, якщо його діагоналі дорівнюють 14 см і 48 см.

700. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, становить третю частину від суми інших кутів. Доведіть, що прямі взаємно перпендикулярні.

701. Відрізок завдовжки 5 см поділіть на 4 рівні частини.

702. Як розміщені два кола, якщо їхні радіуси 5 см і 8 см, а відстань між центрами 10 см?

Геометрія навколо нас

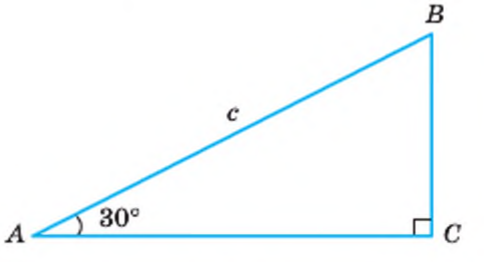
Прямокутні трикутники у спорудах

Будинок із сірників

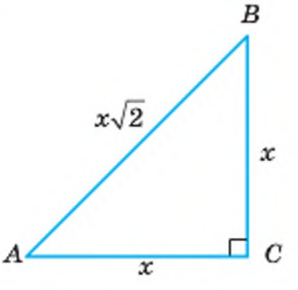
§ 16 Властивості тригонометричних функцій гострого кута

Кожному значенню гострого кута відповідає єдине значення його синуса. Тому синус гострого кута — функція цього кута. Те саме можна сказати про косинус і тангенс. Усі вони — функції, разом їх називають **тригонометричними функціями.** Згодом це поняття буде розширене, а у 8 класі так називатимемо тригонометричні функції гострого кута.

Знайдемо синус, косинус і тангенс кута 30° (мал. 218).



Мал. 218



Мал. 219

Якщо в $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $AB = c$, то $BC = 0,5AB = \frac{c}{2}$ і за теоремою Піфагора $AC = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

Отже, $\sin 30° = \frac{c}{2} : c = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}c : c = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 30° = \frac{c}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2}c = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Знайдемо значення $\sin 45°$, $\cos 45°$, $\operatorname{tg} 45°$.

Побудуємо довільний $\triangle ABC$, у якого $\angle C = 90°$, $\angle A = 45°$ (мал. 219). Якщо $AC = BC = x$, то за теоремою Піфагора

$AB = \sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2}$. Тоді

$$\sin 45° = BC : AB = x : x\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45° = AC : AB = x : x\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 45° = BC : AC = x : x = 1.$$

Подібним способом можна знайти значення синуса, косинуса і тангенса кута 60°. Результати зведемо в таблицю.

α	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Досі йшлося про $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\mathrm{tg}\,\alpha$, де α — гострий кут, тобто $0° < \alpha < 90°$. Однак багатьом фахівцям часто доводиться мати справу із тригонометричними функціями кутів, що мають 0° або 90°. Вважають, що

$\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\mathrm{tg}\, 0° = 0$,

$\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\mathrm{tg}\, 90°$ не існує.

Зверніть увагу і на таке. **Тангенс гострого кута може бути довільним додатним числом, а синус і косинус не можуть перевищувати 1.** Бо синус і косинус гострого кута — відношення катета до гіпотенузи, а катет завжди менший від гіпотенузи.

Наближені значення синуса, косинуса і тангенса, наприклад кута 25°, можна знайти за допомогою прямокутного трикутника. Найкраще це зробити на міліметровому папері, намалювавши чверть кола радіусом 100 мм (мал. 220) і помістивши в нього потрібний трикутник.

Розглянемо, наприклад, трикутник ABC. $\angle BAC = 25°$, а $\angle BCA = 90°$. Можемо виміряти його сторони і знайти потрібні відношення.

Оскільки $BC \approx 42$ мм, $AC \approx 91$ мм, то

$\sin 25° = BC : AB \approx 0,42$, $\cos 25° = AC : AB \approx 0,91$,

$\mathrm{tg}\, 25° = BC : AC \approx 42 : 91 \approx 0,46$.

Наближені значення $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ можна знаходити, користуючись таблицею (див. с. 4 форзаца) або калькулятором (інженерним, який є на комп'ютері).

За допомогою калькулятора робимо це так:

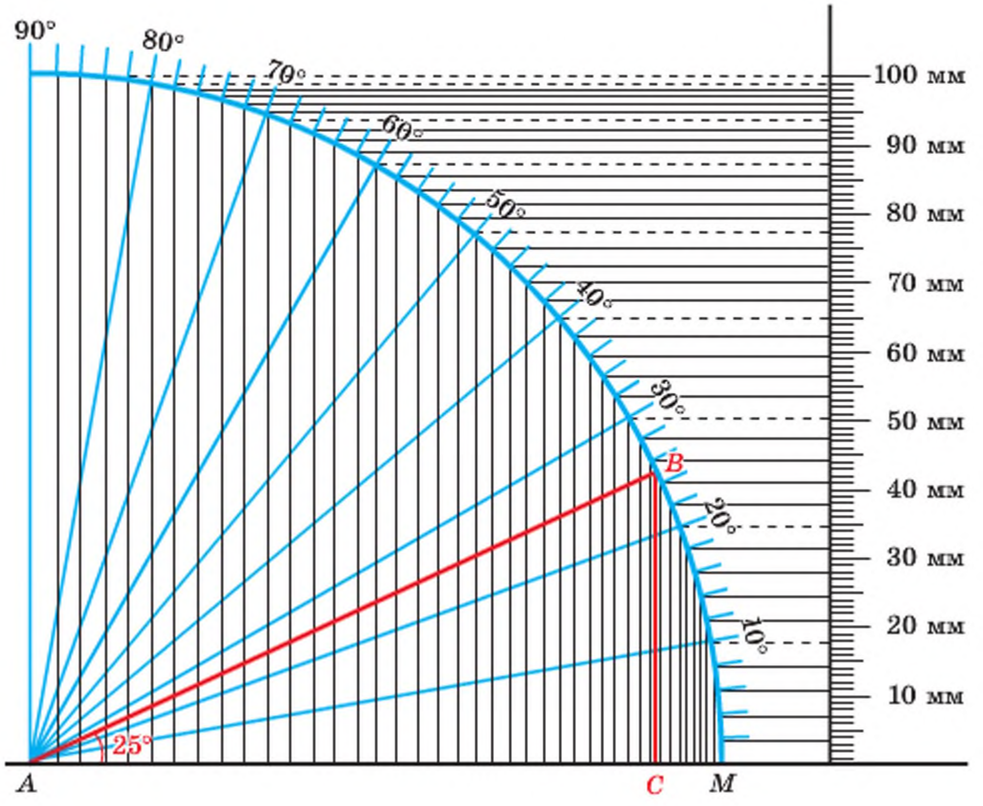
1) на панелі калькулятора обираємо «градуси»;

2) набираємо число градусів α;

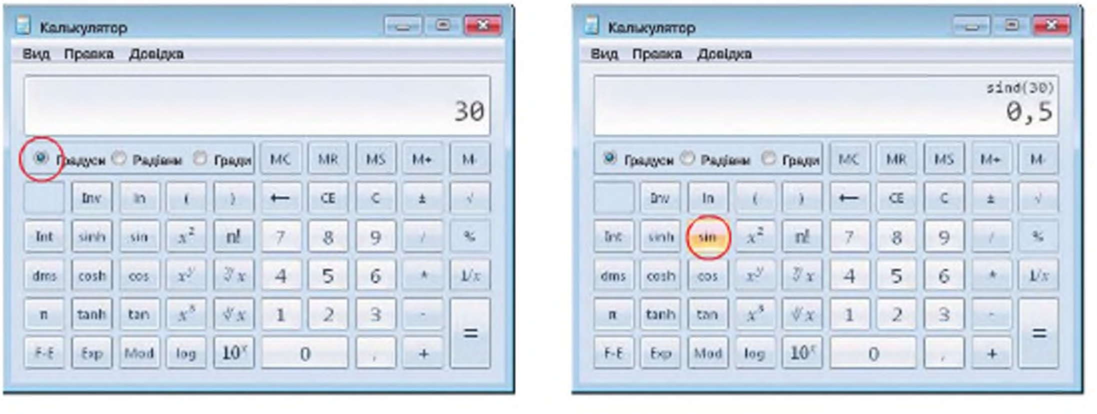
3) натискаємо на sin, cos або tg.

На малюнку 221 показано, як знаходять sin 30°.

$\sin 30° = 0,5$.



Мал. 220



Мал. 221

Якщо міра кута α містить хвилини або секунди, їх переводять у десяткові долі градуса. Наприклад, $27°36' = 27{,}6°$. Значення $\sin 27{,}6°$ знаходимо, як зазначено у п. 1–3.

$\boxed{\text{градуси}}$ **27,6** $\boxed{\sin}$ 0,463296...

Маємо: $\sin 27{,}6° = 0{,}463296... \approx 0{,}463$.

Кут α, косинус якого дорівнює 0,875, знаходимо так:

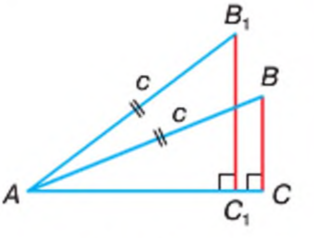
$\boxed{\text{градуси}}$ $\boxed{\text{Inv}}$ **0,875** $\boxed{\cos^{-1}}$ 28,955026...

Результат: $\alpha \approx 29°$.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Як змінюються синус, косинус і тангенс гострого кута із збільшенням кута?

Нехай маємо прямокутний трикутник *ABC* з гіпотенузою *AB* і гострим кутом *BAC* (мал. 222). Якщо, не змінюючи гіпотенузи, збільшувати кут, то протилежний катет збільшуватиметься, а прилеглий — зменшуватиметься. Оскільки $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ і катет *a* збільшується зі збільшенням кута α, то приходимо до висновку:



Мал. 222

Якщо гострий кут α збільшується, то $\sin\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$ збільшуються, а $\cos\alpha$ зменшується.

Враховуючи дані таблиці, можна уточнити, як саме змінюються значення синуса, косинуса і тангенса кута із його збільшенням від 0° до 90°.

Якщо кут α збільшувати від 0° до 90°, то його синус збільшуватиметься від 0 до 1, косинус зменшуватиметься від 1 до 0, тангенс збільшуватиметься від 0 до нескінченності, тобто може стати як завгодно великим числом.

Доведемо кілька тотожностей, які пов'язують $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$. Оскільки

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \text{ то } \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Маємо тотожність

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad (1)$$

яка пов'язує всі три тригонометричні функції одного кута α.

Для кожного прямокутного трикутника з гіпотенузою *c* і катетами *a* і *b*

$$a^2 + b^2 = c^2, \text{ або } \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Оскільки $\frac{a}{c} = \sin\alpha$, $\frac{b}{c} = \cos\alpha$, то маємо тотожність

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (2)$$

Це — *основна тригонометрична тотожність*. Вона правильна для будь-якого кута α.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що називають синусом гострого кута прямокутного трикутника? Чому дорівнює $\sin 30°$?
2. Чому дорівнює $\sin 0°$? А $\sin 90°$?
3. Що називають косинусом гострого кута прямокутного трикутника? Чому дорівнює $\cos 45°$?
4. Чому дорівнює $\cos 0°$? А $\cos 90°$?
5. Що називають тангенсом гострого кута прямокутного трикутника? Чому дорівнює $\operatorname{tg} 60°$?
6. Чи існує тангенс $90°$?

Виконаємо разом

1 Обчисліть: а) $4\cos 45° \sin 90° + 5\cos 90°$; б) $\operatorname{tg} 60° \sin 30° - \operatorname{tg} 30°$.

● а) $4\cos 45° \sin 90° + 5\cos 90° = 4\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1 + 5\cdot 0 = 2\sqrt{2}$;

б) $\operatorname{tg} 60° \sin 30° - \operatorname{tg} 30° = \sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

2 Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\cos A = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg} B = 1$ і кути A і B — гострі.

● Скористаємося таблицею значень тригонометричних функцій зі с. 144.

Оскільки кут A — гострий і $\cos A = \dfrac{1}{2}$, то $\angle A = 60°$. Аналогічно, $\angle B = 45°$.

Тоді $\angle C = 180° - (60° + 45°) = 75°$.

3 Діагоналі ромба дорівнюють a і $a\sqrt{3}$. Знайдіть кути ромба і його периметр.

● Нехай $ABCD$ — ромб (мал. 223). Тоді $\angle BOA = 90°$ (за властивістю діагоналей ромба), $OB = OD = \dfrac{a}{2}$, $AO = OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Нехай $\angle BAO = \angle OAD = \alpha$. Із $\triangle BOA$:

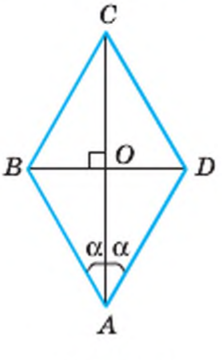
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BO}{AO} = \dfrac{a}{2} : \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Тобто

$\alpha = 30°$, а $\angle BAD = 60°$. Тоді $\angle ABC = 180° - 60° = 120°$.

Сторону ромба знайдемо як гіпотенузу $\triangle ABO$:

$AB = \dfrac{BO}{\sin 30°} = \dfrac{a}{2} : \dfrac{1}{2} = a$.

Отже, периметр ромба дорівнює $4a$.



Мал. 223

Задачі і вправи

Виконайте усно

703. Чи існує кут α такий, що: а) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; б) $\cos\alpha = \frac{4}{3}$; в) $\sin\alpha = \frac{21}{20}$; г) $\cos\alpha = \frac{20}{23}$; ґ) $\sin\alpha = 0,7$; д) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{17}{3}$; е) $\cos\alpha = 1$; є) $\operatorname{tg}\alpha = 1,3$; ж) $\sin\alpha = 0$?

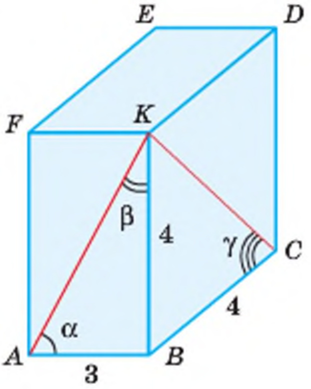
704. Знаючи, що в трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$, знайдіть синус, косинус і тангенс кута B.

705. Знаючи, що в $\triangle ABC$ кут C прямий і $\angle A + \angle C = 150°$, знайдіть $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$.

706. Обчисліть:

а) $\sin 90° + \sin 0°$; б) $\cos 90° - \cos 0°$;
в) $\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg} 0°$; г) $\operatorname{tg} 60° + \cos 60°$;
ґ) $\cos 60° - \sin 30°$; д) $\sin 45° + \cos 45°$.

707. На малюнку 224 зображено прямокутний паралелепіпед, ребра якого $AB = 3$, $BK = BC = 4$. Знайдіть синус, косинус і тангенс кутів α, β, γ.



Мал. 224

А

708. Обчисліть:

а) $2\sin 30°$; б) $2\operatorname{tg} 60°$; в) $2\cos 45°$; г) $3\operatorname{tg} 30°$; ґ) $4\sin 60°$; д) $5\cos 60°$.

709. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$. Знайдіть синус, косинус і тангенс гострих кутів трикутника ABC.

710. Знайдіть синус, косинус і тангенс гострих кутів рівнобедреного прямокутного трикутника.

711. Дано $\triangle ABC$ $(\angle C = 90°)$. Знайдіть:

а) $\sin A$, якщо $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\operatorname{tg} B$, якщо $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\cos A$, якщо $\sin B = \frac{1}{2}$; г) $\operatorname{tg} B$, якщо $\operatorname{tg} A = \sqrt{3}$.

712. Чи буде $\triangle ABC$ прямокутним, якщо кути A і B — гострі:

а) $\sin A = \frac{1}{2}$, $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} B = 1$;

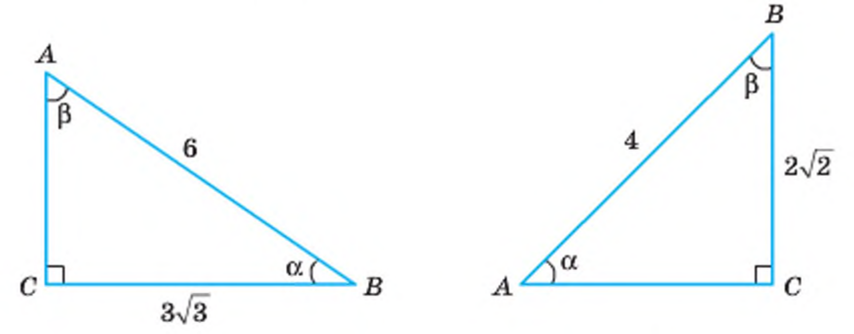
в) $\operatorname{tg} A = \sqrt{3}$, $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos B = \frac{1}{2}$?

713. Знайдіть кути $\triangle ABC$, якщо кути A і B — гострі:

а) $\sin A = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} B = \sqrt{3}$; б) $\operatorname{tg} A = 1$, $\operatorname{tg} B = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

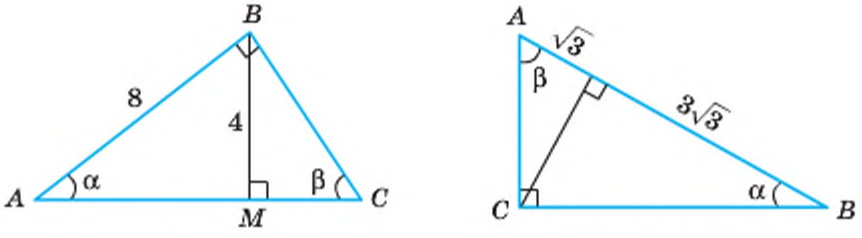
в) $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos A = \frac{1}{2}$.

714. Знайдіть кути α і β трикутників, зображених на малюнках 225 і 226.



а *б*

Мал. 225



а *б*

Мал. 226

715. Намалюйте прямокутний трикутник. Зробіть необхідні вимірювання і знайдіть тригонометричні функції його гострих кутів.

716. Користуючись таблицею значень тригонометричних функцій, знайдіть значення синуса, косинуса, тангенса для кожного з кутів:

1) 7°, 20°, 37°, 59°, 81°;

2) 43°30′, 84°30′, 12°30′, 52°30′.

717. За допомогою таблиці знайдіть:

1) sin 12°, sin 71°12′, sin 5°39′;

2) cos 44°, cos 19°30′, cos 78°14′;

3) tg 42°, tg 13°18′, tg 72°43′.

718. Скориставшись калькулятором, знайдіть: sin 20°, sin 4,8°, sin 64,25°, cos 25°, cos 45,8°.

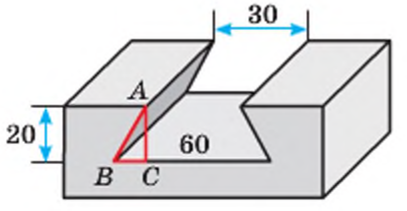
719. Знайдіть кути ромба, якщо висота ділить сторону на відрізки $\sqrt{2}$ і $2-\sqrt{2}$, починаючи від вершини гострого кута.

720. Менша висота паралелограма дорівнює 3 см, а менша сторона $2\sqrt{3}$. Знайдіть кути паралелограма.

721. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 3 см і 7 см, а бічна сторона $2\sqrt{2}$. Знайдіть кути трапеції.

722. Знайдіть кути прямокутної трапеції, основи якої дорівнюють 4 см і 6 см, а радіус вписаного кола $\sqrt{3}$.

723. У металевій деталі зроблено паз, поперечний розріз якого має форму рівнобічної трапеції (мал. 227). Обчисліть кути нахилу бічних граней паза за зазначеними на малюнку розмірами (в міліметрах). Величина кожного з таких кутів дорівнює величині кута ABC в поперечному розрізі деталі.



Мал. 227

724. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо основа і бічна сторона відповідно дорівнюють $6\sqrt{3}$ см і 6 см.

Б

725. Обчисліть:
а) $\cos 30° - \text{tg } 60°$;
б) $\text{tg } 30° \cos 30° - \sin 30° \text{ tg } 45°$;
в) $\sin 45° \cos 45° - 1$;
г) $\text{tg } 60° \text{ tg } 45° - \cos 30°$;
ґ) $\text{tg } 45° - 2\sin 30°$;
д) $2\cos 30° \sin 30° - \text{tg } 60°$.

726. Установіть вид гострокутного трикутника, якщо:
а) синуси двох його кутів рівні;
б) косинуси трьох його кутів рівні;
в) синус одного з кутів дорівнює косинусу другого.

727. Знайдіть $\angle B$ $\triangle ABC$ $(\angle C = 90°)$, якщо:

а) $\sin A = \dfrac{1}{2}$; б) $\cos A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\text{tg } A = 1$.

728. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо основа і висота, проведена до неї, дорівнюють відповідно 6 см і $\sqrt{3}$ см.

729. Сторони трикутника дорівнюють 2 см, 2 см і $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть кути трикутника.

730. Знайдіть кути прямокутного трикутника, якщо катет і гіпотенуза дорівнюють $3\sqrt{2}$ см і 6 см.

731. Знайдіть кути прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють $4\sqrt{3}$ см і 4 см.

732. Синус гострого кута прямокутного трикутника дорівнює $\frac{3}{5}$, а гіпотенуза дорівнює 10 см. Знайдіть катети трикутника.

733. Тангенс гострого кута прямокутного трикутника дорівнює $\frac{4}{3}$, а протилежний катет — 8 см. Знайдіть гіпотенузу цього трикутника.

734. Знаючи, що $\sin \alpha = 0{,}4$, знайдіть значення $\cos \alpha$ і $\mathrm{tg}\, \alpha$.

735. Заповніть порожні клітинки таблиці.

$\sin \alpha$	0,5					0,8
$\cos \alpha$		0,5			0,8	
$\mathrm{tg}\, \alpha$			0,5	1		

736. Знайдіть із точністю до сотих синус, косинус і тангенс кутів:
а) $\alpha = 25°10'$; б) $\beta = 3°7'$; в) $\gamma = 78°15'$; г) $\delta = 56°36'$.

737. Знайдіть гострий кут, косинус якого дорівнює:
а) 0,325; б) 0,78; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

738. Знайдіть гострий кут, синус якого дорівнює:
а) 0,26; б) $\frac{3}{7}$; в) 0,656; г) 0,07.

739. Знайдіть із точністю до сотих значення виразу:
а) $23 \sin 75°$; б) $\frac{49{,}5}{\cos 48°}$; в) $1{,}5 + \mathrm{tg}\, 3°$.

740. Знайдіть із точністю до тисячних значення виразу:
а) $\sin 30° + \cos 33°$; б) $\cos 60° - \sin 6°$;
в) $\mathrm{tg}\, 45° + \sin 15°$; г) $\mathrm{tg}\, 45° - \cos 54°$.

741. Визначте за таблицями міру кута x, якщо:
а) $\sin x = 0{,}1392$, $\sin x = 0{,}2924$;
б) $\cos x = 0{,}5446$, $\cos x = 0{,}6896$;
в) $\mathrm{tg}\, x = 0{,}7536$, $\mathrm{tg}\, x = 0{,}2642$;
г) $\mathrm{tg}\, x = 1{,}881$, $\mathrm{tg}\, x = 6{,}314$.

742. Запишіть у порядку зростання числа:
а) $\sin 20°$, $\sin 23°$, $\sin 87°$, $\sin 13°$, $\sin 40°$;
б) $\cos 40°$, $\cos 12°$, $\cos 67°$, $\cos 80°$, $\cos 32°$;
в) $\mathrm{tg}\, 32°$, $\mathrm{tg}\, 12°$, $\mathrm{tg}\, 65°$, $\mathrm{tg}\, 52°$, $\mathrm{tg}\, 83°$.

743. Нехай x — міра гострого кута прямокутного трикутника. При яких значеннях x справедливі нерівності:
а) $\sin x < \sin 47°$; б) $\cos x > \cos 13°$;
в) $\mathrm{tg}\, x < \mathrm{tg}\, 12°$; г) $\mathrm{tg}\, x > \mathrm{tg}\, 73°$?

744. Що більше:
а) $\sin 43°$ чи $\cos 70°$; б) $\cos 12°$ чи $\sin 12°$;
в) $\operatorname{tg} 40°$ чи $\operatorname{tg} 25°$; г) $\operatorname{tg} 35°$ чи $\operatorname{tg} 82°$?

Практичне завдання

745. Оберіть три довільні гострі кути α_1, α_2, α_3. За допомогою калькулятора проведіть потрібні обчислення (з точністю до тисячних) і заповніть таблицю, де $\Delta = 1 - \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)$. Зробіть висновок.

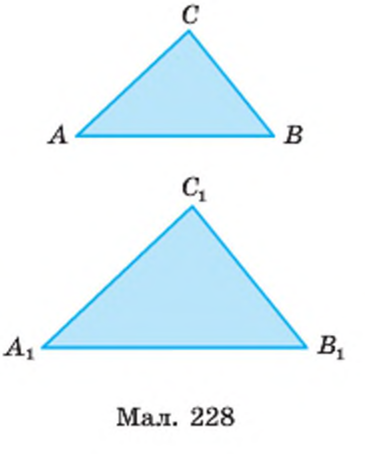
	$\sin\alpha$	$\sin^2\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos^2\alpha$	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$	Δ
α_1						
α_2						
α_3						

Задачі для повторення

746. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні з коефіцієнтом подібності $\frac{2}{3}$ (мал. 228). Відомо, що $AB = 6$ см, $A_1C_1 = 12$ см, $P_{\Delta ABC} = 26$ см. Установіть відповідність між величинами (1–4), пов’язаними з цими трикутниками, і числовими значеннями цих величин (А–Д).

1 A_1B_1
2 AC
3 B_1C_1
4 $P_{\Delta A_1B_1C_1}$

А 18 см
Б 28 см
В 39 см
Г 9 см
Д 8 см



Мал. 228

747. Основи трапеції дорівнюють a і c. Знайдіть периметр трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

748. У квадрат $ABCD$ вписано ΔAMD, де M — середина сторони BC. Знайдіть периметр квадрата, якщо $AM = 4\sqrt{5}$ см.

749. Знайдіть периметр трикутника з попередньої задачі, якщо сторона квадрата дорівнює a.

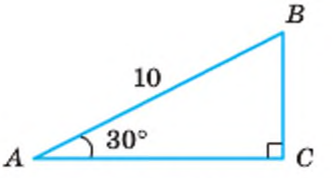
750. Катети прямокутного трикутника пропорційні числам 1 і 2. Знайдіть синуси гострих кутів цього трикутника.

§ 17 Розв'язування прямокутних трикутників

Прямокутні трикутники в геометрії відіграють важливу роль. У багатьох відношеннях вони найпростіші з усіх многокутників, тому ними порівняно легко користуватися. А кожний інший трикутник і навіть кожний многокутник можна розрізати на кілька прямокутних трикутників. Тому далі ми ретельніше займемося розв'язуванням прямокутних трикутників.

Що означає *розв'язати трикутник*? Це означає за кількома відомими елементами трикутника — сторонами чи кутами — знайти інші його елементи.

Задача. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10, а один із гострих кутів 30°. Знайдіть інші сторони і кути трикутника.



Мал. 229

Розв'язання. Нехай у $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $AB = 10$ (мал. 229). Тоді $\angle B = 90° - 30° = 60°$, $BC = AB : 2 = 5$.

За теоремою Піфагора $AC = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$.

Відповідь. $BC = 5$, $AC = 5\sqrt{3}$, $\angle B = 60°$.

Цю задачу ми змогли розв'язати, бо в ній серед даних — кут 30°, тож можна скористатися властивістю катета, що лежить проти кута 30°. А як розв'язати прямокутний трикутник із кутом, наприклад, 50°?

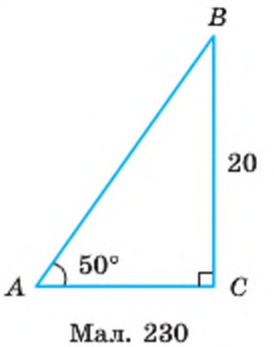
Задача. Розв'яжіть трикутник ABC, у якого $\angle C = 90°$, $\angle A = 50°$, $BC = 20$ (мал. 230).

Розв'язання. $\angle B = 90° - \angle A = 40°$.

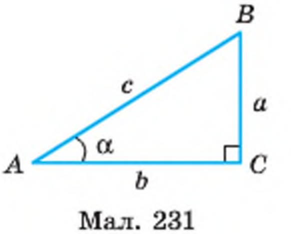
$BC : AB = \sin A$, $AB = BC : \sin A = 20 : \sin 50° \approx 20 : 0,766 \approx 26,1$.

$AC : BC = \operatorname{tg} B$, $AC = BC \cdot \operatorname{tg} B = 20 \cdot \operatorname{tg} 40° \approx 20 \cdot 0,643 \approx 12,86$.

Відповідь. $\angle B = 40°$, $AB \approx 26,11$, $AC \approx 12,86$.



Мал. 230



Мал. 231

Знаючи співвідношення $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ (мал. 231) і теорему Піфагора, можна розв'язати будь-який прямокутний трикутник.

Можливі такі випадки розв'язування прямокутних трикутників: 1) за гіпотенузою і гострим кутом; 2) за катетом і гострим кутом; 3) за гіпотенузою і катетом; 4) за катетами. Розв'язання цих чотирьох видів задач за допомогою синуса і косинуса наведено в таблиці.

Вид задачі	Умова задачі	Розв'язання
1-й	Дано: $\angle A = \alpha$, $\angle C = 90°$, $AB = c$. Знайти: $\angle B$, AC, BC.	$\angle B = 90° - \alpha$, $BC = c \cdot \sin\alpha$, $AC = c \cdot \cos\alpha$.
2-й	Дано: $\angle A = \alpha$, $\angle C = 90°$, $BC = a$. Знайти: $\angle B$, AB, AC.	$\angle B = 90° - \alpha$, $AB = \frac{a}{\sin\alpha}$, $AC = AB\cos\alpha$.
3-й	Дано: $\angle C = 90°$, $AB = c$, $BC = a$. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, AC.	$\sin A = \frac{a}{c}$, $\angle B = 90° - \angle A$, $AC = c \cdot \cos A$.
4-й	Дано: $\angle C = 90°$, $AC = b$, $BC = a$. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, AB.	$AB = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\sin A = \frac{a}{AB}$, $\angle B = 90° - \angle A$.

Використовуючи тангенс кута, розв'язування багатьох трикутників можна здійснювати раціональніше.

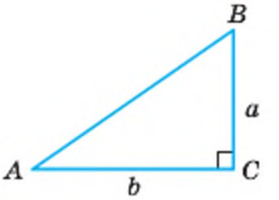
Задача. Розв'яжіть прямокутний трикутник за його катетами $a = 3$ дм, $b = 5$ дм (мал. 232).

Розв'язання.

$AB = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$ (дм), $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{3}{5} = 0,6$.

$\angle A \approx 31°$, $\angle B \approx 90° - 31° \approx 59°$.

Відповідь. $AB = \sqrt{34}$ дм, $\angle A \approx 31°$, $\angle B \approx 59°$.

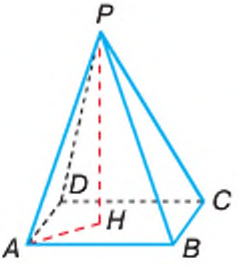


Мал. 232

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Найчастіше розв'язувати прямокутні трикутники доводиться в стереометрії, коли вимагається знаходити значення одних елементів просторової геометричної фігури через інші її значення.

Задача. Бічне ребро AP піраміди з її висотою PH утворює кут 40°. Знайдіть висоту піраміди, якщо $AP = 20$ см (мал. 233).



Мал. 233

Розв'язання. Сполучимо відрізком точки A і H. В утвореному трикутнику APH кут H — прямий, бо висота піраміди PH з кожною прямою, яка лежить у площині її основи і проходить через основу висоти, утворює прямі кути. Отже, задача звелась до визначення катета PH прямокутного трикутника APH за відомим прилеглим до нього кутом і гіпотенузою.

$PH : AP = \cos 40°$, звідки

$PH = 20 \cdot \cos 40° \approx 20 \cdot 0{,}766 \approx 15{,}32$ (см).

Щоб розв'язувати подібні стереометричні задачі, треба вміти користуватися мовою стереометрії. Зокрема, треба розуміти, що таке *перпендикуляр до площини, кут між прямою і площиною, кут між двома площинами, двогранний кут* тощо. Спробуйте на прикладі малюнка 233 пояснити, як слід розуміти ці терміни.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Поясніть, що означає розв'язати трикутник.
2. Як знайти катети за гіпотенузою і гострим кутом?
3. Як знайти гіпотенузу за катетом і гострим кутом?
4. Як знайти гіпотенузу за катетами?
5. Як знайти кути за гіпотенузою і катетом?

Виконаємо разом

1 Розв'яжіть прямокутний трикутник за гіпотенузою $c = 627$ і гострим кутом $\alpha = 23{,}5°$.

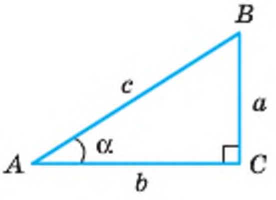
- $a = c \cdot \sin\alpha = 627 \cdot \sin 23{,}5° \approx 250$ (мал. 234).

(23,5 $\boxed{\sin}$ $\boxed{\times}$ 627 $\boxed{=}$);

$b = c \cdot \cos\alpha = 627 \cdot \cos 23{,}5° \approx 575$;

(23,5 $\boxed{\cos}$ $\boxed{\times}$ 627 $\boxed{=}$);

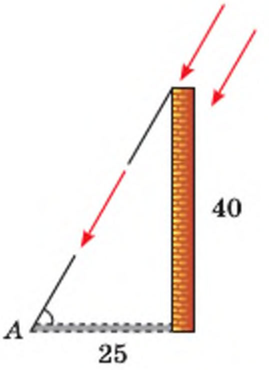
$B = 90° - 23{,}5° = 66{,}5°$.



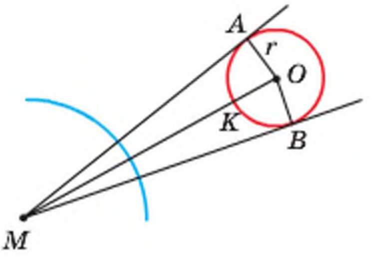
Мал. 234

2 Заводський димар заввишки 40 м кидає тінь завдовжки 25 м. Знайдіть кутову висоту Сонця.

- Кутова висота Сонця — це міра кута A (мал. 235). За числовими даними задачі можемо знайти тангенс цього кута: $\operatorname{tg} A = 40 : 25 = 1{,}6$. У таблиці знаходимо, що гострий кут із таким тангенсом дорівнює приблизно 58°.



Мал. 235



Мал. 236

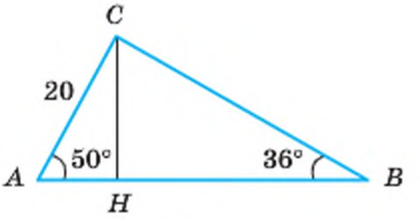
3 Як знайти радіус r Місяця, якщо спостерігач, що перебуває на відстані m від найближчої точки Місяця, бачить його під кутом 2α?

- Нехай спостерігач стоїть у точці M і бачить Місяць під кутом $AMB = 2\alpha$ (мал. 236). Якщо центр Місяця — точка O, то шуканий радіус $r = OA$, а $\angle OAM = 90°$, $\angle AMO = \alpha$, $MO = m + r$. $r : (r + m) = \sin\alpha$. Звідки $r = r\sin\alpha +$ $+ m\sin\alpha$,

$$r = \frac{m\sin\alpha}{1 - \sin\alpha}.$$

Підставивши у цю формулу значення m і α, неважко обчислити радіус Місяця.

4 Уміючи розв'язувати прямокутні трикутники, можна розв'язувати і довільні непрямокутні трикутники. Нехай, наприклад, треба розв'язати трикутник ABC, у якого $AC = 20$ см, $\angle A = 50°$ і $\angle B = 36°$ (мал. 237).



Мал. 237

- Третій його кут знайти неважко:

$\angle C = 180° - 50° - 36° = 94°$.

Щоб знайти сторони AB і BC, проведемо висоту CH. Трикутники ACH і BCH прямокутні, тому:

$AH = AC \cdot \cos 50° = 20 \cdot 0{,}643 \approx 12{,}68$;

$CH = AC \cdot \sin 50° = 20 \cdot 0{,}765 \approx 15{,}3$;

$CB = CH : \sin 36° = 15{,}3 : 0{,}588 \approx 26{,}9$;

$BH = CB \cdot \cos 36° = 26{,}9 \cdot 0{,}809 \approx 21{,}76$;

$AB = AH + HB = 12{,}68 + 21{,}76 \approx 34{,}44$.

Отже, $AB \approx 34{,}44$ см, $CB \approx 26{,}9$ см, $\angle C = 94°$.

У старших класах ви ознайомитеся з простішими способами розв'язування непрямокутних трикутників.

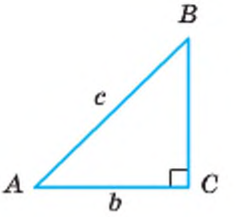
Задачі і вправи

Виконайте усно

751. Розв'яжіть прямокутний трикутник (див. мал. 234), у якому: а) $c = 10$, $\alpha = 30°$; б) $a = 5$, $\alpha = 45°$; в) $a = b = 7$.

