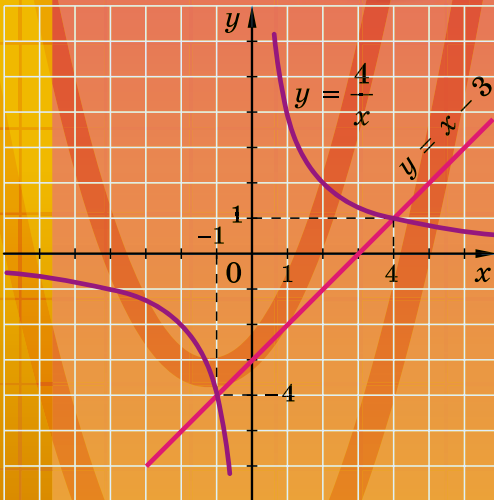




О.С. Істер

АЛГЕБРА

8



$$2\sqrt{\frac{x}{8}} - 4 = 0$$

$$2\sqrt{\frac{x}{8}} - 4 = 0$$

УДК 512(075.3)
ББК 22.14я721
І-89

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(Наказ Міністерства освіти і науки України
від 10.05.2016 № 491)

**Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено**

Експерти, які здійснили експертизу підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для учнів 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:

Бідюк В.Г., учитель-методист Новоселицького районного методичного кабінету Чернівецької області;

Гриньків О.І., учитель-методист Дідилівського НВК Кам'янка-Бузького району Львівської області;

Падалко Н.Й., доцент кафедри диференціальних рівнянь і математичної фізики Східноєвропейського національного університету ім. Лесі Українки, кандидат педагогічних наук.

Істер О.С.

І-89 Алгебра : підруч. для 8-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / О.С. Істер. — Київ : Генеза, 2016. — 272 с.

ISBN 978-966-11-0699-3.

Підручник відповідає новій програмі з математики, містить достатню кількість диференційованих вправ та прикладних задач. Після кожного розділу наведено вправи для його повторення. Для підготовки до контрольної роботи передбачено «Домашню самостійну роботу» та «Завдання для перевірки знань». Наприкінці підручника наведено матеріал для повторення курсу математики 5–6 класів та курсу алгебри 7 класу, задачі підвищеної складності, предметний покажчик та відповіді до більшості вправ. Для найдопитливіших є низка нестандартних задач у рубриці «Цікаві задачі для учнів неледачих» та додатковий матеріал.

УДК 512(075.3)
ББК 22.14я721

ISBN 978-966-11-0699-3

© Істер О.С., 2016
© Видавництво «Генеза»,
оригінал-макет, 2016

Шановні учні!

Цьогоріч ви продовжите вивчати одну з найважливіших математичних дисциплін – алгебру. Допоможе вам у цьому підручник, який ви тримаєте в руках.

Під час вивчення теоретичного матеріалу зверніть увагу на текст, надрукований **жирним шрифтом**. Його треба запам'ятати.

Зверніть увагу й на умовні позначення:



– треба запам'ятати;



– вправи для повторення;



– запитання і завдання до вивченого матеріалу;



– рубрика «Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу»;

1 – завдання для класної роботи; **2** – для домашньої роботи;



– рубрика «Цікаві задачі для учнів неледачих» та додатковий матеріал.

Усі вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і позначено так:



– вправи початкового рівня;




– вправи середнього рівня;



– вправи достатнього рівня;



– вправи високого рівня.

Позначкою  виокремлено вправи підвищеної складності.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання можна, виконуючи завдання «Домашньої самостійної роботи» та «Завдання для перевірки знань». Після кожного розділу наведено вправи для його повторення, а в кінці підручника – «Завдання для перевірки знань за курс алгебри 8 класу». «Задачі підвищеної складності» допоможуть підготуватися до математичної олімпіади та поглибити знання з математики. Пригадати раніше вивчені теми допоможуть «Відомості з курсу математики 5–6 класів та курсу алгебри 7 класу», а перевірити свої знання на початку навчального року – «Вправи на повторення курсу алгебри 7 класу» в кінці підручника.

Автор намагався подати теоретичний матеріал підручника простою, доступною мовою, проілюструвати його значною кількістю прикладів. Після вивчення теоретичного матеріалу у школі його обов'язково треба опрацювати вдома.

Підручник містить велику кількість вправ. Більшість з них ви розглянете на уроках та під час домашньої роботи, інші вправи рекомендується розв'язати самостійно.

Цікаві факти з історії розвитку та становлення математики як науки ви знайдете у рубриці «А ще раніше...»

Шановні вчителі!

Пропонований підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках і позаурочних заняттях та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів, ступеня диференціації навчання тощо.

«Вправи на повторення курсу алгебри 7 класу» допоможуть діагностувати вміння й навички учнів з алгебри за попередній рік та повторити навчальний матеріал. Додаткові вправи рубрики «Завдання для перевірки знань» призначено для учнів, які впоралися з основними завданнями раніше за інших учнів. Правильне їх розв'язання вчитель може оцінити окремо. Вправи для повторення розділів можна запропонувати учням під час узагальнюючих уроків або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року. Задачі підвищеної складності та «Цікаві задачі для учнів неледачих» допоможуть задовольнити підвищену цікавість учнів до предмета і сприятимуть їх підготовці до різноманітних математичних змагань.

Шановні батьки!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків з алгебри, необхідно запропонувати їй за підручником удома самостійно опрацювати матеріал цих уроків. Спочатку учень має прочитати теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою та містить значну кількість зразків розв'язування вправ, а потім із запропонованих у відповідному тематичному параграфі завдань розв'язати посильні їй вправи.

Упродовж опрацювання дитиною курсу алгебри 8 класу ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, що не розглядалися під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині розв'язати завдання «Домашньої самостійної роботи», які подано в тестовій формі, та «Завдання для перевірки знань». Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.

Розділ 1

Раціональні вирази

У цьому розділі ви:

- **пригадаєте** основну властивість звичайного дроби та основні властивості рівнянь;
- **ознайомитесь** з поняттями раціонального виразу, раціонального дроби, раціонального рівняння; з функцією $y = \frac{k}{x}$, степенем із цілим показником, стандартним виглядом числа;
- **навчитеся** скорочувати раціональні дроби та зводити їх до нового знаменника; виконувати арифметичні дії з раціональними дробами; розв'язувати раціональні рівняння.

§ 1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ. 1. РАЦІОНАЛЬНІ ДРОБИ

У курсі алгебри 7 класу ви вже знайомилися із *цілими раціональними виразами*, тобто з виразами, що не містять ділення на вираз зі змінною, наприклад:

$$5m^2p; \quad 4c^3 + t^9; \quad (m - n)(m^2 + n^7); \quad k^9 - \frac{p+l}{4}.$$

Будь-який цілий вираз можна подати у вигляді многочлена стандартного вигляду, наприклад:

$$(m - n)(m^2 + n^7) = m^3 + mn^7 - nm^2 - n^8;$$

$$k^9 - \frac{p+l}{4} = k^9 - \frac{1}{4}p - \frac{1}{4}l.$$

На відміну від цілих виразів, вирази

$$5m - \frac{3}{p}; \quad \frac{x+2}{y-9}; \quad \frac{1}{5}x - \frac{19}{m^2}; \quad \frac{a-b}{a^2+ab+b^2}; \quad \frac{1}{(x-y)(x^2+7)}$$

містять ділення на вираз зі змінною. Такі вирази називають *дробовими раціональними виразами*.

Цілі раціональні і дробові раціональні вирази називають *раціональними виразами*.



Раціональні вирази – це математичні вирази, які містять дії додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня із цілим показником.

Раціональний вираз вигляду $\frac{P}{Q}$, де P і Q – вирази, що містять числа або змінні, називають **дробом**. Вираз P є його чисельником, а Q – знаменником.

Якщо чисельник і знаменник дробу – многочлени, то дріб називають **раціональним дробом**.

Цілий раціональний вираз має зміст при будь-яких значеннях змінних, що до нього входять, оскільки для знаходження його значення треба виконати дії додавання, віднімання і множення та ділення на число, відмінне від нуля, що завжди можливо.

Розглянемо дробовий раціональний вираз $\frac{5}{x-3}$. Його значення можна знайти для будь-якого значення x , крім $x = 3$, оскільки при $x = 3$ знаменник дробу дорівнюватиме нулю. У такому випадку кажуть, що вираз $\frac{5}{x-3}$ має зміст при всіх значеннях змінної x , крім $x = 3$ (або при $x = 3$ не має змісту).



Значення змінних, при яких вираз має зміст, називають допустимими значеннями змінних у виразі.

Ці значення утворюють **область визначення виразу**, або **область допустимих значень змінних** у виразі.

Приклад 1. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

$$1) \frac{m-3}{9}; \quad 2) \frac{5}{p+2}; \quad 3) \frac{x+7}{x(x-9)}; \quad 4) \frac{7}{|y|-3}.$$

Розв'язання. 1) Вираз має зміст при будь-яких значеннях змінної m . 2) Допустимі значення змінної p – усі числа, крім числа -2 , оскільки це значення змінної перетворює знаменник дробу на нуль. 3) Знаменник дробу $\frac{x+7}{x(x-9)}$ перетворюється на нуль, якщо $x = 0$ або $x = 9$. Тому допустимі значення змінної x – усі числа, крім чисел 0 і 9 . 4) Допустимі значення змінної y – усі числа, крім 3 і -3 .

Скорочено *відповіді* можна записати так: 1) m – будь-яке число; 2) $p \neq -2$; 3) $x \neq 0$; $x \neq 9$; 4) $y \neq 3$; $y \neq -3$.

Розглянемо умову рівності дробу нулю. Оскільки $\frac{0}{Q} = 0$, якщо $Q \neq 0$, то можна прийти до висновку, що дріб $\frac{P}{Q}$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли чисельник P дорівнює

нулю, а знаменник Q не дорівнює нулю, тобто $\begin{cases} P = 0, \\ Q \neq 0. \end{cases}$

Приклад 2. При яких значеннях змінної дорівнює нулю значення дробу:

$$1) \frac{x-3}{x+1}; \quad 2) \frac{(a-2)(a+1)}{a+5}; \quad 3) \frac{b(b-7)}{b-7}?$$

Розв'язання. 1) Чисельник дробу дорівнює нулю, якщо $x = 3$. Це значення змінної не перетворює знаменник на нуль, тому $x = 3$ є тим значенням змінної, при якому даний дріб дорівнює нулю. 2) Чисельник дробу дорівнює нулю, якщо $a = 2$ або $a = -1$. При кожному із цих значень знаменник дробу нулю не дорівнює. Тому $a = 2$ і $a = -1$ є тими значеннями змінної, при яких даний дріб дорівнює нулю. 3) Чисельник дробу дорівнює нулю, якщо $b = 0$ або $b = 7$. Якщо $b = 0$, знаменник дробу нулю не дорівнює, а якщо $b = 7$, знаменник дробу перетворюється на нуль, тобто дріб не існує. Отже, даний дріб дорівнює нулю лише при $b = 0$.

Відповідь. 1) $x = 3$; 2) $a = 2, a = -1$; 3) $b = 0$.

А ще раніше...

Давньогрецький математик Діофант (бл. III ст. н. е.) розглянув раціональні дроби та дії з ними у своїй праці «Арифметика». Зокрема на сторінках цієї книжки можна зустріти доведення тотожностей

$$30 \cdot \frac{144}{x^4 + 900 - 60x^2} + \frac{60}{x^2 - 30} = \frac{60x^2 + 2520}{x^4 + 900 - 60x^2}$$

$$\text{та } \frac{96}{x^4 + 36 - 12x^2} - \frac{12}{6 - x^2} = \frac{12x^2 + 24}{x^4 + 36 - 12x^2},$$

які записано тодішньою символікою.

Видатний англійський учений Ісаак Ньютон (1643–1727) у своїй монографії «Універсальна арифметика» (1707 р.) означає дріб наступним чином: «Запис однієї з двох величин під іншою, нижче якої між ними проведено риску, означає частку або ж величину, що виникає при діленні верхньої величини на нижню». У цій роботі Ньютон розглядає не тільки звичайні дроби, а й раціональні.



1. Які вирази називають цілими раціональними виразами, а які – дробовими раціональними виразами? Наведіть приклади таких виразів.
2. Які вирази називають раціональними виразами?
3. Які дроби називають раціональними дробами?
4. Що називають допустимими значеннями змінної?
5. Коли дріб $\frac{P}{Q}$ дорівнює нулю?



Початковий рівень

1. (Усно.) Які з виразів є цілими, а які – дробовими:

1) $\frac{1}{7}m^3n$; 2) $\frac{a+1}{a}$; 3) $m^2 + 2m - 8$; 4) $\frac{b-2}{8}$;

5) $\frac{1}{x^2 + m^2}$; 6) $\frac{x+y-a}{10}$; 7) $(p-2)^2 + 7p$; 8) $a^2 + \frac{2}{a}$?

2. З раціональних виразів $a^3 - ab$; $\frac{m}{17}$; $\frac{17}{a}$; $t(t-1) + \frac{t}{p}$; $\frac{1}{9}a - \frac{1}{8}b$; $\frac{7}{x^2 + 1} - 5$ випишіть ті, що є: 1) цілими; 2) дробовими.

3. Які з дробів є раціональними дробами:

1) $\frac{a}{a^2 - 3}$; 2) $\frac{m\left(n + \frac{1}{k}\right)}{p^2 - 2}$; 3) $\frac{x^2 - 4x + 5}{y^2 - 9}$; 4) $\frac{x}{m-3}$?



Середній рівень

4. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{3a+9}{a^2}$, якщо $a = 1$; -2 ; -3 ;

2) $\frac{x+3}{x} - \frac{x}{x-2}$, якщо $x = 4$; -1 .

5. Дізнайтеся прізвище видатного українського авіаконструктора. Для цього знайдіть значення виразу з першої таблиці та перенесіть літери, що відповідають цим значенням, у другу таблицю. Користуючись будь-якими інформаційними джерелами, ознайомтеся з біографією цього авіаконструктора.

| | | | | | |
|-------------------|----|----|---|---|---|
| x | -3 | -1 | 0 | 2 | 3 |
| $\frac{1+x}{1-x}$ | | | | | |
| Літери | Т | В | А | О | Н |

| | | | | | | |
|---|----|------|----|----|----|---|
| 1 | -2 | -0,5 | -3 | -2 | -3 | 0 |
| | | | | | | |

6. Складіть дріб:

1) чисельником якого є різниця змінних a і b , а знаменником – їх сума;

2) чисельником якого є добуток змінних x і y , а знаменником – сума їх квадратів.

7. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

$$1) m^2 - 5; \quad 2) \frac{3a - 5}{a}; \quad 3) \frac{7b + 9}{8}; \quad 4) \frac{t - 9}{t + 1};$$

$$5) \frac{x^2 + 1}{x} + \frac{2}{x - 7}; \quad 6) \frac{p + 2}{p(p - 1)}; \quad 7) \frac{3}{x^2 + 1}; \quad 8) \frac{1}{m} + \frac{1}{|m| + 5}.$$

8. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

$$1) p + 9; \quad 2) \frac{a - 7}{a + 4}; \quad 3) \frac{b - 9}{4};$$

$$4) \frac{x^2 - 3}{x(x + 2)}; \quad 5) \frac{2y}{y - 1} + \frac{3}{y + 6}; \quad 6) \frac{4}{m^2 + 2}.$$

9. За t год автомобіль подолав 240 км. Складіть вираз для обчислення швидкості автомобіля (у км/год). Знайдіть значення одержаного виразу, якщо $t = 3$; 4.

10. Учень витратив 48 грн для придбання n ручок. Складіть вираз для обчислення ціни ручки (у грн) та обчисліть його значення, якщо $n = 8$; 10.


3 Достатній рівень

11. При якому значенні змінної значення дробу $\frac{x + 2}{8}$ дорівнює:

$$1) -2; \quad 2) 9; \quad 3) 0,01; \quad 4) -4,9?$$

12. При якому значенні змінної значення дробу $\frac{m - 1}{10}$ дорівнює:

$$1) -8; \quad 2) 0,25?$$

13. При якому значенні x дорівнює нулю дріб:

$$1) \frac{4x - 8}{x}; \quad 2) \frac{x(x + 3)}{x^2};$$

$$3) \frac{(x - 1)(x + 7)}{x + 5}; \quad 4) \frac{3x - 6}{8 - 4x}?$$

14. При якому значенні y дорівнює нулю дріб:

$$1) \frac{y}{5y-7}; \quad 2) \frac{(y+1)y}{y^7}; \quad 3) \frac{(y+2)(y-3)}{y+4}; \quad 4) \frac{y+1}{5y+5}?$$

15. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

$$1) \frac{a+1}{(a-1)(2a+7)}; \quad 2) \frac{t+2}{t^2-7t}; \quad 3) \frac{m}{m^2-25}; \quad 4) \frac{5}{(x-9)^2}.$$

16. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

$$1) \frac{p-7}{(9-p)(4p+10)}; \quad 2) \frac{a+2}{5a-a^2}; \quad 3) \frac{c}{4-c^2}; \quad 4) \frac{a}{(a+1)^2}.$$

17. Складіть вираз зі змінною x , що мав би зміст при будь-яких значеннях x , крім: 1) $x = 2$; 2) $x = 1$ і $x = -4$.



