**11 клас, Геометрія**

**Урок 3**

**Записати в класний зошит:**

1. Тему уроку.
2. Відповіді на запитання (якщо є).
3. Короткий конспект.
4. Розв’язані задачі по темі.
5. Домашнє завдання.

**Класна робота. Тема «Координати та вектори у просторі»**

***Теоретична частина:***

**Координати вектора у просторі. Рівність векторів, заданих координатами. Модуль вектора.**

 Якщо у просторі ввести систему координат, то кожний вектор можна задати трійкою чисел - координатами вектора у просторі.

Координатами вектора  з початком А(х1; у1; z1) і кінцем В(х2; у2; z2) називають числа х = х2 – х1; у = у2 – у1; z = z2 – z1.

Нагадаємо, що записують вектор , вказуючи його координати наступним чином  (х;у;z). Наприклад,  тощо.

Приклад 1. Знайти координати вектора , якщо А(-5; 2; -3), B(7; -1; 0).

Розв’язання.  (7 - (-5);-1 - 2;0 - (-3)) ,отже  (12;-3;3).

Координати вектора можуть бути будь-які дійсні числа. Всі координати нульового вектора дорівнюють нулю (0;0;0).

Як і на площині,

рівні вектори мають відповідно рівні координати, і навпаки: якщо у векторів відповідно рівні координати, то вектори рівні.

Рівність векторів у просторі

Якщо  (а1;а2;а3) =  (b1;b2;b3), то 

Якщo  то  (a1; а2; а3) =  (b1;b2;b3).

Протилежні вектори в просторі

Якщо маємо  (a1; a2; а3),  (b1;b2;b3) i  = -, то 

Якщо маємо  (а1;а2;а3),  (b1;b2;b3) і  то  = -

Сума векторів

У просторі для трьох векторів (ОА, ОС і OO1), які не лежать в одній площині й мають спільний початок (О), їхня сума зображається діагоналлю паралелепіпеда (ОB1), побудованого на цих векторах, причому початок вектора-суми збігається з початком цих векторів (рис. 2).

Координат вектора-суми векторів дорівнюють сумі відповідних координат даних векторів.



Рис. 2

Сума векторів у просторі

 (а1; а2;a3) +  (b1; b2; b3) =  (а1 + b1; а2 + b2; a3 + b3).

Різниця векторів у просторі  (а1; а2; а3) -  (b1; b2; b3) =  (а1- b1; а2- b2; a3 - b3).

Множення вектори чи число в просторі

* ∙  (а1; а2; а3) =  (а1; а2; а3).

Колінеарність векторів у просторі

Якщо є вектори  (а1; a2; а3),  (b1, b2; b3) і вони колінеарні, то  =  = 

Якщо є вектори  (а1; а2; а3),  (b1; b2; b3) і  =  = , то  і  — колінеарні вектори.

Приклад 2. Дано точки А(-1;3;4), В(0;5;-1), С(х;2;z), D(1;у;-2). Знайти х, у, z, якщо  = .

Розв’язання.



3) Оскільки  = , то маємо 1 - х = 1; у - 2 = 2; -2 - z = -5.

Отже, маємо х = 0; у = 4; z = 3.

Модуль вектора (х;у;z) дорівнює 

Приклад 3. Знайти модуль вектора: 

Розв’язання.



Приклад 4. Відомо, що модуль вектора (-4;у;) дорівнює 5. Знайти y.

Розв’язання. 

За умовою  

***Переглянути презентацію «До уроку 3»***

***Рекомендую для перегляду:***

1. <https://www.youtube.com/watch?v=22K491v7RqI>

2. <https://www.youtube.com/watch?v=Zioo1myOQBY>

3. <https://www.youtube.com/watch?v=u9_xfkc3lCo>

***Практична частина:***

(2006)19. Ортогональною проекцією відрізка з кінцями у точках  і  на координатну площину  є

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **А** | **Б** | **В** | **Г** | **Д** |
| пряма | промінь | відрізок | точка | фігура, що відрізняється від перелічених |