752. Які вирази слід записати в порожніх клітинках таблиці, що відповідає трикутнику на малюнку 238?

AB	AC	BC	$\angle A$	$\angle B$
c			α	
c				β
	b		α	
	b			β



Мал. 238

А

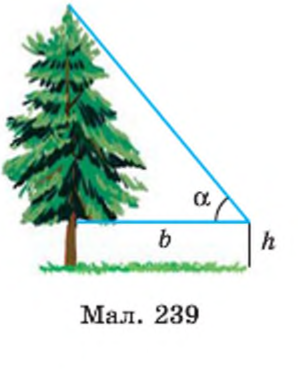
753. Розв'яжіть прямокутний трикутник за гіпотенузою c і гострим кутом α, якщо:
а) $c = 9{,}85$, $\alpha = 65°$; б) $c = 3{,}84$, $\alpha = 50°$;
в) $c = 0{,}798$, $\alpha = 68{,}5°$; г) $c = 28{,}6$, $\alpha = 37°12'$.

754. Розв'яжіть прямокутний трикутник за катетом a і гострим кутом α або β, якщо:
а) $a = 38$, $\alpha = 47°$; б) $a = 6{,}87$, $\alpha = 4{,}5°$;
в) $a = 0{,}274$, $\beta = 36°$; г) $a = 0{,}895$, $\beta = 64{,}5°$.

755. Розв'яжіть прямокутний трикутник за гіпотенузою c і катетом a або b, якщо:
а) $c = 113$, $a = 35$; б) $c = 130$, $a = 82$;
в) $c = 687$, $b = 528$; г) $c = 17{,}1$, $b = 8{,}28$.

756. Розв'яжіть прямокутний трикутник за даними катетами a і b, якщо:
а) $a = 183$, $b = 156$; б) $a = 26{,}1$, $b = 38$;
в) $a = 1{,}08$, $b = 0{,}97$; г) $a = 12{,}1$, $b = 6{,}92$.

757. Знайдіть висоту дерева (мал. 239), якщо $b = 10$ м, $h = 2$ м, $\alpha = 70°$.



Мал. 239

758. Діагональ прямокутника дорівнює 85 см і утворює зі стороною кут 65°. Знайдіть сторони прямокутника.

759. Знайдіть основу рівнобедреного трикутника, якщо його бічна сторона дорівнює 87 см, а кут при основі 44°.

760. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 28 см, а кут при основі 65°. Знайдіть бічну сторону.

761. Гострий кут ромба дорівнює 54°. Його більша діагональ дорівнює 26 см. Знайдіть сторону ромба.

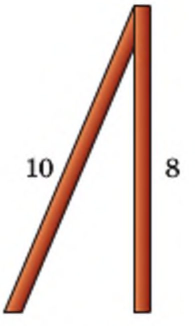
762. Сторони прямокутника дорівнюють 20 см і 17 см. Знайдіть його діагональ і кути, які вона утворює зі сторонами прямокутника.

763. Ширина будинку 7 м, довжина крокви 4,5 м. Під яким кутом крокви нахилені до стелі?

764. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 60 см, бічна сторона 65 см. Знайдіть кути цього трикутника.

765. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 17,5 см, кут при вершині дорівнює 43°. Знайдіть основу й кути при основі цього трикутника.

766. До стовпа заввишки 8 м зробили похилу підпору завдовжки 10 м. Знайдіть синус і косинус кута між ними (мал. 240).



Мал. 240

Б

767. Основа рівнобедреного трикутника відноситься до бічної сторони як 8 : 7. Знайдіть кути трикутника.

768. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо його висота дорівнює основі.

769. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо його висота дорівнює 37 см, а кут при основі 40°.

770. Дорожній знак «Крутий спуск» (мал. 241) попереджає водіїв про небезпеку і вказує, на скільки метрів у середньому піднімається дорога на кожні 100 метрів шляху. Знайдіть кут нахилу дороги, про яку попереджає знак.

Мал. 241

771. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо довжини двох більших його сторін дорівнюють 20 см і 18 см.

772. Висота підйому дороги 0,4 м на кожні 3 м, взяті в горизонтальному напрямі. Знайдіть кут підйому дороги.

773. Підйом дороги характеризується числом $\frac{1}{15}$. Визначте кут підйому.

774. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 82 см, а один із гострих кутів 28°. Знайдіть гіпотенузу.

775. Знайдіть кути трикутника, якщо його сторони AB, AC і висота AH дорівнюють відповідно 3 см, 5 см і 2 см.

776. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо її бічна сторона і діагональ перпендикулярні одна до одної і дорівнюють відповідно 3 дм і 4 дм.

777. Знайдіть кути трапеції, основи якої дорівнюють 20 см і 45 см, а бічні сторони 7 см і 24 см.

778. Переріз залізничного насипу має форму рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 8 м і 28 м. Бічні сторони нахилені до горизонту під кутом 31°. Знайдіть висоту насипу.

779. Ширина полотна залізничного насипу дорівнює 30 м, а ширина підошви — 62 м. Знайдіть висоту насипу, якщо кут відкосу становить 32°.

780. З точки M, яка лежить поза кругом, цей круг видно під кутом α. Визначте відстань від точки M до центра круга, якщо його діаметр дорівнює d.

781. Із зовнішньої точки до кола проведено дві дотичні. Довжина дотичної дорівнює 7,8 см, радіус кола 4 см. Визначте кут між дотичними.

782. Із точки M, що лежить на відстані a від центра кола, проведено дві дотичні MA і MB, кут між якими дорівнює α. Визначте довжини дотичних та радіус кола.

783. У колі з центром O і радіусом 12 см проведено хорду AB. Знайдіть довжину цієї хорди, якщо з дуги кола її видно під кутом: а) 20°; б) 130°.

784. Діагоналі ромба дорівнюють 56 мм і 84 мм. Визначте кути ромба та його сторону.

785. Основи рівнобедреної трапеції дорівнюють a і b ($b > a$), а гострий кут α. Визначте бічну сторону трапеції та її висоту.

786. Дві сторони трикутника дорівнюють 36 см і 87 см, а кут між ними — 58°. Визначте висоти трикутника, опущені на ці сторони.

787. Сторони паралелограма дорівнюють 14,8 см і 7,4 см, а його гострий кут дорівнює 62°. Визначте висоти паралелограма.

788. Визначте висоти рівнобедреного трикутника, у якого кут при вершині дорівнює 50°, а бічна сторона 8,4 дм.

789. Визначте висоти рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 8,6 дм, а кут при основі 37°.

790. Сторона ромба дорівнює 8,5 дм, а гострий кут 88°. Визначте радіус кола, вписаного у цей ромб.

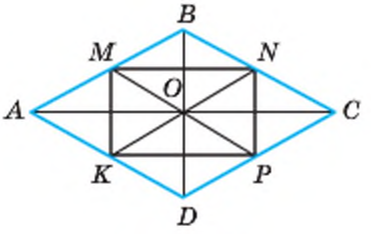
Практичне завдання

791. Підготуйте короткі виступи на тему:
1 Тригонометрія як наука про вимірювання трикутників.
2. Творці тригонометрії.

Задачі для повторення

792. Діагоналі ромба $ABCD$ дорівнюють 16 см і 12 см (мал. 242). Установіть відповідність між периметрами фігур (1–4), пов'язаними з цим ромбом, і числовими значеннями цих величин (А–Д), якщо точки M, N, P і K — середини відповідних сторін.

1	$P_{\Delta MBN}$	**А**	16 см
2	$P_{\Delta AMK}$	**Б**	18 см
3	$P_{\Delta MNP}$	**В**	20 см
4	P_{KMNP}	**Г**	24 см
		Д	28 см



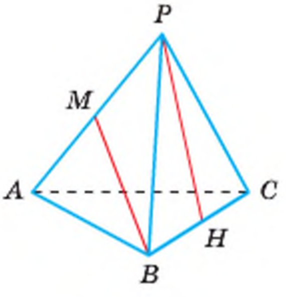
Мал. 242

793. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 13 см, а периметр 30 см. Знайдіть катети.

794. У піраміді $PABC$ (мал. 243) кожне ребро — завдовжки 20 см, M і H — середини ребер AP і BC. Знайдіть:

а) кути PBC, BHP, BPH, PMB, MBP;

б) відстані BH, AM, MP, PH, MB.



Мал. 243

795. Обчисліть:

а) $4\cos 60° - 5\sin 30° \cdot \text{tg}\, 45°$;

б) $\sin 60 \cdot \cos 30° - \cos 45° \cdot \sin 45°$.

796. У прямокутному трикутнику радіус вписаного кола дорівнює r, а половина периметра дорівнює p. Знайдіть гіпотенузу.

Задачі за готовими малюнками

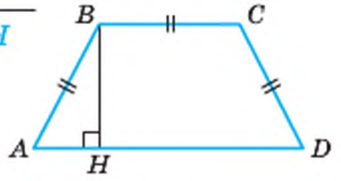
А | **Б**

1

А

$BC \parallel AD$, $AB = BC = CD = 10$, $\angle A = 60°$.

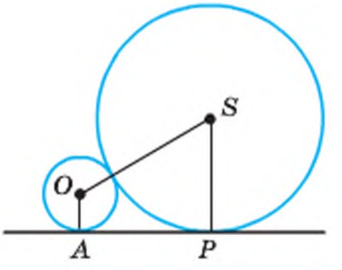
AD, BH



Б

$OA = 2$, $SP = 8$.

AP

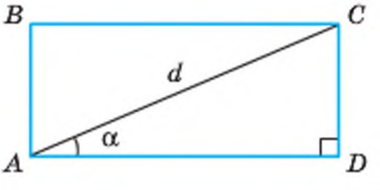


2

А

$ABCD$ — прямокутник, d, α.

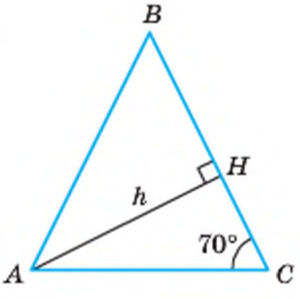
AB, BC



Б

$AB = BC$.

AB, AC

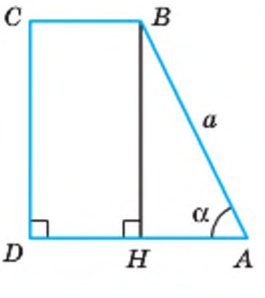


3

А

$BC \parallel AD$, $AH = DH$.

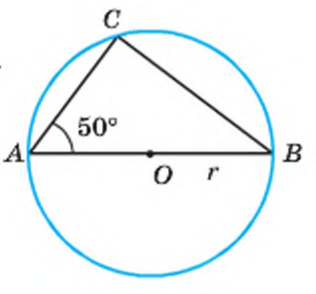
CD, DA



Б

$OB = r$, $\angle A = 50°$.

AC, CB

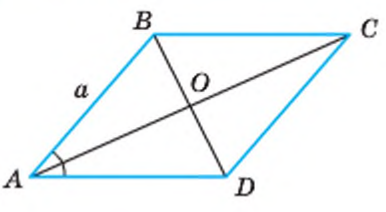


4

А

$ABCD$ — ромб, $AB = a$, $\angle BAD = \alpha$.

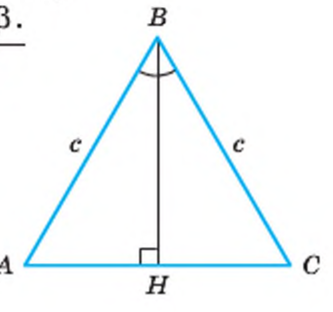
AC, BD



Б

$AB = BC = c$, $\angle ABC = \beta$.

AC, BH

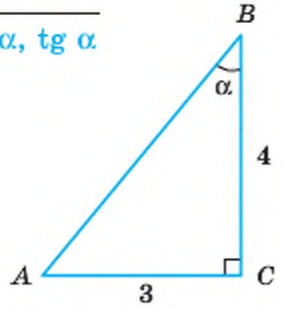


А **Б**

5

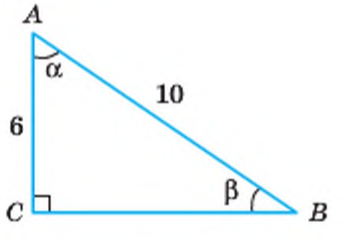
А. $AC = 3$, $BC = 4$.

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$



Б. $AB = 10$, $AC = 6$.

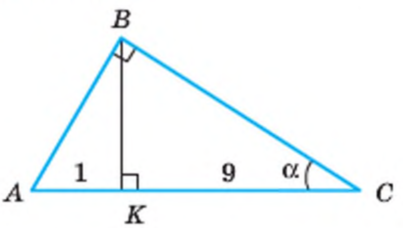
$\operatorname{tg}\alpha$, $\cos\beta$



6

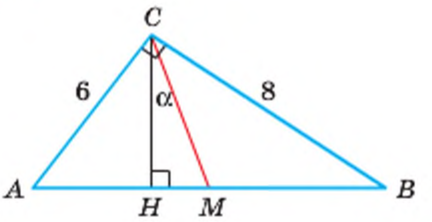
А. $BK \perp AC$, $AK = 1$, $KC = 9$.

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$



Б. $\angle C = 90°$, $AM = MB$, $\angle HCM = \alpha$.

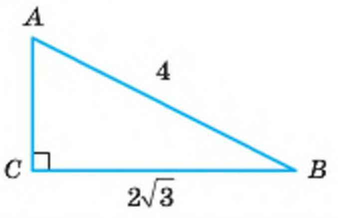
$\sin\alpha$



7

А. $AB = 4$, $BC = 2\sqrt{3}$.

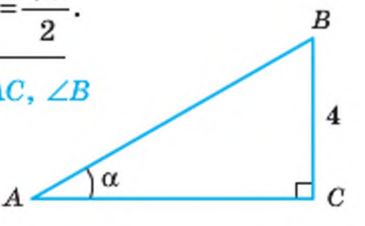
$\angle A$, $\angle B$, AC



Б. $BC = 4$,

$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

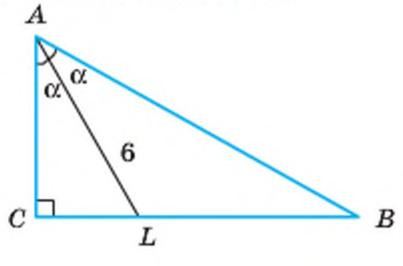
AB, AC, $\angle B$



8

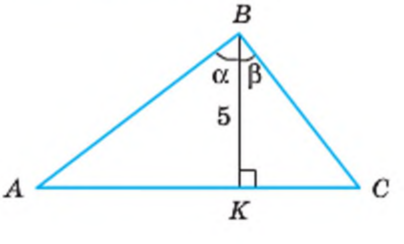
А. $AL = 6$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\angle A$, $\angle B$, AB, AC, BC



Б. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, AB, BC



Самостійна робота 4

Варіант 1

1°. Знайдіть сторону ромба, якщо його діагоналі дорівнюють 16 см і 12 см.

2°. Знайдіть кути $\triangle ABC$, якщо $\sin A = \frac{1}{2}$, $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (кути A і B — гострі).

3•. Менша сторона прямокутника дорівнює 6 см, а діагональ утворює з більшою стороною кут 40°. Знайдіть периметр прямокутника (з точністю до сотих).

Варіант 2

1°. Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 7 см і 17 см, а бічна сторона 13 см.

2°. Знайдіть кути $\triangle ABC$, якщо $\operatorname{tg} A = \sqrt{3}$, $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (кути A і B — гострі).

3•. Висота ромба дорівнює 5 см, а гострий кут 70°. Знайдіть периметр ромба (з точністю до сотих).

Варіант 3

1°. Сторона ромба дорівнює 15 см, а діагональ 24 см. Знайдіть другу діагональ ромба.

2°. Знайдіть кути $\triangle ABC$, якщо $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} C = 1$ (кути B і C — гострі).

3•. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см, а кут при основі 40°. Знайдіть периметр трикутника (з точністю до сотих).

Варіант 4

1°. Знайдіть більшу бічну сторону прямокутної трапеції, основи якої дорівнюють 9 см і 14 см, а висота 12 см.

2°. Знайдіть кути $\triangle ABC$, якщо $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (кути A і C — гострі).

3•. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 6 см і 10 см, а кут 50°. Знайдіть периметр трапеції (з точністю до сотих).

Тестові завдання 4

1	У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 10 см, а катет — 6 см. Знайдіть третю сторону трикутника.	а) 6 см; в) 32 см; б) 64 см; г) 8 см.
2	Яке з тверджень завжди хибне?	а) $\sin\alpha = 1$; в) $\cos\alpha = 2$; б) $\operatorname{tg}\alpha = 3$; г) $\sin\alpha = 0{,}5$.
3	Катет прямокутного трикутника дорівнює добутку гіпотенузи на:	а) синус прилеглого кута; б) косинус прилеглого кута; в) тангенс протилежного кута; г) косинус протилежного кута.
4	У $\triangle ABC$ з прямим кутом C $\sin A = \frac{1}{2}$. Знайдіть $\angle B$.	а) 30°; в) 45°; б) 60°; г) 90°.
5	Діагональ квадрата зі стороною a дорівнює:	а) $a\sqrt{3}$; в) $a\sqrt{2}$; б) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{a}{\sqrt{2}}$.
6	Установіть вид $\triangle ABC$, якщо $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (кути A і C — гострі).	а) гострокутний; б) прямокутний; в) тупокутний; г) рівнобедрений.
7	Катети прямокутного трикутника дорівнюють 3 см і 4 см. Знайдіть синус більшого гострого кута.	а) $\frac{3}{5}$; в) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{4}{5}$; г) $\frac{5}{3}$.
8	У $\triangle ABC$ $(\angle C = 90°)$ $\operatorname{tg} A = 1$. Який знак слід поставити замість *: $AC * BC$?	а) >; в) =; б) <; г) не можна встановити.
9	У $\triangle ABC$ $(\angle C = 90°)$ $AB = a$, $\angle A = \alpha$. Знайдіть AC.	а) $a\sin\alpha$; в) $\frac{a}{\sin\alpha}$; б) $a\cos\alpha$; г) $\frac{a}{\cos\alpha}$.
10	Висота рівностороннього трикутника зі стороною a дорівнює:	а) $a\sqrt{2}$; в) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; б) $a\sqrt{3}$; г) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Типові задачі для контрольної роботи

1°. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 12 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс меншого гострого кута.

2°. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 16 см, а бічна сторона на 4 см більша за висоту, проведену до основи.

3°. Знайдіть міру гострого кута α, якщо:

а) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; б) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\operatorname{tg}\alpha = 1$; г) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4°. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 5 см, а синус одного з кутів 0,2. Знайдіть катети трикутника.

5•. Обчисліть:
а) $2\sin 30° \sin 60° - \operatorname{tg} 45° \cos 30°$;
б) $\sin 45° \cos 45° \operatorname{tg} 60° - \cos 30° \operatorname{tg} 45°$.

6•. Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника пропорційні числам 7 і 25. Знайдіть синус, косинус і тангенс гострих кутів трикутника.

7•. Знайдіть кути і сторони прямокутного трикутника, якщо висота, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки 2 см і 6 см.

8•. Вершину дерева, віддаленого від даного пункту на 16 м, видно під кутом 16° до горизонту, а вершину другого дерева, віддаленого від цього самого пункту на 24 м, видно під кутом 19°. Яке дерево вище і на скільки?

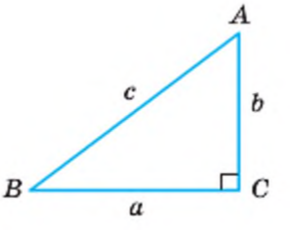
9••. Гострий кут рівнобічної трапеції дорівнює α, а радіус вписаного кола r. Знайдіть периметр трапеції.

10••. Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. На які відрізки ділить середню за довжиною сторону висота, проведена до неї?

> *Геометрія має два скарби: один із них — це теорема Піфагора, а другий — поділ відрізка в середньому і крайньому відношеннях.*
>
> *Й. Кеплер*

Головне в розділі 3

Теорема Піфагора. **У кожному прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.**



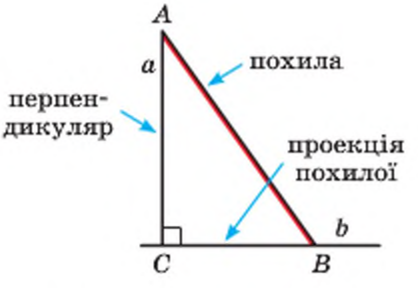
$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Правильною є й обернена теорема. **Якщо в трикутнику квадрат однієї сторони дорівнює сумі квадратів двох інших сторін, то найбільший кут трикутника прямий.**

Якщо перпендикулярні прямі a і b перетинаються в точці C і на прямій a взято довільну точку A, а на прямій b — будь-яку точку B цієї прямої, відмінну від C, то:

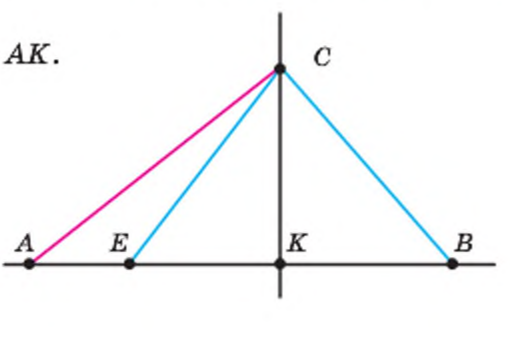


- відрізок AC — ***перпендикуляр***, опущений з точки A на пряму b,
- відрізок AB — ***похила***, проведена з точки A до прямої b,
- точка B — основа похилої,
- відрізок CB — ***проекція*** похилої AB на пряму b.

Властивості похилої і проекції

- кожна похила довша за перпендикуляр, проведений з тієї самої точки на ту саму пряму;
- проекція похилої коротша від самої похилої.
- якщо з однієї точки до тієї самої прямої проведено дві рівні похилі, то їх проекції рівні;
- якщо рівні проекції похилих, проведених з однієї точки до тієї самої прямої, то і ці похилі рівні
- якщо з однієї точки до прямої проведено дві похилі, то з них більша та, проекція якої більша;
- якщо з однієї точки до прямої проведено дві похилі, то більша похила має більшу проекцію.

Якщо $CK \perp AB$, то $CA > CK$ і $CA > AK$.
Якщо $CE = CB$, то $KE = KB$.
Якщо $KE = KB$, то $CE = CB$.
Якщо $CA > CE$, то $AK > EK$.
Якщо $AK > EK$, то $CA > CE$.

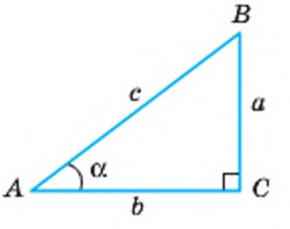


Тригонометричні функції гострого кута

Синусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до гіпотенузи.

Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до гіпотенузи.

Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до прилеглого.



Синус, косинус, тангенс (і котангенс) певного кута разом називають *тригонометричними функціями цього* кута.

Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \ \cos\alpha = \frac{b}{c}, \ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

Користуючись ними, можна за двома відомими елементами прямокутного трикутника визначити всі інші його елементи.

Властивості тригонометричних функцій

Синус і косинус гострого кута менші від 1, а тангенс може бути довільним додатним числом. Якщо гострий кут збільшувати, то його синус і тангенс збільшуватиметься, а косинус зменшуватиметься. Значення синуса, косинуса і тангенса кутів 0°, 30°, 45°, 60° і 90° вказані у таблиці на с. 146.

Для кожного гострого кута правильними є співвідношення:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha),$$

$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha).$$

Розв'язати прямокутний трикутник — це означає за двома відомими елементами трикутника (сторонами чи кутами) визначити всі інші його елементи. Як розв'язувати прямокутні трикутники за різних умов, схематично показано у таблиці на с. 156.

Любов — це теорема,
яку кожен день потрібно доводити.

Існує безліч речей, які здаються загадковими
для людей, які не вивчали математику.

АРХІМЕД

(287 до н. е.— 212 до н. е)

Славетний давньогрецький математик, фізик, інженер, винахідник-астроном. Один із найвидатніших геніїв. Зробив багато відкриттів у геометрії:

- обчислив площу еліпса і витка спіралі, поверхні конуса і кулі;
- довів багато теорем про властивості кола і круга;
- досліджував периметри вписаних і описаних 96 кутників і у такий спосіб визначив, що число $\pi = \frac{22}{7}$

Розділ 4 | Section 4

Многокутники та їх площі | Polygons and their Areas

Многокутники, зокрема трикутники і чотирикутники, — найважливіші й найпоширеніші геометричні фігури.

Площа многокутника — геометричне, фізичне, географічне, загальнонаукове й навіть побутове поняття. Чим більша площа квартири, тим зручніше в ній жити, тим вона дорожча; чим більша площа поля, тим більший урожай з нього можна зібрати, тим більший податок за нього треба платити.

Для чого вивчати многокутники та їх площі?

Площа многокутників — це величина, необхідна для багатьох операцій. Наприклад, купівля, продаж, обмін, оформлення у власність земельної ділянки.

Податки нараховують відповідно до площі квартири чи дачі, площі фермерських полів чи ставків, площі торгівельного майданчика чи ринку тощо.

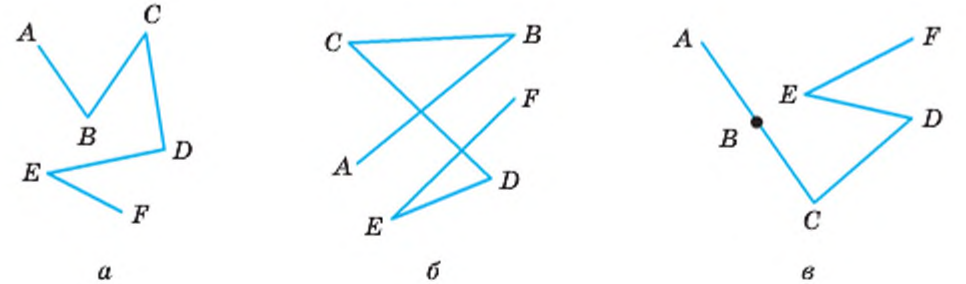
Від площі виконаної роботи залежить заробітна платня людей багатьох професій: паркетники, плиточники отримують гроші залежно від того, яку площу вони застелили; маляри, штукатури — від того, яку площу вони пофарбували чи підготували до фарбування.

Поміркуйте, де ще застосовують площу многокутників?

Поняття площі розширює ваші можливості для розв'язування задач. Знаючи площу фігури, можна знаходити її невідомі елементи: сторони, висоти, кути тощо. Іноді доцільно площу фігури визначити різними способами і, прирівнявши утворені вирази, знайти невідомий елемент. Такий метод розв'язування задач називають «методом площ».

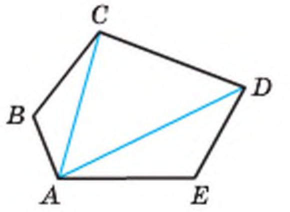
§ 18 Многокутники

Фігура, що складається з відрізків AB, BC, CD, DE, EF, називається *ламаною* $ABCDEF$ (мал. 244). Точки A, B, C, D, E, F — *вершини* цієї ламаної, A і F — кінці, відрізки AB, BC, CD, DE, EF — її ланки. Розглядувана ламана має 5 ланок, але їх може бути будь-яка кількість (не менше двох). Ламана називається *простою*, якщо вона не має самоперетинів і ніякі дві її сусідні ланки не лежать на одній прямій. На малюнку 244 зображено ламані: *а* — проста, *б* і *в* — непрості.



Мал. 244

Довжиною ламаної називають суму довжин усіх її ланок. Довжина ламаної не менша відстані між її кінцями. Наприклад, довжина ламаної $ABCDE$ не менша від AE (мал. 245). Справді, за нерівністю трикутника $AB + BC \geq AC$, $AC + CD \geq AD$, $AD + DE \geq AE$. Додавши усі ці нерівності, маємо: $AB + BC + CD + DE \geq AE$.

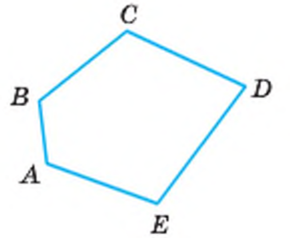


Мал. 245

Аналогічно можна довести розглядуване твердження для ламаної з довільним числом ланок. Знак рівності тут є тільки тоді, коли всі ланки ламаної лежать на одній прямій. **Довжина кожної простої ламаної більша відстані між її кінцями.**

Ламана називається *замкненою*, якщо її кінці збігаються.

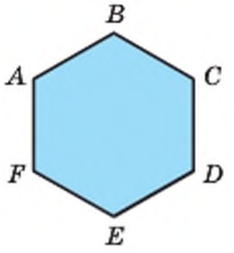
Проста замкнена ламана називається **многокутником** (мал. 246). Вершини і ланки ламаної, яка утворює многокутник, називаються відповідно *вершинами* і *сторонами многокутника*. Найменше число сторін многокутника — три. Трикутник і чотирикутник — окремі види многокутників. Многокутник з n вершинами називають n-кутником.



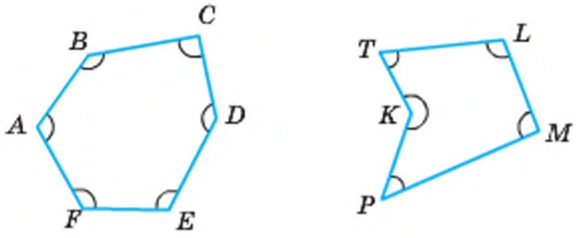
Мал. 246

Дві вершини многокутника, які є кінцями однієї сторони, називають *сусідніми*; вершини многокутника, які не є кінцями однієї його сторони, — *несусідніми*. Відрізок, що сполучає дві несусідні вершини, — це *діагональ многокутника*. Трикутник не має діагоналей.

Многокутник розбиває площину на дві області — внутрішню і зовнішню. На малюнку 247 внутрішню область шестикутника зафарбовано. Просту замкнену ламану разом з її внутрішньою областю також називають многокутником.



Мал. 247



Мал. 248

Зауваження. В геометрії нерідко одним словом називають різні поняття. Наприклад, радіусом кола називають і деякий відрізок, і довжину цього відрізка. Те саме можна сказати про сторону, висоту, кут трикутника, діагональ паралелограма тощо. Вживаючи такі слова, треба уточнювати, що вони означають.

Якщо всі кути многокутника менші від розгорнутого, його називають *опуклим многокутником*. На малюнку 248 зображено опуклий многокутник $ABCDEF$ і неопуклий $KTLMP$. Їх кути позначено дугами.

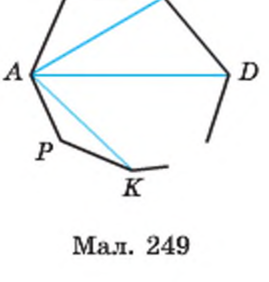
ТЕОРЕМА 31

Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180° \cdot (n - 2)$.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай $ABCD \ldots KP$ — опуклий n-кутник (мал. 249). Діагоналі AC, AD, ..., AK розбивають його на $(n - 2)$ трикутників. Сума кутів кожного трикутника дорівнює $180°$, а сума кутів n-кутника — сумі усіх кутів цих $(n - 2)$ трикутників, тобто

$$180° \cdot (n - 2). \square$$



Мал. 249

Теорема 31 справджується і для багатьох неопуклих многокутників.

Периметр многокутника — сума довжин усіх його сторін. Кожна сторона многокутника менша від його півпериметра, бо вона менша від суми всіх інших його сторін.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Якщо многокутник опуклий, то при кожній його вершині можна побудувати два зовнішні кути.

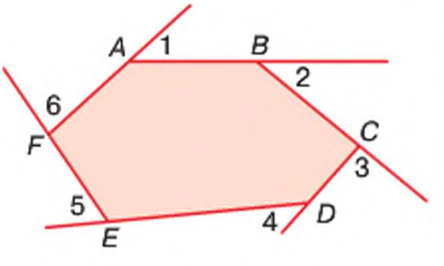
ТЕОРЕМА 32

Сума зовнішніх кутів, взятих по одному при кожній вершині довільного опуклого многокутника, дорівнює 360°.

ДОВЕДЕННЯ.

Кожний зовнішній кут опуклого многокутника в сумі із суміжним внутрішнім кутом многокутника дорівнює 180°. Якщо многокутник має n вершин, то сума n таких пар кутів дорівнює $n \cdot 180°$. Сума всіх внутрішніх кутів дорівнює $(n - 2) \cdot 180°$. Тому сума зовнішніх кутів n-кутника дорівнює різниці

$n \cdot 180° - (n - 2) \cdot 180° = 2 \cdot 180° = 360°$. □



Мал. 250

Доведену теорему ілюструє малюнок 250.

Запитання і завдання для самоконтролю

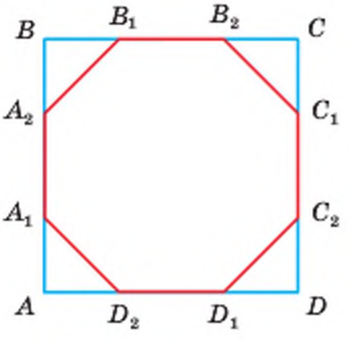
1. Що називають ламаною? Простою ламаною?
2. Що називають многокутником?
3. Який многокутник називають опуклим?
4. Що називають периметром многокутника?
5. Сформулюйте теорему про суму кутів опуклого многокутника.

Виконаємо разом

1 Скільки діагоналей має опуклий n-кутник?

- З кожної вершини опуклого n-кутника виходить $n - 3$ діагоналей, з усіх n вершин — $n(n - 3)$ діагоналей. При цьому кожну діагональ рахують двічі, бо вона має два кінці. Отже, кожний опуклий n-кутник має: $0{,}5n(n - 3)$ діагоналей.

2 Кожну сторону квадрата завдовжки $3a$ поділено на 3 рівні частини і всі точки поділу послідовно сполучено відрізками (мал. 251). Знайдіть кути утвореного 8-кутника, його діагоналі й периметр.



Мал. 251

- При вершинах даного квадрата — прямокутні рівнобедрені трикутники, гострі кути яких по 45°. Тому кожний кут утвореного 8-кутника дорівнює $180° - 45° = 135°$.

$$AA_1 = A_1A_2 = A_2B = a, \ A_1D_2 = a\sqrt{2}.$$

Тому периметр 8-кутника

$$P_8 = 4a + 4a\sqrt{2} = 4a\left(1+\sqrt{2}\right).$$

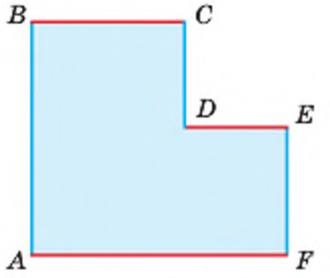
Діагоналі D_1A_1 і A_1B_1 — гіпотенузи прямокутних трикутників з катетами a і $2a$. $A_1C_2 = 3a$, діагоналі A_1C_1 і A_1B_2 — гіпотенузи прямокутних трикутників з катетами a, $3a$ і $2a$, $2a$ відповідно. Тому:

$$A_1D_1 = A_1B_1 = a\sqrt{5}, \ A_1C_2 = 3a,$$

$$A_1C_1 = a\sqrt{10}, \ A_1B_2 = 2\sqrt{2}a.$$

3 Чи існує шестикутник, кожна сторона якого паралельна двом іншим його сторонам?

- Існує. Такий шестикутник можна отримати, відрізавши від будь-якого прямокутника менший прямокутник (мал. 252).



Мал. 252

Задачі і вправи

Виконайте усно

797. Чи перетинає ламана пряму, якщо кінці ламаної розміщені: а) з різних боків від прямої; б) з одного боку від прямої?

798. Чи може число вершин опуклого многокутника не дорівнювати числу його сторін?

799. Скільки ланок мають ламані, зображені на малюнку 244? Назвіть їх вершини і кінці.

800. Знайдіть довжину ламаної $ABCDE$, довжини ланок якої 3 м, 5 м, 8 м і 4 м. Чи може відстань між її кінцями дорівнювати 21 м?

А

801. Довжина ламаної 4,5 м. Знайдіть довжини її ланок, якщо вони пропорційні числам 2, 3, 4 і 6.

802. Чи існує замкнена ламана з п'яти ланок, довжини яких дорівнюють 1 м, 2 м, 3 м, 4 м і 12 м?

803. Накресліть семикутник $ABCDEFH$. Назвіть усі його вершини, сторони, діагоналі. Скільки діагоналей має семикутник?

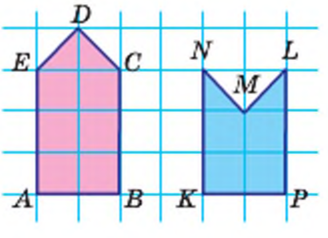
804. Чи існує п'ятикутник, сторони якого пропорційні числам 7, 13, 15, 45 і 19?

805. Чи існує п'ятикутник з трьома прямими кутами? Із чотирма прямими кутами?