4 Високий рівень

18. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

$$1) \frac{37}{a(a-2)-3a+6}; \quad 2) \frac{x}{|x|-1}; \quad 3) \frac{5m}{1-\frac{1}{m}}; \quad 4) \frac{4k}{4-|k-2|}.$$

19. Знайдіть область визначення виразу:

$$1) \frac{12}{x(x+2)-4x-8}; \quad 2) \frac{m}{4-|m|}; \quad 3) \frac{7}{\frac{1}{x}+1}; \quad 4) \frac{2a}{|a+2|-3}.$$

20. Визначте знак дробу:

$$1) \frac{x^7}{y^8}, \text{ якщо } x > 0, y < 0; \quad 2) \frac{m+1}{n^7}, \text{ якщо } m > 0, n < 0;$$

$$3) \frac{|p-1|}{n^{19}}, \text{ якщо } p < 0, n > 0; \quad 4) \frac{|a|+1}{c^8}, \text{ якщо } a < 0, c < 0.$$

21. Доведіть, що при будь-якому значенні змінної значення дробу:

$$1) \frac{7}{a^2+1} \text{ є додатним}; \quad 2) \frac{4}{-p^2-2} \text{ є від'ємним};$$

$$3) \frac{(a+1)^2}{a^2+7} \text{ є невід'ємним}; \quad 4) \frac{-(p^2-4)^2}{p^4+1} \text{ є недодатним}.$$



Вправи для повторення

22. Перетворіть вираз на многочлен:

- 1) $(a^2 + 2a - 7) - (a^2 - 4a - 9)$; 2) $3x^2y(2x - 3y + 7)$;
 3) $(x^2 - 2x)(x + 9)$; 4) $(x^2 - 5)^2 + 10x^2$.

23. Розв'яжіть рівняння:

$$4x(2x - 7) + 3x(5 - 2x) = 2x^2 + 39.$$



Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

24. Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{7}{14}$; 2) $\frac{25}{35}$; 3) $\frac{12}{18}$; 4) $\frac{30}{45}$; 5) $\frac{36}{48}$; 6) $\frac{51}{85}$.

25. Зведіть дріб:

- 1) $\frac{1}{8}$ до знаменника 24; 2) $\frac{2}{7}$ до знаменника 28;
 3) $\frac{4}{15}$ до знаменника 30; 4) $\frac{8}{9}$ до знаменника 63.

26. Подайте у вигляді степеня вираз:

- 1) m^3m^4 ; 2) pp^7 ; 3) $x^9 : x^3$;
 4) $(a^3)^7$; 5) $b^2 \cdot (b^3)^4$; 6) $(c^4)^5 : c^{12}$.

27. На який вираз треба помножити одночлен $2a^2b$, щоб отримати:

- 1) $2a^3b$; 2) $2a^2b^4$; 3) $4a^5b$; 4) $16a^4b^3$?

28. Розкладіть на множники многочлен:

- 1) $ab - b^2$; 2) $m^7 + m^5$; 3) $8m^2 - 4mn$;
 4) $6a^3b - 15a^2b^2$; 5) $x^2 + 6x + 9$; 6) $c^2 - 10c + 25$;
 7) $x^2 - 25$; 8) $p^4 - 49m^2$; 9) $a^2 + ab + 7a + 7b$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



29. (Київська міська олімпіада, 1985 р.) Знайдіть усі такі трицифрові числа, які у 12 разів більші за суму своїх цифр.



2. ОСНОВНА ВЛАСТИВІСТЬ РАЦІОНАЛЬНОГО ДРОБУ

Пригадаємо основну властивість звичайного дробу: *якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на одне й те саме натуральне число, то одержимо дріб, що дорівнює даному*. Інакше кажучи, для будь-яких натуральних чисел a , b і c справджуються рівності:

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \text{ і } \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$$

Доведемо, що ці рівності є правильними не тільки для натуральних значень a , b і c , а й для будь-яких інших значень за умови $b \neq 0$ і $c \neq 0$.

Доведемо спочатку, що $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

Нехай $\frac{a}{b} = a : b = p$. Тоді за означенням частки $a = bp$.

Помножимо обидві частини цієї рівності на c , матимемо: $ac = (bp)c$. Використовуючи переставну і сполучну властивості множення, одержимо: $ac = (bc)p$. Оскільки $b \neq 0$ і $c \neq 0$, то і $bc \neq 0$. З останньої рівності (за означенням частки) маємо: $\frac{ac}{bc} = p$. Оскільки $\frac{a}{b} = p$ і $\frac{ac}{bc} = p$, то $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

Ця рівність є тотожністю, отже, можемо поміняти в ній ліву і праву частини місцями:

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}.$$

Ця тотожність дає змогу замінити дріб $\frac{ac}{bc}$ на дріб $\frac{a}{b}$, тобто скоротити дріб $\frac{ac}{bc}$ на спільний множник c чисельника і знаменника.

Властивість дробу, що записується рівностями $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ і $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$, називають *основною властивістю раціонального дробу*.



Якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на один і той самий відмінний від нуля вираз, то одержимо дріб, що дорівнює даному.

Розглянемо приклади застосування цієї властивості для дробів на їх області допустимих значень.

Приклад 1. Скоротіть дріб $\frac{24a^2}{16a}$.

Розв'язання. Подамо чисельник і знаменник цього дробу у вигляді добутків, що містять однаковий (спільний) множник $8a$, і скоротимо дріб на цей вираз:

$$\frac{24a^2}{16a} = \frac{8a \cdot 3a}{8a \cdot 2} = \frac{3a}{2}.$$

Відповідь. $\frac{3a}{2}$.

Приклад 2. Скоротіть дріб $\frac{x^2 - 9y^2}{5x + 15y}$.

Розв'язання. Розкладемо на множники чисельник і знаменник дробу: $\frac{(x - 3y)(x + 3y)}{5(x + 3y)}$. Скоротимо дріб на $x + 3y$ – спільний множник чисельника і знаменника:

$$\frac{(x - 3y)(x + 3y)}{5(x + 3y)} = \frac{x - 3y}{5}.$$

Відповідь. $\frac{x - 3y}{5}$.

Отже, щоб скоротити дріб, треба:



1) розкласти на множники чисельник і знаменник дробу, якщо це необхідно;

2) виконати ділення чисельника і знаменника на їх спільний множник та записати відповідь.

Тотожність $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ дає змогу зводити дробі до заданого іншого (нового) знаменника.

Приклад 3. Зведіть дріб $\frac{5m}{4p}$ до знаменника $12p^4$.

Розв'язання. Оскільки $12p^4 = 4p \cdot 3p^3$, то, помноживши чисельник і знаменник дробу $\frac{5m}{4p}$ на $3p^3$, одержимо дріб зі знаменником $12p^4$:

$$\frac{5m}{4p} = \frac{5m \cdot 3p^3}{4p \cdot 3p^3} = \frac{15mp^3}{12p^4}.$$

Множник $3p^3$ називають *додатковим множником* чисельника і знаменника дробу $\frac{5m}{4p}$.

Відповідь. $\frac{15tp^3}{12p^4}$.

Приклад 4. Зведіть дріб $\frac{7}{a-b}$ до знаменника $b-a$.

Розв'язання. Оскільки $b-a = -1 \cdot (a-b)$, то, помноживши чисельник і знаменник дробу $\frac{7}{a-b}$ на -1 , одержимо дріб зі знаменником $b-a$: $\frac{7}{a-b} = \frac{7 \cdot (-1)}{(a-b) \cdot (-1)} = \frac{-7}{b-a}$.

Дріб $\frac{-7}{b-a}$ можна замінити тотожно рівним йому виразом $-\frac{7}{b-a}$, оскільки зміна знака перед дробом призводить до зміни знака чисельника або знаменника.

Тому $\frac{7}{a-b} = \frac{-7}{b-a} = -\frac{7}{b-a}$.

Відповідь. $-\frac{7}{b-a}$.

Аналогічно, наприклад, $\frac{c-2}{5} = -\frac{2-c}{5}$. Отже,



якщо змінити знак у чисельнику (або знаменнику) дробу одночасно із знаком перед дробом, то одержимо дріб, тотожно рівний даному.

Це правило можна записати за допомогою тотожності:

$$\frac{a}{b} = -\frac{-a}{b} = -\frac{a}{-b}$$

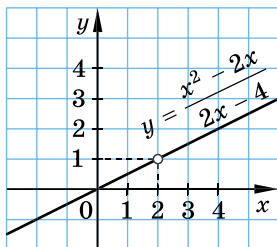
Приклад 5. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{x^2 - 2x}{2x - 4}$ і побудуйте її графік.

Розв'язання. Областю визначення функції є усі числа, крім тих, що перетворюють знаменник $2x - 4$ на нуль. Оскільки $2x - 4 = 0$ при $x = 2$, то областю визначення функції є усі числа, крім числа 2. Спростимо вираз $\frac{x^2 - 2x}{2x - 4}$, скоротивши даний дріб:

$\frac{x^2 - 2x}{2x - 4} = \frac{x(x-2)}{2(x-2)} = \frac{x}{2}$. Отже, функція $y = \frac{x^2 - 2x}{2x - 4}$ має вигляд $y = \frac{x}{2}$ за умови $x \neq 2$, а її графіком є

пряма $y = \frac{x}{2}$ без точки з абсцисою 2, тобто без точки (2; 1). Таку точку називають «виколотою» і обов'язково вилучають її з графіка, зображуючи «пожонью».

Графік функції $y = \frac{x^2 - 2x}{2x - 4}$ подано на малюнку 1.



Мал. 1



1. Якими рівностями записують основну властивість дробу? Сформулюйте цю властивість.
2. Доведіть тотожність $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.
3. Поясніть, як скоротити раціональний дріб.



Початковий рівень

30. (Усно.) Скоротіть дріб:

1) $\frac{7x}{7y}$; 2) $\frac{3a}{15b}$; 3) $\frac{xy}{xt}$; 4) $\frac{ab}{b^2}$; 5) $\frac{5ac}{4ab}$; 6) $\frac{10xy}{10my}$.

31. Скоротіть дріб:

1) $\frac{3m}{3p}$; 2) $\frac{4x}{12y}$; 3) $\frac{ab}{ap}$; 4) $\frac{t^2}{tx}$; 5) $\frac{9xy}{8xz}$; 6) $\frac{4mn}{4pn}$.



Середній рівень

32. Скоротіть дріб:

1) $\frac{15ab}{20am}$; 2) $\frac{-2a^2m}{5ap}$; 3) $\frac{16ax^2}{20xb}$; 4) $\frac{-8m^2n}{-2n^3}$;
 5) $\frac{-ap^2}{p^3c}$; 6) $\frac{4abc}{12ac^3}$; 7) $\frac{26m^2n}{39mn^2}$; 8) $\frac{a^5c^4}{-c^3a^6}$.

33. Скоротіть дріб:

1) $\frac{8at}{12ap}$; 2) $\frac{-3xy}{7x^2y}$; 3) $\frac{12m^2n}{20xm}$; 4) $\frac{-6p^3c}{-3p^4}$;
 5) $\frac{-kp^3}{p^4t}$; 6) $\frac{5xyz}{15y^2z}$; 7) $\frac{22x^2y}{-33y^2x}$; 8) $\frac{t^7p^8}{p^6t^9}$.

34. Подайте частку у вигляді дробу і скоротіть цей дріб:

1) $12x^2y : (4xy^3)$; 2) $3a^2bc : (-18ab^2c^2)$;

3) $-10ap^3 : (-15a^2)$; 4) $-14x^9 : (2x^7y)$.

35. Зведіть дріб:

1) $\frac{5}{4m}$ до знаменника $20m$; 2) $\frac{p}{a^2}$ до знаменника a^5 .

36. Зведіть дріб:

1) $\frac{4}{3p}$ до знаменника $15p$; 2) $\frac{x}{y^3}$ до знаменника y^7 .

37. Скоротіть дріб:

1) $\frac{m(a-2)}{p(a-2)}$; 2) $\frac{4(x+2)^2}{(x+2)^3}$; 3) $\frac{mn(p+7)}{m^2n(p+7)^2}$; 4) $\frac{16m^3(a+3)^2}{20m^4(a+3)}$.

38. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x(b+7)}{y(b+7)}$; 2) $\frac{5(m-3)^3}{(m-3)^4}$; 3) $\frac{a^2y(x-2)^2}{ay(x-2)}$; 4) $\frac{12x^3(y-7)}{16x^2(y-7)^2}$.

39. Розкладіть на множники чисельник і знаменник дробу та скоротіть його:

1) $\frac{4a+12b}{16ab}$; 2) $\frac{5x-5y}{7(x-y)}$; 3) $\frac{3m(x+2)}{x^2+2x}$; 4) $\frac{ax-a}{a}$;

5) $\frac{y}{y^2-yx}$; 6) $\frac{2x-6y}{5x-15y}$; 7) $\frac{a+2b}{a^2+2ab}$; 8) $\frac{2x^2-10xy}{x-5y}$.

40. Скоротіть дріб, попередньо розклавши його чисельник і знаменник на множники:

1) $\frac{3a+15b}{9ab}$; 2) $\frac{mn-m}{4(n-1)}$; 3) $\frac{p^2-3p}{4k(p-3)}$;

4) $\frac{xy-2x}{x}$; 5) $\frac{m}{m^2+mn}$; 6) $\frac{4a-12c}{7a-21c}$.

41. Скоротіть дріб:

1) $\frac{a(x-y)}{5(y-x)}$; 2) $\frac{3a-9b}{15b-5a}$; 3) $\frac{7y-14}{y^2-4}$;

4) $\frac{m^2-9}{m^2-6m+9}$; 5) $\frac{p^2-1}{p^3-p^2}$; 6) $\frac{x^2+10x+25}{mx+5m}$.

42. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{m(p-2)}{a(2-p)}; \quad 2) \frac{3a+12}{a^2-16}; \quad 3) \frac{x^2-4x+4}{x^2-4}; \quad 4) \frac{mc+4c}{m^2+8m+16}.$$



Достатній рівень

43. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{m^2n-m}{m^2-m^3n}; \quad 2) \frac{15m^3-15mn}{10n^2-10nm^2};$$

$$3) \frac{m^3+27}{m^2-3m+9}; \quad 4) \frac{20+10a+5a^2}{a^3-8};$$

$$5) \frac{3p+pn-3y-yn}{7p-7y}; \quad 6) \frac{am+an-bm-bn}{am-an-bm+bn}.$$

44. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{16p^3-16pq}{12p^3q-12pq^2}; \quad 2) \frac{a^2-2a+4}{a^3+8};$$

$$3) \frac{7+7a+7a^2}{a^3-1}; \quad 4) \frac{5m+an-5n-am}{a^2-10a+25}.$$

45. Зведіть дріб:

$$1) \frac{5}{a-b} \text{ до знаменника } a^2-ab;$$

$$2) \frac{4}{m+n} \text{ до знаменника } m^2+2mn+n^2;$$

$$3) \frac{9}{x-y} \text{ до знаменника } x^2-y^2;$$

$$4) \frac{4}{k-1} \text{ до знаменника } k^3-1;$$

$$5) \frac{a}{a-b} \text{ до знаменника } b-a;$$

$$6) \frac{p}{p-2} \text{ до знаменника } 4-p^2.$$

46. Зведіть дріб:

$$1) \frac{7}{m+n} \text{ до знаменника } m^2+mn;$$

$$2) \frac{4}{x-y} \text{ до знаменника } x^2-2xy+y^2;$$

3) $\frac{a}{a+b}$ до знаменника $a^2 - b^2$;

4) $\frac{c}{c-7}$ до знаменника $7 - c$.

47. Обчисліть значення дробу $\frac{-2(c^3)^4(x^{12})^2}{5(c^5)^2(x^3)^8}$, якщо $c = 5$, $x = 2016$.

48. Обчисліть значення дробу $\frac{6x^2 - 3xy}{8xy - 4y^2}$, якщо $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$.

49. Спростіть вираз:

1) $\frac{a^5 - a^3}{a^4 - a^2}$; 2) $\frac{p^9 + p^7}{p^5 + p^7}$; 3) $\frac{2a^2 - a^3}{a^6 - 2a^5}$; 4) $\frac{5c^5 - 10c^4}{12c^5 - 6c^6}$.

50. Спростіть вираз:

1) $\frac{t^9 - t^8}{t^8 - t^7}$; 2) $\frac{a^6 + a^3}{a^9 + a^6}$; 3) $\frac{3b^2 - b^3}{b^8 - 3b^7}$; 4) $\frac{4a^4 - 8a^3}{12a^2 - 6a^3}$.



4 Високий рівень

51. Скоротіть дріб:

1) $\frac{(x+2)^2 - (x-2)^2}{48x}$; 2) $\frac{x^3 - y^3}{x^4 - y^4}$; 3) $\frac{(3b-9c)^2}{5b-15c}$.

52. Скоротіть дріб:

1) $\frac{(m+5)^2 + (m-5)^2}{m^2 + 25}$; 2) $\frac{a^4 - b^4}{a^3 + b^3}$; 3) $\frac{6m + 2n}{(12m + 4n)^2}$.

53. Знайдіть область визначення функції та побудуйте її графік:

1) $y = \frac{x^2 + 6x}{6x + 36}$; 2) $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{2 - x}$.

54. Знайдіть область визначення функції та побудуйте її графік:

1) $y = \frac{x^2 - 5x}{25 - 5x}$; 2) $y = \frac{x^2 + 6x + 9}{3 + x}$.



Вправи для повторення

2 55. Обчисліть значення виразу:

1) $\frac{2^{12}}{2^{14}}$; 2) $\frac{3^9}{3^6}$; 3) $\frac{7^4}{49}$; 4) $\frac{125}{5^5}$.

56. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + 3y = 2, \\ 3x - 2y = 17; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 2y = 2, \\ 7x - 2y = -22. \end{cases}$

3 57. Спростіть вираз:

1) $(2x + 3y)^2 - (x + 7y)(4x - y)$;
 2) $(m + 3)(m^2 - 5) - m(m - 4)^2$.



Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

58. Обчисліть:

1) $\frac{1}{7} + \frac{3}{7}$; 2) $\frac{7}{13} + \frac{8}{13}$; 3) $\frac{9}{11} - \frac{5}{11}$; 4) $\frac{3}{17} - \frac{9}{17}$;
 5) $\frac{4}{5} + \frac{1}{5}$; 6) $-\frac{11}{15} + \frac{2}{15}$; 7) $-\frac{3}{10} - \frac{7}{10}$; 8) $-\frac{2}{7} - \left(-\frac{1}{7}\right)$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



59. (Національна олімпіада Великої Британії, 1968 р.) Нехай a_1, a_2, \dots, a_7 – цілі числа, а b_1, b_2, \dots, b_7 – ті самі числа, які взято в іншому порядку. Доведіть, що число $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)\dots(a_7 - b_7)$ є парним.

§ 3. ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ ДРОБІВ З ОДНАКОВИМИ ЗНАМЕННИКАМИ

Пригадаємо, як додати дроби з однаковими знаменниками. Треба додати їх чисельники, а знаменник залишити той самий. Наприклад:

$$\frac{3}{11} + \frac{5}{11} = \frac{3+5}{11} = \frac{8}{11}.$$

Запишемо це правило у вигляді формули:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}.$$

Ця рівність справджується для будь-яких дробів. Доведемо її (за умови $c \neq 0$).

Нехай $\frac{a}{c} = p$ і $\frac{b}{c} = q$. Тоді за означенням частки $a = cp$ і $b = cq$. Маємо: $a + b = cp + cq = c(p + q)$.

Оскільки $c \neq 0$, то за означенням частки $p + q = \frac{a + b}{c}$, отже, $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$.

Сформулюємо правило додавання дробів з однаковими знаменниками:



щоб додати дробі з однаковими знаменниками, треба додати їх чисельники, а знаменник залишити той самий.

Приклад 1.
$$\frac{5p}{2x} + \frac{3p}{2x} = \frac{5p + 3p}{2x} = \frac{8p}{2x} = \frac{4p}{x}.$$

Аналогічно можна довести тотожність

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c},$$

якою записують правило віднімання дробів з однаковими знаменниками.

Сформулюємо правило віднімання дробів з однаковими знаменниками:



щоб відняти дробі з однаковими знаменниками, треба від чисельника зменшуваного відняти чисельник від'ємника, а знаменник залишити той самий.

Приклад 2.

$$\frac{10x - 14}{7p} - \frac{3x}{7p} = \frac{10x - 14 - 3x}{7p} = \frac{7x - 14}{7p} = \frac{7(x - 2)}{7p} = \frac{x - 2}{p}.$$

Розглянемо ще кілька прикладів.

Приклад 3. Знайдіть суму і різницю дробів

$$\frac{2x + y}{2xy} \text{ і } \frac{2x - y}{2xy}.$$

Розв'язання.

$$\frac{2x+y}{2xy} + \frac{2x-y}{2xy} = \frac{2x+y+2x-y}{2xy} = \frac{4x}{2xy} = \frac{2}{y};$$

$$\frac{2x+y}{2xy} - \frac{2x-y}{2xy} = \frac{2x+y-(2x-y)}{2xy} = \frac{2x+y-2x+y}{2xy} = \frac{2y}{2xy} = \frac{1}{x}.$$

Відповідь. $\frac{2}{y}; \frac{1}{x}$.

Приклад 4. Спростіть вираз $\frac{m^2+5m}{m^2-3m} + \frac{7}{m^2-3m} - \frac{11m-2}{m^2-3m}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \frac{m^2+5m}{m^2-3m} + \frac{7}{m^2-3m} - \frac{11m-2}{m^2-3m} &= \frac{m^2+5m+7-(11m-2)}{m^2-3m} = \\ &= \frac{m^2+5m+7-11m+2}{m^2-3m} = \frac{m^2-6m+9}{m^2-3m} = \frac{(m-3)^2}{m(m-3)} = \frac{m-3}{m}. \end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{m-3}{m}$.

Приклад 5. Знайдіть суму $\frac{10x}{y-2x} + \frac{5y}{2x-y}$.

Розв'язання. Оскільки $2x-y = -(y-2x)$, то другий доданок можна подати з тим самим знаменником, що й у першого доданка:

$$\frac{5y}{2x-y} = \frac{5y}{-(y-2x)} = -\frac{5y}{y-2x}.$$

Тоді

$$\frac{10x}{y-2x} + \frac{5y}{2x-y} = \frac{10x}{y-2x} - \frac{5y}{y-2x} = \frac{10x-5y}{y-2x} = \frac{-5(y-2x)}{y-2x} = -5.$$

Відповідь. -5 .

Якщо у тотожностях $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ і $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$ поміняти місцями ліві і праві частини, то одержимо тотожності:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \quad \text{і} \quad \frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

За допомогою цих тотожностей дріб, чисельник якого є сумою або різницею кількох виразів, можна записати у вигляді суми або різниці кількох дробів.

Приклад 6. $\frac{2x+5y-9}{xy} = \frac{2x}{xy} + \frac{5y}{xy} - \frac{9}{xy} = \frac{2}{y} + \frac{5}{x} - \frac{9}{xy}$.

Приклад 7. Запишіть дріб у вигляді суми або різниці цілого виразу і дробу: 1) $\frac{a^2 + 2a - 7}{a}$; 2) $\frac{5m + 3n}{m + n}$.

Розв'язання. 1) $\frac{a^2 + 2a - 7}{a} = \frac{a^2}{a} + \frac{2a}{a} - \frac{7}{a} = a + 2 - \frac{7}{a}$;

2) $\frac{5m + 3n}{m + n} = \frac{2m + 3m + 3n}{m + n} = \frac{2m + 3(m + n)}{m + n} = \frac{2m}{m + n} + \frac{3(m + n)}{m + n} = \frac{2m}{m + n} + 3$.

Відповідь. 1) $a + 2 - \frac{7}{a}$; 2) $\frac{2m}{m + n} + 3$.



1. Сформулюйте правило додавання дробів з однаковими знаменниками. Доведіть його.

2. Сформулюйте правило віднімання дробів з однаковими знаменниками.



1 Початковий рівень

60. (Усно.) Виконайте дію:

1) $\frac{a}{5} + \frac{b}{5}$; 2) $\frac{x}{9} - \frac{y}{9}$; 3) $\frac{2}{a} + \frac{3}{a}$; 4) $\frac{7}{b} - \frac{5}{b}$.

61. Знайдіть суму або різницю:

1) $\frac{2x}{5} + \frac{x}{5}$; 2) $\frac{7y}{3} - \frac{2y}{3}$; 3) $\frac{a + b}{x} - \frac{a}{x}$; 4) $\frac{7x^2}{y} + \frac{5x^2}{y}$.

62. Виконайте дію:

1) $\frac{3m}{8} + \frac{2m}{8}$; 2) $\frac{9p}{17} - \frac{p}{17}$; 3) $\frac{x - y}{m} + \frac{y}{m}$; 4) $\frac{5c^2}{n} - \frac{2c^2}{n}$.



2 Середній рівень

63. Подайте у вигляді дробу:

1) $\frac{7a}{4x} - \frac{3a}{4x}$; 2) $\frac{x + y}{8} - \frac{x - 3y}{8}$;
 3) $\frac{a + 4}{9} + \frac{5 - a}{9}$; 4) $\frac{x + 3y}{10} + \frac{4x + 7y}{10}$;

5) $\frac{5m-2}{8m} - \frac{m-10}{8m};$

6) $\frac{7a+13}{6a} + \frac{17-a}{6a}.$

64. Спростіть вираз:

1) $\frac{5x}{2a} + \frac{3x}{2a};$

2) $\frac{a+b}{12} - \frac{a-5b}{12};$

3) $\frac{b-3}{5} + \frac{13-b}{5};$

4) $\frac{a+2b}{8} + \frac{3a+6b}{8};$

5) $\frac{6m-3}{10m} - \frac{m-13}{10m};$

6) $\frac{5x-3}{4x} + \frac{11-x}{4x}.$

65. Спростіть вираз:

1) $\frac{3x-7y}{4xy} + \frac{15y-3x}{4xy};$

2) $\frac{7a+p^3}{3p} - \frac{7a-2p^3}{3p};$

3) $\frac{5a-b^4}{6b^5} - \frac{b^4+5a}{6b^5};$

4) $\frac{3a-4}{8a} + \frac{4a+5}{8a} - \frac{1-a}{8a}.$

66. Подайте у вигляді дробу:

1) $\frac{3a-b}{ab} - \frac{5b+3a}{ab};$

2) $\frac{9m+2k^2}{5k} - \frac{9m-3k^2}{5k};$

3) $\frac{5b-m^2}{4m^3} - \frac{m^2+5b}{4m^3};$

4) $\frac{4a-3}{6a} + \frac{a+8}{6a} - \frac{5-a}{6a}.$

67. Обчисліть $\frac{3a-5}{4a^2} + \frac{5+a}{4a^2}$, якщо $a = \frac{1}{2}$.

68. Знайдіть значення виразу $\frac{5b-7}{6b^2} + \frac{7+b}{6b^2}$, якщо $b = \frac{1}{7}$.

69. Виконайте дію:

1) $\frac{x^2}{x-5} - \frac{25}{x-5};$

2) $\frac{36}{y+6} - \frac{y^2}{y+6};$

3) $\frac{x-3}{x^2-9} + \frac{6}{x^2-9};$

4) $\frac{7a-1}{a^2-b^2} - \frac{7b-1}{a^2-b^2};$

5) $\frac{2x+y}{(x-y)^2} + \frac{x-4y}{(x-y)^2};$

6) $\frac{9m+5n}{(m+n)^2} - \frac{m-3n}{(m+n)^2}.$

70. Спростіть вираз:

1) $\frac{49}{7-m} - \frac{m^2}{7-m};$

2) $\frac{x+7}{x^2-1} - \frac{6}{x^2-1};$

3) $\frac{5x-2}{x^2-y^2} - \frac{5y-2}{x^2-y^2};$

4) $\frac{3a-4b}{(a-b)^2} + \frac{2a-b}{(a-b)^2}.$

71. Спростіть вираз:

1) $\frac{a}{x-1} + \frac{5}{1-x};$

2) $\frac{m}{c-3} - \frac{p}{3-c};$

3) $\frac{5x}{x-y} + \frac{5y}{y-x};$

4) $\frac{10p}{2p-m} + \frac{5m}{m-2p}.$

72. Виконайте дію:

1) $\frac{c}{a-2} + \frac{x}{2-a};$

2) $\frac{a}{x-y} - \frac{8}{y-x};$

3) $\frac{2m}{m-n} + \frac{2n}{n-m};$

4) $\frac{16x}{4x-y} + \frac{4y}{y-4x}.$



Достатній рівень

73. Виконайте дію:

1) $\frac{m^2-m}{m^2+4m+4} - \frac{4-m}{m^2+4m+4};$

2) $\frac{9c}{c^2-6c} - \frac{18+6c}{c^2-6c}.$

74. Знайдіть різницю:

1) $\frac{a^2+3a}{a^2+6a+9} - \frac{3a+9}{a^2+6a+9};$

2) $\frac{3m}{m^2-5m} - \frac{m+10}{m^2-5m}.$

75. Доведіть тотожність:

1) $\frac{(a-b)^2}{2ab} - \frac{(a+b)^2}{2ab} = -2;$

2) $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} + \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2} = 2.$

76. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{m^2}{2m-10} + \frac{25}{10-2m},$ якщо $m = 25;$

2) $\frac{x^2+9y^2}{x-3y} + \frac{6xy}{3y-x},$ якщо $x = 2016, y = \frac{1}{3}.$

77. Обчисліть:

1) $\frac{x^2}{3x-18} + \frac{36}{18-3x},$ якщо $x = -12;$

$$2) \frac{c^2}{c-5k} - \frac{25k^2 - 10ck}{5k-c}, \text{ якщо } c = 199, k = 0,2.$$

78. Подайте дріб у вигляді суми або різниці цілого виразу і дробу:

$$1) \frac{m+3}{m}; \quad 2) \frac{a^4 + a^3 - 5}{a^2}; \quad 3) \frac{x^2 + 5x - 3}{x+5}; \quad 4) \frac{4a - 4b + 7}{a-b}.$$

79. Подайте дріб у вигляді суми або різниці цілого виразу і дробу:

$$1) \frac{a-7}{a}; \quad 2) \frac{m^2 - m^3 + 7}{m^2}; \quad 3) \frac{y^2 + y + 2}{y+1}; \quad 4) \frac{5p - 5q - 1}{p-q}.$$



4 Високий рівень

80. Подайте вираз у вигляді дробу:

$$1) \frac{7-4m}{(2-m)^2} - \frac{9-5m}{(m-2)^2}; \quad 2) \frac{12a}{(2-a)^3} + \frac{3a^2+12}{(a-2)^3};$$

$$3) \frac{m^2-6n}{(m-2)(n-3)} - \frac{2(m-3n)}{(2-m)(3-n)}.$$

81. Спростіть вираз:

$$1) \frac{16-7a}{(3-a)^2} - \frac{13-6a}{(a-3)^2}; \quad 2) \frac{15(2m-3)}{(3-m)^3} + \frac{5m^2}{(m-3)^3};$$

$$3) \frac{p^2-9q}{(p-3)(q-4)} - \frac{3(p-3q)}{(3-p)(4-q)}.$$



Вправи для повторення

3 82. Подайте вираз у вигляді многочлена:

$$1) (a-1)(a+3)^2; \quad 2) (x-4)^2(x+2).$$

4 83. Скоротіть дріб

$$\frac{x^2 + y^2 - z^2 - 2xy}{x^2 - y^2 + z^2 + 2xz}.$$



Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

84. Обчисліть:

$$1) \frac{1}{7} + \frac{5}{14}; \quad 2) \frac{5}{12} - \frac{3}{16}; \quad 3) \frac{1}{8} - \frac{3}{16} + \frac{7}{24}.$$

85. Подайте одночлен $15a^3b^7$ у вигляді добутку двох одночленів, один з яких дорівнює:

$$1) 3ab^5; \quad 2) -5a^2b^7; \quad 3) -b^6; \quad 4) 15ab.$$



Цікаві задачі для учнів неледачих

86. Катер за течією річки долає відстань від пункту A до пункту B за 2 год, а проти течії – за 3 год. За який час від пункту A до пункту B пропливе пліт?

§ 4. ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ ДРОБІВ З РІЗНИМИ ЗНАМЕННИКАМИ

Якщо дроби мають різні знаменники, то їх, як і звичайні дроби, спочатку зводять до спільного знаменника, а потім додають або віднімають за правилом додавання або віднімання дробів з однаковими знаменниками.

Розглянемо як додати дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$. Зведемо ці дроби до їх спільного знаменника bd . Для цього чисельник і знаменник дробу $\frac{a}{b}$ помножимо на d : $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$, а чисельник і знаменник дробу $\frac{c}{d}$ помножимо на b : $\frac{c}{d} = \frac{cb}{db}$. Дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ звели до спільного знаменника bd . Нагадаємо, що d називають *додатковим множником* чисельника і знаменника дробу $\frac{a}{b}$, а b – додатковим множником чисельника і знаменника дробу $\frac{c}{d}$.

Зазначену послідовність дій для додавання дробів з різними знаменниками можна записати так:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad + bc}{bd},$$

або скорочено:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Аналогічно виконують і віднімання дробів з різними знаменниками:

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{d} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

Приклад 1. Виконайте дію: 1) $\frac{3}{m} + \frac{4}{n}$; 2) $\frac{2}{a} - \frac{b}{7}$.

Розв'язання.

$$1) \frac{n/3}{m} + \frac{m/4}{n} = \frac{3n + 4m}{mn}; \quad 2) \frac{7/2}{a} - \frac{a/b}{7} = \frac{14 - ab}{7a}.$$

Спільним знаменником двох або більше дробів може бути не лише добуток їх знаменників. Узагалі у дробів є безліч спільних знаменників. Часто при додаванні й відніманні дробів з різними знаменниками вдається знайти простіший спільний знаменник, ніж добуток знаменників цих дробів. У такому випадку кажуть про *найпростіший* спільний знаменник (аналогічно до *найменшого* спільного знаменника для числових дробів).

Розглянемо приклад, де знаменники дробів – одночлени.

Приклад 2. Виконайте додавання $\frac{7}{6x^2y} + \frac{3}{8xy^3}$.

Розв'язання. Спільним знаменником даних дробів можна вважати одночлен $48x^3y^2$, що є добутком знаменників дробів, але в даному випадку він не буде найпростішим спільним знаменником. Спробуємо знайти найпростіший спільний знаменник. Ним для дробів, знаменники яких є одночленами, буде також одночлен. Коефіцієнт цього одночлена повинен ділитися і на 6, і на 8. Найменшим таким числом є 24. До спільного знаменника кожна зі змінних має входити з найбільшим із показників степеня, з якими вона входить до знаменників дробів. Таким чином, найпростішим спільним знаменником буде одночлен $24x^2y^3$. Тоді додатковим множником для першого дробу стане вираз $4y^2$, бо $24x^2y^3 = 6x^2y \cdot 4y^2$, а для другого – вираз $3x$, бо $24x^2y^3 = 8xy^3 \cdot 3x$. Отже, маємо:

$$\frac{4y^2/7}{6x^2y} + \frac{3x/3}{8xy^3} = \frac{4y^2 \cdot 7 + 3x \cdot 3}{24x^2y^3} = \frac{28y^2 + 9x}{24x^2y^3}.$$

Відповідь. $\frac{28y^2 + 9x}{24x^2y^3}$.