(2007)19. Знайдіть координати точки , відносно якої симетричні точки  і .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **А** | **Б** | **В** | **Г** | **Д** |
|  |  |  |  | інша відповідь |

(2009)12. Знайдіть вектор , якщо , .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **А** | **Б** | **В** | **Г** | **Д** |
|  |  |  |  |  |

(2010)28. На рисунку зображено прямокутну систему координат у просторі, на осях якої позначено точки , , , . Установіть відповідність між точками , , ,  (1 – 4) та їхніми можливими координатами (А – Д).



|  |  |
| --- | --- |
| Точка  | Координати точки |
| **1** |  | **А** |  |
| **2** |  | **Б** |  |
| **3** |  | **В** |  |
| **4** |  | **Г** |  |
|  | **Д** |  |

(2010)17. Обчисліть скалярний добуток векторів  і .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **А** | **Б** | **В** | **Г** | **Д** |
|  |  |  |  |  |

(2012)4. Яка з наведених точок належить осі  прямокутної системи координат у просторі?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **А** | **Б** | **В** | **Г** | **Д** |
|  |  |  |  |  |

(2012)3. Яка з наведених точок лежить у площині  прямокутної системи координат у просторі?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **А** | **Б** | **В** | **Г** | **Д** |
|  |  |  |  |  |

(2014)3. Вектор  лежить на осі  прямокутної декартової системи координат у просторі (див. рисунок), і його початок збігається з початком координат. Визначте координати вектора , якщо його довжина дорівнює .



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **А** | **Б** | **В** | **Г** | **Д** |
|  |  |  |  |  |

(2014)3. Задано точки  і . Знайдіть координати вектора .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **А** | **Б** | **В** | **Г** | **Д** |
|  |  |  |  |  |

(2015)24. У прямокутній декартовій системі координат у просторі  задано точки  і . До кожного початку речення (1 – 4) доберіть його закінчення (А – Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

|  |  |
| --- | --- |
| Початок речення | Закінчення речення |
| **1** | серединою відрізка  є точка | **А** | . |
| **2** | вектор  має координати | **Б** | . |
| **3** | проекцією точки  на площину  є точка | **В** | . |
| **4** | проекцією точки  на вісь  є точка | **Г** | . |
|  | **Д** | . |

(2015)24. У прямокутній декартовій системі координат  у просторі задано точки:  – початок координат, . До кожного початку речення (1 – 4) доберіть його закінчення (А – Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

|  |  |
| --- | --- |
| Початок речення | Закінчення речення |
| **1** | Точка  | **А** | є симетричною точці  відносно координатної площини  |
| **2** | Точка  | **Б** | лежить у координатній площині  |
| **3** | Точка  | **В** | є серединою відрізка  |
| **4** | Точка  | **Г** | є симетричною точці  відносно початку координат |
|  | **Д** | лежить на координатній осі  |

(2016)8. У прямокутній декартовій системі координат у просторі на осі  вибрано точку  (див. рисунок). Серед наведених варіантів укажіть можливі координати цієї точки.



|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **А** | **Б** | **В** | **Г** | **Д** |
|  |  |  |  |  |

(2016)5. Яка з наведених точок належить координатній площині  прямокутної системи координат у просторі?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **А** | **Б** | **В** | **Г** | **Д** |
|  |  |  |  |  |

(2017)5. У прямокутній системі координат у просторі задано сферу із центром у початку координат, якій належить точка . Яка з наведених точок також належить цій сфері?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **А** | **Б** | **В** | **Г** | **Д** |
|  |  |  |  |  |

(2017)7. У прямокутній системі координат у просторі задано сферу з центром у точці . Відрізок  – діаметр цієї сфери. Визначте координати точки , якщо , .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **А** | **Б** | **В** | **Г** | **Д** |
|  |  |  |  |  |

***Домашнє завдання:***

Розв’язати тести подані вище та опрацювати теоретичний матеріал.

Зверніть увагу!!!

Звіт уроку №1-2 з розв’язками сфотографувати та кинути на електронну адресу: nadya18041979@ukr.net до 14.04.2020.