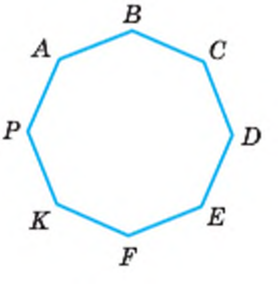
806. Чи може в квадраті з периметром P вміститися многокутник з периметром $2P$? Покажіть на прикладі.

807. а) Периметр якого з п'ятикутників, зображених на малюнку 253, більший?

б) Знайдіть периметри п'ятикутників, зображених на малюнку 253, якщо $AB = KP = 4$ см.



Мал. 253



Мал. 254

808. Знайдіть суму кутів опуклого: а) п'ятикутника; б) шестикутника; в) стокутника.

809. Скільки сторін має многокутник, зображений на малюнку 254? Знайдіть суму його кутів.

810. Усі кути семикутника рівні. Знайдіть міру одного з них.

811. Скільки сторін має многокутник, кожний кут якого дорівнює $135°$? А $140°$?

812. Чи існує многокутник, кожний зовнішній кут якого дорівнює $36°$?

Б

813. Накресліть неопуклий п'ятикутник, у якого тільки дві діагоналі лежать у внутрішній області. Знайдіть суму його кутів.

814. Чи існує опуклий многокутник, сума кутів якого дорівнює $900°$; $9\,000°$?

815. Доведіть на прикладі ламаної з шести ланок, що довжина простої ламаної більша від відстані між її кінцями.

816. На кожній стороні квадрата завдовжки a зовні нього добудували рівносторонній трикутник так, що утворився неопуклий восьмикутник. Знайдіть його кути і довжини найдовших діагоналей.

817. У 2010 році випущено 6 марок, присвячених мінералам, властивим певним регіонам України: сингеніт (калушит) — Прикарпаття, родоніт — Карпати, лабрадор — Черкащина, агат і бурштин — Волинь, карпатит — Закарпаття. Розміри кожної марки 47×47×47 мм. Разом ці марки утворюють шестикутник (мал. 255). Для цього шестикутника знайдіть: а) суму внутрішніх кутів; б) периметр; в) більшу діагональ; г) меншу діагональ; ґ) відстань між протилежними сторонами.

Мал. 255

818. а) Доведіть, що протилежні сторони опуклого шестикутника з рівними кутами паралельні.
б) Доведіть, що опуклий семикутник з рівними кутами не має паралельних сторін.

819. $ABCDEFMN$ — опуклий восьмикутник з рівними кутами. Доведіть, що: а) прямі AB і CD перпендикулярні; б) $DE \parallel AN$.

820. Шестикутник, усі кути якого рівні й кожна сторона дорівнює a, розрізано на три рівні п’ятикутники найменших периметрів. Знайдіть периметр і кути п’ятикутника.

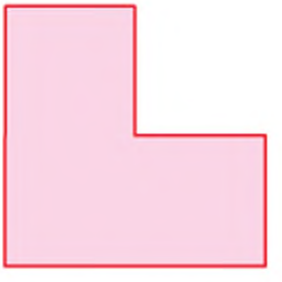
821. Спробуйте розрізати квадрат на два рівні п’ятикутники. А на два рівні семикутники?

822. Як шестикутник, зображений на малюнку 256, розрізати на 4 подібні йому шестикутники?

823. Яке найменше число гострих кутів може мати опуклий многокутник? Чому?

824. Скільки вершин має опуклий многокутник, жоден із кутів якого не перевищує 120°?

825. Чи існує опуклий п’ятикутник, найбільший кут якого дорівнює 107°?



Мал. 256

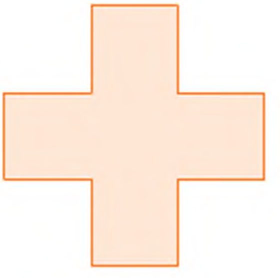
826. Доведіть, що чотири гострі кути може мати тільки неопуклий многокутник.

827. Доведіть, що сума діагоналей опуклого п’ятикутника більша від його периметра.

828. Вершини чотирикутника мають такі координати: $A(1; 2)$, $B(1; 3)$, $C(6; 3)$, $D(3; 0)$. Знайдіть периметр чотирикутника, міри його кутів і довжини діагоналей.

829. *Дельтоїд* — це чотирикутник, діагоналі якого перпендикулярні і одна з них проходить через середину другої. Дослідіть властивості дельтоїда.

830. Уявіть безліч паркетин у формі хреста, складеного з п’яти рівних квадратів, як зображено на малюнку 257. Чи можна такими паркетинами замостити всю площину?



Мал. 257

Практичне завдання

831. Виріжте з паперу дві трапеції зі сторонами 4 см, 4 см, 4 см і 8 см. Які фігури можна утворити, прикладаючи трапеції рівними сторонами одна до одної? Накресліть ці фігури в масштабі 1 : 2, знайдіть їх периметри і міри кутів.

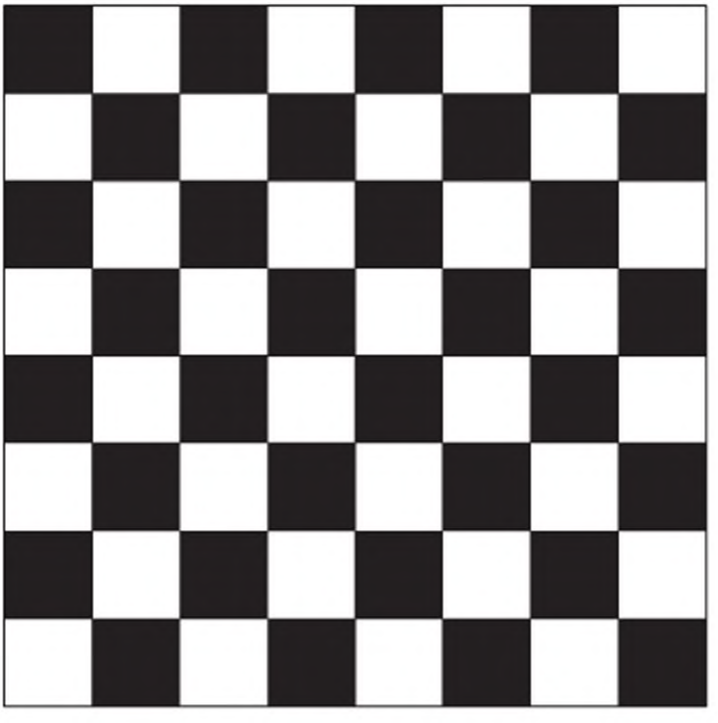
Задачі для повторення

832. Знайдіть кути паралелограма, якщо:
а) два з них пропорційні числам 2 і 3;
б) один із них на 20° більший від другого;
в) один становить 80 % від другого.

833. Знайдіть периметр ромба, якщо він на 60 см більший від сторони ромба.

834. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона ділиться точкою дотику вписаного кола у відношенні 2 : 3 (починаючи від вершини). Знайдіть відношення бічної сторони до основи.

835. На звичайній шаховій дошці (мал. 258) можна виділити 139 різних квадратів, що мають від 2×2 до 7×7 клітинок. Доведіть це. Скільки серед них таких, які мають більше чорних клітинок?

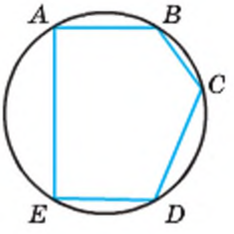


Мал. 258

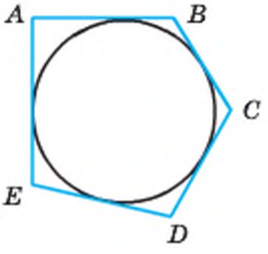
§ 19 Вписані й описані многокутники

Якщо всі вершини многокутника лежать на колі, його називають *вписаним у коло*, а коло — *описаним навколо многокутника* (мал. 259).

Якщо всі сторони многокутника дотикаються до кола, його називають *описаним навколо кола*, а коло — *вписаним у многокутник* (мал. 260).



Мал. 259



Мал. 260

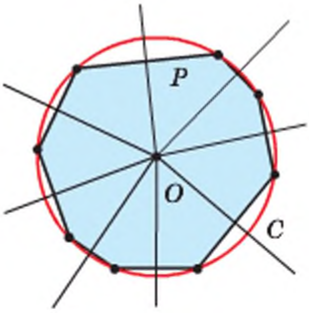
Ви вже дещо знаєте про вписані в коло й описані навколо кола трикутники і чотирикутники. Знаєте, зокрема, що:

- **навколо кожного трикутника можна описати коло і тільки одне;**
- **у будь-який трикутник можна вписати коло і тільки одне;**
- **коло можна вписати тільки в такий чотирикутник, сума двох протилежних сторін якого дорівнює сумі двох інших його сторін;**
- **коло можна описати тільки навколо такого чотирикутника, сума двох протилежних кутів якого дорівнює 180°.**

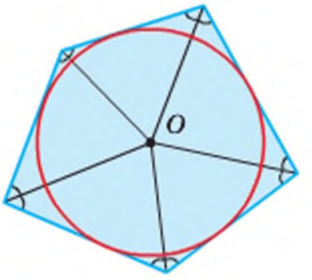
Для довільних n-кутників такі загальні твердження сформулювати не можна. Можна тільки стверджувати, що кожний вписаний у коло многокутник і кожний описаний навколо кола многокутник — фігури опуклі.

Якщо многокутник вписаний у коло, то центр цього кола рівновіддалений від усіх вершин многокутника, тобто лежить у точці перетину серединних перпендикулярів, проведених до сторін многокутника. Якщо серединні перпендикуляри, проведені до всіх сторін многокутника, перетинаються в одній точці, то навколо такого многокутника можна описати коло (мал. 261).

Центр кола, вписаного в многокутник, рівновіддалений від усіх його сторін, тобто лежить у точці перетину бісектрис кутів многокутника. Якщо бісектриси всіх кутів опуклого многокутника перетинаються в одній точці, то у такий многокутник можна вписати коло (мал. 262).



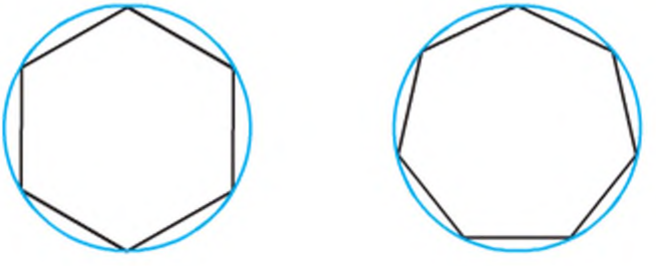
Мал. 261



Мал. 262

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Якщо всі сторони опуклого многокутника рівні і всі його кути рівні, то такий многокутник називають *правильним*. Наприклад, рівносторонній трикутник і квадрат — многокутники правильні. На малюнку 263 зображено правильні шестикутник і семикутник.

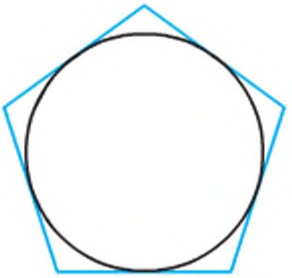


Мал. 263

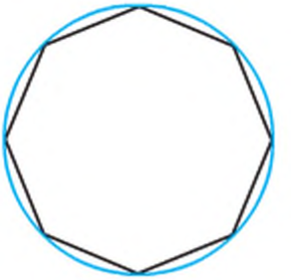
Навколо кожного правильного многокутника можна описати коло і тільки одне.

У кожний правильний многокутник можна вписати коло і тільки одне.

На малюнках 264 і 265 зображено кола: вписане в правильний п'ятикутник і описане навколо правильного восьмикутника.



Мал. 264

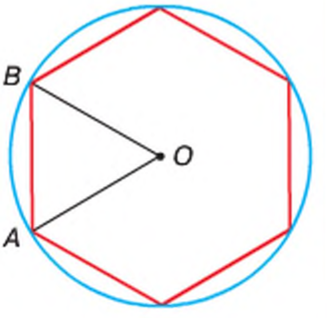


Мал. 265

Доведемо, що **сторона правильного шестикутника, вписаного в коло, дорівнює радіусу цього кола** (мал. 266).

Оскільки всі сторони вписаного шестикутника рівні, то рівні й стягувані ними дуги, і відповідні їм центральні кути. Сума всіх шести центральних кутів (при їх спільній вершині O) дорівнює 360°, тому кожен з них дорівнює 360° : 6 = 60°. $\triangle OAB$ рівнобедрений, бо $OA = OB$, як радіуси кола. Якщо ж кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 60°, то цей трикутник рівносторонній, $AB = OB$. А це й треба було довести.

Докладніше про правильні многокутники ви дізнаєтеся в 9 класі.



Мал. 266

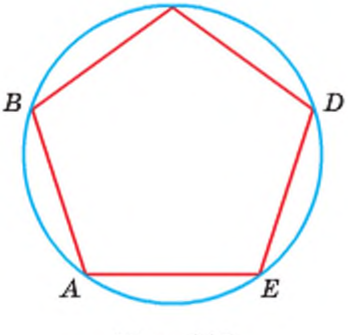
Запитання і завдання для самоконтролю

1. Який многокутник називають вписаним у коло? Описаним навколо кола?
2. Доведіть, що навколо кожного трикутника можна описати коло. Де лежить центр цього кола?
3. Доведіть, що в кожний трикутник можна вписати коло. Де лежить центр цього кола?
4. Навколо якого чотирикутника можна описати коло? Наведіть приклад.
5. У який чотирикутник можна вписати коло? Наведіть приклад.

Виконаємо разом

1 У коло вписано п'ятикутник, усі сторони якого рівні. Доведіть, що всі його кути рівні (мал. 267).

● Якщо всі сторони вписаного в коло п'ятикутника $ABCDE$ рівні, то і стягувані ними дуги кола рівні: кожна з них дорівнює п'ятій частині всього кола. Кут A вписаний і спирається на дугу $BCDE$, що дорівнює $\frac{3}{5}$ усього кола. На таку саму дугу спирається кожний інший кут даного п'ятикутника, тому всі вони рівні.



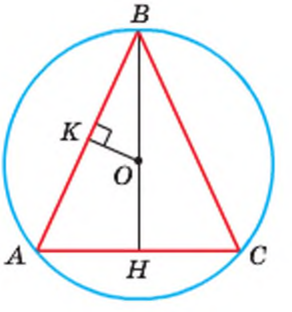
Мал. 267

2 **Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника ABC, якщо $AB = BC = 13$, $AC = 10$.**

● За теоремою Піфагора $BH^2 = BC^2 - HC^2$, $BH^2 = 169 - 25 = 144$, $BH = 12$.

Центр кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, лежить на висоті, проведеній до основи трикутника. Нехай це буде точка O (мал. 268). Опустимо перпендикуляр OK на хорду AB. $BK = KA$, $BK = 0{,}5AB = 6{,}5$. Прямокутні трикутники BKO і BHA подібні, бо мають спільний гострий кут. Тому $OB : AB = BK : BH$, звідки

$$OB = \frac{AB \cdot BK}{BH} = \frac{13 \cdot 6{,}5}{12} = 7\frac{1}{24}.$$



Мал. 268

Отже, радіус кола дорівнює $7\frac{1}{24}$.

Задачі і вправи

Виконайте усно

836. Знайдіть радіус кола, описаного навколо квадрата, якщо сторона квадрата дорівнює 17 см.

837. У коло, діаметр якого дорівнює 30 дм, вписано квадрат. Знайдіть: а) діагональ квадрата; б) сторону квадрата.

838. Що більше: периметр квадрата, довжина вписаного в нього кола чи довжина описаного кола?

839. Знайдіть відношення радіусів кіл, вписаного в рівносторонній трикутник і описаного навколо нього.

А

840. Нехай O — центр кола, вписаного в $\triangle ABC$. Знайдіть кути цього трикутника, якщо $\angle OAB = 40°$ і $\angle OBA = 30°$.

841. Знайдіть кути $\triangle ABC$, якщо O — центр описаного кола і $\angle AOB = 120°$, $\angle BOC = 140°$.

842. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 8 см, а один із кутів 120°. Знайдіть радіус описаного кола.

843. Трикутник ABC — рівнобедрений. Радіус OA описаного кола утворює з основою AC кут OAC, який дорівнює 24°. Визначте кут BAC.

844. Навколо рівностороннього $\triangle ABC$ описано коло і середину K його дуги BC сполучено відрізками з B і C. Знайдіть кути чотирикутника $ABKC$.

845. Знайдіть радіус кола:

а) вписаного в рівносторонній трикутник зі стороною a;

б) описаного навколо рівностороннього трикутника зі стороною a;

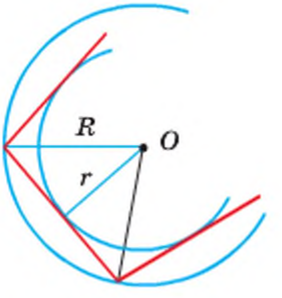
в) описаного навколо квадрата зі стороною a.

Розв'яжіть задачі 846–848, використовуючи малюнок 269.

846. Сторона правильного n-кутника дорівнює a, радіус описаного кола R. Знайдіть радіус вписаного кола.

847. Сторона правильного n-кутника дорівнює a, радіус вписаного кола r. Знайдіть радіус описаного кола.

848. Знайдіть довжину сторони правильного n-кутника, якщо радіус описаного кола R, радіус вписаного кола r.



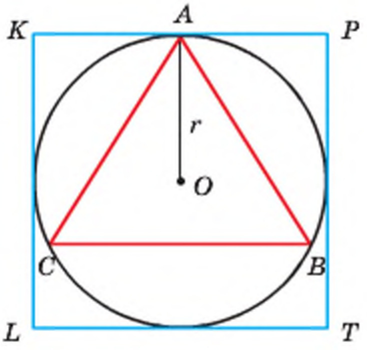
Мал. 269

849. Сторона рівностороннього трикутника, описаного навколо кола, дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторону квадрата, вписаного в це коло.

850. У квадрат вписано коло, а в коло вписано рівносторонній трикутник. Знайдіть відношення сторін трикутника і квадрата (мал. 270).

851. У рівнобічну трапецію з основами 8 см і 18 см вписано коло. Знайдіть його радіус.

852. Точка дотику кола, вписаного в прямокутну трапецію, ділить більшу бічну сторону на відрізки 2 см і 8 см. Знайдіть сторони трапеції і радіус кола.



Мал. 270

Б

853. П'ятикутник $ABCDE$, усі сторони якого рівні, вписано в коло.

1) Доведіть, що всі його кути рівні.

2) Знайдіть міру одного з його кутів.

3) Знайдіть кут між діагоналями, що виходять з однієї вершини.

4) Знайдіть кут між двома діагоналями, які перетинаються у внутрішніх точках.

5) Доведіть, що в п'ятикутника, обмеженого всіма діагоналями п'ятикутника $ABCDE$, всі кути рівні.

854. Знайдіть кути п'ятикутника $ABKCP$, вписаного в коло, якщо $AB = BC = CA$, а точки K і P — середини дуг BC і CA.

855. В опуклий шестикутник з рівними сторонами і кутами вписано коло і точки дотику через одну послідовно сполучено відрізками. Доведіть, що утворений трикутник — рівносторонній.

856. Навколо рівностороннього $\triangle ABC$ зі стороною a описано коло і середини дуг AB, BC, AC послідовно сполучено з вершинами трикутника. Доведіть, що сторони і кути утвореного шестикутника рівні, та знайдіть їх міри.

857. В опуклий шестикутник, усі сторони якого дорівнюють a і кути рівні, вписано коло, а в це коло вписано квадрат. Знайдіть довжину сторони квадрата.

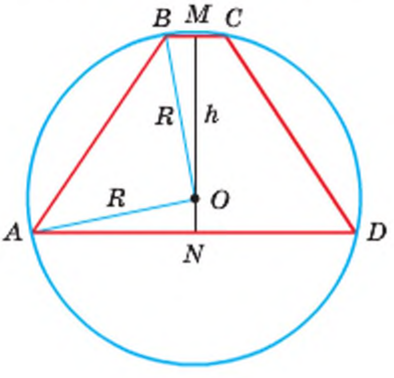
858. Сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 10 см, 10 см і 12 см. Знайдіть: а) радіус кола, вписаного в трикутник; б) радіус кола, описаного навколо трикутника.

859. Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника з основою 24 см, якщо висота, проведена до неї, дорівнює 8 см. Де лежить центр кола?

860. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції з основами 20 см і 4 см та висотою 12 см (мал. 271).

861. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції з основами 12 см і 24 см та бічною стороною $6\sqrt{10}$ см.

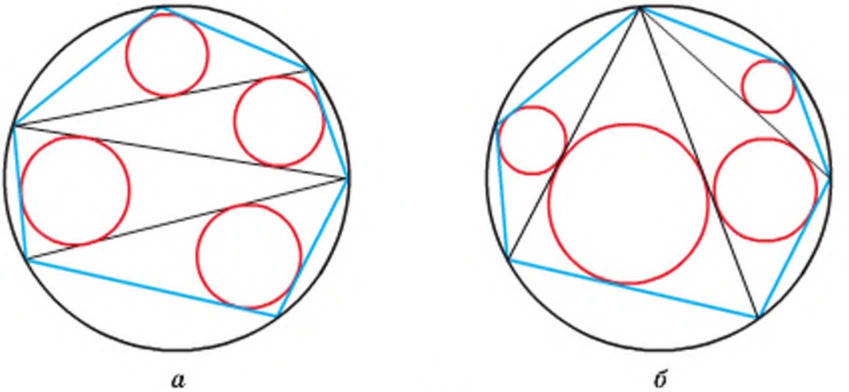
862. Радіус вписаного у прямокутний трикутник кола позначено через r, а половину периметра трикутника — через p. Визначте гіпотенузу.



Мал. 271

Практичне завдання

863. Виміряйте суму діаметрів кіл, вписаних у трикутники (мал. 272, *а*), і суму діаметрів кіл, вписаних у трикутники (мал. 272, *б*).
Порівняйте ці суми.
Чи справджується для цих вписаних многокутників Японська теорема: **незалежно від того, як розбито на трикутники вписаний в коло многокутник, сума радіусів вписаних у трикутники кіл — величина стала?**



Мал. 272

Задачі для повторення

864. Чи подібні два рівнобедрені трикутники, один із яких має кут 100°, а другий — 40°?

865. Дві прямі перетинаються в точці O, їх перетинають дві паралельні прямі, розташовані по різні боки від точки O. Доведіть, що утворені при цьому два трикутники подібні один одному.

866. Установіть відповідність між сумою кутів опуклого n-кутника (1–4) і кількістю n його сторін (А–Д).

1	900°	**А**	$n = 5$
2	540°	**Б**	$n = 7$
3	2340°	**В**	$n = 12$
4	1800°	**Г**	$n = 15$
		Д	$n = 19$

867. Знайдіть периметр ромба, діагоналі якого — 15 см і 20 см.

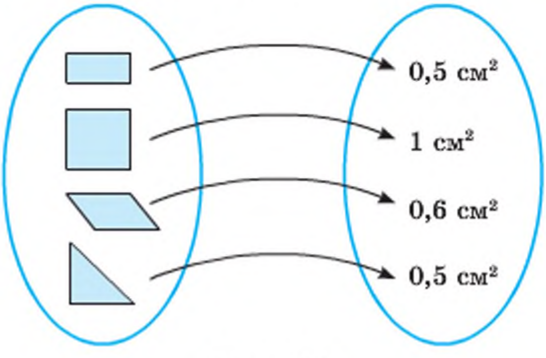
868. Накресліть п'ятикутник, який однією прямою можна розрізати на три трикутники.

Геометрія навколо нас

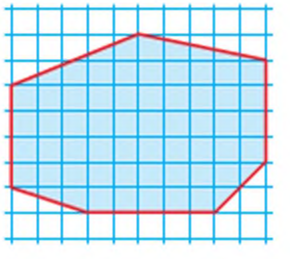
Многокутники в конструкції Ейфелевої вежі

§ 20 Площа многокутника

Тут і далі многокутник розглядатимемо разом з його внутрішньою областю. Кожному многокутнику можна поставити у відповідність значення його площі (мал. 273).



Мал. 273



Мал. 274

Площа многокутника — це величина, що має такі властивості:

1) площа кожного многокутника виражається додатним числом;

2) рівні многокутники мають рівні площі;

3) площа многокутника, складеного з кількох частин, дорівнює сумі площ усіх цих частин;

4) за одиницю площі приймається площа одиничного квадрата.

Одиничний квадрат — це квадрат, сторона якого дорівнює одиниці довжини. Квадрати із сторонами 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км мають відповідно площі: 1 мм², 1 см², 1 дм², 1 м², 1 км². При цьому:

1 м² = 100 дм² = 10 000 см² = 1 000 000 мм²,

1 км² = 1 000 000 м², 1 га = 100 ар = 10 000 м².

У теорії часто приймають довжину деякого (одиничного) відрізка за одиницю довжини, а площу одиничного квадрата — за одиницю площі. У таких випадках найменувань не пишуть.

Дві фігури з рівними площами називають *рівновеликими*. Дві рівні фігури завжди рівновеликі, але не кожні рівновеликі фігури рівні. Наприклад, квадрат зі стороною 4 см і прямокутник зі сторонами 2 см і 8 см рівновеликі, але не рівні.

Наближені значення площ многокутників, як і інших плоских фігур, можна визначати за допомогою *палетки*. Так називають прозору плівку з квадратною сіткою. Наклавши палетку на многокутник, безпосереднім підрахунком одиничних квадратів і їх частин визначають наближене значення площі даного многокутника (мал. 274). Проте площі паралелограмів, трикутників і трапецій зручніше визначати за формулами.

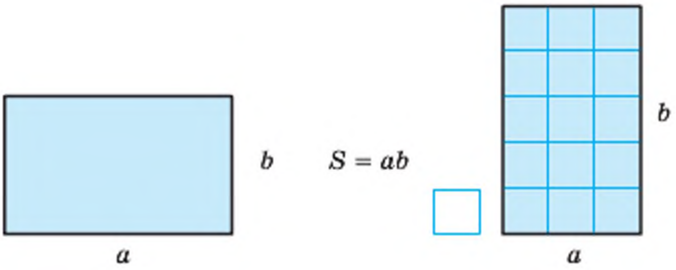
ТЕОРЕМА 33

Площа прямокутника зі сторонами *a* і *b* дорівнює *ab* (мал. 275 *а*).

ДОВЕДЕННЯ.

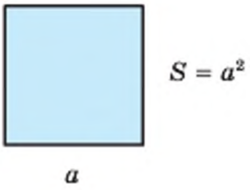
Якщо a і b — натуральні числа, то даний прямокутник можна розбити на b смуг, кожна з яких містить a одиничних квадратів (мал. 275 *б*). Весь прямокутник вміщає ab одиничних квадратів. Отже, його площа $S = ab$. □

Доведення теореми для інших випадків надто громіздке.



а *б*

Мал. 275



Мал. 276

***Наслідок.* Якщо сторона квадрата дорівнює a, то його площа $S = a^2$ (мал. 276).**

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Вимірювати площі в квадратних метрах, квадратних дециметрах, арах, гектарах та інших мірах метричної системи люди почали порівняно недавно.

У Київській Русі певних мір площі не існувало. Тому селяни платили податки не від площі оброблюваного ґрунту, а «від сохи», «від рала», «від диму», «від обжі». Обжа — це площа, яку міг зорати селянин одним конем за один день. З XV ст. ввели точнішу одиницю площі — *десятину*. Це — площа квадрата, сторона якого дорівнює десятій частині версти (десятина ≈ 1,09 га).

У XVIII ст. українці довжини вимірювали у *вершках*, *аршинах*, *сажнях*, а площі визначали відповідно — у *квадратних вершках, квадратних аршинах, квадратних сажнях*. Співвідношення між ними важко було запам'ятати:

1 кв. аршин = 256 кв. вершків = 784 кв. дюйми.

В англомовних країнах і тепер площі визначають у неметричних мірах; невеликі — у *квадратних дюймах, квадратних футах*, а площі земельних ділянок — в *акрах* тощо. 1 акр = 4046,86 м².

Запитання і завдання для самоконтролю

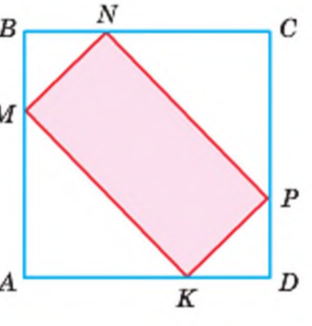
1. Що називають одиничним квадратом?
2. Які властивості має площа многокутника?
3. Які фігури називають рівновеликими?
4. Що називають палеткою?
5. Поясніть, як визначають площу фігури за допомогою палетки.
6. За якою формулою знаходять площу прямокутника?
7. За якою формулою знаходять площу квадрата?

Виконаємо разом

1 Знаючи, що 1 дюйм приблизно дорівнює 2,5 см, знайдіть, скільки квадратних дюймів становить 1 дм^2.

- 1 дм = 4 дюйми, тому 1 дм^2 = 16 кв. дюймів.

2 Кожну сторону квадрата $ABCD$ поділено на три рівні частини і деякі точки поділу сполучено, як на малюнку 277. Знайдіть відношення $S_{ABCD} : S_{MNPK}$.



Мал. 277

- $MNPK$ — прямокутник (доведіть це самостійно). Нехай $AB = 3a$, тоді $AM = AK = 2a$, $BM = BN = a$.

За теоремою Піфагора

$MK = \sqrt{4a^2 + 4a^2} = \sqrt{8a^2} = 2\sqrt{2} \cdot a$

і $MN = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

Тоді $S_{MNPK} = a\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot a = 4a^2$, а $S_{ABCD} = 9a^2$.

Отже, $S_{ABCD} : S_{MNPK} = 9 : 4$.

Задачі і вправи

Виконайте усно

869. Знайдіть площу квадрата, сторона якого дорівнює:
2 см; 3 дм; 10 м; 0,5 км; 100 км.

870. Знайдіть сторону квадрата, площа якого дорівнює:
9 см^2; 1 дм^2; 4 мм^2; 400 м^2; 0,16 км^2.

871. Які числа мають стояти в порожніх клітинках таблиці, де a, b — сторони прямокутника, S — його площа?

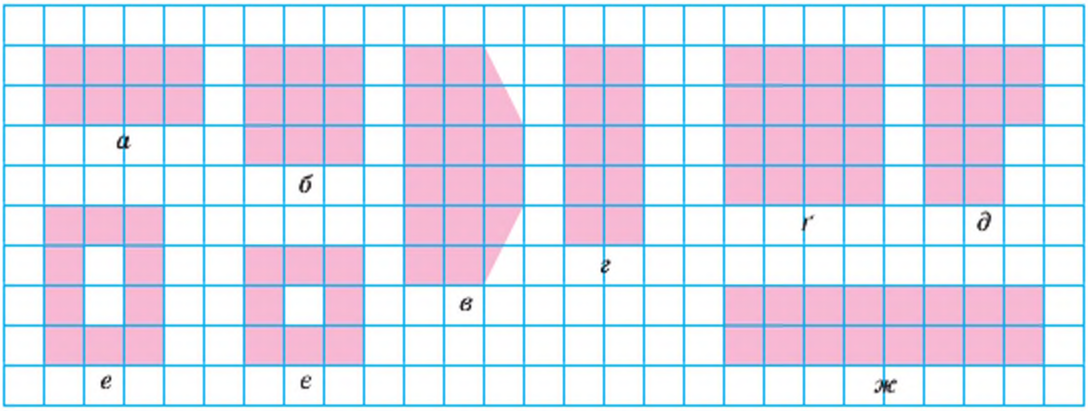
a, см	5	0,2	3	0,5	
b, см	4	2			1,2
S, см²			12	2	6

872. Як зміниться площа квадрата, якщо кожну його сторону збільшити у 3 рази?

873. У скільки разів треба зменшити сторони квадрата, щоб його площа зменшилася у 25 разів?

874. Два прямокутники мають однакові площі. Чи рівні в них сторони?

875. Знайдіть площі зображених фігур (мал. 278). Чи є серед них рівновеликі? (Площа 1 клітинки — 1 кв. од.)



Мал. 278

А

876. Сторони прямокутника дорівнюють 2 м і 8 м, а одна зі сторін іншого прямокутника 5 м. Чому дорівнює друга його сторона, якщо площі цих прямокутників рівні?

877. Знайдіть площу квадрата, якщо його сторона дорівнює:

а) 1,1 см; б) $\frac{3}{4}$ дм; в) $8\sqrt{2}$ м.

878. Обчисліть сторону квадрата, якщо його площа дорівнює:
а) 36 см²; б) 2,25 дм²; в) 12 м²; г) Q.

879. Площа квадрата дорівнює 124 см². Виразіть площу цього квадрата: а) у квадратних міліметрах; б) у квадратних дециметрах; в) у квадратних метрах.

880. Сторони двох квадратів дорівнюють відповідно 15 м і 17 м. Знайдіть сторону квадрата, площа якого дорівнює різниці площ даних квадратів.

881. Дано прямокутник зі сторонами 3 м і 4 м. Знайдіть площу квадрата, сторона якого дорівнює діагоналі цього прямокутника.

882. Знайдіть площу квадрата, діагональ якого дорівнює 6 дм. А якою буде площа квадрата S, якщо його діагональ a?

883. Знайдіть сторону квадрата, що має таку саму площу, як і прямокутник зі сторонами 7 см і 28 см.

884. Одещина — це значний пласт історичного, культурного, економічного і духовного життя України; сонячний край степів, теплого моря, виноградників та смачних фруктів. У 2014 році випущено поштовий блок «Краса і велич України», присвячений Одеській області (мал. 279). Цей блок складається з 4 різних марок. Розміри блоку — 128×100 мм, а марок — 52,2×24 мм; 40,02×29,58 мм; 57,42×45,24 мм. Знайдіть площу кожної марки. Дізнайтеся, що зображено на цих марках.

Мал. 279

885. За даними попередньої задачі встановіть, що більше: загальна площа 4-х марок чи площа блоку, вільна від марок?

886. Відстані від взятої всередині прямокутника точки до протилежних його сторін дорівнюють 2 см і 6 см. Периметр прямокутника 24 см. Знайдіть його площу.

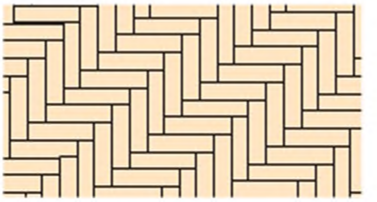
887. Середини сторін одного квадрата є вершинами другого. Як відносяться площі цих квадратів?

888. Знайдіть сторони прямокутника, якщо вони відносяться як 2 : 3, а площа прямокутника дорівнює 54 см^2.

889. Знайдіть сторони прямокутника, периметр якого дорівнює 30 м, а площа 56 м^2.

890. Дві ділянки землі огороджено парканами однакової довжини. Перша ділянка має форму прямокутника зі сторонами 220 м і 160 м, а друга має форму квадрата. Площа якої ділянки більша й на скільки?

891. Підлогу кімнати, яка має форму прямокутника зі сторонами 5,7 м і 6 м, треба покрити паркетом прямокутної форми. Довжина кожної плитки паркету дорівнює 30 см, а ширина 5 см. Скільки таких плиток потрібно для покриття всієї підлоги у спосіб, зображений на малюнку 280?



Мал. 280

892. Вершини чотирикутника мають такі координати: $A(0; 1)$, $B(1; 0)$, $C(0; -1)$, $D(-1; 0)$. Знайдіть його площу.

893. Знайдіть площу чотирикутника, якщо його вершини мають такі координати: $A(-2; 3)$, $B(5; 3)$, $C(5; -1)$, $D(-2; -1)$.

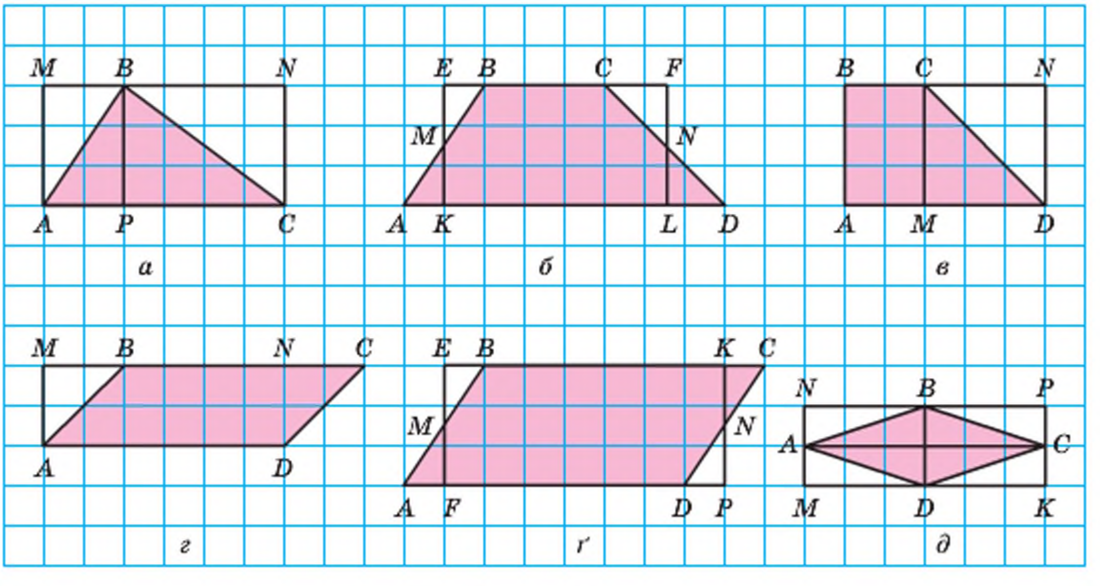
894. Сторони двох квадратів відносяться як 2 : 5. Як відносяться їх площі?