Зверніть увагу, що у прикладі 2 під час зведення дробів до спільного знаменника додаткові множники $4y^2$ та $3x$ не містили жодного спільного множника, відмінного від одиниці. Це означає, що ми знайшли найпростіший спільний знаменник дробів.

Розглянемо приклад, у якому знаменниками дробів є многочлени.

Приклад 3. Виконайте віднімання $\frac{x+4}{xy-x^2} - \frac{y+4}{y^2-xy}$.

Розв'язання. Щоб знайти спільний знаменник, розкладемо знаменники на множники:

$$xy - x^2 = x(y - x) \text{ і } y^2 - xy = y(y - x).$$

Найпростішим спільним знаменником дробів буде вираз $xy(y - x)$. Тоді додатковим множником для першого дробу буде y , а для другого — x . Виконаємо віднімання:

$$\begin{aligned} \frac{x+4}{xy-x^2} - \frac{y+4}{y^2-xy} &= \frac{y/x+4}{x(y-x)} - \frac{x/y+4}{y(y-x)} = \frac{y(x+4) - x(y+4)}{xy(y-x)} = \\ &= \frac{xy+4y-xy-4x}{xy(y-x)} = \frac{4y-4x}{xy(y-x)} = \frac{4(y-x)}{xy(y-x)} = \frac{4}{xy}. \end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{4}{xy}$.

Отже, щоб виконати додавання або віднімання дробів з різними знаменниками, треба:



- 1) розкласти на множники знаменники дробів, якщо це необхідно;
- 2) знайти спільний знаменник, бажано найпростіший;
- 3) записати додаткові множники;
- 4) знайти дріб, що є сумою або різницею даних дробів;
- 5) спростити цей дріб та отримати відповідь.

Аналогічно виконують додавання і віднімання цілого виразу і дробу.

Приклад 4. Спростіть вираз $a+1 - \frac{a^2-a}{a-2}$.

Розв'язання. Запишемо вираз $a+1$ у вигляді дробу із знаменником 1 та виконаємо віднімання:

$$a+1 - \frac{a^2-a}{a-2} = \frac{a^2/a+1}{1} - \frac{a^2-a}{a-2} = \frac{(a-2)(a+1) - (a^2-a)}{a-2} =$$

$$= \frac{a^2 + a - 2a - 2 - a^2 + a}{a - 2} = \frac{-2}{a - 2} = -\frac{2}{a - 2} = \frac{2}{2 - a}.$$

Відповідь. $\frac{2}{2 - a}$.



1. Який знаменник є спільним для дробів $\frac{2}{n}$ і $\frac{4}{m}$?
2. Як виконати додавання і віднімання дробів з різними знаменниками?



Початковий рівень

87. (Усно.) Знайдіть спільний знаменник дробів:

1) $\frac{a}{3}$ і $\frac{b}{6}$; 2) $\frac{x}{12}$ і $\frac{y}{8}$; 3) $\frac{a}{x}$ і $\frac{b}{y}$; 4) $\frac{c}{m}$ і $\frac{x}{3}$.

88. Виконайте дію:

1) $\frac{m}{2} - \frac{y}{3}$; 2) $\frac{a}{4} + \frac{x}{8}$; 3) $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$; 4) $\frac{2}{c} + \frac{k}{3}$.

89. Виконайте дію:

1) $\frac{x}{5} + \frac{a}{4}$; 2) $\frac{m}{6} - \frac{n}{3}$; 3) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$; 4) $\frac{t}{5} - \frac{4}{p}$.



Середній рівень

90. Подайте у вигляді дробу:

1) $\frac{3}{5a} - \frac{1}{2a}$; 2) $\frac{a}{4b} + \frac{7a}{5b}$; 3) $\frac{2a^2}{9b} + \frac{5a^2}{18b}$; 4) $\frac{7m}{12n^2} - \frac{m}{18n^2}$.

91. Виконайте дію:

1) $\frac{3}{4m} + \frac{2}{5m}$; 2) $\frac{x}{6y} - \frac{3x}{8y}$; 3) $\frac{4a}{9m^2} + \frac{5a}{12m^2}$; 4) $\frac{4x^2}{15y} - \frac{x^2}{10y}$.

92. Перетворіть на дріб вираз:

1) $\frac{2x}{3} + \frac{x - 4}{5}$; 2) $\frac{4m - 2n}{10} - \frac{m - n}{5}$; 3) $\frac{a + 2}{4a} - \frac{3 - 7a}{6a}$;
 4) $\frac{2 - 3y}{y} - \frac{5 - 3x}{x}$; 5) $\frac{x + 7}{5x} - \frac{3y + 4}{15y}$; 6) $\frac{4a + b}{2a} + \frac{a - 6b}{3b}$.

93. Подайте у вигляді дробу:

1) $\frac{a}{4} + \frac{a-2}{3}$;

2) $\frac{2x-y}{14} - \frac{x-y}{7}$;

3) $\frac{x-6}{2x} + \frac{7-2y}{4y}$;

4) $\frac{6m-n}{3m} - \frac{8n-5m}{4n}$.

94. Виконайте дію:

1) $\frac{1}{a^2} + \frac{a-2}{a}$;

2) $\frac{2+m}{m^2} - \frac{m^2-5}{m^3}$;

3) $\frac{1}{2x^5} + \frac{1-3x^2}{x^7}$;

4) $\frac{a-b}{ab} - \frac{b-a}{b^2}$;

5) $\frac{3n+m}{mn^2} + \frac{n-3m}{m^2n}$;

6) $\frac{x-2y}{xy^2} - \frac{y-2x}{x^2y}$.

95. Спростіть:

1) $\frac{m+2}{m^2} - \frac{1}{m}$;

2) $\frac{5}{n^5} + \frac{3-4n^2}{n^7}$;

3) $\frac{x-y}{x^2} - \frac{y-x}{xy}$;

4) $\frac{c-2p}{cp^2} + \frac{2c-p}{pc^2}$.

96. Виконайте дії:

1) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$;

2) $\frac{1}{c^3} - \frac{2}{c^2} + \frac{3}{c}$;

3) $\frac{1}{xy} - \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz}$;

4) $\frac{a+b}{ab} - \frac{b+c}{bc} + \frac{a+c}{ac}$.

97. Виконайте дії:

1) $\frac{1}{p} - \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$;

2) $\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}$;

3) $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$;

4) $\frac{x-y}{xy} + \frac{y-z}{yz} + \frac{x+z}{xz}$.

98. Доведіть тотожність $\frac{3x+1}{7x} - \frac{y-1}{2y} - \frac{7x+y}{14xy} = \frac{1-x}{14x}$.

99. Доведіть тотожність $\frac{3m+2}{5m} - \frac{n-1}{2n} - \frac{5m+3n}{10mn} = \frac{m+1}{10m}$.

100. Перетворіть на дріб вираз:

1) $x + \frac{2}{y}$;

2) $3m - \frac{1}{m}$;

3) $\frac{4}{p} - p^2$;

4) $\frac{a^2+y}{a} - a$;

5) $2x - \frac{6x^2+1}{3x}$;

6) $m + \frac{2-4mn}{4n}$.

101. Подайте вираз у вигляді дробу:

$$1) m - \frac{3}{n}; \quad 2) 4p + \frac{1}{p}; \quad 3) \frac{x + y^2}{y} - y; \quad 4) 7p - \frac{14p^2 + 3}{2p}.$$

102. Спростіть вираз:

$$1) 1 - \frac{m}{2} - \frac{n}{3}; \quad 2) 4 + \frac{1}{a} - \frac{1}{b};$$

$$3) \frac{m-2}{3} - 1 + \frac{m+2}{4}; \quad 4) \frac{1}{a+b} + a - b.$$

103. Виконайте дії:

$$1) \frac{m}{3} + \frac{n}{4} - 1; \quad 2) 5 - \frac{1}{c} + \frac{1}{d};$$

$$3) \frac{a+3}{5} - 1 + \frac{a-2}{2}; \quad 4) \frac{1}{x-y} + x + y.$$

104. Знайдіть суму і різницю дробів:

$$1) \frac{1}{x-y} \text{ і } \frac{1}{x+y}; \quad 2) \frac{1}{a+b} \text{ і } \frac{1}{a}.$$

105. Знайдіть суму і різницю дробів:

$$1) \frac{1}{2a+b} \text{ і } \frac{1}{2a-b}; \quad 2) \frac{1}{m-n} \text{ і } \frac{1}{m}.$$

106. Спростіть вираз:

$$1) \frac{2}{a} + \frac{3}{a-1}; \quad 2) \frac{c}{a-c} - \frac{c}{a}; \quad 3) \frac{3}{x+y} + \frac{2}{x-y};$$

$$4) \frac{x}{x-1} + \frac{2}{x-2}; \quad 5) \frac{a+1}{a} - \frac{a}{a-1}; \quad 6) \frac{a}{2a-1} - \frac{a}{2a+1}.$$

107. Виконайте дію:

$$1) \frac{4}{b} + \frac{7}{b+2}; \quad 2) \frac{3}{m-n} - \frac{2}{m+n};$$

$$3) \frac{p}{p-2} - \frac{3}{p+3}; \quad 4) \frac{x}{1-x} + \frac{1+x}{x}.$$

108. Виконайте дію:

$$1) \frac{a-2}{2(a+1)} + \frac{a}{a+1}; \quad 2) \frac{m}{4(a+b)} - \frac{3m}{5(a+b)};$$

$$3) \frac{a-2}{2a+6} - \frac{a+1}{3a+9}; \quad 4) \frac{4}{ax-ay} + \frac{5}{bx-by};$$

5) $\frac{5}{x} - \frac{30}{x(x+6)}$;

6) $\frac{6}{x^2 + 3x} - \frac{2}{x}$.

109. Виконайте дію:

1) $\frac{m-1}{3(m+2)} + \frac{m}{m+2}$;

2) $\frac{7a}{3(b+2a)} - \frac{4a}{9(b+2a)}$;

3) $\frac{x-2}{3x-12} - \frac{x+1}{2x-8}$;

4) $\frac{3}{mx+my} + \frac{2}{nx+ny}$;

5) $\frac{4}{a} - \frac{8}{a(a+2)}$;

6) $\frac{8}{m^2+8m} - \frac{1}{m}$.

110. Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $\frac{4n+m}{n^2-m^2} + \frac{1}{n+m}$;

2) $\frac{a-6}{a^2-4} + \frac{3}{a-2}$;

3) $\frac{x}{x-5} - \frac{x^2}{x^2-10x+25}$.

111. Перетворіть вираз на дріб:

1) $\frac{4a-b}{a^2-b^2} + \frac{1}{a-b}$;

2) $\frac{2}{b+3} + \frac{b+6}{b^2-9}$;

3) $\frac{m}{m+4} - \frac{m^2}{m^2+8m+16}$.



Достатній рівень

112. Спростіть вираз:

1) $\frac{a+4}{ab-a^2} + \frac{b+4}{ab-b^2}$;

2) $\frac{m^2}{mx-x^2} + \frac{x}{x-m}$;

3) $\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2+2x}$;

4) $\frac{3ab-27a^2}{b^2-3ab} - \frac{3a^2-b^2}{ab-3a^2}$.

113. Спростіть вираз:

1) $\frac{a-2}{ab-a^2} - \frac{2-b}{ab-b^2}$;

2) $\frac{t^2}{ta+a^2} - \frac{a}{t+a}$;

3) $\frac{4}{a^2-9} - \frac{2}{a^2+3a}$;

4) $\frac{3n^2-8m^2}{n^2-2mn} - \frac{3mn-n^2}{mn-2m^2}$.

114. Доведіть тотожність

$$\frac{(a-1)(a-2)}{12} - \frac{(a-1)(a-5)}{3} + \frac{(a-5)(a-2)}{4} = 1.$$

115. Подайте вираз у вигляді дробу:

$$\begin{array}{ll}
 1) m - n - \frac{m^2 + n^2}{m + n}; & 2) p - \frac{4}{p - 2} - 2; \\
 3) a^2 - \frac{a^4}{a^2 - 1} + 1; & 4) \frac{8p^2}{2p - 3} - 4p - 1.
 \end{array}$$

116. Подайте вираз у вигляді дробу:

$$\begin{array}{ll}
 1) m - \frac{9}{m + 3} + 3; & 2) \frac{6m^2}{3m + 1} - 2m + 4.
 \end{array}$$

117. Доведіть, що для всіх допустимих значень змінної m значення виразу $\frac{4m - 5}{7m - 21} - \frac{m - 1}{2m - 6}$ не залежить від m .

118. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll}
 1) \frac{x - 1}{x^2 - x + 1} + \frac{2 - x}{x^3 + 1}; & 2) \frac{2m}{m - 5} - \frac{5}{m + 5} + \frac{2m^2}{25 - m^2}; \\
 3) \frac{6}{m^2 - 6m} + \frac{m - 12}{6m - 36}; & 4) \frac{3}{2a + 6} + \frac{a^2 - a - 3}{a^2 - 9} - 1.
 \end{array}$$

119. Спростіть вираз:

$$\begin{array}{ll}
 1) \frac{a + 1}{a^2 + a + 1} + \frac{a + 2}{a^3 - 1}; & 2) \frac{2a}{a - 3} + \frac{a}{a + 3} + \frac{2a^2}{9 - a^2}; \\
 3) \frac{4}{m^2 + 4m} + \frac{m + 8}{4m + 16}; & 4) \frac{2}{3b + 6} + \frac{b^2 - b - 2}{b^2 - 4} - 1.
 \end{array}$$

120. Доведіть тотожність $\frac{0,9}{0,25a + 0,5} - \frac{0,3a + 0,6}{0,5a^2 + 2a + 2} = \frac{3}{a + 2}$.

121. Доведіть тотожність $\frac{0,35}{0,5a - 1,5} - \frac{0,2a - 0,6}{a^2 - 6a + 9} = \frac{1}{2(a - 3)}$.

122. Перетворіть вираз на дріб:

$$\begin{array}{l}
 1) \frac{a^2 - 2ab + 4b^2}{a^2 - 4b^2} + \frac{a^2 + 2ab + 4b^2}{(a + 2b)^2}; \\
 2) \frac{2}{(a - 3)^2} - \frac{4}{a^2 - 9} + \frac{2}{(a + 3)^2}.
 \end{array}$$

123. Перетворіть вираз на дріб:

$$1) \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 - y^2} + \frac{x^2 + xy + y^2}{(x + y)^2};$$

$$2) \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^2-4} + \frac{1}{(x+2)^2}.$$

124. При якому значенні a вираз $2 + \frac{a}{x-4}$ тотожно дорівнює дробу $\frac{2x}{x-4}$?



4 Високий рівень

125. Доведіть, що значення виразу

$$\frac{a^3 + 3a}{a + 2} - \frac{3a^2 - 14a + 16}{a^2 - 4} + 2a$$

при всіх допустимих значеннях змінної є додатним.

126. Доведіть тотожність

$$a + a^2 + \frac{2a^2 + 3a + 1}{a^2 - 1} - \frac{a^3 + 2a}{a - 1} = -1.$$

127. Побудуйте графік функції $y = 15 \left(\frac{3x + 4}{5x - 10} - \frac{x + 4}{3x - 6} \right)$.

128. Знайдіть значення виразу

$$\frac{3a + 0,5b}{9a^2 - 1,5ab} - \frac{12a}{9a^2 - 0,25b^2} - \frac{3a - 0,5b}{9a^2 + 1,5ab},$$

якщо $a = -3$, $b = 19$.

129. Знайдіть значення виразу

$$\frac{x + 0,2y}{4x^2 - 0,8xy} - \frac{12,5x}{12,5x^2 - 0,5y^2} - \frac{x - 0,2y}{4x^2 + 0,8xy},$$

якщо $x = -10$, $y = 49$.

130. Чи існує таке значення x , при якому значення виразу

$$\frac{1}{2-x} - \frac{1}{2+x} - \frac{x}{4-x^2} + \frac{x^2+4}{2x^3-8x}$$

дорівнює нулю?



Вправи для повторення

2 131. Скільки кілограмів солі міститься у 60 кг її 5-відсоткового розчину?

3 132. З двох міст одночасно назустріч один одному виїхали два велосипедисти. Відстань між містами становить s км, швидкості велосипедистів v_1 км/год і v_2 км/год. Через t год вони зустрілися. Складіть формулу для обчислення t . Знайдіть значення t , якщо $s = 150$ км, $v_1 = 12$ км/год, $v_2 = 13$ км/год.

4 133. Відомо, що $\frac{x}{y} = 3$. Знайдіть значення дробу:

1) $\frac{x+y}{y}$; 2) $\frac{x-y}{y}$; 3) $\frac{x+7y}{y}$; 4) $\frac{x^2+2xy}{xy}$.



Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

134. Виконайте множення:

1) $\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{16}$; 2) $\frac{3}{7} \cdot 1\frac{5}{9}$; 3) $2\frac{2}{3} \cdot 3\frac{3}{4}$; 4) $7\frac{1}{7} \cdot 2\frac{1}{5} \cdot 3\frac{1}{2}$.

135. Обчисліть: 1) $\left(\frac{1}{7}\right)^2$; 2) $\left(-\frac{4}{5}\right)^2$; 3) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$; 4) $\left(1\frac{1}{2}\right)^3$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



136. Для шкільної актової зали придбали люстру на 31 лампочку. Директор школи хоче мати можливість вмикати будь-яку їх кількість, від 1 до 31. Яка найменша кількість звичайних вимикачів для цього знадобиться?

Домашня самостійна робота № 1

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 1. Який з виразів не є цілим раціональним виразом?

А. $\frac{1}{5}a^2xy$; Б. $\frac{m-3}{5}$; В. $\frac{5}{m-3}$; Г. $0,25x + y$.

2. Скоротіть дріб $\frac{5ax}{5xy}$.