**В темі листа вказати прізвище, алгебра чи геометрія, № уроку!!!**

**Урок 4**

**Класна робота. Тема «Розв’язування задач. Самостійна робота»**

Задача 1. Знайдіть координати і довжини векторів  i , якщо А(2; -3; -1), В(-4; -8; 5), С (3; 1; -2).

Розв’язання

 (- 4 - 2; -8 - (- 3); 5 - (- 1)) =  (-6; -5; 6);

 (3-2; 1- (- 3); - 2 - (- 1)) =  (1; 4; - 1).

||=  = ;  =  =  = 3.

Відповідь:  = (-6;-5;6),  = (1;4;-1),  = ;  = 3.

Задача 2. Задано вектори  (3; -2; -1);  (1; 1; 2);  (-3; 2; 4). Знайдіть координати векторів  =  + ,  =  - ,  = 2 + 3 - .

Розв’язання

 =  +  =  = ;  =  =  =  = ;

 = 2 + 3 -  = 2 ∙  + 3 -  =

 = .

Відповідь:  = ;  = ;  = 

Задача 3. Знайдіть значення m і n, при яких вектори  (3; m; 5) і  (- 6; - 2; n) колінеарні.

Розв’язання

У колінеарних векторів координати пропорційні, звідси  =  = .

Маємо два рівняння:

1)  = , тоді m =  = 1;

2)  = , тоді n =  = -10.

Відповідь: m = 1, n = -10.

Задача 4. Знайдіть кут між векторами  (1; 2; - 3) і  (2; -1; - 4).

Розв'язання

Скористаємося формулою cos =  =  ∙  = 1 ∙ 2 + 2 ∙ (-1) + (-3) ∙ (-4) = 2 - 2 + 12 = 12.

||= , ||=  = ,

тоді cos =  =  =  = .

Звідси  = arcos .

Відповідь: arcos .

Задача 5. При якому значенні р вектори  (3; р: -1) і  (р; -2; 5) взаємно перпендикулярні?

Розв’язання

Два ненульові вектори перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їхній скалярний добуток дорівнює нулю.

 ∙  = 3 ∙ p + p ∙ (-2) +  (-1) ∙ 5 = 3р - 2р - 5 = р - 5,  ∙  = 0, тоді р - 5 = 0. Звідси р = 5.

Відповідь: р = 5.

Задача 6. Знайдіть довжину діагоналі АС паралелограма ABCD, якщо А (2; -6; 0), В (-4; 8; 2), D(0; -12; 0).

Розв’язання

Оскільки  (- 6; 14; 2),  (- 2; - 6; 0), то  =  + ,  (- 8; 8; 2) (див. рисунок).



Рис. 5

Тоді || =  =  = 2.

Відповідь: 2.

Задача 7. Знайдіть кут між стороною АС і медіаною BМ трикутника ABC, якщо А (- 3; - 5; 1), В (- 4; - 1; - 2) і С (3; 3; 1).

Розв’язання

Кут між стороною АС та медіаною ВМ дорівнює куту  між векторами   та   (див. рисунок) або, якщо кут між цими векторами тупий, куту 180° - . Знайдемо координати точки М:

M (; ; ) = M(0; -1; 1).

Тоді   (-4; 0; -3),   (-3; -4; 0);

cos =  =  == .

 = arcos  - гострий кут. Отже, кут між стороною АС та медіаною ВМ дорівнює arcos 

Відповідь: arcos .



Рис. 6

Задача 8. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах  (3; 0; -4) і   (0; 5; 0).

Розв’язання

Нехай паралелограм ABCD побудований на векторах  і  (див. рисунок).

Площа паралелограма дорівнює добутку суміжних сторін на синус кута між ними: 5 = || ∙ || sin (див. рисунок).

|| =  = 5; || =  = 5; cos =  =  = 0.

Оскільки cos  = 0, то  = 90°. Тоді sin  = 1 і S = 5 ∙ 5 ∙ 1 = 25.

Відповідь: 25.



Рис. 7

**Самостійна робота**

1. Знайдіть відстань від точки А(1;2;3) до початку координат.