895. Знайдіть площу прямокутника, якщо його діагональ дорівнює 25 см, а одна зі сторін на сантиметр коротша.

896. У коло радіуса 5 м вписано прямокутник зі стороною 6 м. Знайдіть площу прямокутника.

Б

897. Використовуючи властивості площ, знайдіть площі зафарбованих фігур (мал. 281). (Прийміть сторону клітинки за одиницю довжини.)



Мал. 281

898. Знайдіть відношення площ квадратів, один із яких вписаний у коло, а другий описаний навколо того самого кола.

899. Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ ділить сторону BC на відрізки 2 см і 6 см. Знайдіть площу прямокутника. Розгляньте два випадки.

900. Знайдіть площу прямокутника $ABCD$, якщо перпендикуляр, опущений з вершини B на діагональ AC, ділить її на відрізки 2 см і 8 см.

901. На чотири рушники (мал. 282) майстриня витратила 2,45 м² полотна. Скільки метрів мережива вона використала для їх оздоблення, якщо довжина рушника у 5 разів більша за ширину.

Мал. 282

902. Відстань від точки перетину діагоналей прямокутника до однієї зі сторін на 3 см більша за відстань до другої. Знайдіть площу прямокутника, якщо його периметр 52 см.

903. Обчисліть площу прямокутника, сторони якого пропорційні числам 4 і 3, а радіус описаного кола дорівнює 25 см.

904. Як зміниться площа прямокутника, якщо: а) одну пару протилежних сторін збільшити в два рази; б) кожну сторону збільшити в два рази; в) одну пару протилежних сторін збільшити у два рази, а другу зменшити в два рази?

905. Діагональ одного квадрата у два рази більша за діагональ другого квадрата. У скільки разів площа першого квадрата більша за площу другого?

906. Площа квадрата, побудованого на діагоналі прямокутника, удвічі більша за площу цього прямокутника. Доведіть, що сторони прямокутника рівні.

907. Перемалюйте в зошит фігуру (мал. 283) і проведіть пряму так, щоб розбити фігуру на дві частини рівних площ.

Мал. 283

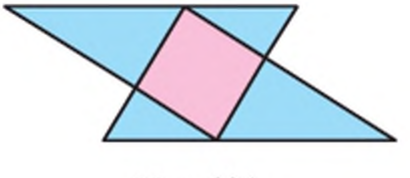
908. Кут між діагоналями прямокутника становить 60°, а менша його сторона дорівнює 3 м. Знайдіть площу прямокутника.

909. Радіуси двох концентричних кіл дорівнюють r і $2r$. Знайдіть площу вписаного в більше коло прямокутника, дві сторони якого дотикаються до меншого кола.

910. Діагоналі ромба дорівнюють a і c. Знайдіть площу чотирикутника, вершини якого — середини сторін ромба.

911. Діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні, середня лінія дорівнює m. Знайдіть площу чотирикутника, вершинами якого є середини сторін трапеції.

912. Прямокутний трикутник з катетами a і b наклали на рівний йому трикутник так, що їх спільною частиною виявився найбільший квадрат. Знайдіть площу цього квадрата (мал. 284).



Мал. 284

Практичне завдання

913. Визначте, скільки рулонів шпалер потрібно придбати, щоб обклеїти ними вашу кімнату. Довжина рулону 10 м, ширина: а) 0,5 м; б) 1 м.

Задачі для повторення

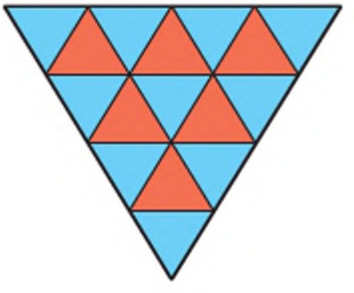
914. Знайдіть периметр трикутника, середні лінії якого дорівнюють 7 м, 8 м і 9 м.

915. Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 6, 7, 9 і 8. Чи можна такий чотирикутник вписати в коло?

916. Знайдіть найбільший кут трикутника, сторони якого дорівнюють 8 см, 15 см і 17 см.

917. Діагоналі прямокутника перетинаються під кутом 60°. Як відносяться його сторони?

918. Скільки трикутників зображено на малюнку 285? Скільки серед них таких, що містять синіх трикутників удвічі більше, ніж червоних?



Мал. 285

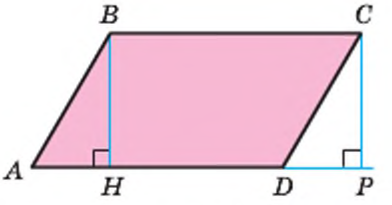
Геометрія навколо нас

Палац Шенборнів біля міста Мукачеве.

§ 21 Площі паралелограма і трапеції

1. Площа паралелограма

Домовимось одну зі сторін паралелограма (і її довжину) називати *основою*, а відстань від основи до прямої, якій належить протилежна сторона, — *висотою* паралелограма. Наприклад, якщо AD — основа паралелограма $ABCD$, то довжина перпендикуляра BH — його висота (мал. 286).



Мал. 286

ТЕОРЕМА 34

Площа паралелограма дорівнює добутку його основи на висоту.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай $ABCD$ — довільний паралелограм з основою $AD = a$ і висотою $BH = h$. Доведемо, що його площа $S = ah$ (див. мал. 286).

Якщо BH і CP — перпендикуляри до прямої AD, то трикутники ABH і DCP рівні (за катетом і гіпотенузою). Отже, якщо від площі трапеції $ABCP$ відняти площу трикутника DCP чи від площі трапеції $ABCP$ відняти площу $\triangle ABH$, результати будуть однакові. Перша різниця дорівнює площі S даного паралелограма, друга — площі прямокутника $HBCP$. Отже, площа даного паралелограма дорівнює площі прямокутника $HBCP$, а площа прямокутника $HBCP$ — добутку ah. Тому $S = ah$. □

Оскільки ромб — це також паралелограм, то і **площа ромба дорівнює добутку його сторони на висоту**.

2. Площа трапеції

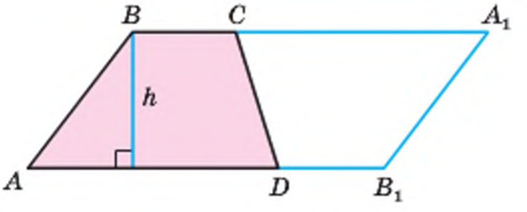
ТЕОРЕМА 35

Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай $ABCD$ — довільна трапеція з основами $AD = a$, $BC = b$. І нехай h — висота цієї трапеції. Добудуємо трапецію A_1B_1DC, рівну даній (у якій $CA_1 = AD$ і $DB_1 = BC$). Чотирикутник ABA_1B_1 — паралелограм, бо $A_1B = AB_1$ і $A_1B \parallel AB_1$ (мал. 287). Сторона цього паралелограма $AB_1 = a + b$, а висота h, тому його площа дорівнює $(a + b)h$. Площа трапеції становить половину площі паралелограма. Тому її площа

$$S = \frac{1}{2}(a+b)h. \square$$



Мал. 287

Наслідок. **Площа трапеції дорівнює добутку її середньої лінії на висоту.**

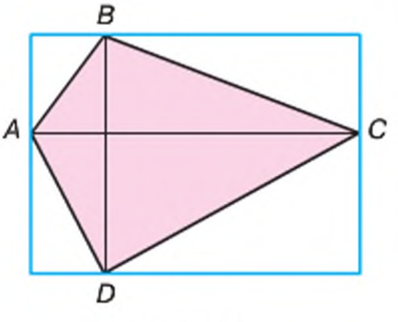
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

ТЕОРЕМА 36

Площа опуклого чотирикутника з перпендикулярними діагоналями дорівнює півдобутку діагоналей.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай дано опуклий чотирикутник *ABCD*, діагоналі якого *AC* і *BD* перпендикулярні (мал. 288). Провівши через кожну вершину пряму, паралельну протилежній діагоналі чотирикутника, можна навколо даного чотирикутника описати прямокутник, сторони якого дорівнюють діагоналям даного чотирикутника.



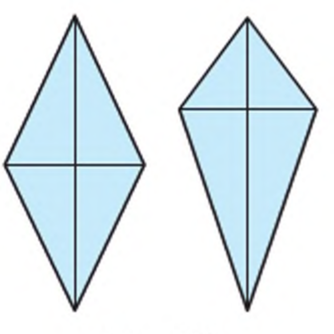
Мал. 288

При цьому прямокутник містить удвічі більше прямокутних трикутників, на які чотирикутник *ABCD* розбивається діагоналями. Отже, площа даного чотирикутника удвічі менша за площу описаного прямокутника. Оскільки площа описаного прямокутника дорівнює добутку діагоналей *AC* і *BD*, то площа чотирикутника *ABCD* дорівнює півдобутку його діагоналей. $\square$

Наслідки.

1) **Площа ромба дорівнює півдобутку діагоналей.**

2) **Площа дельтоїда дорівнює півдобутку діагоналей** (мал. 289).


Мал. 289

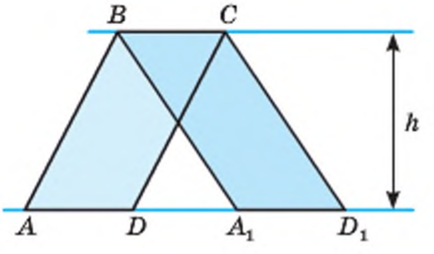
Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте і доведіть теорему про площу паралелограма.
2. За якою формулою знаходять площу ромба?
3. Сформулюйте і доведіть теорему про площу трапеції.
4. За якою формулою знаходять площу трапеції, якщо відомі її середня лінія і висота?

Виконаємо разом

1 Вершини A, D, A_1 і D_1 паралелограмів $ABCD$ і A_1BCD_1 лежать на одній прямій. Доведіть, що площі цих паралелограмів рівні (мал. 290).

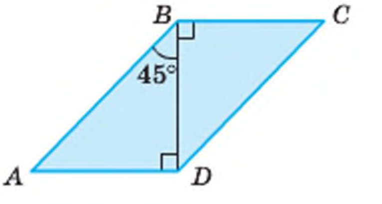
- Площі даних паралелограмів: $S = AD \cdot h$ і $S_1 = A_1D_1 \cdot h$. Їх висоти рівні й основи рівні, бо $AD = BC = A_1D_1$. Тому $S = S_1$.



Мал. 290

2 Знайдіть площу паралелограма, якщо його діагональ завдовжки 5 см утворює зі сторонами кути 45° і 90° (мал. 291).

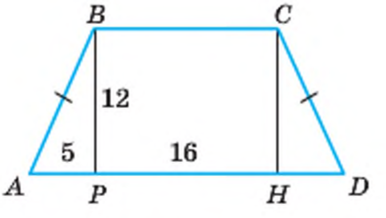
- Нехай $BD = 5$ см — діагональ паралелограма $ABCD$, $\angle ABD = 45°$, $\angle ADB = 90°$ (за умовою). Тоді $\angle BAD = 45°$, трикутник ABD — рівнобедрений, а тому $AD = BD = 5$ см. У паралелограмі $ABCD$ BD — висота, AD — основа. Отже, $S_{ABCD} = BD \cdot AD = 5 \cdot 5 = 25$ (см²).



Мал. 291

3 У рівнобічній трапеції $ABCD$ висота BP ділить більшу основу на відрізки 5 см і 16 см. Знайдіть площу і периметр трапеції, якщо $BP = 12$ см (мал. 292).

- Проведемо $CH \perp AD$, тоді:
$AP = HD$ (як катети рівних трикутників ABP і DCH); $PH = BC$ (як протилежні сторони прямокутника $PBCH$). Отже, $BC = 16 - 5 = 11$ (см), а $AD = 16 + 5 = 21$ (см).
Знайдемо m — середню лінію трапеції:
$m = \dfrac{BC + AD}{2} = 16$ (см).



Мал. 292

Тоді $S_{ABCD} = m \cdot BP = 16 \cdot 12 = 192$ (см²).
Знайдемо бічну сторону трапеції:
$AB^2 = AP^2 + BP^2 = 25 + 144 = 169$, звідки $AB = 13$ см.
Тоді $P_{ABCD} = 2AB + 2m = 26 + 32 = 58$ (см).

Задачі і вправи

Виконайте усно

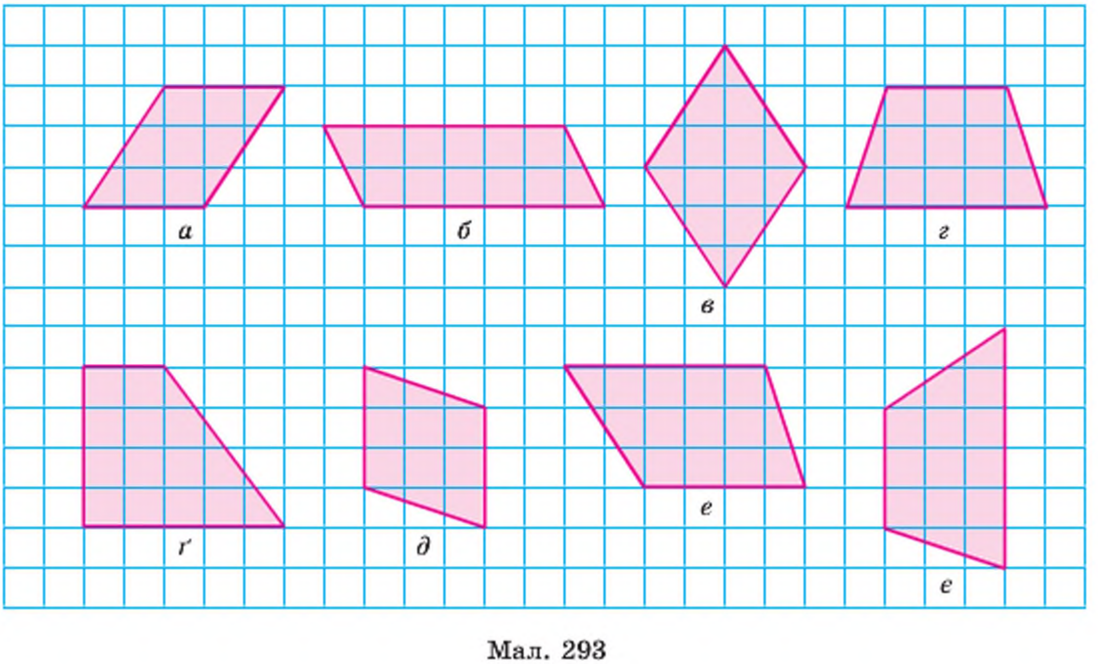
919. Знайдіть площу паралелограма, основа якого дорівнює 5 см, а висота 6 см.

920. Площа паралелограма Q, висота h. Знайдіть його основу.

921. Які числа мають стояти в порожніх клітинках таблиці, де a і b — основи трапеції, h, S — відповідно її висота і площа.

a	1	2	1		2
b	3	3	4	7	
h	2	4		2	3
S			5	10	12

922. Знайдіть площі зображених фігур (мал. 293). Чи є серед них рівновеликі? (Прийміть сторону клітинки за одиничний відрізок.)



Мал. 293

А

923. Чи існує паралелограм, сторони якого дорівнюють 9 і 7, а висоти 7 і 8?

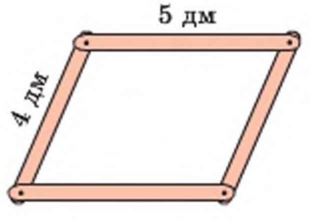
924. Висоти паралелограма 3 м і 4 м; одна з його сторін 5 м. Знайдіть другу сторону паралелограма.

925. Знайдіть площу паралелограма, якщо його діагональ дорівнює 14 см і перпендикулярна до сторони, довжина якої 25 см.

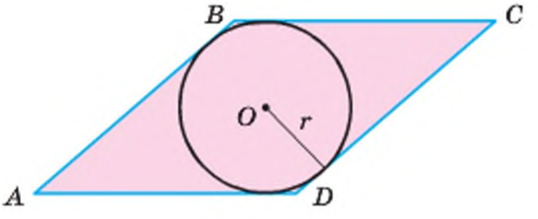
926. Суміжні сторони паралелограма дорівнюють 12 см і 14 см, його гострий кут дорівнює 30°. Знайдіть площу паралелограма.

927. Сторони паралелограма дорівнюють 4 см і 5 см, а кут між ними 120°. Знайдіть його площу.

928. Дано шарнірний паралелограм зі сторонами 4 дм і 5 дм (мал. 294). У яких межах може змінюватися площа паралелограма?



Мал. 294



Мал. 295

929. Відстань між більшими сторонами паралелограма дорівнює 18 см, а його площа 450 см². Знайдіть відстань між меншими сторонами, якщо різниця сторін дорівнює 5 см.

930. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ ділить сторону BC на відрізки 12 см і 20 см. Знайдіть площу паралелограма, якщо $\angle A = 30°$. Розгляньте два випадки.

931. Сторона ромба дорівнює 6 см, а один із кутів дорівнює 150°. Обчисліть площу ромба.

932. Знайдіть площу ромба, якщо його висота 10 см, а гострий кут 30°.

933. Знайдіть площу ромба за його стороною a і кутом 30°.

934. Знайдіть площу ромба за його висотою 20 см і кутом 45°.

935. Сторона ромба дорівнює 37,5 см, а радіус вписаного кола 21,2 см. Знайдіть площу ромба (мал. 295).

936. Ромб із периметром 48 см і кутом 30° рівновеликий квадрату. Знайдіть діагональ цього квадрата.

937. Основи трапеції дорівнюють 15 см і 19 см, а висота 12 см. Знайдіть площу трапеції.

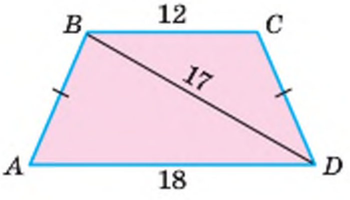
938. Середня лінія трапеції дорівнює 23 дм, а площа 0,23 м². Знайдіть висоту трапеції.

939. У трапеції $ABCD$ основа BC дорівнює 6 см, а бічна сторона $AB = 5$ см. Висота BK ділить основу AD на відрізки $AK = 3$ см і $KD = 7$ см. Знайдіть площу трапеції.

940. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, якщо її основи дорівнюють 5 см і 11 см, а периметр 28 см.

941. Тупий кут рівнобічної трапеції дорівнює 135°, а висота, проведена з вершини цього кута, ділить більшу основу на відрізки 1,4 см і 3,4 см. Обчисліть площу трапеції.

942. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см і 18 см, а діагональ 17 см. Знайдіть площу трапеції (мал. 296).



Мал. 296

943. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 70 см, а радіус вписаного кола 25 см. Знайдіть площу трапеції.

944. Обчисліть площу рівнобічної трапеції, менша основа якої дорівнює бічній стороні і має 2 см, а кут при більшій основі становить: 1) 60°; 2) 30°; 3) 45°.

945. Обчисліть площу прямокутної трапеції, у якої дві менші сторони дорівнюють по 6 см, а більший кут 135°.

946. Бічна сторона і висота рівнобічної трапеції пропорційні числам 5 і 3. Знайдіть площу трапеції, якщо її основи дорівнюють 7 см і 23 см.

Б

947. Сторони паралелограма дорівнюють 17 м і 15 м. Одна з діагоналей перпендикулярна до меншої сторони. Яка площа цього паралелограма?

948. Гострий кут паралелограма дорівнює 30°, а висоти, проведені з вершини тупого кута, дорівнюють 2 см і 3 см. Обчисліть площу паралелограма.

949. Діагональ паралелограма дорівнює його стороні. Обчисліть площу паралелограма, якщо більша його сторона дорівнює 16 см, а один із його кутів — 45°.

950. Висоти паралелограма дорівнюють 5 см і 4 см, а периметр дорівнює 36 см. Обчисліть площу паралелограма.

951. Знайдіть периметр паралелограма, якщо його площа дорівнює 24 см², а точка перетину діагоналей віддалена від сторін на 2 см і 3 см.

952. Менша сторона паралелограма дорівнює 13 см. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей до більшої сторони, ділить її на відрізки, які дорівнюють 17 см і 12 см. Знайдіть площу паралелограма.

953. Сторона паралелограма дорівнює 8 м, а діагональ завдовжки 14 м утворює з нею кут 30°. Обчисліть площу паралелограма.

954. Поділіть паралелограм на чотири рівновеликі частини прямими, які проходять через одну з його вершин.

955. Знайдіть сторону ромба, якщо його площа дорівнює Q, а один із кутів 30°.

956. Знайдіть площу ромба $ABCD$, якщо його висота $BH = 45$ см, а H — середина сторони AD.

957. Знайдіть площу ромба, якщо точка дотику вписаного в ромб кола ділить сторону на відрізки 3 см і 12 см.

958. Точка дотику кола, вписаного в ромб, ділить сторону на відрізки, пропорційні числам 4 і 9. Знайдіть площу ромба, якщо радіус кола 12 см.

959. Знайдіть площу ромба, якщо його периметр 48 см, а кут між висотами, проведеними з однієї вершини, дорівнює 30°.

960. Основа перпендикуляра, проведеного з вершини тупого кута ромба, ділить сторону на відрізки 8 см і 9 см, починаючи від вершини гострого кута. Знайдіть площу ромба.

961. Діагональ ромба ділиться його висотою, проведеною з вершини тупого кута, у відношенні 1 : 2. Знайдіть площу ромба, якщо його сторона дорівнює 26 см.

962. Знайдіть площу ромба, якщо його висота 12 см, а менша діагональ 13 см.

963. Знайдіть площу чотирикутника, діагоналі якого перпендикулярні і мають довжини 12 см і 15 см.

964. Знайдіть площу трапеції, зображеної на малюнку 297, якщо розміри марки 46,82×46, 82×69,60 мм. Скористайтеся калькулятором, а відповідь округліть до десятих.

Мал. 297

965. Двома прямими, не паралельними основам трапеції, поділіть дану трапецію на три рівновеликі трапеції.

966. У рівнобічну трапецію вписано коло радіуса 3 см. Знайдіть сторони трапеції, якщо її площа дорівнює 60 см^2.

967. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою гострого кута. Знайдіть площу трапеції, якщо основи її дорівнюють 10 см і 22 см.

968. Площа трапеції 72 см^2, а її основи і висота пропорційні числам 1, 2 і 3. Знайдіть середню лінію трапеції.

969. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, якщо вписане в неї коло точкою дотику ділить її бічну сторону на відрізки 4 см і 9 см.

970. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, якщо її діагоналі перпендикулярні і середня лінія дорівнює a.

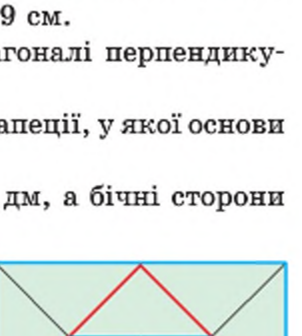
971. ***Відкрита задача.*** Знайдіть площу рівнобічної трапеції, у якої основи дорівнюють 12 см і 20 см, а діагоналі ... .

972. Знайдіть площу трапеції, основи якої 20 дм і 60 дм, а бічні сторони 13 дм і 37 дм.

973. Знайдіть площу трапеції, основи якої 24 см і 72 см, а кути при більшій основі 30° і 60°.

974. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою тупого кута. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює 6 см, а периметр 84 см.

975. На малюнку 298 зображено квадрат, сторона якого дорівнює 4 см. Його поділили на 12 рівних трикутників і 4 рівні квадрати. Знайдіть площі утворених квадратів, трикутників і трапецій.

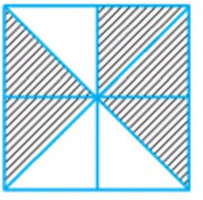


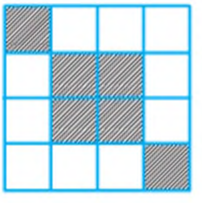
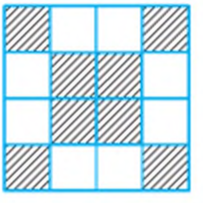
Мал. 298

976. Установіть пари рівновеликих фігур, одна з яких чотирикутник (1–4), а друга — заштрихована частина квадрата зі стороною 4 см (А–Д).

1 Прямокутник, у якого діагональ дорівнює 5 см, а одна із сторін дорівнює 3 см
2 Рівнобедрена трапеція з кутом 135° і основами 5 см і 3 см
3 Паралелограм, висоти якого дорівнюють 1 см і 3 см, а гострий кут 30°
4 Квадрат, діагональ якого дорівнює 4 см

А

Б

В

Г

Д


Практичне завдання

977. Виріжте із цупкого паперу довільну трапецію і розріжте її на 3 частини так, щоб із них можна було скласти прямокутник і показати, що площа трапеції дорівнює добутку середньої лінії на висоту.

Задачі для повторення

978. Доведіть, що відповідні медіани (бісектриси, висоти) рівних трикутників рівні.

979. У коло радіуса 10 см вписано прямокутник, одна сторона якого дорівнює 12 см. Знайдіть периметр і площу прямокутника.

980. Куб об'ємом 1000 $см^3$ розрізали на 64 рівні кубики. Знайдіть довжину ребра і площу поверхні одного кубика.

§ 22 Площі трикутника і ромба

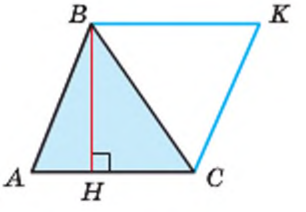
1. Площа трикутника

ТЕОРЕМА 37

Площа трикутника дорівнює півдобутку його основи на висоту.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай ABC — довільний трикутник з основою $AC = a$ і висотою $BH = h$ (мал. 299). Побудуємо паралелограм $ABKC$. У нього $BK = AC$ і $CK = AB$, тому $\triangle ABC = \triangle KCB$. Площа S даного $\triangle ABC$ становить половину площі паралелограма. Оскільки площа паралелограма дорівнює ah, то площа даного трикутника вдвічі менша: $\frac{1}{2}ah$.



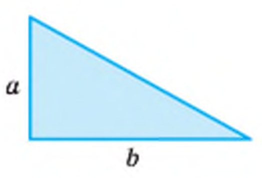
Мал. 299

Отже, площу трикутника можна обчислювати за формулою

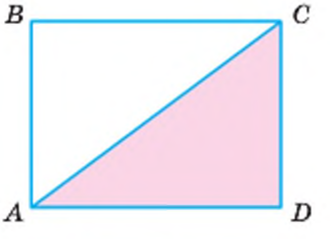
$$S = \frac{1}{2}ah. \square$$

Якщо за основу прямокутного трикутника прийняти один із його катетів, то другий катет буде висотою трикутника. Тому **площа прямокутного трикутника дорівнює півдобутку його катетів.**

Якщо катети трикутника дорівнюють a і b (мал. 300), то $S = \frac{1}{2}ab$.



Мал. 300



Мал. 301

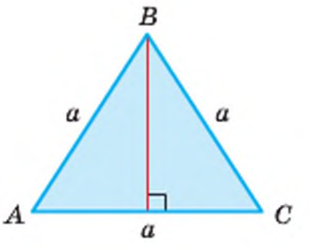
Це твердження випливає також із того, що з двох рівних прямокутних трикутників завжди можна скласти прямокутник (мал. 301).

Якщо кожна сторона трикутника дорівнює a (мал. 302), то згідно з теоремою Піфагора його висота

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

а площа рівностороннього трикутника

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$



Мал. 302

Доведіть, що в кожному трикутнику зі сторонами a, b, c і відповідними висотами h_a, h_b, h_c завжди $ah_a = bh_b = ch_c$.

2. Площа ромба

Вміючи знаходити площі трикутників, можна обчислити і площу будь-якого многокутника, бо кожний многокутник можна розбити на скінченне число трикутників.

ТЕОРЕМА 38

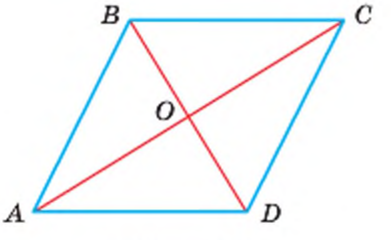
Площа ромба дорівнює півдобутку його діагоналей.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай $ABCD$ — довільний ромб, діагоналі якого перетинаються в точці O (мал. 303). Діагональ AC ділить його на два рівні трикутники: ABC і ADC.

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\triangle ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BO =$$

$$= AC \cdot \frac{1}{2} \cdot BD = \frac{1}{2} AC \cdot BD. \ \square$$



Мал. 303

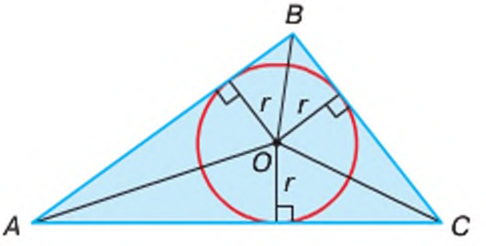
Якщо діагоналі ромба дорівнюють d_1 і d_2, то $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

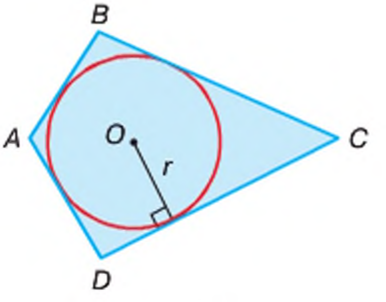
Виведемо ще одну формулу для обчислення площі трикутника.

Нехай точка O — центр кола, вписаного в $\triangle ABC$ (мал. 304). Площа S цього трикутника дорівнює сумі площ трикутників OAB, OBC і OCA:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r + \frac{1}{2} CA \cdot r = \frac{1}{2}(AB + BC + CA) \cdot r = pr.$$



Мал. 304



Мал. 305

Отже, площа кожного трикутника дорівнює добутку його півпериметра і радіуса вписаного кола:

$$S = pr.$$

Покажіть, що **за формулою $S = pr$ можна обчислювати площу кожного многокутника периметра $2p$, описаного навколо кола радіуса r** (мал. 305).

Запитання і завдання для самоконтролю

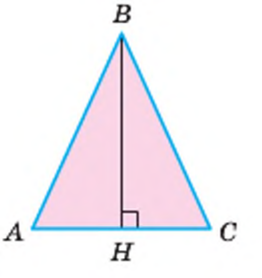
1. Сформулюйте і доведіть теорему про площу трикутника.
2. Як знайти площу прямокутного трикутника?
3. За якою формулою обчислюють площу рівностороннього трикутника?
4. Як знайти площу ромба, якщо відомі його діагоналі?

Виконаємо разом

1 Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють a, a і b. Чому дорівнює його висота, проведена до бічної сторони?

- Нехай $AB = BC = a$, $AC = b$ (мал. 306, *а*). Дві сторони трикутника рівні, отже, він рівнобедрений. Його висота BH ділить основу AC навпіл. З прямокутного трикутника ABH, за теоремою Піфагора, знаходимо:

$$BH^2 = a^2 - \frac{b^2}{4},\; BH = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2}.$$



а

Мал. 306

Шукана площа трикутника:

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{b}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2} = \frac{1}{4}b\sqrt{4a^2 - b^2}.$$

Тут a і b — довільні додатні числа, але такі, що $2a > b$.

Щоб знайти висоту трикутника, скористаємось методом площ. Для цього слід знайти площу трикутника іншим способом.

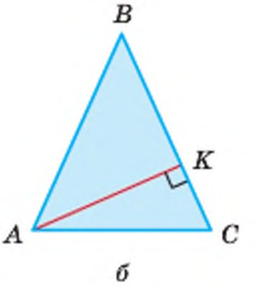
Площу трикутника ABC знайти можна інакше (мал. 306, *б*):

$$S = \frac{1}{2} AK \cdot BC.$$

Звідси висота

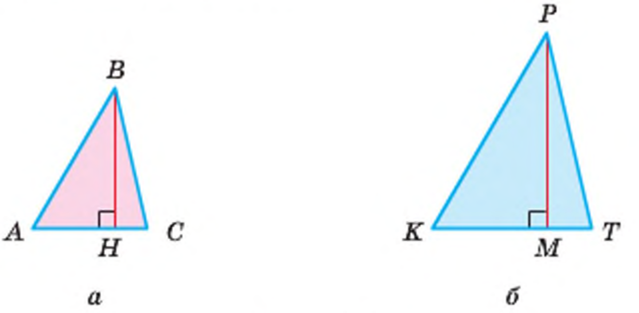
$$AK = \frac{2S}{BC} = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{2a}.$$

Отже, $S = \frac{1}{4} b\sqrt{4a^2 - b^2}$, $AK = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{2a}$.



Мал. 306

2 **Доведіть, що відношення площ двох подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.**



Мал. 307

● Нехай трикутники ABC і KPT подібні з коефіцієнтом подібності k (мал. 307). Тобто $KP = kAB$ і $KT = kAC$. Так само відносяться і їх висоти: $PM = kBH$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH,$$

$$S_{KPT} = \frac{1}{2} KT \cdot PM = \frac{1}{2} k \cdot AC \cdot k \cdot BH = k^2 \cdot S_{ABC}.$$

$$\text{Отже, } S_{KPT} : S_{ABC} = k^2.$$

Доведене твердження можна сформулювати і так. **Якщо відповідні сторони подібних трикутників відносяться як $m : n$, то їх площі відносяться як $m^2 : n^2$.**

Задачі і вправи

Виконайте усно

981. Як зміниться площа трикутника, якщо:

а) його висоту збільшити втричі, а основу не змінювати;

б) основу зменшити вдвічі, а висоту не змінювати;

в) основу збільшити вдвічі, а висоту зменшити вдвічі;

г) основу збільшити вдвічі, а висоту збільшити в 5 разів?

982. У наведеній таблиці a, h і S — основа, висота і площа трикутника, виражені у відповідних одиницях. Які числа мають бути в порожніх клітинках?

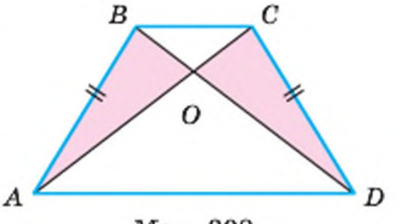
a	3	6	4	7		
h	4	5			0,5	3
S			10	70	1	3

983. $ABCD$ — рівнобічна трапеція (мал. 308). Доведіть, що:

а) $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DCB}$;

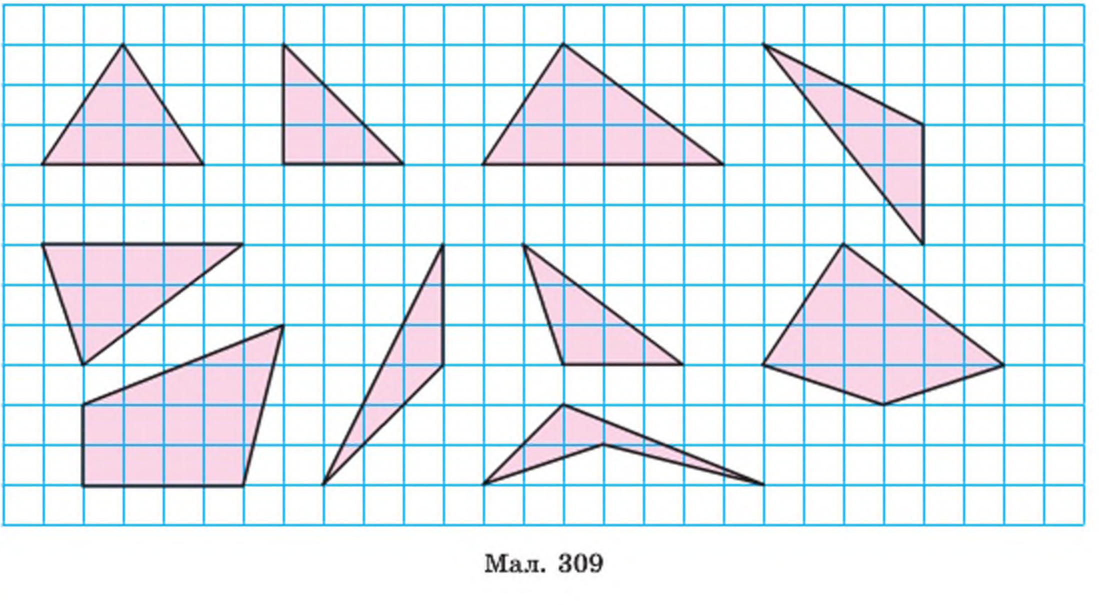
б) $S_{\triangle BAD} = S_{\triangle DCA}$;

в) $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle DOC}$.



Мал. 308

984. Знайдіть площі зображених фігур (мал. 309). Чи є серед них рівновеликі? (Прийміть сторону клітинки за одиничний відрізок.)



Мал. 309

А

985. Знайдіть площу трикутника, основа якого дорівнює 12 см, а висота — 8 см.

986. Знайдіть висоту трикутника, основа якого дорівнює 35 см, а площа — 175 $см^2$.