А. $\frac{5a}{y}$; Б. $\frac{a}{y}$; В. $\frac{y}{a}$; Г. $\frac{a}{5y}$.

3. Виконайте дію $\frac{m}{3} - \frac{5}{b}$.

А. $\frac{m-5}{3-b}$; Б. $\frac{3m-5b}{3b}$; В. $\frac{15-mb}{3b}$; Г. $\frac{mb-15}{3b}$.

2 4. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі $\frac{a-3}{a+2}$.

- А. a – будь-яке число;
 Б. a – будь-яке число, крім 3;
 В. a – будь-яке число, крім -2;
 Г. a – будь-яке число, крім -2 і 3.

5. Скоротіть дріб $\frac{2p+4}{p^2-4}$.

А. $\frac{2}{p-2}$; Б. $\frac{2}{p+2}$; В. $\frac{2}{p}$; Г. $\frac{2}{2-p}$.

6. Виконайте дію $\frac{4m}{m-a} + \frac{4a}{a-m}$.

А. $\frac{4m+4a}{m-a}$; Б. 4; В. -4; Г. $\frac{4m+4a}{a-m}$.

3 7. При яких значеннях x дріб $\frac{(3+x)(1-x)}{5x-5}$ дорівнює нулю?

- А. -3 і 1; Б. -3; В. 1; Г. таких значень x немає.

8. Спростіть вираз $\frac{2m}{m-3} + \frac{m}{m+3} + \frac{2m^2}{9-m^2}$.

А. $\frac{m}{m-3}$; Б. $\frac{m}{m+3}$; В. $\frac{5m^2+3m}{m^2-9}$; Г. $-\frac{1}{3}$.

9. Подайте дріб $\frac{m^3-m^4+3}{m^3}$ у вигляді суми цілого виразу і дробу.

А. $1 - \frac{1}{m} + \frac{3}{m^3}$; Б. $1 + \frac{3}{m^3}$; В. $1 - m + \frac{3}{m^3}$; Г. $1 - m + \frac{1}{m^3}$.

4 10. При яких значеннях x вираз $\frac{x^2-9}{|x+1|-4}$ має зміст?

- А. x – будь-яке число;
 Б. x – будь-яке число, крім 3;
 В. x – будь-яке число, крім -5;
 Г. x – будь-яке число, крім 3 і -5.

11. При яких значеннях x дріб $\frac{x^2 - 9}{|x + 1| - 4}$ дорівнює нулю?

А. 3; Б. 3 і -3; В. -3; Г. 3; -5.

12. Знайдіть значення виразу $\frac{2(x - 4y)}{(x - 2)(y - 1)} - \frac{x^2 - 8y}{(2 - x)(1 - y)}$,

якщо $x = 13$, $y = 0,99$.

А. 1300; Б. -1300; В. 130; Г. -130.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАЇЬ ДО § 1-4

1 1. Які з виразів є цілими, а які – дробовими:

1) $\frac{1}{3}a^2b$; 2) $\frac{x - y}{x}$; 3) $\frac{c + 2}{9}$; 4) $p^2 - p - 19$?

2. Скоротіть дріб: 1) $\frac{m^2}{mn}$; 2) $\frac{4ab}{4bc}$.

3. Виконайте дію: 1) $\frac{a - b}{n} + \frac{b}{n}$; 2) $\frac{x}{2} - \frac{3}{y}$.

2 4. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

1) $\frac{5}{x(x - 1)}$; 2) $\frac{2a}{a + 2} + \frac{1}{a - 3}$.

5. Скоротіть дріб:

1) $\frac{16am}{20bm}$; 2) $\frac{12am^2}{8mc}$; 3) $\frac{2m - 6}{m^2 - 9}$; 4) $\frac{ax + 2a}{x^2 + 4x + 4}$.

6. Виконайте дію:

1) $\frac{3a}{a - b} + \frac{3b}{b - a}$; 2) $\frac{5x + y}{x^2y} + \frac{x - 5y}{xy^2}$.

3 7. Спростіть вираз $\frac{2b}{b - 4} + \frac{b}{b + 4} + \frac{2b^2}{16 - b^2}$.

8. Подайте дріб у вигляді суми або різниці цілого виразу і дробу:

1) $\frac{c^2 - c^3 + 5}{c^2}$; 2) $\frac{p^2 - p - 2}{p - 1}$.

4 9. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2 - 4x}{16 - 4x}$.

Додаткові завдання

4 10. Знайдіть: 1) область визначення виразу $\frac{x^2 - 16}{|x + 1| - 5}$;

2) значення x , при яких дріб $\frac{x^2 - 16}{|x + 1| - 5}$ дорівнює нулю.

11. Спростіть вираз $\frac{3(a - 2b)}{(a - 3)(b - 4)} - \frac{a^2 - 6b}{(3 - a)(4 - b)}$.



5. МНОЖЕННЯ ДРОБІВ. ПІДНЕСЕННЯ ДРОБУ ДО СТЕПЕНЯ

Нагадаємо, що добутком двох звичайних дробів є дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник – добутку знаменників даних дробів:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Доведемо, що ця рівність є тотожністю для будь-яких значень a , b , c і d за умови, що $b \neq 0$ і $d \neq 0$.

Нехай $\frac{a}{b} = p$, $\frac{c}{d} = q$. Тоді за означенням частки $a = bp$, $c = dq$. Тому $ac = (bp)(dq) = (bd)(pq)$. Оскільки $bd \neq 0$, то, знову врахувавши означення частки, одержимо: $pq = \frac{ac}{bd}$. Отже, якщо $b \neq 0$ і $d \neq 0$, то $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Сформулюємо *правило множення дробів*.



Щоб помножити дріб на дріб, треба перемножити окремо чисельники і окремо знаменники та записати перший добуток чисельником, а другий – знаменником дробу.

Приклад 1. Виконайте множення $\frac{b^4}{9m^2} \cdot \frac{12m}{b^2}$.

Розв'язання. $\frac{b^4}{9m^2} \cdot \frac{12m}{b^2} = \frac{b^4 \cdot 12m}{9m^2 \cdot b^2} = \frac{4b^2}{3m}$.

Відповідь. $\frac{4b^2}{3m}$.

Приклад 2. Знайдіть добуток $\frac{cm + cd}{2x} \cdot \frac{8x^3}{m^2 - d^2}$.

Розв'язання. Використаємо правило множення дробів та розкладемо на множники чисельник першого дробу і знаменник другого:

$$\frac{cm + cd}{2x} \cdot \frac{8x^3}{m^2 - d^2} = \frac{c(m + d) \cdot 8x^3}{2x(m - d)(m + d)} = \frac{4cx^2}{m - d}$$

Відповідь. $\frac{4cx^2}{m - d}$.

Зверніть увагу, що у прикладах 1 і 2 під час множення дробів ми не знаходили одразу результат множення чисельників і знаменників. Спочатку ми записали добутки в чисельнику і знаменнику за правилом множення дробів, потім скоротили отриманий дріб, бо він виявився скоротним, а вже потім виконали множення в чисельнику і в знаменнику та записали відповідь. Доцільно це враховувати і надалі.

Приклад 3. Помножити дріб $\frac{x - 2}{x^2 + 2x}$ на многочлен $x^2 + 4x + 4$.

Розв'язання. Врахувавши, що $x^2 + 4x + 4 = \frac{x^2 + 4x + 4}{1}$,

маємо:

$$\begin{aligned} \frac{x - 2}{x^2 + 2x} \cdot (x^2 + 4x + 4) &= \frac{x - 2}{x^2 + 2x} \cdot \frac{x^2 + 4x + 4}{1} = \frac{(x - 2)(x + 2)^2}{x(x + 2)} = \\ &= \frac{(x - 2)(x + 2)}{x} = \frac{x^2 - 4}{x}. \end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{x^2 - 4}{x}$.

Правило множення дробів можна поширити на добуток трьох і більше множників.

Приклад 4. $\frac{x^3 - 8}{x^2 - 9} \cdot \frac{3x + 9}{x - 2} \cdot \frac{5x - 15}{3x^2 + 6x + 12} =$
 $= \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4) \cdot 3(x + 3) \cdot 5(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)(x - 2) \cdot 3(x^2 + 2x + 4)} = 5.$

Розглянемо піднесення дробу $\frac{a}{b}$ до степеня n , де n – натуральне число.

За означенням степеня і правилом множення дробів маємо:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ множників}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ множників}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ множників}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Отже,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Сформулюємо правило піднесення дроби до степеня.



Щоб піднести дріб до степеня, треба піднести до цього степеня чисельник і знаменник і перший результат записати в чисельник, а другий – у знаменник дроби.

Приклад 5. $\left(\frac{3x^2y}{5t^3}\right)^3 = \frac{(3x^2y)^3}{(5t^3)^3} = \frac{3^3(x^2)^3y^3}{5^3 \cdot (t^3)^3} = \frac{27x^6y^3}{125t^9}.$

Приклад 6. Подайте вираз $\left(-\frac{m^7p^{12}}{t}\right)^5$ у вигляді дроби.

Розв'язання.

$$\left(-\frac{m^7p^{12}}{t}\right)^5 = (-1)^5 \cdot \frac{(m^7)^5 \cdot (p^{12})^5}{t^5} = -\frac{m^{35}p^{60}}{t^5}.$$

Відповідь. $-\frac{m^{35}p^{60}}{t^5}.$



1. Сформулюйте правило множення дробів. Доведіть його.
2. Сформулюйте правило піднесення дроби до степеня. Доведіть його.



1 Початковий рівень

137. Виконайте множення:

$$1) \frac{4x}{a} \cdot \frac{b}{3m}; \quad 2) \frac{2}{a} \cdot \frac{a}{5}; \quad 3) \frac{5m}{4n} \cdot \frac{3}{p}; \quad 4) \frac{3x}{8} \cdot \frac{1}{x}.$$

138. Виконайте множення:

$$1) \frac{5p}{a} \cdot \frac{x}{2b}; \quad 2) \frac{b}{9} \cdot \frac{7}{b}; \quad 3) \frac{4}{7a} \cdot \frac{5b}{3}; \quad 4) \frac{1}{m} \cdot \frac{m}{8}.$$

139. Перетворіть на дріб вираз:

$$1) \frac{a^2}{5} \cdot \frac{7}{a}; \quad 2) \frac{b^4}{3} \cdot \frac{5}{b^2}; \quad 3) \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a}{3}; \quad 4) \frac{9}{x^2} \cdot \frac{x}{3}.$$

140. Перетворіть на дріб вираз:

$$1) \frac{7}{b} \cdot \frac{b^2}{3}; \quad 2) \frac{5}{a^3} \cdot \frac{a^5}{2}; \quad 3) \frac{m}{8} \cdot \frac{1}{m^2}; \quad 4) \frac{a^2}{12} \cdot \frac{4}{a}.$$



Середній рівень

141. Виконайте дію:

$$1) \frac{5a}{7} \cdot \frac{21}{20a^2}; \quad 2) \frac{3,5}{14a^2} \cdot \frac{4a^3}{5b}; \quad 3) \frac{c^2}{30} \cdot \frac{20}{cm};$$

$$4) -\frac{3m}{5a^2} \cdot \frac{a}{9m^2}; \quad 5) \frac{4x^2}{7p} \cdot \left(-\frac{21p}{8x^3}\right); \quad 6) -\frac{5x^2}{7y^3} \cdot \left(-\frac{21y^2}{25x}\right).$$

142. Перетворіть на дріб вираз:

$$1) \frac{15m^2}{22} \cdot \frac{11}{10m}; \quad 2) \frac{6p}{7} \cdot \frac{2,5c^2}{15p^3}; \quad 3) \frac{15}{xp} \cdot \frac{x^2}{45};$$

$$4) \frac{4a}{p^2} \cdot \left(-\frac{p}{8a^2}\right); \quad 5) -\frac{5c^2}{7y} \cdot \frac{49y}{10c^3}; \quad 6) -\frac{6a^2}{65b^3} \cdot \left(-\frac{13b}{30a}\right).$$

143. Перетворіть на дріб вираз:

$$1) 9p \cdot \frac{b}{6p^2}; \quad 2) \frac{4m^3}{x^2} \cdot x^3; \quad 3) 9ab^2 \cdot \left(-\frac{5b}{3a^3}\right);$$

$$4) -7ab^3 \cdot \frac{b^5}{14a}; \quad 5) -4mn^2 \cdot \frac{1}{8mn}; \quad 6) -11a^2b \cdot \left(-\frac{5}{22a^3b^2}\right).$$

144. Виконайте дію:

$$1) \frac{a}{16m^2} \cdot 12m; \quad 2) a^3 \cdot \frac{7x^3}{a^2}; \quad 3) -\frac{7y}{4x^2} \cdot 12xy^3;$$

$$4) 5cm^4 \cdot \left(-\frac{m}{15c}\right); \quad 5) -5ab^2 \cdot \left(-\frac{1}{10ab}\right); \quad 6) 13c^2d \cdot \frac{7}{26c^3d^2}.$$

145. Спростіть вираз:

$$1) \frac{7c^3}{10m^2} \cdot \frac{25m^3}{14c^8}; \quad 2) -\frac{8a^3}{27c^4} \cdot \frac{45c^5}{16a^3};$$

$$3) \frac{4c^3}{15a^8} \cdot \left(-\frac{5a^3}{8c^4}\right); \quad 4) -\frac{1}{25p^2q^7} \cdot \left(-\frac{10p^3q^7}{11}\right).$$

146. Спростіть вираз:

$$1) \frac{9m^2}{25a^2} \cdot \frac{35a^3}{18m^5}; \quad 2) \frac{7p^3}{18a^3} \cdot \left(-\frac{27a^4}{14p^3}\right);$$

$$3) -\frac{5m^3}{21n^7} \cdot \frac{7n^2}{10m^4}; \quad 4) -\frac{1}{18c^3d^4} \cdot \left(-\frac{12c^4d^4}{7}\right).$$

147. Виконайте множення:

$$1) \frac{a^2 + 2a}{5} \cdot \frac{a}{4a + 8}; \quad 2) \frac{7m}{a} \cdot \frac{a^2 - ab}{21};$$

$$3) \frac{2a - b}{10a} \cdot \frac{15a^2}{b - 2a}; \quad 4) \frac{10ab}{x + y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{5ab};$$

$$5) -\frac{ab - ac}{10p} \cdot \frac{25p}{xc - xb}; \quad 6) \frac{a^2 + ab}{x^2} \cdot \frac{xy}{a^2 + 2ab + b^2}.$$

148. Виконайте множення:

$$1) \frac{m^2 - 3m}{7} \cdot \frac{x}{2m - 6}; \quad 2) \frac{5a}{x^2 + xy} \cdot \frac{x}{15};$$

$$3) \frac{a - b}{16m^2} \cdot \frac{24m}{b - a}; \quad 4) \frac{x^2 - y^2}{5pc} \cdot \frac{20pc}{x - y};$$

$$5) \frac{3a - 3b}{12x} \cdot \left(-\frac{18x}{mb - ma}\right); \quad 6) \frac{m^2 - 2mn + n^2}{pc} \cdot \frac{p^2}{m^2 - mn}.$$

149. Піднесіть до степеня:

$$1) \left(\frac{p}{4m}\right)^3; \quad 2) \left(\frac{3c^2}{m}\right)^4; \quad 3) \left(-\frac{3m^2n}{7}\right)^2;$$

$$4) \left(-\frac{2m^2}{3x^3}\right)^3; \quad 5) \left(\frac{2a^3b}{x^7}\right)^5; \quad 6) \left(-\frac{c^2m^3}{p}\right)^{10}.$$

150. Подайте у вигляді дроби вираз:

$$1) \left(\frac{c}{5m}\right)^2; \quad 2) \left(\frac{y}{2x^3}\right)^4; \quad 3) \left(-\frac{4c^2m^3}{5}\right)^2;$$

$$4) \left(-\frac{3c^3}{m^7}\right)^3; \quad 5) \left(\frac{c^3m}{2a^2}\right)^6; \quad 6) \left(-\frac{ab^3}{c^2}\right)^8.$$



Достатній рівень

151. Спростіть вираз:

1) $\frac{54a^2c}{81b^3} \cdot \frac{32ab}{13c^3} \cdot \frac{52bc^2}{128a^3};$

2) $\frac{147x^4y^2}{p^3} \cdot 10xp^2 \cdot \frac{y^3}{105x^5y}.$

152. Виконайте дії:

1) $\frac{14xz^3}{81y^2} \cdot \frac{27y^3}{5xz} \cdot \frac{45xy}{7z^2};$

2) $\frac{b^3}{111m^5} \cdot 3mc^3 \cdot \frac{74m^3b}{c^4}.$

153. Знайдіть добуток:

1) $\frac{m^2 - 4m + 4}{m^2 + 6m + 9} \cdot \frac{m^2 - 9}{3m - 6};$

2) $-\frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 3x + 9} \cdot \frac{x^3 + 27}{25 - x^2}.$

154. Виконайте множення:

1) $\frac{a^2 + 8a + 16}{a^2 - 2a + 1} \cdot \frac{7a - 7}{a^2 - 16};$

2) $-\frac{y^3 - 8}{9 - y^2} \cdot \frac{y^2 - 6y + 9}{y^2 + 2y + 4}.$

155. Перетворіть на дріб:

1) $(4a + 20b) \cdot \frac{5}{a^2 - 25b^2};$

2) $(m^2 - 4) \cdot \frac{2m}{(m - 2)^2};$

3) $-\frac{a}{2a^2 - 18} \cdot (a^2 - 6a + 9);$

4) $(x^3 + 27y^3) \cdot \frac{5}{3x^2 - 9xy + 27y^2}.$

156. Перетворіть на дріб:

1) $\frac{4}{x^2 - 9y^2} \cdot (6x + 18y);$

2) $(c^2 + 4c + 4) \cdot \left(-\frac{c}{3c^2 - 12}\right).$

157. Виконайте дії:

1) $\left(\frac{25x^2}{8y^3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{16y^5}{125x^3}\right)^2;$

2) $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + y^2} \cdot \left(\frac{x + y}{x - y}\right)^3.$

158. Виконайте дії:

1) $\left(-\frac{16m^3}{27n^5}\right)^2 \cdot \left(\frac{9n^4}{8m^2}\right)^3;$

2) $\left(\frac{m - n}{m + n}\right)^3 \cdot \frac{m^2 + 2mn + n^2}{m^2 - 2mn + n^2}.$

159. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{6ab - b}{5a + b} \cdot \frac{25a^2 - b^2}{6a - 1}$, якщо $a = 1,2$, $b = 6$;

2) $\frac{a^3 + 8}{a^2 - 1} \cdot \frac{a^2 + a}{a^2 - 2a + 4}$, якщо $a = 6$.