А) $\sqrt{12}$ ; Б) $\sqrt{13}$ ; В)$ \sqrt{14}$ ; Г) інша відповідь.

2. Знайдіть відстань між точками А(-1; 1; -1) і В(-1; 0; -2)

А)$ \sqrt{2}$ ; Б) 2 ; В) $2\sqrt{2}$ ; Г) інша відповідь

3. На осі Ох знайдіть точку рівновіддалену від точок А(1;2;2) і В(-2;1;4).

А) (-1;0;0); Б) (-2;0;0); В) (2;0;0); Г) інша відповідь

4. . На осі Оу знайдіть точку рівновіддалену від точок А(-2; 1; 4)) і В(1; 2; 2).

 А) (0; 6; 0); Б) (0; - 6; 0); В) (0; 4; 0); Г) інша відповідь.

5. У трикутнику АВС А( 2; 1; 3), В( 2; 1; 5 ), С( 0; 1; 1). Знайдіть довжину медіани АМ.

А) 1; Б) 2; В) 2,5; Г) 0,5; Д) інша відповідь.

6. У трикутнику АВС А( 2; 1; 3), В( 2; 1; 5 ), С( 0; 1; 1). Знайдіть довжину медіани СМ.

А) $\sqrt{12}$ ; Б) $2\sqrt{2}$ ; В) $\sqrt{13}$ ; Г) $\sqrt{10}$ ; Д) інша відповідь.

7. На осі абсцис знайдіть точку М, відстань від якої до точки А(3; -3; 0) дорівнює 5.

А) ( -1; 0; 0); Б) (-1; 7; 0); В) (7; 0: 0); Г) (7; 0: 0) і ( -1; 0; 0); Д) інша відповідь.

8. На осі ординат знайдіть точку М, відстань від якої до точки А(4; 3; 0) дорівнює 5.

А) ( 0; 0; 0); Б) (0; - 6; 0); В) (0; 6: 0) та (0; 0; 0); Г) (6; 0: 0); Д) інша відповідь.

9. Вектор, довжина якого дорівнює 3 , має однакові координати. Знайдіть координати вектора.

А) (1; 1; 1) або (-1; -1; -1); Б) ( $\sqrt{3 }; \sqrt{3} ; \sqrt{3} $) або ($-\sqrt{3 }; -\sqrt{3} ;- \sqrt{3}$) ;

В) ($3\sqrt{3 };3 \sqrt{3} ; 3\sqrt{3}$ ) або ($-3\sqrt{3 }; -3 \sqrt{3} ; -3 \sqrt{3}$ ); Г) інша відповідь.

10. Знайдіть довжину вектора $\vec{АВ}$, якщо А( -1; 1; -1) і В(-1; 1; -1).

 А) $\sqrt{2}$ ; Б) 2; В) $2\sqrt{2}$ ; Г)інша відповідь.

11. Знайдіть довжину вектора $\vec{ОА}$, де O – початок координат і А(1; 2; 2).

А) 2; Б) 3 ; В) 4; Г) інша відповідь.

12. Яка з точок М є серединою відрізка АВ, якщо А(1; -1; -1); В(1; -1; 1)?

А) М(2; -2; 0); Б) М(1; -1; 0); В) М( -1; 1; 1); Г) інша відповідь.

13. Знайти координати вектора $\vec{ВА }$ , якщо А(0; 1; -1) і В (1; -1; 0).

А) ( 1; 0; -1); Б) (-1; 2; -1); В) (1; -2: 1); Г) інша відповідь.

14. Від точки А відкладено вектор $\vec{АВ}= \vec{а}$ . Знайдіть координати точки В, якщо А( - 1; 5; 0) і $\vec{а}(1; -3;0)$ .

А) ( 2; 2; 0); Б) (0; 8; 0); В) (0; 2; 0).

15. Дано вектори $\vec{а} \left(4; -2; -4\right)$ та $\vec{b} \left(6; -3; 2\right)$. Обчисліть ($\vec{а}- \vec{b}$ )2.

 А) 41; Б) 33; В) інша відповідь.