987. Обчисліть площу прямокутного трикутника, якщо катети дорівнюють: а) 4 см і 11 см; б) 1,2 дм і 3 дм.

988. Площа прямокутного трикутника дорівнює 175 $см^2$. Обчисліть катети, якщо відношення їх довжин дорівнює 7 : 2.

989. Знайдіть площу прямокутного трикутника, гіпотенуза і катет якого дорівнюють 10 см і 8 см.

990. Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 2 м, а його площа 10 $м^2$. Знайдіть другий катет цього трикутника.

991. Знайдіть площу рівнобедреного прямокутного трикутника з гіпотенузою: а) 8 см; б) 1,4 дм; в) c м.

992. Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо висота, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки 2 см і 8 см.

993. Заповніть порожні клітинки таблиці, у якій a і b — довжини катетів (у см), а S — площа трикутника (у $см^2$).

a	2	32	5,8	14,4	0,2	$2n$	n
b	5	45			0,24	$3m$	
S			29	36			Q

994. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, якщо бічна сторона і основа пропорційні числам 5 і 8, а висота, проведена до основи, дорівнює 18 см.

995. Доведіть, що медіана трикутника розбиває його на два трикутники, площі яких рівні.

996. Дано $\triangle ABC$ і пряму AM, паралельну BC. Доведіть, що коли $K \in AM$, то трикутники ABC і KBC мають рівні площі.

997. Поділіть даний трикутник на три рівновеликі частини прямими, що проходять через одну вершину.

998. За даними катетами a та b прямокутного трикутника знайдіть висоту, проведену до гіпотенузи: а) $a = 5$, $b = 12$; б) $a = 12$, $b = 16$.

999. Обчисліть висоти трикутника зі сторонами 10 см, 10 см і 12 см.

1000. Сторони AB і BC трикутника ABC дорівнюють відповідно 16 см і 22 см, а висота, проведена до сторони AB, дорівнює 11 см. Обчисліть висоту, проведену до сторони BC.

1001. Дві сторони трикутника дорівнюють 7,5 см і 3,2 см. Висота, проведена до більшої сторони, дорівнює 2,4 см. Обчисліть висоту, проведену до меншої сторони.

1002. Площа трикутника дорівнює 20 см². Знайдіть площу трикутника, який середня лінія відтинає від даного трикутника.

1003. Знайдіть площу ромба, якщо його діагоналі дорівнюють 4 см і 6 см.

1004. Доведіть, що площа квадрата, побудованого на катеті рівнобедреного прямокутного трикутника, вдвічі більша від площі квадрата, побудованого на висоті, проведеній до гіпотенузи.

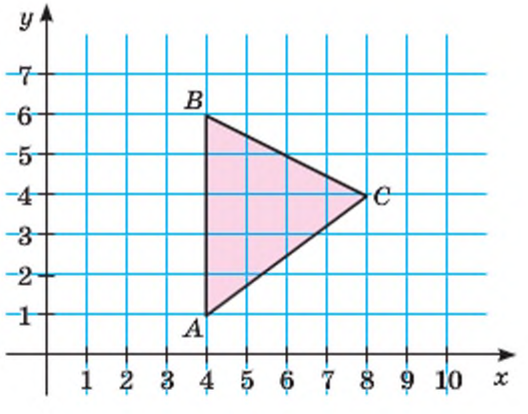
1005. Обчисліть площу правильного трикутника зі стороною: а) 10 см; б) 7 см; в) a м.

1006. Площа правильного трикутника дорівнює $100\sqrt{3}$ м². Знайдіть сторону цього трикутника.

1007. Виразіть сторону правильного трикутника через його площу Q.

1008. Висота рівностороннього трикутника $\sqrt{3}$ м. Яка площа цього трикутника?

1009. Знайдіть площу трикутника за координатами його вершин: (4; 1), (4; 6), (8; 4) (мал. 310).



Мал. 310

1010. Висота трикутника дорівнює 2 м, а проекції бічних сторін на основу дорівнюють 3 м і 10 м. Знайдіть площу трикутника.

1011. Висота трикутника дорівнює 4 м, а кути при його основі дорівнюють 30° і 45°. Знайдіть площу трикутника.

Б

1012. У трикутнику ABC $AB = 8$ см, $BC = 3\sqrt{2}$ см, $\angle B = 45°$. Знайдіть його площу.

1013. Знайдіть площу правильного трикутника, описаного навколо кола радіуса R.

1014. Сторони трикутника пропорційні числам 1 і 2. Висота, проведена до однієї з них, дорівнює 2 см. Знайдіть висоту, проведену до другої сторони.

1015. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 4 м і 6 м. Знайдіть площі трикутників, на які бісектриса прямого кута ділить даний трикутник.

1016. Знайдіть площу трикутника, вершини якого:
а) $A(-2; 3)$, $B(4; 7)$, $C(4; -1)$;
б) $C(1; 3)$, $P(7; 5)$, $T(3; 1)$.

1017. Обчисліть площу марки (мал. 311), якщо її розміри $46,82 \times 46,82 \times 69,60$ мм. Скористайтеся калькулятором, а відповідь округліть до десятих.

Мал. 311

1018. Як відносяться площі двох трикутників, якщо вершини одного з них є серединами сторін другого?

1019. Висота CH прямокутного трикутника ABC ділить гіпотенузу на відрізки 1 дм і 9 дм. Обчисліть площу чотирикутника $ACBK$, де K — середина CH.

1020. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано квадрат так, що прямий кут трикутника збігається з кутом квадрата. Знайдіть відношення площі квадрата до площі трикутника.

1021. Точку перетину медіан трикутника (центр мас) сполучили з його вершинами. Порівняйте площу кожного з трьох утворених трикутників з площею даного трикутника.

1022. Діагоналі ромба пропорційні числам 3 і 4. Знайдіть площу ромба, якщо його периметр 80 см.

1023. Діагоналі ромба дорівнюють 1 см і $\sqrt{3}$ см. Через точку їх перетину проведено висоти ромба, основи яких сполучено відрізками. Знайдіть: 1) висоту ромба; 2) кути ромба; 3) кут між висотами; 4) площу утвореного чотирикутника.

1024. Діагоналі паралелограма ділять його на чотири трикутники. Знайдіть відношення площі кожного з них до площі паралелограма.

1025. Усередині паралелограма $ABCD$ довільно позначено точку M. Знайдіть відношення суми площ трикутників AMD і BMC до площі паралелограма для будь-якого положення точки M.

1026. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 30°. Знайдіть периметр трикутника, якщо його площа дорівнює $16\sqrt{3}$.

1027. Висота, проведена до основи рівнобедреного трикутника, дорівнює 10 см, а до бічної сторони 12 см. Знайдіть сторони трикутника та його площу.

1028. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки 30 см і 40 см. Знайдіть площу трикутника.

1029. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см.

1030. Через точку перетину медіан $\triangle ABC$ паралельно AC проведено пряму, яка перетинає сторони AB і BC у точках M і N. Знайдіть площу $\triangle ABC$, якщо площа $\triangle MBN$ дорівнює S.

1031. *Відкрита задача.* Знайдіть площу трикутника, у якого дві сторони дорівнюють 10 см і 12 см, а трикутник є ... .

1032. Доведіть, що сторони трикутника обернено пропорційні до його висот, тобто

$$a:b=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b};\ a:c=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_c};\ b:c=\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}.$$

1033. Як провести дві прямі через вершину квадрата, щоб розбити його на три фігури, площі яких рівні?

1034. Кожна сторона одного трикутника більша за будь-яку сторону другого трикутника. Чи випливає з цього, що площа першого трикутника більша за площу другого трикутника?

1035. Доведіть, що сума відстаней від точки на основі рівнобедреного гострокутного трикутника до бічних сторін не залежить від положення цієї точки.

1036. Доведіть, що сума відстаней від точки, яка лежить всередині рівностороннього трикутника, до його сторін не залежить від положення цієї точки.

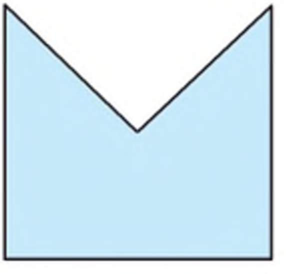
1037. Через точку D, що лежить на стороні BC трикутника ABC, проведено прямі, паралельні двом іншим сторонам, які перетинають сторони AB і AC в точках E і F відповідно. Доведіть, що трикутники CDE і BDF мають рівні площі.

1038. Знайдіть радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник з катетами 5 см і 12 см.

1039. Знайдіть радіус кола, вписаного в рівнобедрений трикутник зі сторонами 17 см, 17 см і 16 см.

1040. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник зі сторонами 13 см, 20 см і 21 см.

1041. Для кмітливих. Два батька і два сина хочуть поділити ділянку землі, план якої зображено на малюнку 312, так, щоб усі ділянки мали рівні площі й однакові форми. Як це зробити?



Мал. 312

Практичне завдання

1042. Накресліть чотирикутник, відмінний від паралелограма, розбийте його на два трикутники, виміряйте необхідні елементи й обчисліть площу чотирикутника. Прикиньте, якою може бути похибка. Від чого вона залежить?

Задачі для повторення

1043. Чи існує трикутник зі сторонами a, $2a$ і $4a$? А з кутами 50°, 60° і 80°?

1044. Один кут трикутника збільшили на 10°, другий зменшили на 15°. Як зміниться від цього третій кут трикутника?

1045. Накресліть три довільні відрізки і побудуйте їх четвертий пропорційний.

1046. Вершини чотирикутника ділять описане коло на дуги, три з яких мають 100°, 110° і 120°. Знайдіть градусну міру четвертої дуги кола.

Геометрія навколо нас

Многокутники у побуті

§ 23 Застосування тригонометричних функцій до обчислення площ

Виведемо формули для обчислення площ трикутника і паралелограма, використовуючи тригонометричні функції.

ТЕОРЕМА 39

Площа трикутника дорівнює півдобутку двох його сторін на синус гострого кута між ними.

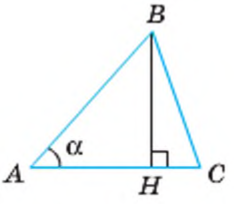
ДОВЕДЕННЯ.

Нехай дано довільний $\triangle ABC$, у якого $\angle A = \alpha$ — гострий (мал. 313). Як вам уже відомо, його площа

$S = \frac{1}{2} AC \cdot BH.$

Із прямокутного трикутника ABH знаходимо $BH = AB \sin \alpha$, тому

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot AB \sin \alpha. \square$$



Мал. 313

ТЕОРЕМА 40

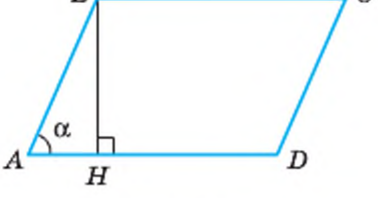
Площа паралелограма дорівнює добутку двох його сусідніх сторін на синус гострого кута між ними.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай у паралелограмі $ABCD$ кут A гострий, а BH — висота (мал. 314).

Із прямокутного трикутника ABH знаходимо: $BH = AB \sin \alpha$. Тому площа паралелограма

$$S = AD \cdot BH = AD \cdot AB \sin \alpha. \square$$



Мал. 314

Примітка.

Оскільки поки що вам відомі тригонометричні функції тільки гострих кутів, то і в двох останніх теоремах ідеться тільки про синуси гострих кутів. У 9 класі ці теореми будуть узагальнені для довільних кутів трикутника чи паралелограма.

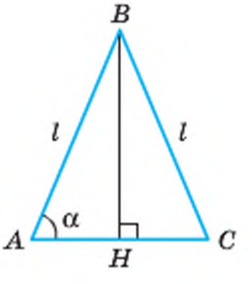
Запитання і завдання для самоконтролю

1. Як знайти площу трикутника, знаючи дві його сторони і гострий кут між ними?
2. За якою формулою можна знайти площу паралелограма?
3. Чому дорівнює площа ромба, сторона якого дорівнює a, а гострий кут α?

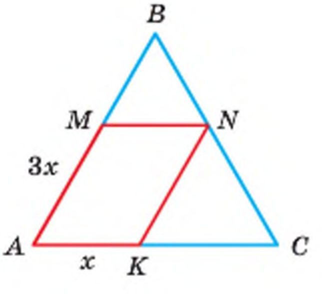
Виконаємо разом

1 Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює l, а кут при основі α. Знайдіть площу трикутника.

- Нехай у трикутнику ABC $AB = BC = l$, $\angle A = \alpha$ (мал. 315). Проведемо висоту BH. З ΔABH знайдемо AH. $AH = AB\cos\alpha$, $AH = l\cos\alpha$. Тоді $AC = 2AH = 2l\cos\alpha$. Оскільки $S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\alpha$, то $A = \frac{1}{2}l \cdot 2 \cdot l \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = l^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$.



Мал. 315



Мал. 316

2 У рівносторонній трикутник ABC зі стороною 8 см вписано паралелограм так, що кут A у них спільний (мал. 316). Знайти площу паралелограма, якщо його сторони пропорційні числам 1 і 3.

- Нехай $AK = x$ см, $AM = 3x$ см. Якщо $MN \parallel AC$, то трикутник MBN подібний трикутнику ABC. Тоді $MB : MN = AB : AC$.

  Звідки $\frac{8-3x}{x} = \frac{8}{8}$, або $\frac{8-3x}{x} = 1$.

  Маємо: $8 - 3x = x$, $4x = 8$, $x = 2$. Отже, $AK = 2$ см, $AM = 6$ см. Оскільки трикутник ABC рівносторонній, то $\angle A = 60°$. Тоді $S = AM \cdot AK \sin 60°$, $S = 6 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ (см²).

Задачі і вправи

Виконайте усно

1047. Знайдіть площу трикутника з кутом 30°, якщо прилеглі до нього сторони дорівнюють 2 м і 3 м.

1048. Знайдіть площу трикутника з кутом 45°, якщо прилеглі до нього сторони дорівнюють 5 см і 10 см.

1049. Знайдіть площу ромба, сторона якого дорівнює a, а гострий кут: а) 30°; б) 45°; в) 60°.

1050. Сторони паралелограма дорівнюють 2 м і 5 м, а кут між ними 30°. Знайдіть площу паралелограма.

1051. У скільки разів площа паралелограма з кутом 30° більша або менша від площі прямокутника з такими самими сторонами?

А

1052. Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 6 дм і 10 дм, а кут між ними 50°.

1053. Знайдіть площу трикутника з кутом 30°, якщо прилеглі до нього сторони дорівнюють a і $3a$.

1054. Знайдіть площу трикутника з кутом 45°, якщо прилеглі до нього сторони дорівнюють a і $a\sqrt{2}$.

1055. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см, а кут при вершині 40°. Знайдіть площу трикутника.

1056. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 8 м, а кут при основі 40°. Знайдіть: а) висоту трикутника; б) його бічну сторону; в) площу трикутника.

1057. Знайдіть площу ромба з кутом 50°, якщо його периметр дорівнює 8 см.

1058. Площа ромба зі стороною 10 м дорівнює 50 м². Знайдіть гострий кут ромба.

1059. Площа ромба дорівнює 0,5 м², а один із кутів 30°. Знайдіть периметр ромба.

1060. У таблиці a, α і S — сторона, гострий кут і площа ромба. Перенесіть таблицю в зошит і заповніть її порожні клітинки.

a, м	4	70	10	1		
α	30°	60°			40°	25°
S, м²			45	0,5	20	25

1061. Знаючи сторони a і b паралелограма і гострий кут α між ними, знайдіть площу паралелограма, якщо: а) $a = 2$ м, $b = 5$ м, $\alpha = 47°$; б) $a = 0{,}2$ км, $b = 1{,}5$ км, $\alpha = 70°$. Відповідь округліть до десятих.

1062. Знайдіть гострий кут паралелограма, якщо його сторони 4 м і 8 м, а площа 16 м².

1063. Сторона, гострий кут і площа паралелограма дорівнюють відповідно 12 м, 30° і 90 м². Знайдіть периметр паралелограма.

1064. Діагональ прямокутника дорівнює 10 см і ділить кут у відношенні 1 : 2. Знайдіть площу прямокутника.

1065. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см, а кут при основі 75°. Знайдіть площу трикутника.

1066. Гострий кут паралелограма дорівнює 60°, а сторони пропорційні числам 2 і 3. Знайдіть периметр паралелограма, якщо його площа дорівнює $27\sqrt{3}$ см².

1067. Сторони прямокутника $ABCD$ дорівнюють 5 см і 8 см. З вершин A і C проведено бісектриси, які перетинають сторони BC і AD у точках M і K відповідно. Знайдіть площу чотирикутника $AMCK$.

Б

1068. Знайдіть площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює c, а гострий кут α.

1069. Знайдіть площу паралелограма, якщо висоти, проведені з вершини тупого кута, дорівнюють h_1 і h_2, а кут між ними α.

1070. У рівносторонній трикутник ABC зі стороною 6 см вписано ромб так, що кут A у них спільний, а всі вершини лежать на сторонах трикутника. Знайдіть площу ромба.

1071. Знайдіть площу правильного п'ятикутника, вписаного в коло радіуса R.

1072. Із точки M, що лежить на відстані a від центра кола O, проведено дві дотичні MA і MB, кут між якими дорівнює α. Визначте площу чотирикутника $AMBO$.

1073. Із точки M до кола радіуса R проведено дві дотичні MA і MB, кут між якими дорівнює α. Знайдіть площу трикутника AMB.

1074. У колі з центром O і радіусом 12 см проведено хорду AB. Знайдіть площу трикутника OAB, якщо з дуги кола хорду видно під кутом: а) 20°; б) 130°.

1075. Гострий кут ромба, описаного навколо кола радіуса r, дорівнює α. Знайдіть периметр і площу ромба.

1076. Більша діагональ паралелограма дорівнює d і утворює з двома його сторонами кути 30° і 40°. Знайдіть периметр і площу паралелограма.

1077. Точка O — центр кола, вписаного в рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$). Знайдіть площі трикутників AOB, BOC і AOC, якщо $AC = a$, $\angle A = \alpha$.

1078. Основи прямокутної трапеції дорівнюють a і b ($a > b$), а гострий кут α. Знайдіть площу трапеції.

1079. Гострий кут рівнобічної трапеції дорівнює α, а радіус вписаного кола r. Знайдіть периметр і площу трапеції.

1080. Доведіть, що площа паралелограма дорівнює півдобутку його діагоналі на синус кута між ними.

1081. Виведіть формулу для обчислення площі рівнобедреного трикутника за його:

а) основою a і протилежним кутом α;

б) бічною стороною b і кутом β при основі.

Геометрія навколо нас

Ромби на шпалерах

Грані кубика Рубіка та його складових — квадрати

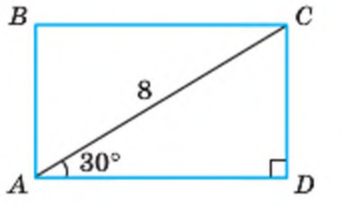
Задачі за готовими малюнками

Знайдіть площі чотирикутників ABCD за готовими малюнками

1

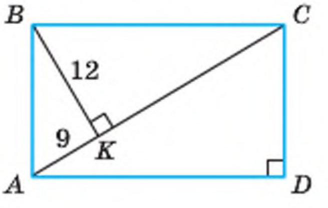
А

$ABCD$ — прямокутник, $AC = 8$, $\angle CAD = 30°$.



Б

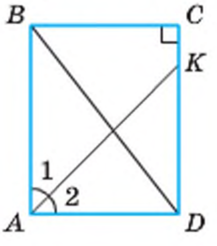
$ABCD$ — прямокутник, $AK = 9$, $BK = 12$.



2

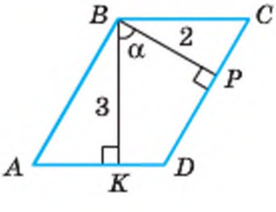
А

$ABCD$ — прямокутник, $\angle 1 = \angle 2$, $KD = 3CK$, $BD = 15$.



Б

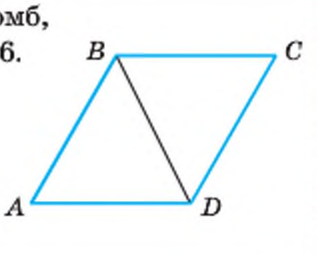
▱$ABCD$, $BP = 2$, $BK = 3$, $\alpha = 60°$.



3

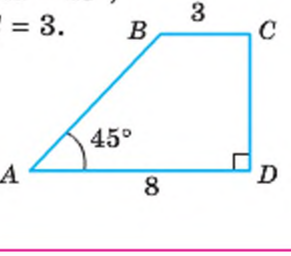
А

$ABCD$ — ромб, $AB = BD = 6$.



Б

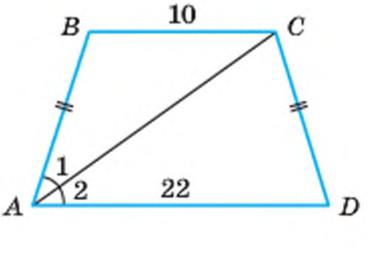
$BC \parallel AD$, $\angle A = 45°$, $AD = 8$, $BC = 3$.



4

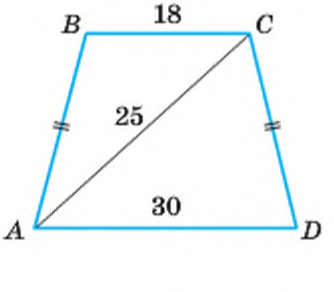
А

$BC \parallel AD$, $\angle 1 = \angle 2$.

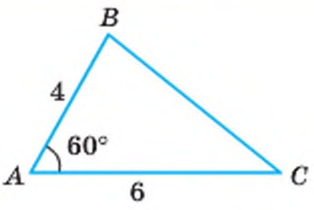
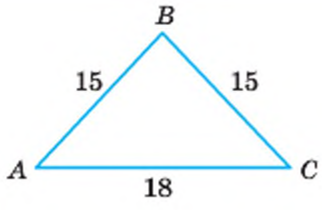
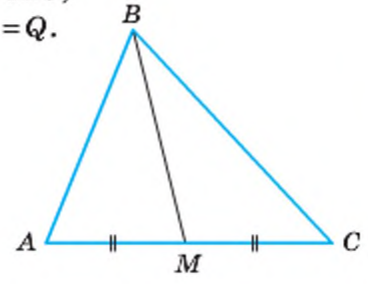
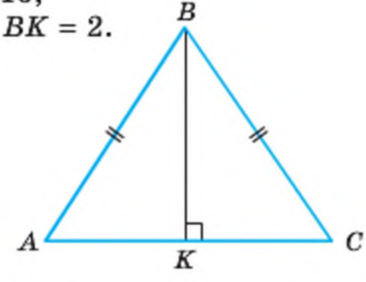
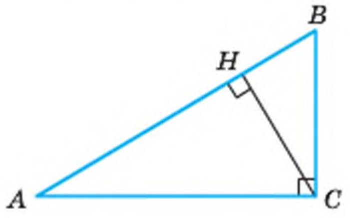
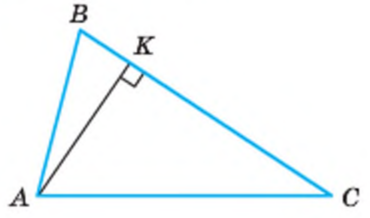
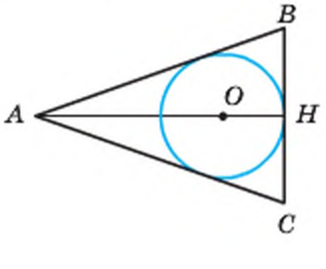
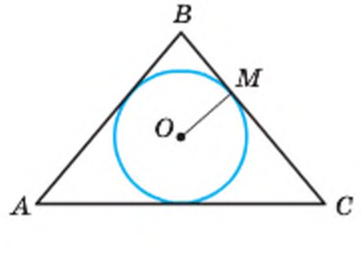


Б

$BC \parallel AD$.



Знайдіть площі трикутників ABC за готовими малюнками

	А	Б
5		
6	$AM = MC$, $S_{\triangle ABM} = Q$. 	$AC = 16$, $AB - BK = 2$. 
7	$AC \perp BC$, $AH - HB = 7$, $HC = 12$. 	$AB : AC = 5 : 8$, $BK = 7$, $KC = 32$. 
8	$AB = AC$, $AO = 18$, $OH = 6$. 	$BM : MC = 2 : 3$, $AB = BC$, $OM = 6$. 

Самостійна робота 5

Варіант 1

1°. Знайдіть площу прямокутника, якщо його діагональ дорівнює 10 см і утворює зі стороною кут 30°.

2°. Висота, проведена до основи рівнобедреного трикутника, дорівнює 6 см. Знайдіть висоту, проведену до бічної сторони, якщо основа дорівнює 8 см, а бічна сторона 12 см.

3•. Знайдіть площу рівнобічної трапеції, якщо її основи дорівнюють 5 см і 17 см, а периметр 42 см.

Варіант 2

1°. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, якщо його бічна сторона дорівнює 8 см, а кут при основі 30°.

2°. Сторони паралелограма дорівнюють 10 см і 12 см, а менша з висот 5 см. Знайдіть більшу висоту паралелограма.

3•. Знайдіть площу прямокутної трапеції, якщо її основи 6 см і 14 см, а бічні сторони пропорційні числам 3 і 5.

Варіант 3

1°. Знайдіть площу паралелограма, сторони якого утворюють кут 150° і дорівнюють 10 см та 16 см.

2°. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а висота, проведена до неї, 8 см. Знайдіть бічну сторону трикутника, якщо висота, проведена до неї, дорівнює 6 см.

3•. Знайдіть площу рівнобічної трапеції з основами 6 см і 24 см, якщо в трапецію можна вписати коло.

Варіант 4

1°. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, якщо кут при вершині дорівнює 120°, а бічна сторона 6 см.

2°. Висоти паралелограма дорівнюють 5 см і 6 см, а більша сторона 12 см. Знайдіть меншу сторону паралелограма.

3•. Знайдіть площу прямокутної трапеції, основи якої 7 см і 16 см, а різниця бічних сторін дорівнює 3 см.

Тестові завдання 5

1	Фігури називаються рівновеликими, якщо в них рівні:	а) кути; б) сторони;	в) периметри; г) площі.
2	Площа рівнобедреного прямокутного трикутника з катетом $2a$ дорівнює:	а) a^2; б) $2a^2$;	в) $4a^2$; г) $8a^2$.
3	Висота паралелограма зі стороною a і площею S дорівнює:	а) $a \cdot S$; б) $a : S$;	в) $S : a$; г) $2S : a$.
4	За якою з формул не визначають площу ромба?	а) $a \cdot h$; б) $\frac{1}{2} a \cdot h$;	в) $\frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$; г) $p \cdot r$.
5	Знайдіть площу трапеції, основи якої 2 см і 8 см, а висота 5 см.	а) 50 см²; б) 80 см²;	в) 25 см²; г) 15 см².
6	Знайдіть радіус кола, вписаного в квадрат, площа якого $4a^2$.	а) a; б) $2a$;	в) $4a$; г) $8a$.
7	Площа рівностороннього трикутника зі стороною a дорівнює:	а) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; б) $3a^2$;	в) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; г) $a^2\sqrt{3}$.
8	Знайдіть площу ромба, діагоналі якого дорівнюють 4 см і 6 см.	а) 24 см²; б) 12 см²;	в) 20 см²; г) 8 см².
9	AM — медіана $\triangle ABC$. Який знак слід поставити замість *: $S_{\triangle ABC} * 2S_{\triangle ABM}$?	а) >; б) <;	в) =; г) не можна встановити.
10	Сторони квадратів відносяться як 2 : 5. Як відносяться їх площі?	а) 2 : 5; б) 2 : 25;	в) 4 : 25; г) 4 : 5.

Типові задачі для контрольної роботи

1°. Знайдіть площу прямокутника, діагональ якого дорівнює 15 см, а одна зі сторін 12 см.

2°. Знайдіть площу квадрата, вписаного в коло радіуса 5 см.

3°. Середня лінія трапеції дорівнює 15 см, а висота 12 см. Знайдіть площу трапеції.

4°. Знайдіть площу ромба, якщо його периметр 40 см, а одна з діагоналей 12 см.

5•. Знайдіть периметр паралелограма, якщо його площа 120 см², а висоти дорівнюють 5 см і 6 см.

6•. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона і основа якого пропорційні числам 17 і 16, а висота, проведена до основи, дорівнює 30 см.

7•. Менша основа і бічна сторона рівнобічної трапеції відповідно дорівнюють 24 см і 12 см. Знайдіть площу трапеції, якщо її гострий кут дорівнює 60°.

8•. Катети прямокутного $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$) дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в $\triangle CMB$, де M — середина AB, якщо $BC < AC$.

9••. Доведіть, що площа рівнобічної трапеції дорівнює подвоєному добутку бічної сторони і радіуса вписаного в трапецію кола.

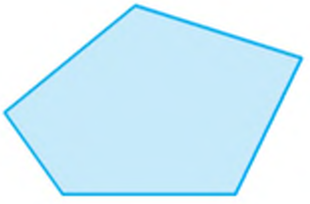
10••. Точка дотику кола, вписаного у рівнобічну трапецію, ділить бічну сторону на відрізки 3 см і 12 см. Знайдіть площу трапеції.

Математика здає свої фортеці лише сильним і сміливим...
А. Г. Конфорович

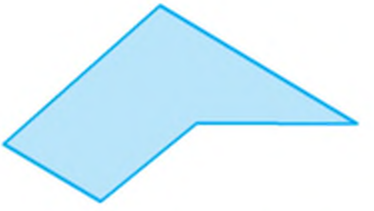
Головне в розділі 4

Многокутник — проста замкнена ламана. Частину площини, обмежену простою замкненою ламаною, також називають многокутником. Кожний n-кутник має n сторін, n вершин і n кутів.

Якщо кожний кут многокутника менший від розгорнутого, його називають опуклим, якщо хоч один кут многокутника більший від розгорнутого, його називають неопуклим многокутником.



Опуклий многокутник



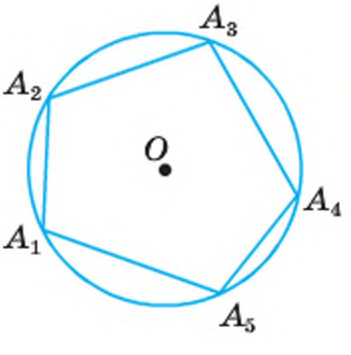
Неопуклий многокутник

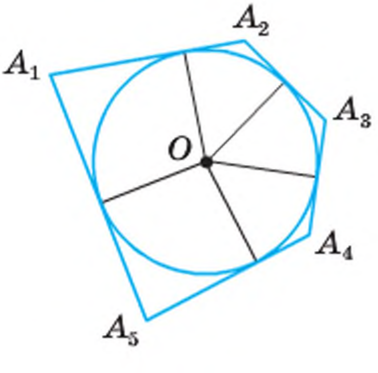
Кожна сторона многокутника менша від суми усіх інших його сторін. Суму довжин усіх сторін многокутника називають його *периметром*.

Сума усіх внутрішніх кутів опуклого n-кутника дорівнює $180^\circ \cdot (n - 2)$.

Сума зовнішніх кутів опуклого многокутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°.

Якщо всі вершини многокутника лежать на колі, такий многокутник називають вписаним у коло, а коло — описаним навколо многокутника. Якщо всі сторони многокутника дотикаються до кола, такий многокутник називають описаним навколо кола, а коло — вписаним у многокутник.





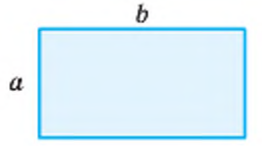
У кожний трикутник можна вписати коло і навколо кожного трикутника можна описати коло.

Коло можна вписати тільки в такий чотирикутник, сума двох протилежних сторін якого дорівнює сумі двох інших його сторін;

Коло можна описати тільки навколо такого чотирикутника, сума двох протилежних кутів якого дорівнює 180°.

Площа прямокутника дорівнює добутку двох його сусідніх сторін: a і b:

$$S = ab.$$



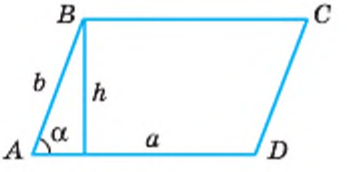
Площа паралелограма дорівнює:

а) добутку його основи на висоту:

$$S = ah;$$

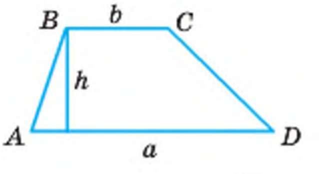
б) добутку його двох сторін на синус кута між ними:

$$S = ab\sin\alpha.$$



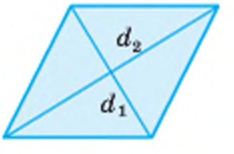
Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту, тобто добутку середньої лінії і висоти:

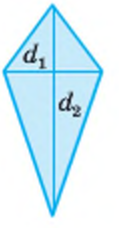
$$S = \frac{a+b}{2}\cdot h.$$



Площа чотирикутника з перпендикулярними діагоналями (зокрема ромба і дельтоїда) дорівнює півдобутку діагоналей:

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2.$$





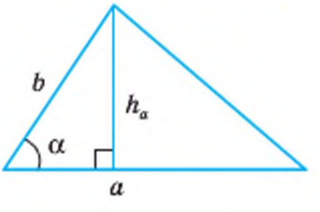
Площа трикутника дорівнює:

а) півдобутку його основи на висоту:

$$S = \frac{1}{2}ah;$$

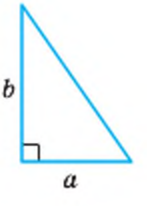
б) півдобутку його сторін на синус кута між ними:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha.$$



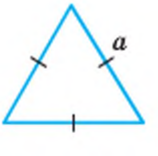
Площа прямокутного трикутника дорівнює півдобутку його катетів:

$$S = \frac{1}{2}ab.$$



Площа рівностороннього трикутника зі стороною a дорівнює:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$



Площа многокутника, описаного навколо кола, дорівнює добутку півпериметра многокутника на радіус кола:

$$S = pr.$$

Додатки

НАВЧАЛЬНИЙ ПРОЕКТ 1
Розрізання і складання чотирикутників

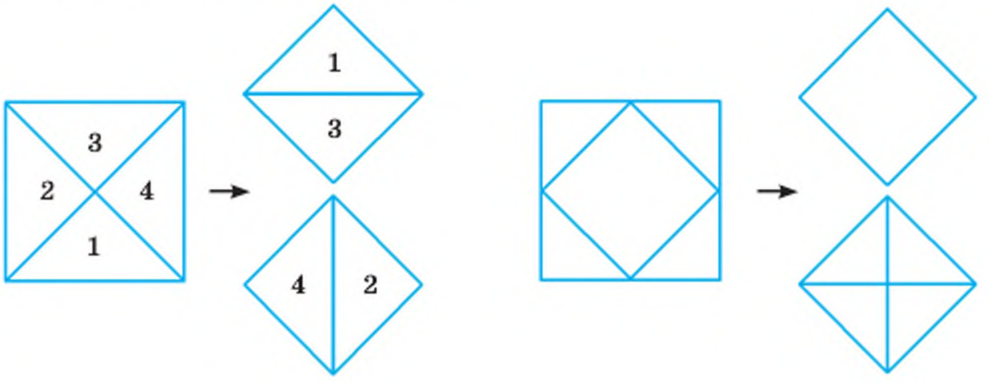
*«Предмет математики настільки серйозний,
що корисно не втрачати можливостей,
робити його якомога цікавішим»*
Блез Паскаль

Клас поділяється на три групи: «історики», «математики», «практики». Кожен учень може взяти участь у роботі однієї або двох проектних груп.

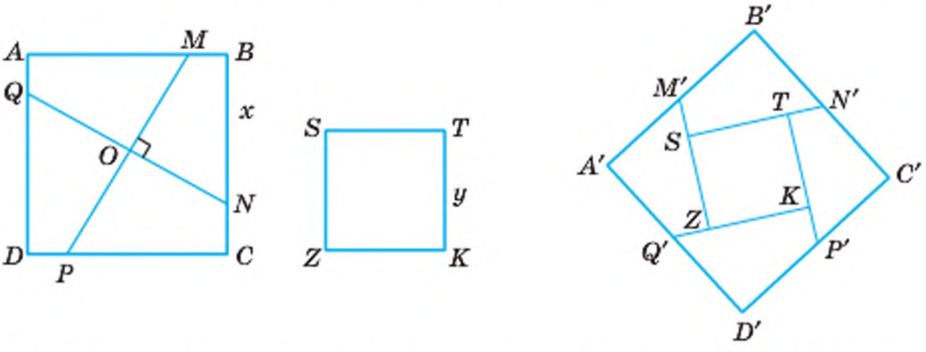
1 **«Історики»** вивчають виникнення та використання різних способів розрізання і складання чотирикутників (танграм, стомахіон, витинанки, орігамі тощо). На захист готують коротке повідомлення і презентацію з конкретними прикладами. Наприклад.