4 Високий рівень

160. Виконайте множення:

1) $\frac{x^2 + ax - cx - ca}{x^2 - ax + cx - ac} \cdot \frac{x^2 + ac + xc + xa}{x^2 + ac - xc - xa}$;

2) $\frac{5a - 5b}{3c + 3y} \cdot \frac{c^2 - y^2 - c - y}{a^2 - b^2 + a - b}$.

161. Обчисліть значення виразу $\frac{a^2 - b^2 + a + b}{a^2 - b^2 + a - b} \cdot \frac{4a - 4b}{8a + 8b}$, якщо $a = 100$, $b = 101$.



Вправи для повторення

162. Розв'яжіть систему рівнянь:

1)
$$\begin{cases} \frac{1}{8}(x + y) = 3, \\ \frac{1}{3}(x - y) = 5; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} \frac{x - 1}{3} + \frac{y - 1}{2} = 2, \\ \frac{x - 1}{2} - \frac{y - 1}{12} = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

163. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^3 - 8}{x - 2} - x^2$.



Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

164. Знайдіть число, взаємно обернене із числом:

1) 4; 2) -7; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $-\frac{2}{5}$; 5) 0,16; 6) 1,2.

165. Обчисліть:

1) $\frac{26}{45} : \frac{91}{135}$; 2) $2\frac{1}{2} : \frac{15}{16}$; 3) $-3\frac{1}{7} : 2\frac{5}{14}$; 4) $-5\frac{13}{15} : \left(-1\frac{8}{25}\right)$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



166. (XV Всеукраїнська олімпіада, 1975 р.) При яких натуральних значеннях n число $2^n + 65$ є квадратом цілого числа?

§ 6. ДІЛЕННЯ ДРОБІВ

Нагадаємо, щоб знайти частку двох звичайних дробів, треба ділене помножити на дріб, обернений до дільника:

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{15}.$$

Формулою це можна записати так:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Доведемо, що ця рівність є тотожністю для будь-яких значень a , b , c і d за умови, що $b \neq 0$, $c \neq 0$ і $d \neq 0$.

$$\text{Оскільки } \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right) \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{d}{c} \cdot \frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b},$$

то за означенням частки маємо: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$

Отже, якщо $b \neq 0$, $c \neq 0$ і $d \neq 0$, то $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$

Дріб $\frac{d}{c}$ називають *оберненим* до дроби $\frac{c}{d}$.

Сформулюємо *правило ділення дробів*.



Щоб поділити один дріб на другий, треба перший дріб помножити на дріб, обернений до другого.

Приклад 1. Поділіть дріб $\frac{21x^2}{8y^3}$ на дріб $\frac{3x}{16y^2}$.

Розв'язання.

$$\frac{21x^2}{8y^3} : \frac{3x}{16y^2} = \frac{21x^2}{8y^3} \cdot \frac{16y^2}{3x} = \frac{21x^2 \cdot 16y^2}{8y^3 \cdot 3x} = \frac{7x \cdot 2}{y} = \frac{14x}{y}.$$

Відповідь. $\frac{14x}{y}$.

Приклад 2. Виконайте ділення $\frac{x^2 - 25}{x^2 + 2x} : \frac{3x + 15}{x}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 25}{x^2 + 2x} : \frac{3x + 15}{x} &= \frac{(x - 5)(x + 5)}{x(x + 2)} \cdot \frac{x}{3(x + 5)} = \\ &= \frac{(x - 5)(x + 5)x}{3x(x + 2)(x + 5)} = \frac{x - 5}{3(x + 2)}. \end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{x - 5}{3(x + 2)}$.

Приклад 3. Спростіть вираз $\frac{a^2 - 4}{5a} : (a^2 + 4a + 4)$.

Розв'язання. Оскільки $a^2 + 4a + 4 = \frac{a^2 + 4a + 4}{1}$, то:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - 4}{5a} : (a^2 + 4a + 4) &= \frac{a^2 - 4}{5a} : \frac{a^2 + 4a + 4}{1} = \\ &= \frac{(a - 2)(a + 2)}{5a} \cdot \frac{1}{(a + 2)^2} = \frac{(a - 2)(a + 2) \cdot 1}{5a(a + 2)^2} = \frac{a - 2}{5a(a + 2)}. \end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{a - 2}{5a(a + 2)}$.



Сформулюйте правило ділення дробів. Доведіть його.



1 Початковий рівень

167. Виконайте ділення:

$$1) \frac{2}{a} : \frac{3}{b}; \quad 2) \frac{7}{x} : \frac{y}{2}; \quad 3) \frac{m}{3} : \frac{m}{4}; \quad 4) \frac{a^2}{2} : \frac{a}{7}.$$

168. Виконайте ділення:

$$1) \frac{5}{x} : \frac{2}{y}; \quad 2) \frac{a}{2} : \frac{5}{b}; \quad 3) \frac{4}{x} : \frac{5}{x}; \quad 4) \frac{x^2}{3} : \frac{x}{2}.$$



2 Середній рівень

169. Спростіть вираз:

$$1) \frac{7b}{12a} : \frac{21b^2}{16a}; \quad 2) \frac{15}{2n^2} : \frac{3m}{8n}; \quad 3) \frac{9b}{14a} : \frac{5b^2}{21a^2};$$

$$\begin{array}{lll}
 4) -\frac{3x^2}{a} : \frac{6x^3}{a^2}; & 5) 14x^2 : \frac{7x}{a}; & 6) \frac{8x^3}{7a} : (-2x^2); \\
 7) -\frac{12a^2}{b} : (16a^2); & 8) -40ma^5 : \left(-\frac{8m^2}{a}\right). &
 \end{array}$$

170. Виконайте дію:

$$\begin{array}{lll}
 1) \frac{3a^2}{b} : \frac{a}{b^2}; & 2) -\frac{3p}{c^3} : \frac{15p^2}{c^2}; & 3) \frac{4p}{5c} : \frac{8p^2}{15c^3}; \\
 4) \frac{15m^3}{c} : (-10m^2); & 5) -\frac{2a^2}{b} : (-8a^2); & 6) -12a^2bc : \frac{4ab}{m}.
 \end{array}$$

171. Подайте у вигляді дробу:

$$\begin{array}{ll}
 1) \frac{12m^2}{7c^4} : \frac{6m^4}{35c^3}; & 2) \frac{9m^2}{22n^3} : \left(-\frac{m^5}{11n^6}\right); \\
 3) -\frac{7ab}{4cd} : \frac{21a^2b}{8cd^3}; & 4) -\frac{27m^2n}{7c^2x} : \left(-\frac{9mn^2}{7c^2x^3}\right).
 \end{array}$$

172. Подайте у вигляді дробу:

$$\begin{array}{ll}
 1) \frac{6a^2}{5b^2} : \frac{2a^3}{15b}; & 2) -\frac{4a^2}{27x} : \frac{a^4}{9x^3}; \\
 3) \frac{5xy}{2m^2n} : \left(-\frac{15x^2y}{8mn^3}\right); & 4) -\frac{2ab^2}{9x^2p} : \left(-\frac{2a^2b}{27x^2p^3}\right).
 \end{array}$$

173. Виконайте ділення:

$$\begin{array}{ll}
 1) \frac{2a + b}{4p} : \frac{b + 2a}{8p^2}; & 2) \frac{3a - 2x}{7x^2} : \frac{2x - 3a}{14x}; \\
 3) \frac{a^2 - 3a}{9y^2} : \frac{5a}{9y}; & 4) \frac{a^2 + a}{9b^2} : \frac{5 + 5a}{b^3}; \\
 5) \frac{7ab}{c^2 - 3c} : \frac{14ab^2}{3c - 9}; & 6) \frac{11a}{m^2 - 2m} : \frac{22a^2}{6 - 3m}.
 \end{array}$$

174. Виконайте ділення:

$$\begin{array}{ll}
 1) \frac{x - y}{2a^2} : \frac{y - x}{8a}; & 2) \frac{p^2 + 2p}{18a^2} : \frac{7p}{9a}; \\
 3) \frac{x^2 + x}{9ab} : \frac{5x + 5}{18a^2b}; & 4) \frac{3x - x^2}{7p} : \frac{2x - 6}{14p^2}.
 \end{array}$$

175. Спростіть вираз:

$$1) \frac{m^2 - n^2}{p + 2q} : \frac{mn + m^2}{2p + 4q};$$

$$2) \frac{6x - 30}{2x + 5} : \frac{x^2 - 25}{4x + 10};$$

$$3) \frac{a + 2}{a - 2} : \frac{a^2 + 4a + 4}{5a - 10};$$

$$4) \frac{x + y}{p - 2m} : \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2m^2 - mp}.$$

176. Спростіть вираз:

$$1) \frac{ab + b^2}{m - 3n} : \frac{a^2 - b^2}{2m - 6n};$$

$$2) \frac{x - 5}{y^2 - 4} : \frac{2x - 10}{3y - 6};$$

$$3) \frac{x^2 - 9}{x^2 + x} : \frac{x^2 + 6x + 9}{7x + 7};$$

$$4) \frac{x - 4y}{a^2 - 2ab + b^2} : \frac{4xy - x^2}{a - b}.$$



Достатній рівень

177. Виконайте дії:

$$1) \frac{4a^2}{5b^3} : \frac{8a^3}{7c^3} : \frac{14c^2}{15b^2};$$

$$2) \frac{2a^3}{25b^3} \cdot \frac{10b^2}{3c^4} : \frac{4a^2}{15bc};$$

$$3) \frac{c^3}{18p^4} : \left(\frac{9c^2}{20p^3} : \frac{27c^3p}{10} \right);$$

$$4) \frac{115a^3}{34b^4} : \frac{92a^6}{51b^3} \cdot \frac{4b^2}{15a^2}.$$

178. Подайте у вигляді нескоротного дробу вираз:

$$1) \frac{3a^2}{2b^2c^2} : \frac{7c^6}{6b^3} : \frac{9ab}{14c^2};$$

$$2) \frac{7x^3}{4y^2} \cdot \frac{216x^6}{343y^3} : \frac{18x^8}{49y^4}.$$

179. Виконайте ділення:

$$1) \frac{9 + 6a + 4a^2}{2a - 1} : \frac{27 - 8a^3}{1 - 4a^2};$$

$$2) \frac{8 + x^3}{16 - x^4} : \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 4};$$

$$3) (25x^2 - 10xy + y^2) : \frac{y^2 - 5xy}{7};$$

$$4) \frac{(6y - 4x)^2}{3} : (9y^2 - 12xy + 4x^2).$$

180. Знайдіть значення виразу:

$$1) \frac{x^3 - 8}{9x^2 - 16} : \frac{x^2 + 2x + 4}{3x - 4}, \text{ якщо } x = -3;$$

$$2) (m^2 - 10mn + 25n^2) : \frac{0,2m^2 - 5n^2}{5}, \text{ якщо } m = 10, n = 3.$$

181. Знайдіть значення виразу:

$$1) \left(\frac{a^2 y^3}{5} \right)^3 : \left(-\frac{a^3 y^4}{25} \right)^2, \text{ якщо } a = 117 \frac{1}{3}, y = 0,02;$$

$$2) \frac{(2x - y)^2}{(x - 2y)^2} : \frac{4x^2 - y^2}{x^2 - 4y^2}, \text{ якщо } x = 4,2, y = 1,6.$$



4 Високий рівень

182. Спростіть вираз $\frac{0,5a^2 - 32}{0,5a^3 - 62,5} : \frac{0,2a + 1,6}{0,2a^2 + a + 5}$.

183. Доведіть тотожність $\frac{m^3 + 27}{75m^2 - 12} : \frac{\frac{1}{3}m^2 - m + 3}{m - 0,4} = \frac{m + 3}{25m + 10}$.

184. Спростіть $\frac{6ab + 6 - 4a - 9b}{a^2 - 12a + 36} : \frac{9b^2 - 12b + 4}{3ab - 18b - 2a + 12}$.

185. Виконайте дію $\frac{a + 4}{x - a} : \frac{ab + 4b - 2a - 8}{cx + xy - ac - ay}$.



Вправи для повторення

3 186. Подайте дріб у вигляді суми або різниці двох дробів:

$$1) \frac{2a - b}{ab}; \quad 2) \frac{7y^2 + y^3}{y^5};$$

$$3) \frac{4m^2 + 5n^2}{m^2 n}; \quad 4) \frac{18x - 24x^2 y}{30y^2}.$$

187. Обчисліть значення дробу:

$$1) \frac{m^2 + 6mn + 9n^2}{(2m + 6n)^2}, \text{ якщо } m = 2 \frac{1}{13}, n = -2 \frac{1}{7};$$

$$2) \frac{0,1x^2 - 2,5y^2}{x^2 + 10xy + 25y^2}, \text{ якщо } x = 100, y = 20.$$



4 188. Доведіть тотожність

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} = \frac{8}{1-x^8}.$$



189. Український гросмейстер із шахів Василь Іванчук взяв участь у чемпіонаті світу з бліцу. У перший день він переміг суперників у 70 % партій, а на другий день виграв ще 15 партій поспіль. Відсоток виграшних партій за два дні сягнув до 80 %. Скільки партій за ці два дні зіграв Василь Іванчук?

§ 7. ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

Розглянемо приклади перетворень раціональних виразів.

Приклад 1. Доведіть тотожність $\frac{6x + y}{3x} - \frac{5y^2}{x^2} \cdot \frac{x}{15y} = 2$.

Розв'язання. Спростимо ліву частину рівності:

$$\begin{aligned} \frac{6x + y}{3x} - \frac{5y^2}{x^2} \cdot \frac{x}{15y} &= \frac{6x + y}{3x} - \frac{5y^2 \cdot x}{x^2 \cdot 15y} = \frac{6x + y}{3x} - \frac{y}{3x} = \\ &= \frac{6x + y - y}{3x} = \frac{6x}{3x} = 2. \end{aligned}$$

За допомогою тотожних перетворень ми звели ліву частину рівності до правої. Отже, рівність є тотожністю.

Приклад 2. Спростіть вираз

$$\left(\frac{2x}{4x^2 - y^2} + \frac{1}{y - 2x} \right) : \left(\frac{2x}{2x + y} - \frac{4x^2}{4x^2 + 4xy + y^2} \right).$$

Розв'язання. Спочатку виконаємо дію в кожній з дужок, а потім – дію ділення:

$$\begin{aligned} 1) \frac{2x}{4x^2 - y^2} + \frac{1}{y - 2x} &= \frac{2x}{(2x - y)(2x + y)} - \frac{2x + y/1}{2x - y} = \\ &= \frac{2x - (2x + y)}{(2x - y)(2x + y)} = \frac{2x - 2x - y}{(2x - y)(2x + y)} = -\frac{y}{(2x - y)(2x + y)} = \\ &= \frac{y}{(y - 2x)(2x + y)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{2x}{2x + y} - \frac{4x^2}{4x^2 + 4xy + y^2} &= \frac{2x + y/2x}{2x + y} - \frac{4x^2}{(2x + y)^2} = \\ &= \frac{2x(2x + y) - 4x^2}{(2x + y)^2} = \frac{4x^2 + 2xy - 4x^2}{(2x + y)^2} = \frac{2xy}{(2x + y)^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \frac{y}{(y-2x)(2x+y)} : \frac{2xy}{(2x+y)^2} &= \frac{y \cdot (2x+y)^2}{(y-2x)(2x+y) \cdot 2xy} = \\
 &= \frac{2x+y}{2x(y-2x)} = \frac{2x+y}{2xy-4x^2}. \quad \text{Відповідь: } \frac{2x+y}{2xy-4x^2}.
 \end{aligned}$$

Розв'язання можна було записати й «ланцюжком»:

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{2x}{4x^2-y^2} + \frac{1}{y-2x} \right) : \left(\frac{2x}{2x+y} - \frac{4x^2}{4x^2+4xy+y^2} \right) = \\
 &= \left(\frac{2x}{(2x-y)(2x+y)} - \frac{2x+y/1}{2x-y} \right) : \left(\frac{2x+y/2x}{2x+y} - \frac{4x^2}{(2x+y)^2} \right) = \\
 &= \frac{2x-(2x+y)}{(2x-y)(2x+y)} : \frac{2x(2x+y)-4x^2}{(2x+y)^2} = \\
 &= \frac{(2x-2x-y)(2x+y)^2}{(2x-y)(2x+y)(4x^2+2xy-4x^2)} = \frac{-y(2x+y)}{(2x-y) \cdot 2xy} = \\
 &= -\frac{2x+y}{2x(2x-y)} = \frac{2x+y}{2x(y-2x)} = \frac{2x+y}{2xy-4x^2}.
 \end{aligned}$$

Кожний вираз, що містить суму, різницю, добуток і частку раціональних дробів, можна подати у вигляді раціонального дробу.