16. Дано вектори $\vec{а} \left(4; -2; -4\right)$ та $\vec{b} \left(6; -3; 2\right)$. Обчисліть $\left|2\vec{а}-\vec{b}\right|$.

А) $\sqrt{41}$; Б) $\sqrt{89}$ ; В) $\sqrt{105}$ .

17. Дано вектори $\vec{а} \left(-2; 2; -3\right)$ і $\vec{b} \left(3; 1; 2\right)$. Знайдіть $\vec{S}=2\vec{a}+ \vec{b}$.

A) $\vec{S}$(5; 5; 0); Б) $\vec{S}$(5; 7; 0); В) $\vec{S}\left(4;5; -1\right);$ Г) інша відповідь.

18. Знайти довжину вектора $\vec{S}= -2\vec{a}$, якщо $\vec{а} \left(1; 2; 2\right)$.

 А) 4; Б) 6; В) 8; Г) інша відповідь.

19. Чи колінеорні вектори $\vec{а}\left(2;3;8\right)$ і $\vec{b}\left(-4;6; -16\right)$?

А) так; Б) ні; В) визначити неможливо.

20. Чи колінеорні вектори $\vec{m}\left(8;3; -2\right)$ і $\vec{n}\left(16; 6; -4\right)$?

А) так; Б) ні; В) визначити неможливо.

21. Знайдіть значення m і n , при яких дані вектори колінеарні: $\vec{а}\left(15;m;1\right)$ і $\vec{b}\left(18; 12; n\right)$.

A) m =10 і n =$ \frac{5}{6}$ ; Б) m =10 і n = 1,2; В) m =14,5 і n = 1,2.

22. Чи перпендикулярні вектори $\vec{а}\left(2;3;6\right)$ і $\vec{b}\left( 3; 2; -1\right)$?

А) так; Б) ні; В) визначити неможливо.

23. При якому значенні х вектори $\vec{а}\left(6;0;12\right)$ і $\vec{b}\left(-8; 13; х\right)$ перпендикулярні?

 А) - 4; Б) 4; В) 5.

24. У трикутнику АВС А(2; 1; 3), В(1; 1; 4), С(0; 1; 3). Чи перпендикулярні вектори $ \vec{АВ}$ і $\vec{ СМ}$, де М – середина відрізка АВ?

А) так; Б) ні; В) визначити неможливо.

25. Дано вектори $\vec{а}\left(2;-1;4\right)$ і $\vec{b}\left( 5; 3; х\right)$. При якому значенні х $\vec{а} ∙ \vec{b}$ = 19?

А) 3; Б) 0; В) $\frac{7}{4}$ .

26. Дано вектори $\vec{а}\left(3; -1;5\right)$ і $\vec{b}\left(-1; -5;7\right)$. Знайдіть $\vec{а} ∙ \vec{b}$.

 А) 6; Б) 16; В) 22.

27. Дано вектор $\vec{а} (5;6;3)$. Знайдіть $\vec{а} ∙ \vec{а}$.

А) -2; Б) 70; В) інша відповідь.

28. Дано вектори $\vec{а}\left(3; -1;5\right)$ і $\vec{b}\left(-2; -3;0\right)$. З’ясуйте, який кут між векторами $\vec{а}$ і $\vec{b}$.

А) гострий; Б) тупий; В) прямий; Г) визначити неможливо.

29. Чи лежать точки А, в, і С на одній прямій: А(3; -7; 8), В(-5; 4; 1) , С(27; -40; 29)?

А) так; Б) ні; В) визначити неможливо.

30. Дано точки А(8; -2; 5), В(2; 3; 7), С(-3; 9; 4) , D(3; 4; 2). Чи рівні вектори $\vec{АВ } і \vec{СD}$ .

А) визначити неможливо; Б) так; В) ні; Г) інша відповідь.

***Домашнє завдання:***

Розв’язати тести подані вище та опрацювати теоретичний матеріал.

Зверніть увагу!!!

Звіт уроку №4 з розв’язками сфотографувати та кинути на електронну адресу: nadya18041979@ukr.net до 22.04. 2020.

**В темі листа вказати прізвище, алгебра чи геометрія, № уроку!!!**