- *Витинанки* — це сюжетні та орнаментальні прикраси житла, витяті ножицями або вирізані ножем з білого й кольорового паперу, який складали вдвоє, вчетверо, увосьмеро...
- *Витинанки у вигляді орнаментальних смуг* утворюють з довгої смужки паперу, яку складають «гармошкою» два, чотири, вісім і більше разів. Потім вирізають орнамент. На лініях згину утворюються симетричні повторення зображень.
- *Витинанки у вигляді ажурних, сітчастих орнаментів* вирізають з паперу, що має форму прямокутника, квадрата, правильного трикутника або шестикутника. Аркуш паперу прямокутної форми складають багато разів навпіл по лініях, паралельних сторонам прямокутника. Аркуш паперу у формі квадрата перегинають навпіл і за діагоналями.

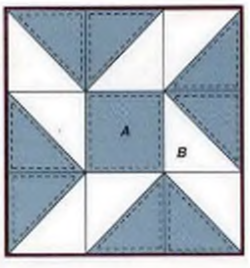
2 **«Математики»** добирають і розв'язують геометричні задачі, які стосуються розрізання і складання чотирикутників. Досліджують наявність різних способів виконання завдання. На захист готують портфоліо з умовами задач, способами їх розв'язання та реальними моделями. Це можуть бути задачі різної складності — від найпростіших (квадрат розрізати на два рівні квадрати)

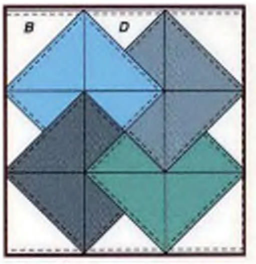


до досить складних (із двох квадратів різних розмірів скласти третій).



3 **«Практики»** вивчають різні предмети побуту, що утворюються розрізанням і/чи складанням чотирикутників (пошиття серветок із клаптиків тканини чи в'язаних квадратів, створення модульного орігамі, складання паркетів, виготовлення прикраси з аплікації тощо). Потім обирають один із предметів і виготовляють своїми руками. На захист готують виставку виробів. Подають схему та особливості виготовлення виробу.





НАВЧАЛЬНИЙ ПРОЕКТ 2
Подібність і самоподібність

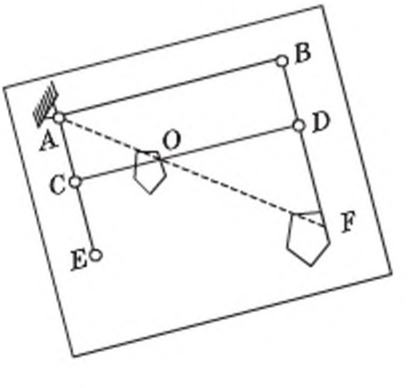
Учні формуються у групи, кожна з яких працює над однією із запропонованих нижче тем.

1. **Подібність трикутників у роботах математиків різних часів**. Наприклад.

   • Вчення про подібність фігур створювалося у Стародавній Греції в V–IV ст. до н. е. в працях Гіппократа Хіоського, Архіта Тарентського, Евдокса Кнідського. Евклід подає твердження про подібність фігур у шостій книзі «Основ».

   • Китайський математик Лю Хуей (200–280 рр.) написав твір «Математичний трактат про морський острів». У ньому на конкретних прикладах за допомогою методу подібних трикутників розкрив прийоми визначення відстані до недоступних об'єктів і їх розмірів: висота острова, сосни, вежі; ширина гір, стіни, річки; глибина ущелини, ями.

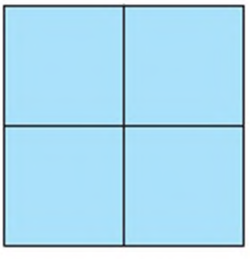
2. **Пантограф — прилад для збільшення чи зменшення зображень. Поясніть принцип дії.** Цей прилад свого часу активно використовувався у маркшейдерських роботах (освоєння родовища корисних копалин), геодезії та інших видах діяльності. З розвитком комп'ютерної техніки та машинної графіки роль пантографа суттєво зменшилась.



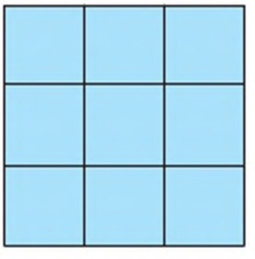
3. **Використання подібності у:**

   • різних галузях знань (фізика — зображення в лінзах, біологія — багатократне збільшення складових крові тощо);
   • архітектурі та будівництві (плани квартир, будинків тощо);
   • виробництві (моделювання одягу і взуття, пакувальної продукції);
   • мистецтві (схеми для вишивки хрестиком).

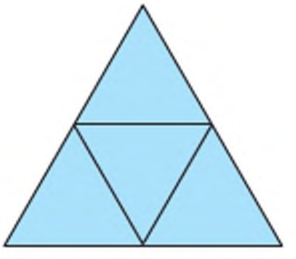
Простіші самоподібні фігури та їх створення. Самоподібною геометричною фігурою називають фігуру, яку можна розбити на скінченну кількість її частин (що не мають спільних внутрішніх точок), кожна з яких подібна до всієї фігури з певним коефіцієнтом подібності.



$k = 1/2$



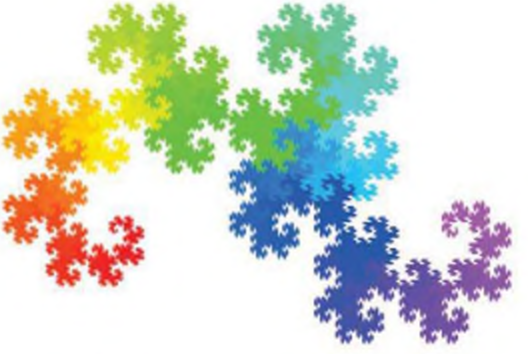
$k = 1/3$



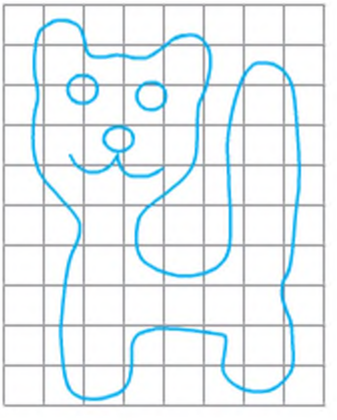
$k = 1/2$

Фрактали як приклад самоподібних фігур. Розглянемо листок папороті. Кожен менший його листок, розміщений на стеблі, повторює будову великого листка. А кожен із листочків, розміщених на цих менших листках, подібний і до великого листка, і до меншого, на якому він розміщений.

Яскравим прикладом фрактала і самоподібної фігури є дракон Хартера.



6 **Використання подібності у побуті.** Наприклад, ви хочете зробити своїми руками подарунок мамі. Це може бути м'яка іграшка «Киця». Викрійка розрахована на маленьку іграшку, а ви хочете зробити більшу. Які ваші дії? Як збільшити викрійку за допомогою клітинок?



Результати роботи над проектом кожна група оформлює у вигляді групового портфоліо з комп'ютерною презентацією.

Подібними є прихватки для посуду: маленькі — для дочки і сина, великі — для мами і тата.

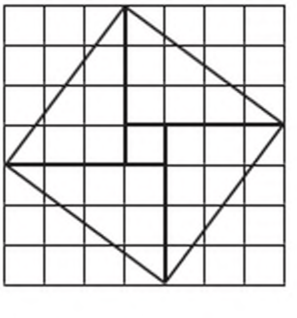
НАВЧАЛЬНИЙ ПРОЕКТ 3
Прямокутні трикутники в історичних задачах

Цей проект доцільно виконувати індивідуально за таким планом.

1. Що таке історичні задачі.
2. Визначні математичні задачі.
3. Приклади трьох історичних задач різних народів і різних часів, що стосуються прямокутного трикутника.
4. Розв'язування обраних задач.
5. Відомості про автора задачі (якщо такий є) або коротка характеристика епохи, у яку було створено задачі.

Задачі, збережені історією, що передаються від покоління до покоління, називають історичними задачами. Це задачі з давніх історичних пам'яток, задачі, створені відомими математиками або іншими історичними постатями, задачі з давніх підручників і трактатів, журналів та інших друкованих джерел, а також з математичних фольклорів різних народів.

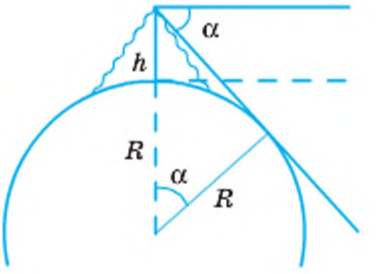
Багато задач, які дійшли до нас із сивої давнини, цікаві не стільки в математичному, скільки в історичному розумінні: вони дають можливість сучасникам оцінити рівень розвитку математики в різні часи. Такі задачі були поставлені потребами практики і розв'язувались ще 2000 років до нашої ери, про що свідчать тексти єгипетських папірусів, вавилонських глиняних дощечок (визначення діагоналі квадрата, або гіпотенузи прямокутного трикутника), китайських рукописів (4 прямокутні трикутники зі сторонами 3, 4, і 5 і квадрат зі стороною 1 утворюють квадрат зі стороною 5).



До визначних математичних задач належать задачі про квадратуру круга, подвоєння куба, трисекцію кута. Загально відомими є задачі про серпики Гіппократа, кенігсбергські мости, чотири фарби тощо.

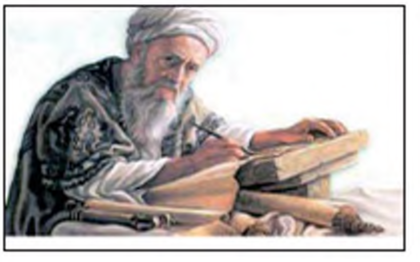
Розглянемо кілька історичних задач.

1 **Задача Аль-Біруні.** Знаючи висоту гори, яка знаходиться на відкритій місцевості, визначити радіус Землі.



Розв'язання. Нехай висота гори h, а радіус Землі R. Вимірявши α (кут нахилу горизонту з вершини гори), дістанемо $R = (R + h)\cos\alpha$. Можемо знайти R:
$R = R\cos\alpha + h\cos\alpha$ або $R(1 - \cos\alpha) = h\cos\alpha$.

Звідси $R = \dfrac{h\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$.



Абу Рейхан аль-Біруні (973–1048) — хорезмський вчений-енциклопедист. Зробив значний внесок у математику, астрономію, фізику, мінералогію, історію та етнографію. Мав суттєві здобутки в арифметиці, алгебрі, геометрії та тригонометрії.

У III книжці «Канон Масуда» Біруні виклав свої міркування з тригонометрії: дав означення основних шести тригонометричних функцій, розглянув їх властивості, вивів деякі тригонометричні формули, склав таблиці залежності тригонометричних величин. Розвивав і широко застосовував тригонометрію як математичну основу практичної астрономії. Розробив новий метод визначення радіусу Землі шляхом спостереження положення горизонту з вершини гори.

2 **Задача Г. Шрейбера.** За даними гіпотенузою і сумою катетів знайти катети.

Розв'язання. Якщо c — гіпотенуза, а $a + b = s$ — сума катетів, то:
$c^2 = a^2 + b^2$ — теорема Піфагора;
$s^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$, звідси $s^2 - c^2 = 2ab$.
Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a+b=s, \\ a\cdot b=0,5\left(s^2-c^2\right). \end{cases}$$

Знаючи суму і добуток двох чисел, можемо знайти a і b.

Г. Шрейбер (≈1492–1525) — німецький математик і теоретик музики, викладач математики віденського університету. Запропонована задача міститься у його трактаті «Вчення про цілі числа і дроби».

3 **Задача Вієта**. Якщо a і b — катети прямокутного трикутника, то $\sqrt{a^2+b^2}$ — гіпотенуза, а якщо a — катет, а c — гіпотенуза прямокутного трикутника, то $\sqrt{c^2-b^2}$ — інший катет. Користуючись цим, побудувати: 1) $a\sqrt{5}$; 2) $a\sqrt{11}$.

Розв'язання. Перетворимо кожен із виразів

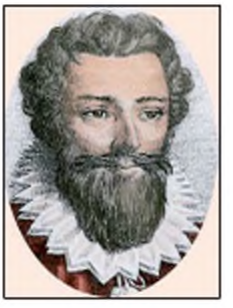
1) $a\sqrt{5} = a\sqrt{5a^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2}$;

2) $a\sqrt{11} = a\sqrt{11a^2} = \sqrt{36a^2 - 25a^2} = \sqrt{(6a)^2 - (5a)^2}$.

Маємо:

1) $a\sqrt{5}$ — гіпотенуза прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють a і $2a$.

2) $a\sqrt{11}$ — катет прямокутного трикутника зі сторонами $6a$ (гіпотенуза) і $5a$ (катет).



Франсуа́ Віє́т (1540–1601) — видатний французький математик. За освітою юрист. Був адвокатом і радником французьких королів. Математикою займався на дозвіллі. Створив алгебраїчну символіку, що сприяло розвитку алгебри як науки. Застосував геометрію і тригонометрію до розв'язування рівнянь і у такий спосіб вивів багато співвідношень між тригонометричними функціями кутів.

НАВЧАЛЬНИЙ ПРОЕКТ 4

Складання прикладних задач про площі фігур

Пропонуємо два варіанти для організації проекту.

I. Прикладні задачі виникають у побуті, на виробництві, у промисловості, у сільському господарстві тощо. Тобто вони тісно пов'язані з життєдіяльністю людини. Цей навчальний проект може бути виконаний учнями у тісній співпраці з родиною. Тоді можна зосередитися на таких питаннях:

1. Цікаве про площі фігур.
2. Задачі про визначення площ фігур у професійній діяльності моїх батьків.
3. Задачі про визначення площ фігур у побуті моєї родини.
4. Як я використовую набуті знання про площі фігур на практиці.

Цікаві відомості про площі фігур можуть стосуватися різних одиниць вимірювання: комп'ютерні таблиці конвертації одиниць площі, доведення формул для обчислення площ за допомогою орігамі тощо. Наприклад, старі слов'янські одиниці площ із сучасними співвідносяться так:

- 1 квадратна (кв.) верста = 250 000 кв. сажнів = 1,1381 км^2;
- 1 десятина = 2400 кв. сажнів = 1,0925 гектара = 10 925 м^2;

- 1 копна = 0,1 десятини = 1 092,5 м²;
- 1 кв. сажень = 9 кв. аршинів = 4,5522 м²;
- 1 кв. аршин = 256 кв. вершків = 0,5058 м²;
- 1 кв. вершок = 19,758 см²;
- 1 кв. фут = 9,29 кв. дюйма = 0,0929 м²;
- 1 кв. дюйм = 6,452 см².

Останні два завдання можуть стосуватися, наприклад, визначення площі тканини, необхідної для перетяжки м'яких меблів, чи розмірів плівки для оновлення каркасних меблів тощо.

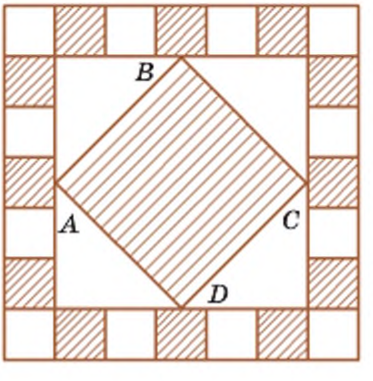
II. Навчально-пізнавальну діяльність під час роботи над проектом можна організувати і за таким планом.

1. Задачі, що стосуються обчислення площ у давнину.
2. Цікаві правила вимірювання площ в народній математиці.
3. Давні та сучасні одиниці вимірювання площ у народів світу.
4. Задачі про вимірювання площ у сільському господарстві.
5. Вимірювання площ в легкій промисловості.
6. Задачі економічного змісту, пов'язані з вимірюванням площ.
7. Вимірювання площ у побуті.
8. Задачі, що стосуються визначення площ на будівництві.
9. Задачі, що стосуються визначення площ у транспортній промисловості.

Розглянемо кілька прикладів.

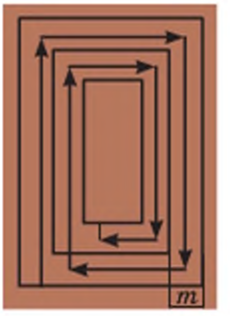
1 Задачі, що стосуються обчислення площ у давнину.

- **Задача Маймоніда (1138–1204).** На ділянці площею 64 кв. долоні (8×8) зорано 13 грядок (на малюнку заштриховані): по 3 грядки площею 1 кв. долоня в кожній зовнішній смузі, а 13 — у вигляді квадрата, утвореного сполученням середин квадрата $ABCD$. Визначити, яку частину ділянки зорано.



4 **Задачі про вимірювання площ у сільському господарстві.**

- **Задача А. Конфоровича.** Комбайн з шириною захвату m збирає врожай з прямокутного поля площею S, ширина якого кратна подвоєній ширині захвату ($2mn$, де n — натуральне число). Яку відстань пройде комбайн, зібравши врожай на всьому полі?

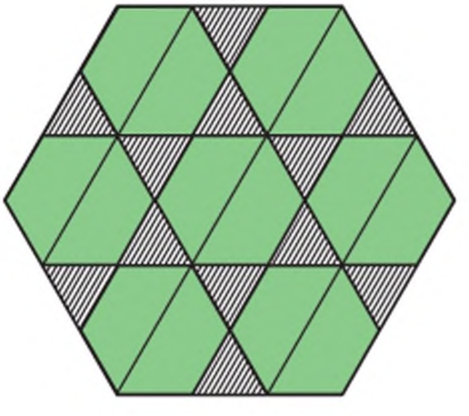


Андрій Григорович Конфорович (1961–1997) — український вчений, фахівець історії математики та методики навчання математики, популяризатор математичних знань. У його доробку понад 200 друкованих праць, присвячених математичній підготовці учнів, історії математики, математичним іграм і головоломкам, застосуванням математики тощо.

7 **Вимірювання площ у побуті.**

- Тротуарна плитка має розміри 200×100 мм. Скільки червоної та сірої плитки знадобиться для замощення доріжки, зображеної на малюнку, довжиною 10 м? Розрахуйте кількість кожного виду плитки, якщо доріжку замощуватимуть так, як показано на двох інших малюнках.

- Клумба має форму шестикутника, кожна сторона якого дорівнює 15 м. Цю клумбу поділили на 14 рівних трапецій і 12 рівних трикутників. Обчисліть площу клумби, засіяної травою (зелений колір). Яку частину клумби засіяно травою?



Запитання для повторення

1. Що таке чотирикутник?
2. Що таке діагональ чотирикутника?
3. Сформулюйте означення паралелограма.
4. Які властивості має паралелограм?
5. Сформулюйте і доведіть ознаки паралелограма.
6. Що таке прямокутник?
7. Які властивості має прямокутник?
8. Що таке ромб?
9. Які властивості має ромб?
10. Що таке квадрат?
11. Які властивості має квадрат?
12. Сформулюйте теорему Фалеса.
13. Сформулюйте теорему про середню лінію трикутника.
14. Що таке трапеція?
15. Яку трапецію називають рівнобічною?
16. Що таке прямокутна трапеція?
17. Сформулюйте теорему про середню лінію трапеції.
18. Що розуміють під відношенням відрізків?
19. Які відрізки називають пропорційними відрізками a, b, c?
20. Сформулюйте узагальнену теорему Фалеса.
21. Які фігури називають подібними?
22. Які два трикутники називають подібними?
23. Сформулюйте основну теорему про подібність трикутників.
24. Які властивості має відношення подібності фігур?
25. Сформулюйте ознаки подібності трикутників.
26. Сформулюйте теорему про властивість бісектриси трикутника.
27. Сформулюйте теорему про властивість медіан трикутника.
28. Сформулюйте теорему про властивість хорд, які перетинаються.
29. Сформулюйте ознаки подібності прямокутних трикутників.
30. Що таке середнє пропорційне двох відрізків?
31. Яку властивість має найменша висота прямокутного трикутника?
32. Сформулюйте теорему Піфагора.

33. Чи правильна теорема, обернена до теореми Піфагора?
34. Як, знаючи дві сторони прямокутного трикутника, знайти третю сторону?
35. Які прямі називають перпендикулярними?
36. Що таке перпендикуляр?
37. Що таке похила?
38. Що таке проекція похилої?
39. Як залежить довжина похилої від довжини її проекції?
40. Що таке ламана?
41. Що таке проста ламана?
42. Що таке замкнена ламана?
43. Що таке многокутник?
44. Який многокутник називають опуклим?
45. Що таке периметр многокутника?
46. Сформулюйте теорему про суму кутів опуклого многокутника.
47. Який многокутник називають вписаним у коло, описаним навколо кола?
48. Доведіть, що навколо кожного трикутника можна описати коло.
49. Доведіть, що в кожний трикутник можна вписати коло.
50. Що таке площа многокутника?
51. За якою формулою знаходять площу прямокутника?
52. За якою формулою знаходять площу паралелограма?
53. За якою формулою знаходять площу трикутника?
54. За якою формулою знаходять площу трапеції?
55. Як знайти площу ромба за його діагоналями?
56. Як знайти площу прямокутного трикутника?
57. Що таке синус гострого кута?
58. Що таке косинус гострого кута?
59. Що таке тангенс гострого кута?
60. Що означає розв'язати трикутник?
61. Як розв'язують прямокутний трикутник за відомими:
а) гіпотенузою і гострим кутом;
б) катетом і гострим кутом;
в) двома катетами;
г) гіпотенузою і катетом?
62. Як знайти площу трикутника за двома сторонами і гострим кутом між ними?
63. Як знайти площу паралелограма за двома сторонами і гострим кутом між ними?

Задачі підвищеної складності

1082. Доведіть, що будь-яку трикутну пластинку можна розрізати на три частини, які мають форму трапеції.

1083. Як розрізати квадратну пластинку на 8 частин, кожна з яких мала б форму непрямокутної трапеції?

1084. Точки K, L, E і F — середини сторін AB, BC, CD і DA чотирикутника. Доведіть, що коли $AC \perp BD$, то $KE = FL$.

1085. Доведіть, що сума діагоналей опуклого чотирикутника менша за його периметр, але більша за півпериметр.

1086. Знайдіть периметр чотирикутника, утвореного перетином бісектрис кутів прямокутника, сторони якого дорівнюють $2a$ і $3a$.

1087. На діагоналі AC ромба $ABCD$ взято довільну точку P. Доведіть, що $AP \cdot PC = AB^2 - PB^2$.

1088. Рівносторонній трикутник ABK розміщений зовні квадрата $ABCD$. Знайдіть кут CKD. А якщо $ABCD$ — довільний ромб?

1089. $ABCD$ і ABK — квадрат і рівносторонній трикутник. Прямі KC і BD перетинаються в точці P. Доведіть, що $KP = PD$. Розгляньте два випадки.

1090. Знайдіть кут між діагоналями паралелограма $ABCD$, якщо бісектриси кутів BAC і BDC перетинаються під кутом $45°$.

1091. Точки A і B лежать усередині даного кута. Побудуйте паралелограм $ABCD$ з вершинами C і D на сторонах цього кута.

1092. Побудуйте квадрат за сумою діагоналі і сторони.

1093. Побудуйте квадрат за різницею діагоналі і сторони.

1094. Як за допомогою самого лише циркуля в прямокутний трикутник з катетами 3 і 4 вписати коло?

1095. Доведіть, що відрізок, який сполучає будь-які точки основ трапеції, ділиться її середньою лінією на дві рівні частини.

1096. ***Задача Регіомонтана.*** Доведіть, що висоти трикутника або їх продовження перетинаються в одній точці.

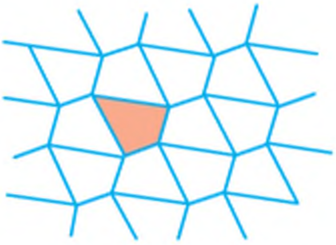
1097. Вершини трикутника віддалені від прямої, яка не перетинає його, на 6 см, 7 см і 11 см. Як віддалена від цієї прямої точка перетину медіан трикутника?

1098. Дано пряму a і точки A і B по різні боки від неї. Знайдіть на a точку, рівновіддалену від A і B.

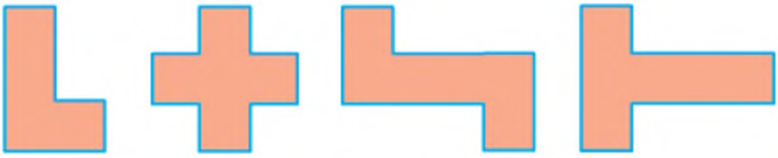
1099. Дано пряму a і точки A та B з одного боку від неї. Знайдіть на a таку точку M, щоб сума $AM + MB$ була найменшою.

1100. Доведіть, що будь-якими рівними чотирикутниками, як паркетинами, можна покрити площину (мал. 317).

1101. Фігуру F називають *паркетною,* якщо фігурами, рівними F, можна покрити площину. Доведіть, що зображені на малюнку 318 фігури паркетні.



Мал. 317



Мал. 318

1102. Якщо дві сторони п’ятикутника паралельні, то такий п’ятикутник — фігура паркетна. Доведіть.

1103. $ABCD$ — паралелограм. Зовні нього побудовано квадрати $ABFE$ і $BCKM$. Доведіть, що відрізки DK і ED рівні і перпендикулярні.

1104. На сторонах BC і CD паралелограма $ABCD$ зовні нього побудовано рівносторонні трикутники BCK і CDP. Доведіть, що $AK = AP = KP$.

1105. На сторонах трикутника ABC зовні нього побудовано квадрати $ABKP$ і $CBFE$. Доведіть, що трикутники ABC і BFP рівновеликі.

1106. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і медіаною, проведеною до бічної сторони.

1107. Побудуйте трикутник за двома сторонами і півсумою кутів при третій стороні.

1108. Побудуйте чотирикутник за чотирма сторонами і кутом між двома послідовно даними сторонами.

1109. Доведіть, що дві рівнобічні трапеції рівні, якщо чотири сторони однієї з них дорівнюють відповідним сторонам другої.

1110. Чи існує чотирикутник, кожна сторона якого перпендикулярна до протилежної сторони?

1111. Через центр квадрата проведено дві взаємно перпендикулярні прямі. Доведіть, що відрізки цих прямих, які містяться всередині квадрата, рівні.

1112. Через точку перетину медіан рівностороннього трикутника проведено дві прямі, кут між якими 60°. Доведіть, що відрізки цих прямих, які містяться всередині трикутника, рівні.

1113. Усередині квадрата зі стороною 6 дм позначено 50 точок. Доведіть, що серед них є такі точки, відстань між якими менша за 1,5 дм.

1114. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle A = \angle B = 100°$, $\angle ABD = 50°$, $\angle CAB = 60°$. Знайдіть кут ACD.

1115. Знайдіть відношення катетів прямокутного трикутника, якщо один з його кутів дорівнює $22,5°$.

1116. Доведіть, що сума катетів прямокутного трикутника менша від 1,5 гіпотенузи.

1117. Чи існує прямокутний трикутник, куб гіпотенузи якого дорівнює сумі кубів катетів?

1118. ***Задача Діофанта.*** Знайдіть сторони прямокутного трикутника, якщо вони дорівнюють x^3, $x^3 - x$ і $x^3 + x$, де x — якесь число.

1119. ***Задача Архімеда.*** Якщо хорди AB і CD кола перетинаються в точці P під прямим кутом, то сума квадратів відрізків AP, BP, CP і DP дорівнює квадрату діаметра кола. Доведіть.

1120. ***Задача ал-Каші.*** Спис стояв у воді вертикально і піднімався над водою на 3 лікті. Вітер відхилив його так, що вершина списа зрівнялась з поверхнею води на відстані 5 ліктів від початкового положення списа. Знайдіть довжину списа.

1121. ***Задача Евкліда про золотий поділ.*** Даний відрізок AB точкою P поділіть так, щоб виконувалась умова $AP : PB = PB : AB$.

1122. ***Задача Евкліда.*** В дане коло впишіть трикутник, подібний даному трикутнику.

1123. ***Стародавня китайська задача.*** Є горизонтальний катет у 5 бу і вертикальний катет у 12 бу. Знайдіть сторону квадрата, вписаного в цей трикутник.

1124. ***Задача ал-Хорезмі.*** Знайдіть сторону квадрата, вписаного в рівнобедрений трикутник з бічною стороною 10 і основою 12.

1125. Впишіть у даний гострокутний трикутник інший трикутник так, щоб його сторони були перпендикулярні до сторін даного трикутника.

1126. Впишіть у дане коло трапецію з даними основами.

1127. ***Задача Ейлера.*** Доведіть, що в кожному чотирикутнику сума квадратів сторін дорівнює сумі квадратів його діагоналей і чотирьох квадратів відрізка, який сполучає середини діагоналей.

1128. Знайдіть відстань від початку координат до прямої, рівняння якої $3x + 4y = 24$.

1129. Висоти AA_1 і BB_1 трикутника ABC перетинаються в точці H. Доведіть, що $A_1H \cdot A_1A = BA_1 \cdot CA_1$ і $B_1H \cdot B_1B = CB_1 \cdot AB_1$.

1130. На сторонах AB і CD квадрата $ABCD$ зовні нього побудовано квадрати $ABKP$ і $CDEF$. Доведіть, що $\angle KEP + \angle KDP = \angle KAP$.

1131. Основи трапеції дорівнюють 3 і 5, а бічні сторони 2 і $2\sqrt{2}$. Знайдіть кути трапеції.

1132. На діаметрі AB кола, паралельного його хорді CD, взято довільну точку M. Доведіть, що $MC^2 + MD^2 = MA^2 + MB^2$.

1133. Доведіть, що в прямокутному трикутнику з гострим кутом $15°$ добуток катетів дорівнює квадрату половини гіпотенузи.

1134. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b. Знайдіть довжину бісектриси, проведеної до гіпотенузи.

Задачі для повторення

До розділу 1

1135. Периметр паралелограма $MNPK$ дорівнює 48 см, а периметр трикутника MNP дорівнює 36 см. Знайдіть діагоналі паралелограма, якщо $MP : NK = 3 : 2$.

1136. Знайдіть периметр паралелограма $ABCD$, якщо $AB = a$ і бісектриса кута A перетинає сторону BC в її середині.

1137. Сторони прямокутника пропорційні числам 2 і 5, а точка перетину діагоналей віддалена від однієї зі сторін на 9 см менше, ніж від другої. Знайдіть периметр прямокутника.

1138. а) На діагоналі AC прямокутника $ABCD$ відкладено рівні відрізки AM і CN. Доведіть, що $MBND$ — паралелограм.

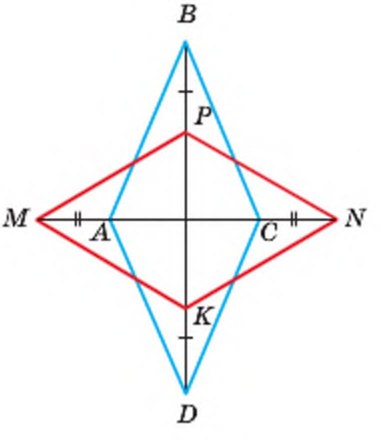
б) Розв'яжіть попередню задачу, якщо точки M і N лежать на продовженнях AC.

1139. На продовженнях діагоналей AC і BD прямокутника $ABCD$ відкладено рівні відрізки AM, BN, CP, DK. Доведіть, що $MNPK$ — прямокутник.

1140. Знайдіть кути ромба, якщо його сторона утворює з діагоналями кути, один з яких на 20° більший за другий.

1141. Діагоналі ромба утворюють зі стороною кути, пропорційні числам 1 і 5. Знайдіть периметр ромба, якщо відстань між його паралельними сторонами дорівнює 8 см.

1142. Дано ромб $ABCD$ (мал. 319). $AM = CN$, $BP = DK$. Доведіть, що $MPNK$ — ромб.



Мал. 319

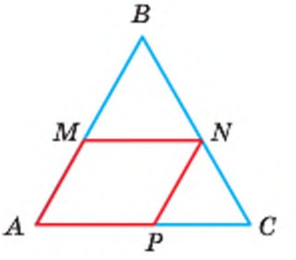
1143. На сторонах AB і CD квадрата $ABCD$ взято точки T і F так, що $AT = CF$. Доведіть, що $TBFD$ — паралелограм.

1144. На продовженнях діагоналі AC квадрата $ABCD$ взято точки M і N так, що $AM = CN$. Доведіть, що $MBND$ — ромб, і знайдіть його периметр, якщо $AC = 16$ см і $\angle ABM : \angle ABD = 1:3$.

1145. У рівнобедрений прямокутний трикутник з катетом 6 см вписано квадрат так, що прямий кут у них спільний. Знайдіть периметр квадрата.

1146. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано прямокутник так, що дві його вершини лежать на гіпотенузі, а дві — на катетах. Знайдіть довжину гіпотенузи, якщо периметр прямокутника 18 см, а одна зі сторін на 3 см більша за другу.

1147. У рівносторонній $\triangle ABC$ вписано ромб $AMNP$ (мал. 320). Знайдіть периметр ромба, якщо периметр чотирикутника $AMNC$ дорівнює 60 см.



Мал. 320

1148. Через вершину A $\triangle ABC$ проведено пряму AK $(K \in BC)$, яка перетинає медіану BM у точці P. Доведіть, що:
а) $BK : KC = 1 : 2$, якщо $BP = PM$; б) $BK = KC$, якщо $BP : PM = 2 : 1$.

1149. Сума двох кутів трапеції дорівнює 140°, а два інші кути пропорційні числам 4 і 7. Знайдіть кути трапеції.

1150. У рівнобічній трапеції з кутом 60° висота, проведена з вершини тупого кута, ділить більшу основу на відрізки 4 см і 10 см. Знайдіть периметр трапеції.

1151. Діагональ трапеції перпендикулярна до бічної сторони і утворює з більшою основою, яка дорівнює 18 см, кут 45°. Знайдіть висоту трапеції.

1152. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою гострого кута і перпендикулярна до бічної сторони, яка дорівнює 10 см. Знайдіть периметр трапеції, якщо її кути відносяться як $1 : 2$.

1153. Знайдіть основи трапеції, якщо їх різниця дорівнює 8 см, а середня лінія 15 см.

1154. Середня лінія трапеції дорівнює 18 см і ділиться діагоналлю на відрізки, один з яких на 5 см більший за другий. Знайдіть основи трапеції.

1155. Основи трапеції пропорційні числам 2 і 5, а відрізок середньої лінії, який лежить між діагоналями, дорівнює 6 см. Знайдіть основи трапеції.

1156. Знайдіть основи трапеції, якщо її середня лінія дорівнює l і ділиться навпіл прямою, що проходить через вершину трапеції паралельно бічній стороні.

1157. Точки A і B лежать по один бік від прямої на відстані 7 см і 15 см від неї. Точки M, N, K ділять відрізок AB на 4 рівні частини. Знайдіть відстань від точок M, N, K до прямої.

1158. Точки A і B лежать по один бік від прямої на відстані 2 см і 10 см від неї. Знайдіть відстань від точки M до прямої, якщо M лежить між A і B і $AM : MB = 1 : 3$.

1159. Бічні сторони трапеції лежать на перпендикулярних прямих. Доведіть, що відрізок, який з'єднує середини основ трапеції, дорівнює їх піврізниці.

1160. Кутова міра дуги AB дорівнює 72°, а дуги AC — 39°. Знайдіть $\angle BOC$ і $\angle BAC$, де O — центр кола.

До розділу 2

1161. Основи трапеції дорівнюють 8 см і 12 см, а бічні сторони 6 см і 15 см. На скільки треба продовжити бічні сторони, щоб вони перетнулися?

1162. Сторони трикутника пропорційні числам 2, 7 і 8. Знайдіть сторони подібного трикутника, периметр якого 34 см.

1163. Сторони трикутника дорівнюють 4 см, 12 см і 15 см. Знайдіть периметр подібного трикутника, менша сторона якого 12 см.

1164. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 18 см. У якому відношенні діагоналі діляться точкою перетину?

1165. Вершина гострого кута A паралелограма $ABCD$ віддалена від прямих CB і CD на 4 см і 6 см відповідно. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр 80 см.

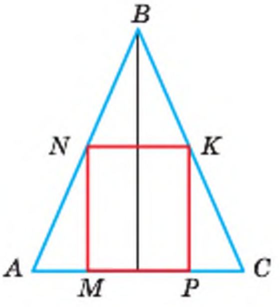
1166. Діагональ розбиває трапецію з основами 12 см і 27 см на два подібні трикутники. Знайдіть довжину цієї діагоналі.

1167. Точка M ділить сторону AD паралелограма $ABCD$ на відрізки $DM =$ $= 8$ см і $AM = 12$ см. K — точка перетину прямих BM і CD. Доведіть: а) $\triangle ABM \sim \triangle DKM$; б) $\triangle ABM \sim \triangle CKB$; в) $\triangle MKD \sim \triangle BKC$. Знайдіть периметр $\triangle ABM$ і $\triangle BKC$, якщо периметр $\triangle MKD$ дорівнює p.

1168. Бісектриса $\angle A$ паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC в точці F, а продовження сторони CD — в точці K. Знайдіть периметр трикутників ABF і FKC та чотирикутника $AFCD$, якщо $BF = 24$ см, $FC = 8$ см, $AK = 50$ см.

1169. Паралелограм, сторони якого пропорційні числам 2 і 3, вписано в $\triangle ABC$ так, що кут A у них спільний. Знайдіть периметр паралелограма, якщо $AB = 8$ см, $AC = 12$ см.