Приклад 3. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях

$$\text{змінних значення виразу } \frac{\frac{3x^3-y}{y} + 1}{\frac{3x+y}{y} - 1} \text{ є невід'ємним.}$$

Розв'язання. Можна подати цей вираз у вигляді частки $\left(\frac{3x^3-y}{y} + 1 \right) : \left(\frac{3x+y}{y} - 1 \right)$ і далі перетворити його, як запропоновано у прикладі 2.

А можна, використовуючи основну властивість дробу, помножити чисельник і знаменник даного дробу на їх спільний знаменник, тобто на y :

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{3x^3-y}{y} + 1}{\frac{3x+y}{y} - 1} &= \frac{\left(\frac{3x^3-y}{y} + 1 \right) y}{\left(\frac{3x+y}{y} - 1 \right) y} = \frac{(3x^3-y)y + y}{(3x+y)y - y} = \frac{3x^3-y+y}{3x+y-y} = \\
 &= \frac{3x^3}{3x} = x^2, \text{ але } x^2 \geq 0 \text{ при будь-якому значенні } x.
 \end{aligned}$$



190. Виконайте дії:

$$1) \frac{12a + b}{3a} - \frac{7b^2}{a^2} \cdot \frac{a}{21b};$$

$$2) \frac{m^2 - n^2}{x^2 - 9} \cdot \frac{x - 3}{m - n} - \frac{m}{x + 3};$$

$$3) \frac{a - b}{2a + b} + \frac{1}{a - b} : \frac{2a + b}{a^2 - b^2};$$

$$4) x - \frac{x^2 - xy}{x + y} \cdot \frac{x}{x - y}.$$

191. Виконайте дії:

$$1) \frac{10x + y}{5x} - \frac{3y^2}{x^2} \cdot \frac{x}{15y};$$

$$2) \frac{a^2 - 4}{9 - b^2} : \frac{a - 2}{3 + b} - \frac{2}{3 - b};$$

$$3) \frac{x + y}{3x - y} + \frac{1}{x + y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{3x - y};$$

$$4) m + \frac{m^2 + mn}{n - m} \cdot \frac{m}{m + n}.$$

192. Спростіть вираз:

$$1) \left(\frac{x}{7} + \frac{7}{x} + 2 \right) \cdot \frac{1}{x + 7};$$

$$2) \left(1 + \frac{m}{3n} \right) : \left(1 - \frac{m}{3n} \right);$$

$$3) \left(\frac{a}{a + 2} - 3a \right) \cdot \frac{a + 2}{a};$$

$$4) \left(2 + \frac{x}{x + 1} \right) : \frac{9x + 6}{5x^2 + 5x}.$$

193. Спростіть вираз:

$$1) \left(\frac{m}{5} + \frac{5}{m} - 2 \right) \cdot \frac{1}{m - 5};$$

$$2) \left(1 - \frac{x}{y} \right) : \left(1 + \frac{x}{y} \right);$$

$$3) \left(\frac{b}{b - 3} - 2b \right) \cdot \frac{b - 3}{b};$$

$$4) \left(3 - \frac{m}{m + 2} \right) : \frac{4m + 12}{m^2 + 2m}.$$

194. Доведіть тотожність:

$$1) \left(1 - \frac{2a}{b} + \frac{a^2}{b^2} \right) \cdot \frac{b}{a - b} = \frac{a - b}{b};$$

$$2) \left(\frac{m}{n^2} - \frac{1}{m} \right) : \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) = \frac{m + n}{n}.$$

195. Доведіть тотожність:

$$1) \left(1 + \frac{2x}{y} + \frac{x^2}{y^2} \right) \cdot \frac{y}{x + y} = \frac{x + y}{y};$$

$$2) \left(\frac{2m}{n^2} - \frac{1}{2m} \right) : \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2m} \right) = \frac{2m - n}{n}.$$



Достатній рівень

196. Виконайте дії:

$$1) \left(\frac{x-2}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} \right) \cdot \frac{x^2-4}{4x};$$

$$2) \left(\frac{a+3}{a-3} - \frac{a-3}{a+3} \right) : \frac{24a}{a^2-6a+9}.$$

197. Виконайте дії:

$$1) \frac{8m}{m^2-1} : \left(\frac{m+1}{m-1} - \frac{m-1}{m+1} \right); \quad 2) \left(\frac{a-2}{a+2} + \frac{a+2}{a-2} \right) \cdot \frac{a^2-4a+4}{2a^2+8}.$$

198. Спростіть вираз:

$$1) \frac{36}{a-3} : \left(\frac{a+3}{a-3} - \frac{a-3}{a+3} + \frac{36}{a^2-9} \right);$$

$$2) \left(\frac{2x+y}{x-2y} + \frac{2x-y}{x+2y} \right) \cdot \frac{x^2-4y^2}{x^2+y^2}.$$

199. Спростіть вираз:

$$1) \frac{16}{x+2} : \left(\frac{x+2}{x-2} - \frac{16}{x^2-4} - \frac{x-2}{x+2} \right);$$

$$2) \left(\frac{5a+1}{a-2} + \frac{5a-1}{a+2} \right) \cdot \frac{a^2-4}{5a^2+2}.$$

200. Доведіть тотожність

$$\left(\frac{a}{a-5} - \frac{a}{a+5} - \frac{a^2+25}{25-a^2} \right) \cdot \frac{a-5}{a^2+10a+25} = \frac{1}{a+5}.$$

201. Доведіть тотожність

$$\left(\frac{b}{b+7} + \frac{b^2+49}{b^2-49} - \frac{b}{b-7} \right) : \frac{b-7}{b^2+14b+49} = b+7.$$

202. Виконайте дії:

$$1) \left(\frac{1}{1-a^2} - \frac{1}{a^2+2a+1} \right) : \frac{2a}{a^2-1};$$

$$2) \left(\frac{x+1}{2x-2} - \frac{x+3}{2x+2} + \frac{6}{2x^2-2} \right) \cdot \frac{4x^2-4}{5}.$$

203. Виконайте дії:

$$1) \left(\frac{1}{4-a^2} - \frac{1}{a^2-4a+4} \right) \cdot \frac{a^2-4}{2a};$$

$$2) \left(\frac{a+1}{3a-3} - \frac{a+2}{3a+3} + \frac{21-a}{3a^2-3} \right) : \frac{4}{a^2-1}.$$

204. Доведіть тотожність:

$$1) \left(2 - \frac{2a^2-a}{a^2-a+1} \right) : \left(\frac{1}{a+1} - \frac{a-1}{a^2-a+1} \right) = a+1;$$

$$2) \left(\frac{m-2}{m^2-2m+4} - \frac{6m-13}{m^3+8} \right) \cdot \frac{2m^3+16}{18-6m} = \frac{3-m}{3}.$$

205. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення виразу від значення змінної не залежить:

$$1) \frac{a+2}{16} \cdot \left(\frac{1}{a+2} + \frac{3a-8}{a^2-2a+4} - \frac{4a-28}{a^3+8} \right);$$

$$2) \left(\frac{1}{a+1} - \frac{3}{a^3+1} + \frac{3}{a^2-a+1} \right) \left(a - \frac{2a-1}{a+1} \right).$$

206. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення виразу $\frac{b-2}{15} \cdot \left(\frac{1}{b-2} + \frac{9b+6}{b^3-8} - \frac{1-2b}{b^2+2b+4} \right)$ від значення змінної не залежить.

207. Подайте у вигляді раціонального дробу:

$$1) \left(\frac{m}{n} - \frac{n}{m} \right)^2;$$

$$2) \left(\frac{a^2}{b} - 1 \right)^2 + \left(\frac{a^2}{b} + 1 \right)^2;$$

$$3) \left(\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2} \right)^2 + \left(\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \right)^2;$$

$$4) \left(\frac{a+b}{a} + \frac{a-b}{b} \right)^2 - \left(\frac{a+b}{a} - \frac{a-b}{b} \right)^2.$$

208. Перетворіть вираз на дріб:

$$1) \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)^2; \quad 2) \left(\frac{m}{n^2} + 1 \right)^2 - \left(\frac{m}{n^2} - 1 \right)^2.$$

209. Спростіть вираз:

$$1) \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}};$$

$$2) \frac{\frac{7x - a}{a} + 1}{\frac{7x + a}{a} - 1};$$

$$3) \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{2p}}{\frac{1}{p^2} - \frac{1}{2p^2}};$$

$$4) \frac{c - \frac{6c - 9}{c}}{\frac{3}{c} - 1};$$

$$5) \frac{\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x}}{\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x-1}};$$

$$6) \frac{\frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m}}{\frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m}}.$$

210. Спростіть вираз:

$$1) \frac{1 + \frac{4}{m}}{1 - \frac{4}{m}};$$

$$2) \frac{\frac{3p+m}{m} - 1}{\frac{3p-m}{m} + 1};$$

$$3) \frac{\frac{1}{4t} + \frac{1}{t}}{\frac{1}{4t^2} + \frac{1}{t^2}};$$

$$4) \frac{1 - \frac{1}{x}}{x - \frac{2x-1}{x}};$$

$$5) \frac{\frac{m}{2-m} + \frac{2+m}{m}}{\frac{2-m}{2+m} + \frac{m}{2-m}};$$

$$6) \frac{\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}}{\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}}.$$



4 Високий рівень

211. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінних значення виразу від значення змінних не залежить:

$$\frac{8}{4a - b} : \left(\frac{2a - 0,5b}{4a^2 + ab + 0,25b^2} + \frac{24ab}{64a^3 - b^3} + \frac{1}{2a - 0,5b} \right).$$

212. Знайдіть значення виразу

$$\left(\frac{1,5a - 4}{0,5a^2 - a + 2} - \frac{2a - 14}{0,5a^3 + 4} + \frac{1}{a + 2} \right) : \frac{4}{a + 2},$$

якщо $a = 197$.

213. Відомо, що $x - \frac{1}{x} = 7$. Знайдіть значення виразу $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

214. Відомо, що $x + \frac{1}{x} = 3$. Знайдіть значення виразу $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

215. Спростіть вираз:

$$1) \left(\frac{8x^2 + 2x}{8x^3 - 1} - \frac{2x + 1}{4x^2 + 2x + 1} \right) \left(1 + \frac{2x + 1}{2x} - \frac{4x^2 + 10x}{4x^2 + 2x} \right);$$

$$2) \frac{p^2 - 2p + 1}{4} \cdot \left(\frac{2p}{p^3 + 1} : \frac{1 - p}{p^2 - p + 1} + \frac{2}{p - 1} \right) : \frac{p - 1}{p + 1}.$$

216. Доведіть, що значення виразу

$$\left(\frac{2x}{x + 1} + \frac{2}{x - 1} + \frac{4x}{x^2 - 1} \right) \left(\frac{2x}{x + 1} + \frac{2}{x - 1} - \frac{4x}{x^2 - 1} \right)$$

не залежить від значення змінної.

217. Доведіть, що значення виразу

$$\left(\frac{m^2 - 3m}{m^3 + 3m^2 + 3m + 1} + \frac{1}{m^2 + 2m + 1} \right) \left(\frac{3 - m}{m^2 - 2m + 1} - \frac{2}{1 - m} \right)$$

є додатним при всіх допустимих значеннях змінної.

218. Подайте у вигляді раціонального дробу або цілого виразу:

$$1) 1 - \frac{x}{1 - \frac{x}{x + 1}}; \quad 2) \frac{m}{m - \frac{1}{m - \frac{m}{1 - m}}}.$$

219. Подайте у вигляді раціонального дробу або цілого виразу:

$$1) 1 + \frac{2x}{1 - \frac{x}{x + 2}}; \quad 2) \frac{1}{n - \frac{1}{n + \frac{n}{n - 1}}}.$$



Вправи для повторення

2 220. Подайте вираз у вигляді степеня:

$$1) x^7 x^3 : x^2; \quad 2) (x^5 : x^2) : x; \quad 3) (a^2)^3 \cdot a; \quad 4) (x^3)^5 : x^4.$$

3 221. Доведіть, що число $8^9 - 4^{12}$ ділиться на 7.

4 222. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \begin{cases} 2x + 4, & \text{якщо } x < 0, \\ 4 - x, & \text{якщо } x \geq 0; \end{cases} \quad 2) y = \begin{cases} 2x + 5, & \text{якщо } x < -1, \\ 3, & \text{якщо } -1 \leq x \leq 4, \\ x - 1, & \text{якщо } x > 4. \end{cases}$$



Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

223. При яких значеннях змінної вираз має зміст:

$$1) \frac{x-1}{7}; \quad 2) \frac{7}{x-1}; \quad 3) \frac{x+2}{x(x+3)};$$

$$4) \frac{1}{x} + \frac{1}{x-5}; \quad 5) \frac{x^2}{x^2-9}; \quad 6) \frac{x-5}{x^2-4x}?$$

224. При яких значеннях змінної значення дробу дорівнює нулю:

$$1) \frac{(m-1)m}{m+2}; \quad 2) \frac{x^2-2x}{8}; \quad 3) \frac{(m+2)m}{m^2-4}; \quad 4) \frac{x}{x^2+x}?$$

225. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 2(x-3) = 4(x+7) - 11; \quad 2) 5(x-2) - 7(x+1) = 9(x-8).$$

226. Розв'яжіть рівняння, використовуючи основну властивість пропорції:

$$1) \frac{2x-4}{7} = \frac{3x+1}{9}; \quad 2) \frac{2x-11}{5} = \frac{3x+17}{10}.$$



Цікаві задачі для учнів неледачих



227. (З книги «Універсальна арифметика» Ньютона). Дехто забажав розділити певну суму коштів між жебраками порівну. Якби в нього було на 8 динарів більше, то він мав би дати кожному по 3 динари, але він роздав лише по 2 динари і ще 3 у нього залишилося. Скільки було жебраків?

§ 8. РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ. РІВНОСИЛЬНІ РІВНЯННЯ

Нагадаємо, що



два рівняння називають *рівносильними*, якщо вони мають одні й ті самі корені. Рівносильними вважають і ті рівняння, які коренів не мають.

Так, наприклад, рівносильними є рівняння $x+3=5$ і $4x=8$, оскільки коренем кожного з них є число 2.

Рівняння $x-3=7$ і $2x=18$ не є рівносильними, оскільки коренем першого з них є число 10, а коренем другого – число 9.

Раніше, у 7 класі, ви ознайомилися з властивостями, що перетворюють рівняння на рівносильні їм рівняння.



- 1) Якщо в будь-якій частині рівняння розкрити дужки або звести подібні доданки, то одержимо рівняння, рівносильне даному;
- 2) якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини у другу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному;
- 3) якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

Розглянемо рівняння:

$$3(x - 1) + 2x = x + 7; \quad \frac{x + 2}{3} - \frac{x + 7}{6} = x; \quad \frac{2}{x - 1} = 14 + \frac{1}{x}.$$

Ліва і права частини кожного з них є раціональними виразами.



Рівняння, ліва і права частини яких є раціональними виразами, називають *раціональними рівняннями*.

У перших двох із записаних вище рівнянь ліва і права частини є цілими виразами. Такі рівняння називають *цілими раціональними рівняннями*. Якщо в рівнянні хоча б одна частина є дробовим виразом, то рівняння називають *дробовим раціональним рівнянням*. Третє із записаних вище рівнянь є дробовим раціональним.

Як розв'язувати цілі раціональні рівняння, ми розглянули в попередніх класах. Розглянемо тепер, як розв'язувати дробові раціональні рівняння, тобто рівняння зі змінною в знаменнику.

1. Використання умови рівності дробу нулю.

Нагадаємо, що $\frac{P}{Q} = 0$, коли $\begin{cases} P = 0, \\ Q \neq 0. \end{cases}$

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\frac{x}{x - 2} = 3$.

Розв'язання. За допомогою тотожних перетворень та властивостей рівнянь зведемо рівняння до вигляду $\frac{P}{Q} = 0$, де P і Q – цілі раціональні вирази. Маємо:

$$\frac{x}{x - 2} = 3; \quad \frac{x}{x - 2} - \frac{3}{1} = 0; \quad \frac{x - 3(x - 2)}{x - 2} = 0; \quad \frac{x - 3x + 6}{x - 2} = 0.$$

Остаточно маємо рівняння: $\frac{6-2x}{x-2} = 0$.

Щоб дріб $\frac{6-2x}{x-2}$ дорівнював нулю, треба, щоб чисельник $6-2x$ дорівнював нулю, а знаменник $x-2$ не дорівнював нулю.

Тоді: $6-2x=0$, звідки $x=3$. При $x=3$ знаменник $x-2=3-2=1 \neq 0$. Отже, $x=3$ – єдиний корінь рівняння.

Розв'язування останнього рівносильного даному рівняння, враховуючи умову рівності дробу нулю, зручно записувати так:

$$\frac{6-2x}{x-2} = 0; \quad \begin{cases} 6-2x=0, \\ x-2 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=3, \\ x \neq 2; \end{cases} \quad x=3.$$

Відповідь. 3.

Отже, розв'язуючи дробове раціональне рівняння, можна:



1) за допомогою тотожних перетворень звести рівняння до вигляду $\frac{P}{Q} = 0$;

2) прирівняти чисельник P до нуля і розв'язати одержане ціле рівняння;

3) виключити з його коренів ті, при яких знаменник Q дорівнює нулю.

2. Використання основної властивості пропорції.

Якщо $\frac{P}{Q} = \frac{M}{N}$, то $PN = MQ$, де $Q \neq 0$, $N \neq 0$.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $\frac{2x+1}{x-1} = \frac{x}{x-2} + 1$.