1170. У рівнобедрений трикутник з основою 10 см і висотою 12 см вписано прямокутник $MNKP$ (мал. 321). Знайдіть периметр прямокутника, якщо $KP - NK = 1$ см.



Мал. 321

1171. У паралелограм вписано ромб так, що його сторони паралельні діагоналям паралелограма, які дорівнюють 12 см і 18 см. Знайдіть сторону ромба.

1172. Через точку O перетину діагоналей трапеції проведено пряму, паралельно основам трапеції. Знайдіть довжину відрізка цієї прямої, який лежить між бічними сторонами трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 12 см, а діагоналі точкою O діляться у відношенні $1 : 3$.

1173. На сторонах AB і BC $\triangle ABC$ взято точки M і N так, що $MN \parallel AC$ і півколо, побудоване на MN, як на діаметрі, дотикається до AC. Знайдіть його радіус, якщо $AC = 30$ см, а висота $BH = 10$ см.

1174. Кола радіусів 3 см і 9 см дотикаються одне до одного і до сторін кута. Знайдіть відстань від вершини кута до центра меншого з кіл.

1175. Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 11 см і 12 см. Знайдіть відрізки, на які бісектриса ділить середню за довжиною сторону.

1176. Бісектриса, проведена з вершини прямокутника, ділить діагональ на відрізки, пропорційні числам 2 і 5. У якому відношенні ця бісектриса ділить сторону прямокутника?

1177. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до основи, дорівнює 18 см, а бічна сторона відноситься до основи як 5 : 8. Знайдіть радіус вписаного кола.

1178. Центр кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, ділить висоту, проведену до основи, на відрізки, пропорційні числам 2 і 5. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 56 см.

1179. Точка A лежить на відстані 4 см від центра кола і ділить хорду BC завдовжки 9 см на відрізки, різниця яких дорівнює 1 см. Знайдіть радіус кола.

1180. Продовження хорди AB і діаметра CD перетинаються в точці M. Знайдіть відстань від точки M до центра кола, якщо $MA = 9$ см, $MB = 4$ см, а радіус кола дорівнює 8 см.

1181. Периметр $\triangle ABC$ дорівнює 27 см. Знайдіть периметр $\triangle KBL$, де KL — пряма, що проходить через точку перетину медіан $\triangle ABC$ паралельно AC ($K \in AB$, $L \in BC$).

1182. Висота прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки m і n. Знайдіть катети трикутника.

1183. Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 5 см і 13 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

До розділу 3

1184. У рівнобедреному трикутнику кут при вершині 120°, а бічна сторона дорівнює 6 см. Знайдіть основу трикутника.

1185. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 8 см і 18 см. Знайдіть радіус вписаного кола.

1186. Знайдіть діагоналі рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 11 см і 21 см, а бічна сторона 13 см.

1187. Знайдіть всі медіани прямокутного трикутника з катетами 8 см і 12 см.

1188. Знайдіть бісектриси гострих кутів прямокутного трикутника з катетами 6 см і 8 см.

1189. Центр кола лежить на гіпотенузі прямокутного трикутника. Коло проходить через вершину більшого гострого кута і дотикається до більшого катета. Знайдіть радіус кола, якщо катети дорівнюють 12 см і 16 см.

1190. У трикутник вписано ромб з діагоналями 12 см і 16 см так, що один кут у них спільний, а протилежна вершина ділить сторону трикутника у відношенні 2 : 3. Знайдіть сторони трикутника, які містять сторони ромба.

1191. З точки A до прямої a проведено дві похилі, довжини яких $\sqrt{10}$ і $3\sqrt{10}$. Знайдіть відстань від A до прямої та проекції похилих на пряму, якщо кут між похилими 90°.

1192. З точки до прямої проведено перпендикуляр і дві похилі. Знайдіть довжину перпендикуляра, якщо довжини похилих 29 см і 41 см, а їх проекції пропорційні числам 2 і 3.

1193. Знайдіть кути прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 2 см і $2\sqrt{3}$ см.

1194. Основа і бічні сторони рівнобедреного трикутника відповідно дорівнюють $4\sqrt{2}$ см і 4 см. Знайдіть кути трикутника.

1195. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 5 см і 11 см, а бічна сторона $2\sqrt{3}$ см.

1196. Розв'яжіть прямокутні трикутники, якщо:
а) $a = 12{,}3$ см, $\angle A = 71°$; в) $a = 5{,}6$, $\angle B = 18°$.
б) $c = 24{,}3$ см, $b = 17{,}8$;

1197. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a, а кут при основі α. Знайдіть площу трикутника.

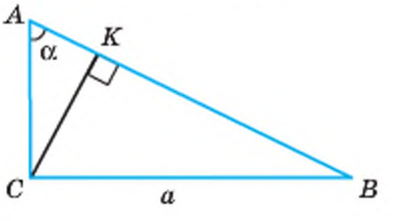
1198. Знайдіть діагоналі ромба, сторона якого дорівнює a, а гострий кут α.

1199. У рівнобічну трапецію з гострим кутом α вписано коло радіуса r. Знайдіть периметр і площу трапеції.

1200. Знайдіть радіус кола, вписаного в ромб, сторона якого дорівнює l, а гострий кут 2α.

1201. Знайдіть площу $\triangle ABC$, якщо висота $BH = h$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$.

1202. У прямокутному трикутнику ABC, $\angle A = \alpha$, $CB = a$, $CK \perp AB$ (див. малюнок). Установіть відповідність між відрізками (1–4) і їх довжинами (А–Д).



1 AB
2 AC
3 CK
4 BK

А $a\sin\alpha$
Б $\dfrac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$
В $a\cos\alpha$
Г $\dfrac{a}{\cos\alpha}$
Д $\dfrac{a}{\sin\alpha}$

До розділу 4

1203. Знайдіть площу квадрата, якщо: а) радіус вписаного кола дорівнює r; б) радіус описаного кола дорівнює R.

1204. Прямокутник і квадрат мають однакові периметри — 36 см. Що більше: площа прямокутника чи площа квадрата?

1205. Знайдіть площу прямокутника, якщо:
а) одна сторона більша за другу на 5 см, а периметр дорівнює 22 см;
б) сторони пропорційні числам 2 і 7, а їх різниця дорівнює 15 см;
в) одна сторона в 4 рази більша за другу, а периметр дорівнює 20 см;
г) одна зі сторін 8 см, а діагональ на 4 см більша за другу сторону.

1206. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює 126 $см^2$ і:
а) сторони пропорційні числам 2 і 7; б) різниця сторін дорівнює 15 см.

1207. Діагональ прямокутника дорівнює 10 см і утворює зі стороною кут 60°. Знайдіть його площу.

1208. Сторони прямокутника дорівнюють 4 см і 8 см. Знайдіть площу чотирикутника, вершини якого — точки перетину бісектрис кутів даного прямокутника.

1209. Знайдіть площу прямокутника, якщо перпендикуляр, опущений з вершини прямого кута на діагональ, ділить її на відрізки 9 см і 16 см.

1210. Знайдіть площу прямокутника, якщо його периметр дорівнює 70 см, а бісектриса, проведена з його вершини, ділить діагональ на відрізки, пропорційні числам 3 і 4.

1211. Знайдіть площу прямокутника, якщо бісектриса, проведена з його вершини, ділить діагональ на відрізки 15 см і 20 см.

1212. Основа і висота паралелограма відповідно дорівнюють 12 см і 3 см. Накресліть рівновеликий йому: а) квадрат; б) прямокутник; в) ромб; г) трикутник.

1213. Сторони прямокутника і паралелограма дорівнюють 10 см і 12 см. Знайдіть відношення їх площ, якщо гострий кут паралелограма дорівнює 30°.

1214. Висоти паралелограма дорівнюють 10 см і 12 см. Знайдіть площу паралелограма, якщо один з його кутів 30°.

1215. Сторони паралелограма 10 см і 16 см. Знайдіть його площу, якщо кут між висотами 30°.

1216. Периметр ромба дорівнює 36 см. Знайдіть його площу, якщо один з кутів дорівнює 150°.

1217. Діагоналі ромба дорівнюють 10 см і 24 см. Знайдіть периметр і площу ромба.

1218. Периметр ромба дорівнює 13,6 см, а одна з діагоналей 3,2 см. Знайдіть площу ромба.

1219. Різниця діагоналей ромба дорівнює 6 см. Знайдіть його площу, якщо сторона дорівнює 15 см.

1220. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 25 см і 45 см, а бічна сторона 26 см. Знайдіть площу трапеції.

1221. У прямокутній трапеції основи дорівнюють 25 см і 32 см, а більша діагональ є бісектрисою гострого кута. Знайдіть площу трапеції.

1222. У прямокутну трапецію вписано коло радіуса 4 см. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює 6 см.

1223. У рівнобічну трапецію, площа якої дорівнює 28 $см^2$, вписано коло радіуса 2 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.

1224. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см і 18 см, а діагоналі взаємно перпендикулярні. Знайдіть площу трапеції.

1225. Діагоналі рівнобічної трапеції точкою перетину діляться у відношенні 3 : 13, а більша основа дорівнює бічній стороні. Знайдіть площу трапеції, якщо її висота дорівнює 36 см.

1226. Площа рівнобічної трапеції дорівнює 12 см^2, а висота 2 см. Знайдіть сторони трапеції, якщо прямі, що містять її бічні сторони, перетинаються під прямим кутом.

1227. Трапеція вписана в коло, центр якого лежить на більшій основі, а радіус дорівнює 6 см. Знайдіть площу трапеції, якщо менша основа дорівнює 4 см.

1228. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини основ трапеції, ділить її на дві рівновеликі частини.

1229. Середня лінія трапеції дорівнює 10 см і ділить площу трапеції на частини, пропорційні числам 3 і 5. Знайдіть основи трапеції.

1230. Основи трапеції дорівнюють 1 см і 7 см. Знайдіть довжину відрізка, який паралельний основам і ділить трапецію на рівновеликі частини.

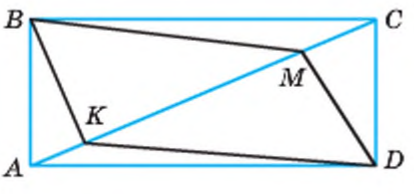
1231. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, якщо основа і бічна сторона пропорційні числам 6 і 5, а висота, проведена до основи, дорівнює 16 см.

1232. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки 15 см і 20 см. Знайдіть площу трикутника.

1233. В прямокутнику $ABCD$ (див. малюнок) $BK \perp AC$, $MD \perp AC$, $\angle ABK = 30°$, $AB = 6$ см. Установіть відповідність між фігурами (1–4) і їх площами (А–Д).

1 Трикутник AKB
2 Трикутник BKC
3 Прямокутник $ABCD$
4 Чотирикутник $KBMD$

А $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ см^2
Б $18\sqrt{3}$ см^2
В $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ см^2
Г $24\sqrt{3}$ см^2
Д $36\sqrt{3}$ см^2



1234. Із середини сторони трикутника проведено прямі, паралельні двом іншим сторонам. Доведіть, що площа утвореного чотирикутника дорівнює половині площі трикутника.

1235. Дві сторони трикутника дорівнюють 25 см і 40 см, а висота, проведена до третьої сторони, дорівнює 24 см. Знайдіть площу трикутника й інші висоти.

Тренувальний тест № 1

1 Площа квадрата дорівнює 18 см². Знайдіть довжину його діагоналі.

А	Б	В	Г	Д
$12\sqrt{2}$ см	$9\sqrt{2}$ см	6 см	16 см	$3\sqrt{2}$ см

2 Сторони трикутника пропорційні числам 2, 3 і 4. Знайдіть найменшу сторону подібного йому трикутника, периметр якого дорівнює 27 см.

А	Б	В	Г	Д
3 см	12 см	9 см	18 см	6 см

3 У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює a, а кут при основі α. Знайдіть основу трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$a\cos\alpha$	$a\sin\alpha$	$a\cos 2\alpha$	$2a\sin\alpha$	$2a\cos\alpha$

4 Знайдіть основи трапеції, якщо діагональ ділить її середню лінію на відрізки 6 см і 10 см.

А	Б	В	Г	Д
2 см і 16 см	12 см і 20 см	3 см і 5 см	6 см і 10 см	знайти неможливо

5 Укажіть хибне твердження:

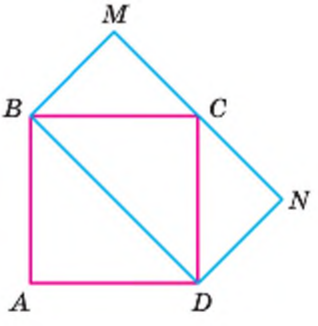
I. Чотирикутник, у якого протилежні сторони рівні, — паралелограм.
II. Чотирикутник, у якого діагоналі перпендикулярні, — ромб.
III. Чотирикутник, у якого два кути прямі, — прямокутник.

А	Б	В	Г	Д
Тільки I	Тільки II	Тільки III	Тільки I і III	Тільки II і III

6 Точки A, B і C ділять коло на три дуги, кутові міри яких пропорційні числам 3, 4 і 5. Знайдіть найбільший кут трикутника ABC.

А	Б	В	Г	Д
150°	120°	45°	75°	90°

7 Діагональ квадрата $ABCD$ дорівнює 8 см і є стороною прямокутника $BMND$ (див. малюнок). Установіть відповідність між фігурами (1–4) та їх площами (А–Д).



1 Квадрат $ABCD$
2 Трикутник BMC
3 Трапеція $BMCD$
4 П'ятикутник $ABMND$

А 24 см²
Б 32 см²
В 52 см²
Г 8 см²
Д 48 см²

8 Бісектриси кутів A і D паралелограма $ABCD$ перетинаються у точці K, точка K належить BC.
1) Доведіть, що $BK = KC$.
2) Знайдіть площу паралелограма, якщо площа трикутника AKD дорівнює 15 см².

9 Периметр ромба $ABCD$ дорівнює 24 см, а один із кутів у три рази більший за інший. Знайдіть відстань від точки A до прямої CD, якщо кут A — гострий.

10 У рівнобічну трапецію вписано коло. Знайдіть площу трапеції, якщо одна з бічних сторін точкою дотику ділиться на відрізки 4 см і 9 см.

11 Коло, центр якого належить гіпотенузі прямокутного трикутника, дотикається до катетів. Знайдіть радіус кола, якщо катети трикутника дорівнюють 6 см і 8 см.

12 Сторони трикутника дорівнюють 3 см, 6 см і a см. При якому значенні a трикутник буде прямокутним?

Тренувальний тест № 2

1 Знайдіть катет рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює 5 см.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{5}$ см	$5\sqrt{2}$ см	5 см	25 см	10 см

2 Кут між висотою, проведеною з вершини гострого кута ромба, і більшою діагоналлю дорівнює 70°. Знайдіть більший з кутів ромба.

А	Б	В	Г	Д
100°	140°	150°	70°	130°

3 Знайдіть меншу сторону трикутника ABC, якщо бісектриса AM ділить сторону BC на відрізки 4 см і 6 см, а периметр трикутника дорівнює 30 см.

А	Б	В	Г	Д
6 см	4 см	10 см	12 см	8 см

4 Точки M і H — середини катетів AC і BC прямокутного трикутника ABC. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо радіус кола, описаного навколо трикутника MCH, дорівнює 6 см.

А	Б	В	Г	Д
10 см	$6\sqrt{2}$ см	12 см	$8\sqrt{2}$ см	3 см

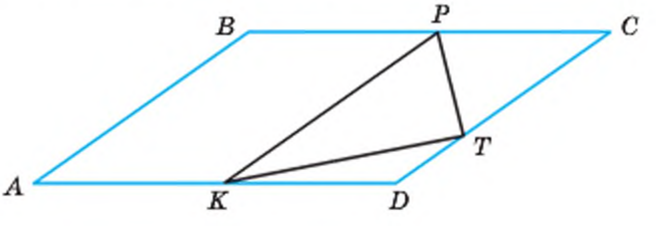
5 Яке з тверджень правильне:
I. Паралелограм, у якого діагоналі перпендикулярні, — ромб або квадрат.
II. Паралелограм, у якого діагоналі рівні, — прямокутник або квадрат.
III. Чотирикутник, у якого діагоналі рівні і перпендикулярні, — квадрат.

А	Б	В	Г	Д
Тільки I	Тільки II	Тільки III	Тільки I і III	Тільки II і III

6 Трапеція $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ вписана в коло з центром O. Знайдіть кут BAD, якщо $\angle AOC = 80°$.

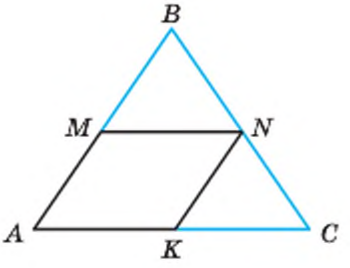
А	Б	В	Г	Д
40°	60°	80°	120°	50°

7 P і K — середини сторін BC і AD паралелограма $ABCD$. $AB = 12$ см, $AD = 16$ см, а $\angle A = 30°$, $CT : TD = 3 : 1$. Установіть відповідність між фігурами (1–4) і їх площами (А–Д).



1	Паралелограм $ABCD$	**А**	18 см²
2	Чотирикутник $KPCT$	**Б**	42 см²
3	Трикутник KPT	**В**	16 см²
4	Трикутник PCT	**Г**	96 см²
		Д	24 см²

8 У правильний трикутник ABC вписано ромб $AMNK$ (див. малюнок).
1) Доведіть, що $BN = NC$.
2) Знайдіть площу ромба, якщо $AB = 8$ см.



9 Знайдіть кути трапеції, діагональ якої є бісектрисою гострого кута, а центр описаного кола лежить на більшій основі.

10 Середня лінія рівнобічної трапеції дорівнює 13 см, а радіус вписаного кола — 6 см. Знайдіть сторони трапеції.

11 Висота BK паралелограма $ABCD$ ділить сторону AD навпіл. Знайдіть площу паралелограма, якщо його периметр дорівнює 52 см, периметр трикутника ABD дорівнює 36 см.

12 Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює a см, а основа 12 см. Знайдіть площу трикутника. Якого найменшого цілого значення може набувати a?

Задачі на побудову

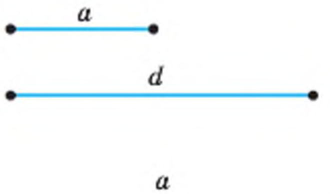
Геометричні задачі на побудову — невід'ємний компонент математичної освіти. Вони сприяють розвитку логічного і критичного мислення, наполегливості й акуратності. Крім того, на основі побудови фігур чи деяких їх елементів означається багато геометричних понять і доводяться теореми.

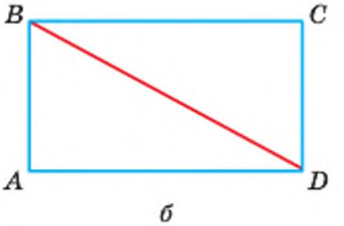
Для тих учнів, хто в 7 класі розглядав тему «Задачі на побудову», вивчив правила виконання основних побудов за допомогою циркуля і лінійки, пропонуємо розширити свої знання й уміння в процесі побудови чотирикутників та інших геометричних фігур за вказаними умовами.

Виконаємо разом

1 Побудуйте прямокутник за стороною і діагоналлю.

- Щоб побудувати прямокутник $ABCD$ за даними відрізками $AB = a$ і $BD = d$ (мал. 322, *а*), будуємо спочатку прямий кут BAD. На його стороні AB відкладаємо відрізок $AB = a$, а з точки B, як із центра, описуємо дугу кола радіуса d. Якщо ця дуга перетинає промінь AD в точці D, проводимо прямі $CD \parallel AB$ і $BC \parallel AD$ (мал. 322, *б*).
  Чотирикутник $ABCD$ — той, який треба було побудувати. Справді, за побудовою $CD \parallel AB$, $BC \parallel AD$ і $\angle A = 90°$. Отже, $ABCD$ — прямокутник. Його сторона AB і діагональ BD дорівнюють відповідно даним відрізкам a і d.
  Побудову можна виконати тільки за умови, що $a < d$. (Чому?)

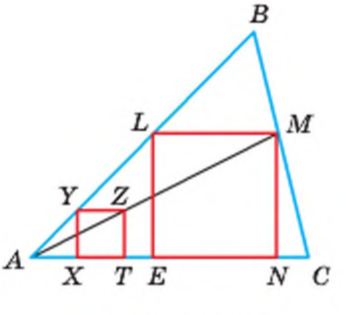




Мал. 322

2 У даний трикутник впишіть квадрат так, щоб дві його вершини лежали на основі трикутника, а дві — на бічних сторонах.

- Нехай AC — основа даного $\triangle ABC$ (мал. 323). Побудуємо спочатку який-небудь квадрат $XYZT$ так, щоб $X \in AC$, $T \in AC$, $Y \in AB$. Потім знайдемо точку M перетину променя AZ зі стороною BC. Через M проводимо пряму ML,

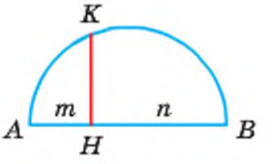


Мал. 323

паралельну AC, до її перетину з AB в точці L. Нарешті, опускаємо перпендикуляри MN і LE на AC. Чотирикутник $ELMN$ — той, який треба було побудувати. Справді, цей чотирикутник — квадрат, бо коли $TZ = ZY$, то і $NM = ML$ (доведіть це), дві його вершини E і N лежать на основі AC трикутника, а дві — на бічних сторонах.

3 Побудуйте відрізок, який є середнім пропорційним відрізків m і n.

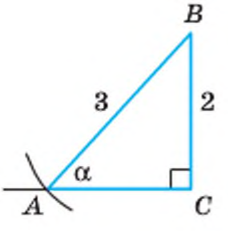
- Відкладаємо на прямій відрізки AH і HB, що дорівнюють m і n, і на AB, як на діаметрі, описуємо півколо (мал. 324). З точки H проводимо пряму, перпендикулярну до AB, і визначаємо точку K перетину цієї прямої з півколом. Відрізок KH — той, який треба було побудувати, бо згідно з теоремою 26 $KH^2 = AH \cdot HB = m \cdot n$.



Мал. 324

4 Побудуйте кут, синус якого дорівнює $\frac{2}{3}$. Знайдіть косинус і тангенс цього кута.

- Будуємо прямокутний трикутник (мал. 325) з катетом 2 і гіпотенузою 3 (одиниці вимірювання можна брати довільні, але однакові). Тоді $\sin\alpha = \frac{2}{3}$. За теоремою Піфагора знайдемо катет AC. $AC = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$. Тоді $\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ і $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.



Мал. 325

Задачі і вправи

1236. Побудуйте паралелограм, дві сторони якого дорівнюють 4 см і 5 см, а кут між ними 60°.

1237. Побудуйте чотирикутник за даними сторонами 4 см, 4 см, 3 см, 2 см і кутом 60° між рівними сторонами. Скільки розв'язків має задача?

1238. Побудуйте паралелограм за двома сторонами і кутом між ними.

1239. Побудуйте паралелограм за двома сторонами і діагоналлю.

1240. Побудуйте паралелограм за діагоналями і кутом між ними.

1241. Побудуйте паралелограм за стороною і двома діагоналями.

1242. Побудуйте прямокутник за даною діагоналлю і кутом між діагоналями.

1243. Побудуйте ромб: а) за стороною і діагоналлю; б) за двома діагоналями; в) за стороною і кутом.

1244. Побудуйте квадрат, якщо дано його: а) сторону; б) діагональ.

1245. Побудуйте прямокутник за діагоналлю і різницею двох сторін.

1246. Побудуйте гострокутний трикутник, одна зі сторін якого дорівнює 6 см. Поділіть кожну сторону трикутника на три рівні частини.

1247. Побудуйте $\triangle ABC$ зі сторонами $AB = 7$ см, $BC = 8$ см і $AC = 6$ см. Використовуючи теорему Фалеса, поділіть сторону AB на 6 частин, а сторону BC на 12 частин.

1248. На площині позначено три точки. Побудуйте такий трикутник, щоб дані точки виявились серединами його сторін.

1249. Як, користуючись тільки циркулем і лінійкою, застосовуючи властивість середньої лінії трикутника, провести через дану точку пряму, паралельну даній прямій?

1250. Одна з вершин трикутника міститься за межами зошита. Побудуйте медіани цього трикутника або їх частини.

1251. Побудуйте трикутник зі сторонами 2 см, 4 см і 5 см. Впишіть у нього і опишіть навколо нього коло.

1252. Побудуйте квадрат, периметр якого дорівнює 16 см. Впишіть і опишіть навколо нього коло.

1253. Побудуйте прямокутник і опишіть навколо нього коло, якщо: а) сторони прямокутника дорівнюють 2 см і 5 см; б) діагональ прямокутника дорівнює 6 см і утворює зі стороною кут $40°$.

1254. Побудуйте прямокутну трапецію з основами 3 см і 6 см, якщо у неї можна вписати коло радіуса 2 см. Впишіть це коло.

1255. Побудуйте рівнобічну трапецію з основами 2 см і 6 см, якщо в неї можна вписати коло радіуса 1,5 см, та впишіть це коло.

1256. Побудуйте ромб з діагоналями 4 см і 10 см та впишіть у нього коло.

1257. Побудуйте трикутник зі сторонами 2 см, 4 см і 5 см. Побудуйте трикутник, подібний даному з коефіцієнтом подібності k: а) $k = 2$; б) $k=\frac{1}{2}$.

1258. Побудуйте прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Паралельно гіпотенузі проведіть пряму так, щоб периметр утвореного трикутника був у 2 рази менший. Чому дорівнюють катети цього трикутника?

1259. Побудуйте прямокутний трикутник із катетами 3 см і 5 см та опишіть навколо нього коло.

1260. Побудуйте відрізок завдовжки 9 см, поділіть його на частини, пропорційні числам 2 і 3, і знайдіть довжину кожної частини.

1261. Побудуйте відрізок завдовжки 10 см, поділіть його на частини, пропорційні числам 5 і 7, і знайдіть довжину кожної частини.

1262. Побудуйте відрізок завдовжки 8 см, поділіть його на частини, пропорційні числам 3 і 4, і знайдіть довжину кожної частини.

1263. Побудуйте відрізок завдовжки 6 см, поділіть його на частини, пропорційні числам 4 і 5, і знайдіть довжину кожної частини.

1264. Побудуйте прямокутник, сторони якого пропорційні числам 3 і 4, а діагональ дорівнює 10 см.

1265. У даний трикутник впишіть прямокутник, сторони якого пропорційні числам 2 і 3, так, щоб одна його сторона лежала на основі трикутника, а дві інші вершини — на бічних сторонах.

1266. У даний трикутник впишіть ромб так, щоб один кут у них був спільний, а протилежна вершина ромба лежала на стороні, протилежній до цього кута.

1267. Побудуйте трикутник, кути якого дорівнюють 40° і 70°, а висота, проведена з вершини третього кута, дорівнює 5 см.

1268. Побудуйте трикутник за двома кутами і бісектрисою, проведеною з вершини меншого із цих кутів.

1269. Побудуйте трикутник за двома кутами і висотою, проведеною з вершини третього кута.

1270. Побудуйте трикутник ABC за даною медіаною AM і відношенням $AB : AC = 2 : 3$, якщо $AB = BC$.

1271. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і відношенням катетів.

1272. Побудуйте два відрізки, знаючи їх суму та їх середнє пропорційне.

1273. Побудуйте два відрізки, знаючи їх різницю та їх середнє пропорційне.

1274. Побудуйте відрізок, довжина якого дорівнює:

а) $\sqrt{2}$ см; б) $\sqrt{3}$ см; в) $\sqrt{5}$ см.

1275. Дано відрізки a і b ($a > b$). Побудуйте відрізки $\sqrt{a^2+b^2}$ і $\sqrt{a^2-b^2}$.

1276. Побудуйте опуклий чотирикутник $ABCD$, в якого $AB = AD = 3$ см, $CB = CD = 4$ см і $\angle B = 90°$.

1277. Побудуйте прямокутний трикутник з катетом 5 см і гіпотенузою 8 см і впишіть у нього прямокутник, який має з трикутником спільний прямий кут і сторони якого пропорційні числам 2 і 3.

1278. У дане коло впишіть квадрат.

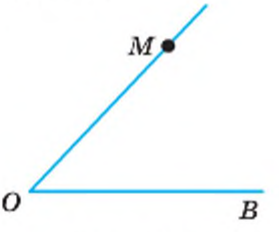
1279. У дане коло впишіть рівносторонній трикутник.

1280. Навколо даного кола опишіть рівнобедрений прямокутний трикутник.

1281. У дане коло впишіть трикутник з двома даними кутами.

1282. Побудуйте трикутник за двома кутами α і β та висотою h, проведеною з вершини третього кута.

1283. У кут впишіть коло, яке дотикається до сторін кута і проходить через точку M, що лежить на стороні кута (мал. 326).



Мал. 326

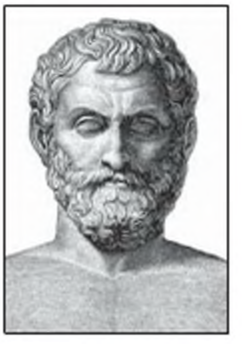
1284. Побудуйте прямокутний трикутник з меншим катетом 2 см і кутом 70°. Виміряйте інші сторони трикутника і знайдіть наближені значення синуса, косинуса і тангенса кутів 70° і 20°.

1285. Побудуйте кут, косинус якого дорівнює 0,6. Знайдіть синус і тангенс цього кута.

З історії геометрії

Геометрія — одна з найдавніших наук. Спочатку її пов'язували тільки з вимірюванням земельних ділянок. Згодом геометричні відомості почали застосовувати до вимірювання висот, глибин, різних відстаней. Перший знаний нами геометр Фалес Мілетський, один із семи найвідоміших античних мудреців, знав властивості рівних і навіть подібних трикутників.

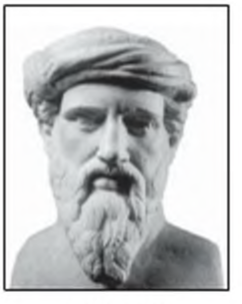
Фале́с (кінець VII — початок VI ст. до н. е.) — грецький астроном і математик. За свідченням грецького історика Плутарха, Фалес вимірював висоту єгипетської піраміди за довжиною її тіні: довжина тіні піраміди відноситься до довжини тіні вертикального стовпа, поставленого поруч з пірамідою, як невідома висота піраміди відноситься до довжини цього стовпа.



Фалес

Теорему, яку тепер називають теоремою Фалеса, можливо, сам він і не знав. Жодне з його доведень до нас не дійшло.

Піфагор Самоський (VI ст. до н. е.) знав багато властивостей геометричних фігур і натуральних чисел. Теорему про катети і гіпотенузу прямокутного трикутника, яку тепер називають його ім'ям, ще раніше знали єгипетські мудреці. Але Піфагор, здається, першим довів її як теорему. Він і його учні вперше показали, що сторона квадрата і його діагональ не мають спільної міри, тобто якщо довжина сторони квадрата дорівнює 1, то довжину його діагоналі не можна виразити раціональним числом. Це було дуже важливе відкриття. Оскільки античні математики не ввели ірраціональних чисел, то вони більше оперували відрізками, ніж числами.

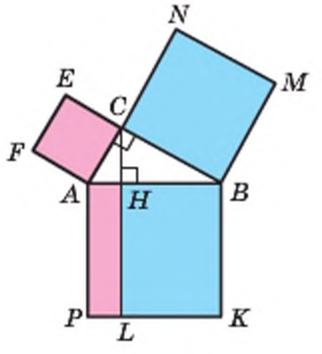


Піфагор

Герон Александрійський (I ст. до н. е.) — давньогрецький винахідник і геодезист, написав книгу «Діоптрика», яку можна вважати першою працею з геодезії. Пояснював, як можна виміряти площу поля, не виходячи за його межі, як знімати плани земельних ділянок. Сконструював прилад для вимірювання кутів у просторі, за принципом якого пізніше створювали теодоліти.

Про *чотирикутники*, зокрема про паралелограми, в «Основах» **Евкліда** відомостей є більше, ніж у нашому підручнику. Розглядалися тоді також прямокутники, ромби, квадрати, трапеції. Трактувалися ці поняття не так, як тепер. Трапеціями раніше називали всі чотирикутники, крім паралелограмів.

Теорему, яку ми тепер називаємо теоремою Піфагора, Евклід формулював так: «У всякому прямокутному трикутнику квадрат, побудований на стороні, протилежній прямому куту, дорівнює сумі квадратів, побудованих на сторонах, які обмежують прямий кут». Словом «квадрат» називав і його площу. Доводив теорему, користуючись малюнком (мал. 327). Показував, що площі квадратів $ACEF$ і $CBMN$ дорівнюють відповідно площам прямокутників $AHLP$ і $HBKL$. Спробуйте здійснити таке доведення самостійно.



Мал. 327

І про подібність трикутників в «Основах» Евкліда багато тверджень, хоча формулювання давалися дещо інші. Наприклад, доведено таку теорему: «Якщо в якому-небудь трикутнику проведено пряму, паралельну одній з його сторін, то вона, зустрічаючи дві інші його сторони або їх продовження, поділяє їх на пропорційні частини, і навпаки».

Подібності фігур присвячено всю шосту книжку «Основ» Евкліда.

Площі многокутників. Правильно обчислювали площі прямокутника, трикутника і трапеції вчені Вавилона ще 4 тисячі років тому. Архімед першим знайшов формулу для обчислення площі трикутника, яку згодом було названо формулою Герона:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Тут a, b, c — сторони довільного трикутника, p — його півпериметр, а S — площа.

Розв'язуванням трикутників раніше займалась окрема математична наука — *тригонометрія* (грецьке τριγωνον — трикутник, μετρέω — міряю). Давньогрецький математик і астроном **Гіппарх** ще в II ст. до н. е. склав тригонометричні таблиці, за допомогою яких досить точно визначив відстань від Землі до Місяця і розв'язав багато інших прикладних задач. Він перший увів географічні координати — довготу і широту.

Великий внесок у розвиток тригонометрії зробив давньогрецький математик, астроном, географ **Птолемей** (близько 100–178 рр.). Родом він з Єгипту, жив здебільшого в Александрії. Його твір «Мегале Сінтаксіс», перекладений арабською мовою під назвою «Альмагест», довгий час був основою тригонометрії. Птолемей ділив коло на 360 рівних частин, а кожну поділку — ще на 60 рівних частин. Латинською мовою ці частини називались *partes minutae primae* і *partes minutae secundae*. Звідси й походять наші назви *хвилини* і *секунди*. Він склав також першу таблицю синусів гострого кута.

Згодом з великим успіхом займались тригонометрією індійські астрономи **Бхаскара, Брамагупта** (VII ст.), а за ними — арабські, зокрема **Альбаттані** (IX ст.). Індійці ввели терміни *синус*, *косинус*, а араби — *тангенс*. У XVI ст. німецькі математики, зокрема **Мюллер** із Кенігсберга (або, як його ще прозвали, **Регіомонтан**), склали ще точніші таблиці для всіх тригонометричних функцій гострого кута.

Символічне позначення sin α, cos α, tg α і строгу систему вивчення тригонометричних функцій розробив швейцарський академік **Леонард Ейлер**.

У Київській Могилянській академії **Феофан Прокопович** ознайомлював спудеїв (учнів, студентів) з вимірювальними роботами на місцевості. Починав він цей курс так: «Спеціальна геометрія, яку іноді називають практичною геометрією, а іноді геодезією, є однією з найшляхетніших, найкорисніших і найцікавіших галузей математики. Адже вона займається не лише вимірюванням землі, від чого колись і дістала свою назву, але вимірює все, що підлягає вимірюванню...».

З українських геометрів найбільш відомі: М. Остроградський, Г. Вороний, М. Ващенко-Захарченко, О. Смогоржевський.

Михайло Васильович Остроградський (1810–1862) народився в селі Пашенна на Полтавщині, навчався в Харківському університеті і в Парижі, був почесним академіком багатьох академій світу, зокрема Петербурзької, Паризької, Римської, Туринської. Товаришував з Тарасом Шевченком. Працював у багатьох галузях математики і механіки, а для шкіл написав «Підручник з елементарної геометрії», який виявився настільки цікавим і змістовним, що його ще раз передрукували у 2001 р. в Тернополі.

М. В. Остроградський

Георгій Феодосійович Вороний (1868–1908) народився у селі Журавка Чернігівської області. Навчався у Прилуцькій гімназії, Петербурзькому університеті. Був професором Варшавського університету, деканом механічного факультету Варшавського політехнічного інституту, працював у галузях геометрії і теорії чисел. Його вважають творцем геометричної теорії чисел. Тривалий час його праці мало привертали до себе увагу, а тепер до них звертаються дедалі більше фахівців усього світу. «Діаграмам Вороного» присвячувалися спеціальні великі міжнародні конференції (в тому числі веб-конференції) в США, Японії, Південній Кореї, Нідерландах, Канаді, Великобританії. У 2008 р. світ відзначив 100 років пам'яті великого математика, а його праці з геометрії з часом стають ще потрібнішими і цікавішими.

Г. Ф. Вороний

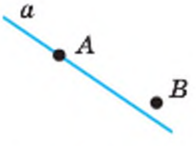
Така вона — геометрія. З роками не старіє, а стає дедалі необхіднішою.

Відомості за курс 7 класу

1. Найпростіші геометричні фігури та їх властивості

Геометрія — наука про геометричні фігури і їх властивості. Найпростіша геометрична фігура — *точка*. Кожна інша геометрична фігура складається з точок, тобто є деякою множиною точок. Інші фігури — *пряма*, *площина*. Їх зміст розкривають не означеннями, а описуючи їх основні властивості.

Якщо точка A лежить на прямій a, говорять, що пряма a проходить через точку A і записують: $A \in a$.



Якщо точка B не лежить на прямій a, пишуть: $B \notin a$.

Фігури, які можна розмістити в одній площині, називають *плоскими фігурами*. Частину геометрії, у якій досліджують фігури тільки однієї площини, називають *планіметрією*.

Основні властивості розміщення точок на прямій

1) Хоч би яка була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що їй не належать.

2) Через будь-які дві різні точки можна провести пряму, і тільки одну.

3) Із трьох різних точок прямої одна, і тільки одна, лежить між двома іншими.

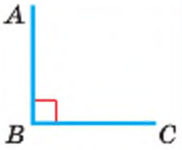
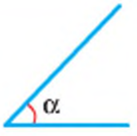
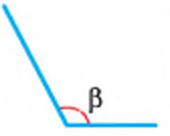
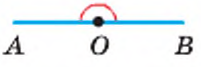
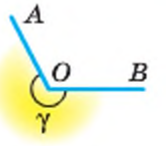
Частини прямої — *відрізок* і *промінь*. Відрізок AB — це частина прямої, що містить точки A, B і всі точки, що лежать між ними. Кожному відрізку ставиться у відповідність його довжина. Довжина відрізка — відстань між його кінцями. Відстані й довжини вимірюють метрами, сантиметрами, міліметрами, кілометрами, футами, дюймами та іншими одиничними відрізками.

Основні властивості вимірювання відрізків

1) Кожний відрізок має певну довжину.

2) Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які його розбиває будь-яка внутрішня точка.

Частину площини, обмежену двома променями із спільним початком, називають *кутом*. Кути бувають гострі, прямі, тупі, розгорнуті і більші за розгорнуті. *Міри кутів* визначають у градусах, мінутах, секундах, румбах та деяких інших кутових одиницях виміру.

Прямий	Гострий	Тупий	Розгорнутий	Більший за розгорнутий
 $\angle ABC = 90^\circ$	 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$	 $90^\circ < \beta < 180^\circ$	 $\angle AOB = 180^\circ$	 $180^\circ < \gamma \leq 360^\circ$

Основні властивості вимірювання кутів

1) Кожний кут має певну міру.

2) Міра кута дорівнює сумі мір кутів, на які даний кут розбивається його внутрішнім променем.

Основні властивості відкладання відрізків і кутів

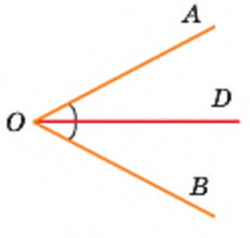
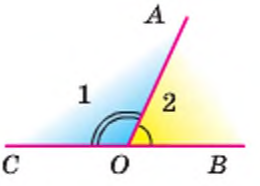
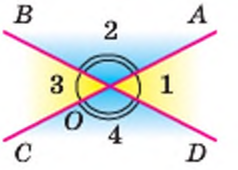
1) На будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок даної довжини, і тільки один.

2) Від будь-якого променя з одного боку від нього можна відкласти кут заданої міри, і тільки один.

Бісектриса кута — внутрішній промінь, який розбиває даний кут на два рівні кути.

Два кути, на які розгорнутий кут розбивається його внутрішнім променем, називають *суміжними*. Сума мір двох суміжних кутів дорівнює 180°.

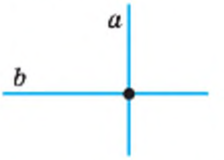
Два кути називають *вертикальними*, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого. Вертикальні кути — рівні.

 Промінь OD — бісектриса кута AOB $\angle AOD = \angle BOD$	 $\angle 1$ і $\angle 2$ — суміжні $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ Сума суміжних кутів дорівнює 180°	 $\angle 1$ і $\angle 3$ — вертикальні $\angle 2$ і $\angle 4$ — вертикальні $\angle 1 = \angle 3$ $\angle 2 = \angle 4$ Вертикальні кути рівні

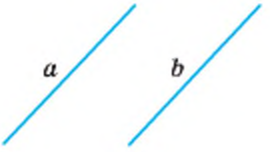
2. Паралельні і перпендикулярні прямі

Якщо дві прямі перетинаються, вони утворюють чотири кути (дві пари вертикальних кутів). Менший із них — кут між даними прямими.

Дві прямі називають *перпендикулярними,* якщо вони перетинаються під прямим кутом. Якщо прямі a і b перпендикулярні, пишуть: $a \perp b$. Відрізки чи промені називають перпендикулярними, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.



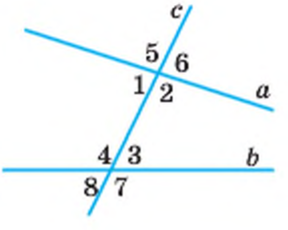
Дві прямі на площині називають *паралельними,* якщо вони не перетинаються. Якщо прямі a і b паралельні, пишуть: $a \parallel b$. Два відрізки або промені називають паралельними, якщо вони лежать на паралельних прямих.



Через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

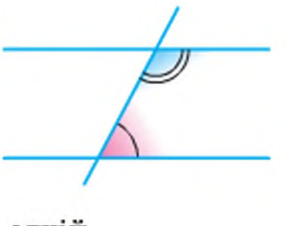
Пряму, яка перетинає дві інші прямі, називають їх *січною.* З двома даними прямими вона утворює 8 кутів. Деякі пари цих кутів мають окремі назви:

1 і 3, 2 і 4 — внутрішні різносторонні;
1 і 4, 2 і 3 — внутрішні односторонні;
1 і 8, 2 і 7, 3 і 6, 4 і 5 — відповідні;
5 і 7, 6 і 8 — зовнішні різносторонні;
5 і 8, 6 і 7 — зовнішні односторонні.



Ознаки паралельності прямих

1) Дві прямі паралельні, якщо із січною вони утворюють: 1) рівні внутрішні різносторонні кути, або 2) рівні відповідні кути, або 3) такі внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює 180°.

1) 
2) 
3) 

2) Дві прямі, паралельні третій, паралельні одна одній.
3) Дві прямі, перпендикулярні до третьої, — паралельні.

Властивості паралельних прямих

1) Січна з двома паралельними прямими утворює рівні внутрішні різносторонні кути; рівні відповідні кути; такі внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює 180°.

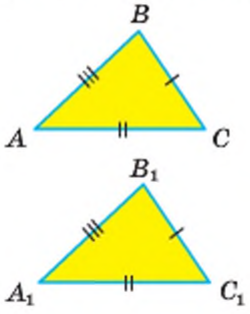
2) Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до іншої.

3. Трикутники

Трикутник — геометрична фігура, яка складається з трьох точок, які не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які сполучають ці точки. Кожний трикутник має три сторони, три вершини і три кути. Сума довжин сторін трикутника — його *периметр.*

Сума кутів трикутника дорівнює 180°.

Важливу роль у геометрії відіграють ознаки рівності трикутників. Дві фігури називаються рівними, якщо їх можна сумістити.



$$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1 \Leftrightarrow \begin{array}{c|c} AB = A_1B_1 & \angle A = \angle A_1 \\ AC = A_1C_1 & \angle B = \angle B_1 \\ BC = B_1C_1 & \angle C = \angle C_1 \end{array}$$

Ознаки рівності трикутників

Два трикутники рівні, якщо:

1) дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника (I);

I. За двома сторонами і кутом між ними

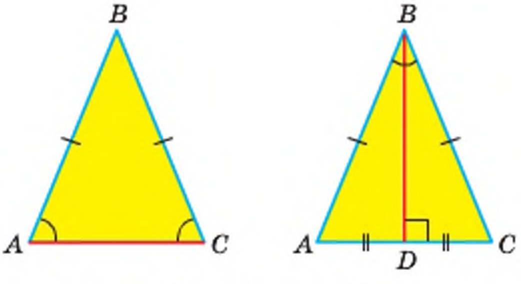
2) якщо сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні й прилеглим до неї кутам іншого (II);

II. За стороною і двома прилеглими до неї кутами

3) якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам іншого (III).

III. За трьома сторонами

Трикутник називають *рівнобедреним,* якщо він має дві рівні сторони. Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають *бічними сторонами,* а третю сторону — його *основою.*



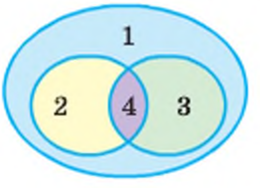
У рівнобедреному трикутнику кути при основі — рівні, а бісектриса, проведена до основи, є медіаною і висотою.

Якщо трикутник має два рівні кути, то він — рівнобедрений.

Якщо всі сторони трикутника рівні, його називають *рівностороннім* трикутником. Кожний кут рівностороннього трикутника дорівнює 60°.

Залежно від кутів трикутники поділяють на *гострокутні, прямокутні* й *тупокутні.*

1 — трикутники
2 — рівнобедрені
3 — прямокутні
4 — прямокутні рівнобедрені



Сторону прямокутного трикутника, яка лежить проти прямого кута, називають *гіпотенузою*, а дві інші — *катетами.*

Катет прямокутного трикутника, який лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.

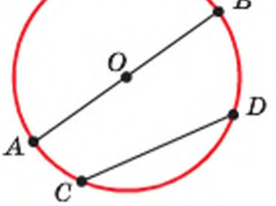
Кожна сторона трикутника менша за суму двох інших його сторін і більша за їх різницю. Хоч би які були три точки площини A, B і C, завжди $AB + BC > AC$.

У кожному трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, а проти більшого кута — більша сторона.

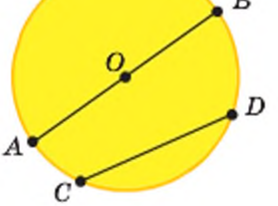
4. Коло і круг

Коло — фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки. *Круг* — частина площини, обмежена колом. Пряму, яка має з колом тільки одну спільну точку і лежить у площині кола, називають *дотичною* до кола. *Хорда* кола — відрізок, кінці якого належать даному колу. Найбільша хорда кола — його *діаметр.*

Коло



Круг

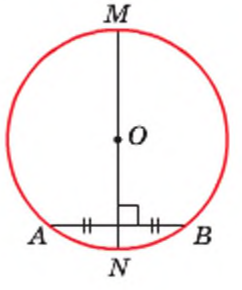


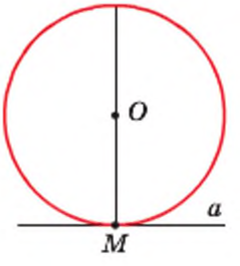
O — центр
OA — радіус
AB — діаметр
CD — хорда

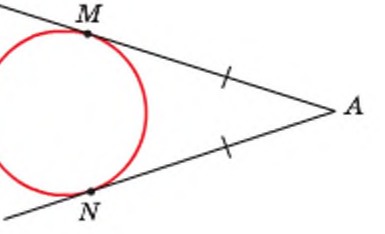
Діаметр кола, проведений через середину хорди, відмінної від діаметра, перпендикулярний до неї.

Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

Точки дотику кола до сторін кута рівновіддалені від його вершини.







Коло, яке проходить через усі вершини трикутника, називають *описаним* навколо даного трикутника. Коло, яке дотикається до всіх сторін трикутника, — *вписане* в даний трикутник. Навколо будь-якого трикутника можна описати коло і в будь-який трикутник можна вписати коло.

Центром кола, вписаного в трикутник, є точка перетину бісектрис трикутника.

Центр кола, описаного навколо трикутника, — точка перетину серединних перпендикулярів до сторін даного трикутника.

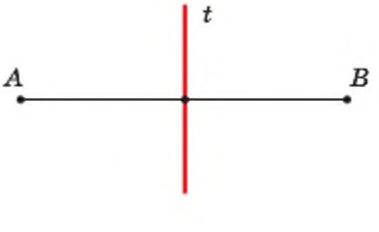
Серединний перпендикуляр до відрізка — пряма, яка перпендикулярна до даного відрізка і проходить через його середину.

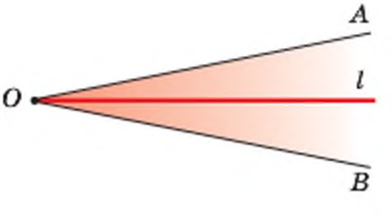
Діаметр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, дорівнює його гіпотенузі.

Діаметр кола, вписаного в прямокутний трикутник з катетами a і b та гіпотенузою c, дорівнює $a + b - c$.

Геометричне місце точок — це множина точок, які мають певну властивість.

Геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є серединний перпендикуляр цього відрізка. Йдеться про фігури однієї площини.





Геометричне місце точок кута, рівновіддалених від його сторін, — бісектриса цього кута.

Предметний покажчик

Відповіді

9. 4 см; 6 см; 10 см і 18 см. **10.** 8 см; 4 см; 4 см і 4 см. **11.** 3 см; 6 см; 6 см і 6 см. **12.** а) 36°; 72°; 108° і 144°. **13.** Так. **14.** Ні. **18.** $(a + b - c) : 2$. **19.** 60°; 120°; 60°; 120°. **21.** Ні. **23.** 3. **24.** 110°; 100°; 90° і 60°. **26.** 18 см. **27.** 6 см; 9 см; 18 см і 11 см. **33.** 30°; 50°; 100°. **50.** 78°; 102°; 78°; 102°. **51.** г) 70°; 110°; 70°; 110°. **52.** 69°; 111°; 69°; 111°. **53.** 90°. **54.** 45°; 135°; 45°; 135°. **55.** 58°; 122°; 58°; 122°. **57.** 6 см; 10 см; 6 см і 10 см. **58.** 16 см; 8 см; 16 см і 8 см. **59.** 7 дм. **65.** 30 см. **66.** 5 см; 12 см; 5 см; 12 см. **67.** 22 см або 26 см. **74.** 1) 6 см; 2) 12 см. **78.** 1 – В; 2 – Д; 3 – Б; 4 – Г. **79.** 3. **80.** 90°; 90°; 90°; 90°, або 30°; 150°; 30°; 150°, або 60°; 120°; 60°; 120°. **81.** $2(a + b)$, або $2(b + c)$, або $2(a + c)$. **86.** Так. **87.** Ні. **100.** 6 см. **101.** 20° і 70°. **103.** 28 см. **104.** 4 см і 10 см. **108.** 24 см або 30 см. **110.** 60°; 120°; 60°; 120°. **111.** 20°; 70°; 90°. **112.** $0,5a$. **113.** 10 см. **114.** 24 см. **115.** а) 60°; 120°; 60°; 120°; б) 20 см. **119.** 65°. **121.** 3 см і 9 см. **122.** 1 : 3. **124.** 9 см. **125.** 28 см. **129.** Ромб. **132.** 24 см. **133.** 7 см. **142.** 1 : 2. **144.** 1 – Г; 2 – Д; 3 – В; 4 – Б. **146.** 34 см. **148.** 107° або 43°. **163.** 16 см. **165.** $(a + b + c) : 2$. **167.** 77 см. **168.** $d + d_1$. **170.** 12 см, 20 см, 28 см. **171.** 3 см, 4 см. **172.** 4 см. Паралелограм, якщо $ABCD$ — паралелограм; прямокутник, якщо $ABCD$ — ромб; ромб, якщо $ABCD$ — прямокутник; квадрат, якщо $ABCD$ — квадрат. **173.** Вказівка. Розгляньте випадки: $ABCD$ — паралелограм, $ABCD$ — прямокутник, $ABCD$ — ромб тощо. **174.** 32 см. **175.** 30 см. **179.** 10 см і 2,5 см. **180.** 3 см і 6 см. **181.** 2 см. **186.** а) $AC = BD$; б) $AC \perp BD$; в) $AC = BD$ і $AC \perp BD$. **201.** 85°; 95°; 85°; 95°. **202.** 60°; 120°; 60°; 120°. **203.** 60°; 120°; 60°; 120°. **204.** 60°; 120°; 60°; 120°. **205.** 75°; 105°; 75°; 105°. **209.** 80°; 80°; 20°. **210.** 80° і 130°. **212.** 44 см. **213.** 34 см. **214.** 3 см. **215.** 2 см. **216.** 6 см, 6 см, 6 см, 15 см. **217.** 12 см. **218.** 24 см. **220.** 3 см і 5 см. **221.** 4 см і 10 см. **222.** а) 27 см і 33 см; в) 24 см і 36 см. **223.** 35 см або 40 см. **224.** 10 см. **226.** 3 см. **227.** 10 см і 15 см. **228.** 5,5 см; 7 см; 8,5 см. **229.** 19 см. **231.** 7 см. **233.** 60°, 120°, 120° і 60°. **234.** 4,5 см. **236.** 1 : 2. **239.** $\frac{4a}{3}$; $\frac{5a}{3}$. **240.** CD. **243.** Так. **246.** 6 см, 8 см, 8 см. **261.** 1 : 5. **263.** 60°. **265.** 23°20′ або 124°25′. **266.** 74°26′. **267.** 15°. **268.** 18°; 36°; 144°; 126°. **269.** 160°; 80°; 120°. **270.** 45°; 52°30′; 82°30′. **271.** 80°; 100°; 180°. **272.** 30° і 150°. **273.** 78°30′; 101°30′; 157°; 203°. **276.** 52°; 62°; 66°. **277.** 5, 7 і 8. **278.** Вказівка. Розгляньте випадки: а) хорди паралельні; б) хорди не паралельні. **279.** 40°; 40°; 100°. **280.** 70° і 90°. **281.** 90° і 40°. **282.** 120° і 40°. **283.** 67,5°. **287.** 39 см. **288.** 1 : 3. **289.** 150° або 105°. **301.** 100° і 60°. **302.** 12 см; 16 см; 24 см. **303.** 8 см. **304.** а) Так; б) ні. **307.** 12 см. **308.** 5 см. **309.** 6 см. **311.** 12 см. **312.** 2,5 см. **313.** 1,5 см. **314.** 2 м. **315.** $12r$. **316.** 8 см і 28 см. **317.** 80 см. **321.** 113°; 67°; 113°; 67°. **330.** 6 см. **332.** 80° і 140°. **333.** 2 см і 6 см. **334.** 1 : 3. **335.** 90°; 112°; 90°. **336.** Поза трапецією.

341. а) Прямокутник або квадрат; б) рівнобічна трапеція; в) ромб або квадрат. **344.** 20°; 50°; 110°. **345.** 144° і 216°. **346.** 29 см. **347.** 26 см. **356.** а) 2 : 5; б) 3 : 5; в) 1 : 5; г) 1 : 1. **358.** 9,1 см. **359.** 40 см. **360.** 3 : 1. **361.** 6 см і 33 см. **362.** 7 : 9 і 2 : 9. **363.** $m : (m + n)$ і $n : (m + n)$. **364.** 1 : 2 і 3 : 1. **367.** 2 : 3. **368.** 1 : 2. **369.** 101. **370.** 1 : 4 000 000. **371.** 1 : 4; 3 : 8. **372.** 8; 1,6; 4. **376.** $0{,}5a$; $0{,}1a$; $0{,}4a$. **377.** $am : (m + n)$; $an : (m + n)$. **379.** а) Ні; б) ні. **380.** 1) $x = 2$; $y = 10$; 2) $x = 6$; $y = 7{,}5$. **382.** 15 см. **383.** 1 : 3 і 1 : 4. **384.** 27 : 8 і 4 : 3. **385.** 7,5 см і 12 см. **391.** 20° і 35°. **394.** 150° і 30°. **401.** б) 60 см і 20 см. **403.** а) 12 см; б) 36 см. **412.** 5 : 8. **414.** 5 см. **416.** 1 : 3 : 1; 1 : 4. **419.** 6,4 см; 22,4 см. **423.** 21 см. **424.** 44 см і 48 см. **440.** 36 м, 44 м. **442.** Так. **444.** 16 см. **446.** а) 35 см; б) 3 : 8. **450.** а) 6 см; 10 см; 12 см; в) 13,5 см; 22,5 см; 27 см. **451.** 8 см; 3 см; 4 см. **452.** 8 см і 10 см; $5\frac{1}{3}$ см і $6\frac{2}{3}$ см. **453.** 3 см і 4,5 см. **454.** 2 см і 10 см. **456.** Так. **458.** 36°; 72°; 72°. **459.** $1 : n$. **460.** 390 м. **461.** а) $\frac{mb}{c}$; б) $\frac{b(c-n)}{c}$. **463.** $3\frac{2}{3}$ см і $8\frac{1}{3}$ см. **464.** 8 см. **465.** 12 см. **467.** 10,5 см; 13,5 см. **468.** 15 см; 14 см або $18\frac{2}{3}$ см. **469.** 15 см. **470.** 6 см і 9 см. **471.** 15 см. **472.** 10 см і 18 см. **484.** а) 4 см і 6 см; в) 24 см. **486.** 25 см і 45 см. **487.** 3 : 5, 1 : 3. **488.** 6 см і 10 см. **489.** 3 см. **490.** 102 см. **491.** 4 см і 8 см. **492.** 8 см; 10 см; 14 см. **495.** 37 см і 40 см. **496.** 6 см і 18 см. **497.** 16 см. **498.** 18 см. **500.** 36 см. **502.** а). **505.** 20 см. **507.** 8 см і 10 см. **508.** 7,5 см і 10,5 см. **509.** 3,6 см і 14,4 см. **510.** 26 см; 26 см і 20 см. **512.** 39 см; 21 см; 27 см. **513.** 15 см; 21 см і 24 см. **514.** 28 см і 29 см. **515.** 20 см. **518.** $mn : (m + n)$. **519.** 28,8 см. **540.** 2 см і 6 см. **541.** 15 см; $5\sqrt{3}$ см. **542.** 6 см. **543.** 4,5 см і 13,5 см. **544.** 12 см. **547.** 2 : 3. **548.** $(a^2 + c^2) : 2c$; 24,25 см. **551.** 28 см і 63 см. **552.** 50 см і 72 см. **553.** 5,2 см. **554.** 9 см і 16 см. **572.** 2,5 см; $2{,}5\sqrt{3}$ см. **574.** 13 см. **575.** 68 см. **576.** в) $5\sqrt{3}$ см і 5 см; г) $\sqrt{5}$ см і $2\sqrt{5}$; ґ) 8 см і 6 см. **577.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **578.** $\frac{2\sqrt{3}m}{3}$. **579.** $a\sqrt{2}$. **580.** $\frac{c\sqrt{2}}{2}$. **583.** 184 см. **584.** 4 см і 6 см. **585.** 12,5 см. **586.** 24 см. **587.** а) 24 см; в) 15 см; 15 см; 18 см; г) $3\sqrt{2}$ см. **589.** 15 см. **590.** 80 см. **593.** 16 м. **594.** 50 м. **599.** 50 см. **602.** 4 см і 20,5 см. **603.** а) 5 см; $2\sqrt{13}$ см; $\sqrt{73}$ см; б) 4,8 см. **604.** 30 см і 40 см. **605.** 40 см. **606.** 6 см і $3\sqrt{7}$ см. **608.** $\sqrt{n^2+3m^2}$. **609.** 4 см. **610.** 2,8 см і 10 см. **611.** $2r\sqrt{3}$. **612.** 3 см або 21 см. **613.** $14\sqrt{3}$ см. **614.** 16 см. **615.** 14 см. **616.** 24 см. **617.** а) $3\sqrt{21}$ см; б) $5\sqrt{5}$ см. **618.** $ab:\sqrt{a^2+b^2}$. **619.** 12 см. **620.** $18\left(2+\sqrt{3}\right)$ см. **622.** $2:\sqrt{13}$. **634.** $20\sqrt{3}:3$; $10\sqrt{3}:3$. **635.** 15 см. **637.** 7,5 см. **639.** 2 : 1. **640.** 60°. **641.** $a\sqrt{3}:2$. **642.** 6 см; $2\sqrt{10}$ см; $6\sqrt{10}$ см. **643.** 16 см і 9 см. **645.** $a\sqrt{2}:2$. **647.** $4{,}5:\sqrt{5}$; $18:\sqrt{5}$; $9:\sqrt{5}$.

648. 1,75a і 0,25a. **649.** 3,75 футів. **665.** $\sin\alpha=\frac{3}{5}$; $\cos\alpha=\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$; $\sin\beta=\frac{4}{5}$; $\cos\beta=\frac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\beta=\frac{4}{3}$. **670.** а) $\sin\angle A=\frac{7}{25}$; $\cos\angle A=\frac{24}{25}$; $\operatorname{tg}\angle A=\frac{7}{24}$; $\sin\angle B=\frac{24}{25}$; $\cos\angle B=\frac{7}{25}$; $\operatorname{tg}\angle B=\frac{24}{7}$. **673.** $\cos\alpha=\frac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$. **677.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$; 2. **678.** $c\sin\alpha$; $c\cos\alpha$. **682.** $\frac{n}{\sin\alpha}$; $\frac{n}{\operatorname{tg}\alpha}$. **685.** а) 1,8 см; в) 6 см. **688.** $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha=2$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{2}$. **689.** $2b\sin\frac{\alpha}{2}$; $b\cos\frac{\alpha}{2}$; $b\sin\alpha$. **692.** $\frac{h}{\sin\alpha}$. **693.** $2r\sin\alpha$; $2r\cos\alpha$. **694.** $2a\cos\alpha$. **696.** $\frac{a-b}{2\cos\alpha}$; $\frac{a-b}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **711.** а) 0,5; б) 1. **713.** а) 30°; 60°; 90°; б) 45°; 30°; 105°. **719.** 45° і 135°. **720.** 60° і 120°. **721.** 45° і 135°. **722.** 60°; 120°; 90°; 90°. **724.** 30°; 30°; 120°. **728.** 30°; 30°; 120°. **729.** 30°; 30°; 120°. **730.** 45°; 45°; 90°. **732.** 6 см, 8 см. **734.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{21}}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\sqrt{21}}{21}$. **757.** 29,47 м. **758.** 77,04 см і 35,92 см. **759.** 125,17 см. **761.** 14,6 см. **762.** 26,25 см; 40,4°; 49,6°. **763.** 39°. **764.** 62,5°; 62,5°; 55°. **765.** 12,8 см; 68,5°. **771.** 25,9°; 64,1°. **774.** 34,9 см. **776.** 53°; 127°; 53°; 127°. **777.** 73,7°; 16,3°; 163,7°; 106,3°. **780.** $\frac{d}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **781.** 54,3°. **785.** $\frac{b-a}{2\sin\alpha}$; $\frac{b-a}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **787.** 6,5, 13,1, 3,2, 25,2, 5,2 см. **810.** $128\frac{4}{7}°$. **811.** 8; 9. **812.** Так. **814.** Так. **816.** 60° і 210°; $a\left(1+\sqrt{3}\right)$. **820.** 90°; 90°; 120°; 120°; 120°; $a\left(2+\sqrt{3}\right)$. **825.** Ні. **828.** $6+5\sqrt{2}$; 45°; 90°; 90°; 135°; $\sqrt{13}$; $\sqrt{26}$. **840.** 60°; 80°; 40°. **841.** 70°, 50° і 60°. **842.** 8 см. **843.** 57°або 33°. **844.** 60°; 90°; 90°; 120°. **845.** а) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; б) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; в) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **847.** $\sqrt{4r^2+a^2}:2$. **848.** $2\sqrt{R^2-r^2}$. **849.** $\sqrt{2}$ см. **850.** $\sqrt{3}:2$. **851.** 6 см. **852.** 6 см; 8 см; 10 см; 12 см, r = 4 см. **853.** 2) 108°; 3) 36°; 4) 72°. **854.** 90°, 90°, 120⁰, 120⁰ і 120°. **856.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; 120°. **857.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **858.** а) 3 см; б) 6,25 см. **859.** 13 см. **860.** $2\sqrt{26}$ см. **861.** $6\sqrt{5}$ см. **862.** p – r. **866.** 1 – Б; 2 – А; 3 – Г; 4 – В. **880.** 8 м. **881.** 25 м². **883.** 14 см.

886. 32 см². **887.** 2 : 1. **888.** 6 см і 9 см. **889.** 7 см і 8 см. **892.** 2 кв. од. **894.** 4 : 25. **895.** 168 см². **896.** 48 м². **898.** 1 : 2. **899.** 16 см² або 48 см². **900.** 40 см². **902.** 160 см². **903.** 1200 см². **905.** У 4 рази. **909.** $4\sqrt{3}r^2$. **910.** ac : 4. **911.** m^2: 2. **912.** $a^2b^2 : (a+b)^2$. **916.** 90°. **924.** $3\frac{3}{4}$ см² або $6\frac{2}{3}$ см². **925.** 350 см². **926.** 84 см². **927.** $10\sqrt{3}$ см². **929.** 22,5 см. **930.** 192 см² або 320 см². **931.** 18 см². **933.** a^2: 2. **934.** $400\sqrt{2}$ см². **935.** 1590 см². **939.** 32 см². **940.** $24\sqrt{3}$ см². **941.** 4,76 см². **942.** 120 см². **943.** 3500 см². **945.** 54 см². **946.** 90 см². **947.** 120 м². **948.** 12 см². **949.** 128 см². **950.** 40 см². **951.** 20 см. **955.** 348 см². **953.** 56 см². **955.** $\sqrt{2Q}$. **956.** $1350\sqrt{3}$ см². **957.** 180 см². **958.** 624 см². **959.** 72 см². **960.** 255 см². **961.** $338\sqrt{3}$ см². **962.** 202,8 см². **966.** 10 см; 10 см; 2 см і 18 см. **967.** 128 см². **968.** 6 см. **969.** 156 см². **970.** a^2. **972.** 480 см². **973.** $576\sqrt{3}$ см². **974.** 384 см². **991.** а) 16 см²; в) c^2 : 4. **992.** 20 см². **994.** 432 см². **998.** а) $4\frac{8}{13}$ см; б) 9,6 см. **999.** 8 см; 9,6 см; 9,6 см. **1000.** 8 см. **1001.** 5,625 см. **1002.** 5 см². **1006.** 20 см. **1007.** $\sqrt{3}$ см². **1009.** 10 кв. од. **1010.** 13 м² або 7 м². **1011.** $8\left(1+\sqrt{3}\right)$ м². **1012.** 12 см². **1013.** $3\sqrt{3}R^2$. **1014.** 1 см або 4 см. **1015.** 4,8 см² і 7,2 см². **1016.** а) 24 кв. од.; б) 8 кв. од. **1019.** 15 см². **1020.** 1 : 2. **1024.** 1 : 4. **1025.** 1 : 2. **1026.** $8\left(2+\sqrt{3}\right)$ см. **1027.** 15 см; 12,5 см; 12,5 см. S = 75 см². 2. 1176 см². **1029.** 84 см². **1030.** 2,25S. **1053.** 0,75 a^2. **1055.** 0,5 a^2. **1058.** 30°. **1062.** 30°. **1063.** 54 м. **1072.** $a\cos\frac{\alpha}{2}$; $a\sin\frac{\alpha}{2}$. **1074.** а) 46,3 см²; б) 71 см². **1075.** $\frac{8r}{\sin\alpha}$; $\frac{4r^2}{\sin\alpha}$. **1082.** Через точку всередині даного трикутника проведіть три відрізки, паралельні його сторонам. **1083.** Розмістіть дві трапеції всередині квадрата так, щоб їх більші основи лежали на діагоналі квадрата. **1084.** Доведіть, що $KLEF$ — прямокутник. **1086.** $2\sqrt{2}a$. **1087.** Якщо O — центр ромба, $AO = a$, $OB = b$, $OP = x$, то $AP \cdot PC = a^2 - x^2$ і $AB^2 - PB^2 = a^2 - x^2$. **1088.** 30°. **1089.** Доведіть, що $\angle PKD = \angle PDK = 30°$. **1090.** 90°. **1092.** Спочатку побудуйте прямокутний трикутник, у якого один катет дорівнює даному відрізку, а прилеглий кут 22,5°. **1093.** Побудуйте трикутник за даним відрізком і прилеглими кутами 45° і 112,5°. **1094.** Покажіть, що радіус вписаного кола дорівнює 1, і відкладіть на катетах від вершини прямого кута такі відрізки (як різниці двох сторін). **1095.** Скористайтесь теоремою Фалеса. **1096.** Проведіть через вершини даного трикутника ABC прямі, перпендикулярні до висот. Одержимо трикутник, середини сторін якого — A, B і C. **1097.** 8 см. Скористайтесь властивістю середньої лінії трапеції. **1102.** З двох таких п'ятикутників можна скласти шестикутник, кожна сторона якого паралельна протилежній стороні і дорівнює їй, а такий шестикутник — фігура паркетна.

1103. Доведіть, що $\triangle AED = \triangle CDK$. **1104.** Доведіть, що $\triangle ABK = \triangle PCK = \triangle PDA$. **1105.** Скористайтеся тотожністю $\sin\alpha = \sin(180 - \alpha)$. **1106.** Проведіть серединний перпендикуляр основи трикутника і побудуйте відрізок, що дорівнює даної $\frac{2}{3}$ медіани. **1107.** Визначте міру кута між даними сторонами. **1108.** Задача може мати два розв'язки або не мати жодного. **1109.** Покажіть, що висоти таких трапецій рівні. **1110.** Існує такий чотирикутник неопуклий. **1111.** Проведіть діагоналі квадрата і доведіть рівність чотирьох трикутників. **1114.** 30°. **1115.** $1+\sqrt{2}$. **1117.** Не існує. **1118.** 8, 6 і 10. **1120.** $5\frac{2}{3}$ ліктя. **1123.** У старих китайських працях розглядався один випадок, коли дві сторони квадрата лежать на катетах. Для цього випадку $x = \frac{60}{17}$. **1124.** 4,8. **1125.** Побудуйте спочатку який-небудь один такий трикутник з вершинами на двох сторонах даного трикутника. **1127.** Доведіть спочатку, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін. **1128.** 4,8. **1129.** Доведіть, що $\triangle HBA_1 \sim \triangle CAA_1$. **1130.** Нехай O — середина AC. Тоді $\triangle KAO \sim \triangle DPK$, $\angle KEP + \angle KDP = \angle EKF + \angle EKA = 45°$. **1131.** 90°, 90°, 135° і 45°. **1133.** Нехай у $\triangle ABC$ $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $\angle C = 90°$, $\angle A = 15°$. Серединний перпендикуляр гіпотенузи перетинає AC в точці K. Тоді $BK = KA = 2a$, $CK = b - 2a$. Застосуйте теорему Піфагора до $\triangle BKC$. **1134.** $ab\sqrt{2} : (a+b)$. **1135.** 12 см і 8 см. **1137.** 84 см. **1140.** 70° і 110°. **1141.** 64 см. **1144.** 64 см. **1145.** 12 см. **1146.** 12 см. **1147.** 48 см. **1151.** 9 см. **1152.** 50 см. **1154.** 13 см і 23 см. **1155.** 8 см і 20 см. **1156.** $0{,}5l$ і $1{,}5l$. **1158.** 4 см. **1160.** 111° і 124,5° або 33° і 16,5°. **1161.** 12 см і 30 см. **1163.** 93 см. **1165.** 16 см і 24 см. **1166.** 18 см. **1168.** 85,5 см; 28,5 см; 101,5 см. **1169.** 20 см або $18\frac{6}{13}$ см. **1170.** 22 см. **1171.** 7,2 см. **1172.** 9 см. **1173.** 6 см. **1174.** 6 см. **1177.** 8 см. **1179.** 6 см. **1180.** 10 см. **1182.** $\sqrt{m(m+n)}$; $\sqrt{n(m+n)}$. **1185.** 6 см. **1186.** 20 см. **1187.** 10 см; $4\sqrt{10}$ см; $2\sqrt{13}$ см. **1188.** $3\sqrt{5}$ см і $\frac{8\sqrt{10}}{3}$ см. **1189.** 7,5 см. **1190.** $16\frac{2}{3}$ см і 25 см. **1192.** 13 см. **1195.** 30°; 30°; 150°; 150°. **1197.** $\frac{a^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$. **1198.** $2a\cos\frac{\alpha}{2}$; $2a\sin\frac{\alpha}{2}$. **1199.** $\frac{8r}{\sin\alpha}$; $\frac{4r^2}{\sin\alpha}$. **1201.** $\frac{h^2(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$. **1206.** а), б) 54 см. **1208.** 8 см². **1209.** 300 см². **1211.** 588 см². **1213.** 2 : 1. **1214.** 240 см². **1215.** 80 см². **1218.** 9,6 см². **1219.** 216 см². **1221.** 684 см². **1222.** 72 см². **1224.** 225 см². **1225.** 864 см². **1226.** 4 см; 8 см; $2\sqrt{2}$ см; $2\sqrt{2}$ см. **1227.** $32\sqrt{2}$ см². **1229.** 5 см і 15 см. **1230.** 5 см. **1232.** 294 см². **1235.** 468 см²; 37,44 см; 23,4 см.

ЗМІСТ

Розділ 4. Многокутники та їх площі

Додатки