Розв'язання. Знайдемо область допустимих значень (ОДЗ) змінної в рівнянні. Оскільки знаменники дробів не можуть дорівнювати нулю, то $x-1 \neq 0$ і $x-2 \neq 0$. Маємо: $x \neq 1$ і $x \neq 2$, тобто ОДЗ змінної x містить усі числа, крім 1 і 2.

Зведемо рівняння до вигляду пропорції, додавши вирази у правій частині рівняння: $\frac{2x+1}{x-1} = \frac{x+x-2}{x-2}$. Одержимо: $\frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x-2}{x-2}$. За основною властивістю пропорції маємо:

$$(2x+1)(x-2) = (2x-2)(x-1).$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$2x^2 - 4x + x - 2 = 2x^2 - 2x - 2x + 2, \text{ звідки } x = 4.$$

Оскільки число 4 належить ОДЗ змінної початкового рівняння, то 4 є його коренем.

Запис розв'язування, щоб не забути врахувати ОДЗ, зручно закінчити так:

$$\frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x-2}{x-2}; \quad \begin{cases} (2x+1)(x-2) = (2x-2)(x-1), \\ x-1 \neq 0, \\ x-2 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 4x + x - 2 = 2x^2 - 2x - 2x + 2, \\ x \neq 1, \\ x \neq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ x \neq 1, \\ x \neq 2; \end{cases} \quad x = 4.$$

Відповідь. 4.

Отже, для розв'язування дробового раціонального рівняння можна:



1) знайти область допустимих значень (ОДЗ) змінної в рівнянні;

2) звести рівняння до вигляду $\frac{P}{Q} = \frac{M}{N}$;

3) записати ціле рівняння $P \cdot N = M \cdot Q$ і розв'язати його;

4) виключити з отриманих коренів ті, що не належать ОДЗ і записати відповідь.

3. Метод множення обох частин рівняння на спільний знаменник дробів.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $\frac{x-2}{x^2-1} = \frac{5}{x^2-x} + \frac{5}{x^2+x}$.

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ змінної та найпростіший спільний знаменник усіх дробів рівняння, розклавши знаменники на множники:

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{5}{x(x-1)} + \frac{5}{x(x+1)}.$$

Областю допустимих значень змінної будуть ті значення x , при яких $x \neq 0$, $x-1 \neq 0$, $x+1 \neq 0$. Отже, всі значення x , крім чисел 0; 1 і -1. А найпростішим спільним знаменником буде вираз $x(x-1)(x+1)$.

Помножимо обидві частини рівняння на цей вираз:

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{5}{x(x-1)} + \frac{5}{x(x+1)} \Big| \cdot x(x-1)(x+1).$$

Матимемо: $x(x - 2) = 5(x + 1) + 5(x - 1)$, а після спрощення: $x^2 - 12x = 0$, тобто $x(x - 12) = 0$, звідки $x = 0$ або $x = 12$.

Але число 0 не належить ОДЗ змінної початкового рівняння, тому не є його коренем.

Отже, число 12 – єдиний корінь рівняння.

Відповідь. 12.

Розв'язуючи дробове раціональне рівняння, можна:



- 1) знайти область допустимих значень змінної в рівнянні;
- 2) знайти найпростіший спільний знаменник дробів, що входять у рівняння;
- 3) помножити обидві частини рівняння на цей спільний знаменник;
- 4) розв'язати одержане ціле рівняння;
- 5) виключити з його коренів ті, що не належать області допустимих значень змінної рівняння.

Приклад 4. Чи є рівносильними рівняння

$$\frac{x - 2}{x + 1} = 0 \quad \text{і} \quad \frac{2x - x^2}{x - 3} = 0?$$

Розв'язання. Оскільки рівняння називають рівносильними, якщо вони мають одні й ті самі корені, або не мають коренів, знайдемо корені даних рівнянь.

Перше рівняння має єдиний корінь $x = 2$, а друге – два корені $x = 0$ і $x = 2$ (розв'яжіть рівняння самостійно). Тому рівняння не є рівносильними.

Відповідь. Ні.



1. Які рівняння називають раціональними?
2. Яке рівняння називають цілим раціональним, а яке – дробовим раціональним?
3. Як можна розв'язати дробове раціональне рівняння?



Початковий рівень

228. (Усно.) Назвіть цілі раціональні рівняння, дробові раціональні рівняння:

1) $\frac{2}{x} + \frac{x}{3} = 1;$

2) $x^2 - 2x(x + 3) = x - 7;$

3) $\frac{x + 2}{4} - \frac{x - 3}{8} = 15;$

4) $\frac{4}{x + 2} - \frac{8}{x - 3} = 15.$

229. Чи є число 1 коренем рівняння:

1) $\frac{x}{x+2} = 0$; 2) $\frac{x-1}{x+2} = 0$; 3) $\frac{x}{x-1} = 0$; 4) $\frac{x^2-1}{x} = 0$?

230. Чи є число 2 коренем рівняння:

1) $\frac{x-2}{x+3} = 0$; 2) $\frac{x}{x+3} = 0$; 3) $\frac{x}{x-2} = 0$; 4) $\frac{4-x^2}{x+1} = 0$?

231. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x}{x-2} = 0$; 2) $\frac{x-3}{x} = 0$; 3) $\frac{x+2}{x-1} = 0$; 4) $\frac{x+5}{x} = 0$.

232. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x}{x+1} = 0$; 2) $\frac{x-2}{x} = 0$; 3) $\frac{x+3}{x-4} = 0$; 4) $\frac{x+7}{x} = 0$.



Середній рівень

233. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x-8}{x+4} = 0$; 2) $\frac{3x+7}{x} = 0$; 3) $\frac{x^2}{x-9} = 0$; 4) $\frac{x-1}{1-x} = 0$.

234. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{3x+12}{x-4} = 0$; 2) $\frac{2x-5}{x} = 0$;
 3) $\frac{x^2}{x+1} = 0$; 4) $\frac{2-x}{x-2} = 0$.

235. Знайдіть корені рівняння:

1) $2 - \frac{x+3}{x} = 0$; 2) $\frac{x}{x+2} = 2$;
 3) $\frac{x}{x-4} = \frac{9}{5}$; 4) $\frac{3}{x-2} = \frac{2}{x-3}$.

236. Знайдіть корені рівняння:

1) $\frac{2x+1}{x} - 3 = 0$; 2) $\frac{x}{x-4} = 5$;
 3) $\frac{x}{x+2} = \frac{5}{3}$; 4) $\frac{5}{x-2} = \frac{3}{x+4}$.

237. Чи є рівносильними рівняння:

$$1) \frac{x}{x-2} = \frac{4}{x-2} \text{ і } \frac{x-5}{x} = \frac{3-x}{x};$$

$$2) \frac{x^2+2x}{x-3} = \frac{x^2-4}{x-3} \text{ і } \frac{2x-3}{3x} - \frac{x-2}{3x} = 0?$$

238. Чи є рівносильними рівняння:

$$1) \frac{x-4}{x} = \frac{2-x}{x} \text{ і } \frac{x}{x+1} = \frac{3}{x+1};$$

$$2) \frac{x^2-x}{x-1} = \frac{x^2+5}{x-1} \text{ і } \frac{3x-1}{2x} - \frac{2x-5}{2x} = 0?$$

239. Розв'яжіть рівняння, використовуючи основну властивість пропорції:

$$1) \frac{2x^2-1}{x+1} = 2x;$$

$$2) \frac{3x^2+1}{x} = 3x-1;$$

$$3) \frac{x-3}{2x^2+1} = \frac{1}{2x};$$

$$4) \frac{4x^2-3}{2x-1} = 2x+3.$$

240. Розв'яжіть рівняння, використовуючи основну властивість пропорції:

$$1) \frac{3x^2+2}{x-2} = 3x;$$

$$2) \frac{2x^2-1}{x} = 2x+1;$$

$$3) \frac{2x-3}{2x^2+3} = \frac{1}{x};$$

$$4) \frac{6x^2-1}{2x+3} = 3x-1.$$

241. Знайдіть дріб, що дорівнює $\frac{2}{3}$, у якого знаменник на 5 більший за чисельник.

242. Знайдіть дріб, що дорівнює $\frac{1}{5}$, у якого чисельник на 12 менший від знаменника.

243. Яке число треба додати до чисельника дробу $\frac{3}{10}$, щоб отримати дріб $\frac{1}{2}$?

244. Яке число треба відняти від знаменника дробу $\frac{5}{18}$, щоб отримати дріб $\frac{1}{3}$?



Достатній рівень

245. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x+4}{2x-1} - \frac{x+8}{2x+1} = 0;$$

$$2) \frac{1}{5x} - \frac{1}{10x} = \frac{1}{30};$$

$$3) 2 + \frac{1}{x-2} = \frac{8-x}{2-x};$$

$$4) \frac{1}{x-1} - \frac{1}{5x-5} = \frac{1}{10}.$$

246. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x+1}{3x+1} - \frac{x}{3x-1} = 0;$$

$$2) \frac{1}{6x} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{6};$$

$$3) 3 + \frac{1}{1-x} = \frac{x}{x-1};$$

$$4) \frac{1}{4x+4} - \frac{1}{x+1} = \frac{3}{8}.$$

247. Чи є рівносильними рівняння

$$\frac{2x+6}{x+1} + \frac{3x-7}{x-2} = 5 \text{ і } \frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}?$$

248. Чи є рівносильними рівняння

$$\frac{3x-12}{x-3} + \frac{x+12}{x} = 4 \text{ і } \frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}?$$

249. Чисельник дробу на 5 менший від знаменника. Якщо до чисельника додати 14, а від знаменника відняти 1, то одержимо дріб, обернений даному. Знайдіть початковий дріб.

250. Знаменник дробу на 3 більший за чисельник. Якщо до чисельника додати 8, а від знаменника відняти 1, то одержимо дріб, обернений даному. Знайдіть початковий дріб.

251. Знайдіть корені рівняння:

$$1) \frac{x^2-2}{x^2+2x} = \frac{x-1}{x} + \frac{x+3}{x+2};$$

$$2) \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x}{x+1} + \frac{2}{x-1}.$$

252. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x^2-2}{x^2-x} = \frac{x+2}{x} + \frac{x+3}{x-1};$$

$$2) \frac{x^2+8}{x^2-4} = \frac{x}{x+2} + \frac{3}{x-2}.$$



Високий рівень

253. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{|x-1|-5}{x-6} = 0$; 2) $\frac{|x-1|-1}{x(x-2)} = 0$.

254. Знайдіть корені рівняння:

1) $\frac{|x-2|-3}{x-5} = 0$; 2) $\frac{|x-2|-2}{x(x-4)} = 0$.

255. При яких значеннях a рівняння не має розв'язків:

1) $\frac{x-2a}{x(x-8)} = 0$; 2) $\frac{x-a+1}{x^2-3x} = 0$?

256. При яких значеннях a рівняння $\frac{(x-a)(x-2a-1)}{x-3} = 0$ має лише один корінь?



Вправи для повторення

257. Спростіть вираз $\frac{10x}{x+2} - \frac{x-8}{3x+6} \cdot \frac{120}{x^2-8x}$ та знайдіть його значення, якщо $x = 100$.

258. Скоротіть дріб $\frac{4a^2 - b^2 + 2a - b}{4a^2 + 4ab + b^2 + 2a + b}$.



Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

259. Знайдіть значення степеня:

1) $(-2)^3$; 2) 14^2 ; 3) $(-1)^{11}$; 4) 0^5 ;
 5) $(0,3)^3$; 6) $(-0,8)^2$; 7) $\left(-\frac{2}{7}\right)^2$; 8) $\left(-\frac{1}{5}\right)^3$.

260. Обчисліть:

1) $2^5 - 3^2$; 2) $(-1)^9 + (-1)^8$; 3) $4^2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2$; 4) $5^3 : \left(\frac{5}{6}\right)^2$.

3. Укажіть рівняння, коренем якого є число 2.

А. $\frac{x-2}{x} = 0$; Б. $\frac{x}{x-2} = 0$;

В. $\frac{x+2}{x-1} = 0$; Г. $\frac{x-2}{x-2} = 0$.

2 4. Виконайте множення $\frac{m^2 - m}{p^2} \cdot \frac{ap}{m^2 - 2m + 1}$.

А. $\frac{a}{p(m-1)}$; Б. $\frac{am}{p(m+1)}$; В. $\frac{am}{p(m-1)}$; Г. $\frac{am}{m-1}$.

5. $\left(-\frac{2p^7}{a^5}\right)^3 = \dots$

А. $\frac{8p^{21}}{a^{15}}$; Б. $-\frac{8p^{21}}{a^{15}}$; В. $-\frac{6p^{21}}{a^{15}}$; Г. $-\frac{8p^{10}}{a^8}$.

6. Знайдіть корінь рівняння $\frac{2x^2 - 5}{x + 1} = 2x$.

А. -2,5; Б. 2,5; В. $-\frac{2}{5}$; Г. коренів немає.

3 7. Спростіть вираз $(25x^2 - 10x + 1) : \frac{10x^2 - 2x}{4x}$.

А. 2; Б. $10x^2 - 2x$; В. $10x - 2$; Г. $\frac{5x - 1}{2}$.

8. Знайдіть значення виразу $\frac{8}{x+1} : \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{4}{x^2-1} - \frac{x-1}{x+1}\right)$, якщо $x = 2,01$.

А. 0; Б. 1; В. 2,01; Г. 2.

9. Укажіть рівняння, що є рівносильним рівнянню $\frac{x-3}{x+3} + \frac{x+3}{x-3} = \frac{18}{x^2-9}$.

А. $x - 3 = 0$; Б. $\frac{x+2}{x} = 0$; В. $\frac{x}{x+2} = 0$; Г. $\frac{5x - x^2}{x} = 0$.

4 10. Спростіть вираз $\frac{0,1a^3 + 0,8}{0,2a^2 - 0,8} : \frac{0,5a^2 - a + 2}{0,25a + 0,5}$.

А. $\frac{a+2}{4(a-2)}$; Б. $\frac{a+2}{a-2}$; В. $\frac{a-2}{4(a+2)}$; Г. $\frac{4(a+2)}{a-2}$.

11. Відомо, що $x - \frac{1}{x} = 5$. Знайдіть значення виразу $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

А. 3; Б. 7; В. 23; Г. 27.

12. Розв'яжіть рівняння $\frac{2 - |x - 5|}{x - 7} = 0$.

А. розв'язків немає; Б. 7; В. 3; Г. 3; 7.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАЇЬ ДО § 5–8

1 1. Виконайте множення:

1) $\frac{c^4}{4} \cdot \frac{5}{c^2}$; 2) $\frac{12}{a^2} \cdot \frac{a}{3}$.

2. Виконайте ділення:

1) $\frac{p}{5} : \frac{p}{7}$; 2) $\frac{2}{a^2} : \frac{4}{a}$.

3. Чи є число 4 коренем рівняння:

1) $\frac{x^2 - 16}{x} = 0$; 2) $\frac{x}{x - 4} = 0$?

2 4. Виконайте дії:

1) $\frac{2a^3}{15m^2} \cdot \left(-\frac{5m}{6a^3}\right)$; 2) $\frac{x^2 - xy}{a^2} \cdot \frac{ab}{x^2 - 2xy + y^2}$;

3) $-\frac{3m^2}{7c^3} : \left(-\frac{9m^3}{28c}\right)$; 4) $\frac{x^2 - 16}{3x - 6} : \frac{2x + 8}{5x - 10}$.

5. Піднесіть дріб до степеня:

1) $\left(-\frac{2a^3}{m^2}\right)^3$; 2) $\left(\frac{a^2b}{c^3}\right)^{10}$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4x + 8}{x - 3} = 0$; 2) $\frac{4x^2 - 8}{x + 1} = 4x$.

3 7. Спростіть вираз $\left(\frac{2a + 1}{2a - 1} - \frac{2a - 1}{2a + 1}\right) : \frac{2a^2}{4a^2 - 1}$.

8. Доведіть тотожність

$$\left(\frac{7}{x+7} + \frac{x^2+49}{x^2-49} - \frac{7}{7-x} \right) \cdot \frac{x-7}{x^2+14x+49} = \frac{1}{x+7}$$

4 9. Відомо, що $x + \frac{1}{x} = 9$. Знайдіть значення виразу $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Додаткові завдання

4 10. Спростіть вираз $\frac{0,2a^3 - 1,6}{0,1a^2 - 1,6} : \frac{0,5a^2 + a + 2}{0,25a - 1}$.

11. Розв'яжіть рівняння $\frac{|2-x| - 3}{x-5} = 0$.

9. СТЕПІНЬ ІЗ ЦІЛИМ ПОКАЗНИКОМ

Нагадаємо, що в 7 класі ми вивчали степінь з натуральним показником. За означенням:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \text{ множників}$$

де n – натуральне число, $n > 1$ і $a^1 = a$.

У математиці, а також під час розв'язування задач практичного змісту, наприклад з фізики або хімії, трапляються степені, показник яких дорівнює нулю або є цілим від'ємним числом. Степінь з від'ємним показником можна знайти в науковій та довідковій літературі. Наприклад, масу атома гелію записують так: $6,64 \cdot 10^{-27}$ кг. Як розуміти зміст запису 10^{-27} ?


Розглянемо степені числа 3 з показниками 1, 2, 3, 4, ...:

$$3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \dots \text{ – це відповідно } 3, 9, 27, 81, \dots$$

У цьому рядку кожне наступне число втричі більше за попереднє. Продовжимо рядок у протилежному напрямку, зменшуючи кожного разу показник степеня на 1. Одержимо:

$$\dots, 3^{-3}, 3^{-2}, 3^{-1}, 3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, \dots$$

Число 3^0 повинно бути втричі меншим від 3^1 , тобто – від числа 3. Але втричі меншим від числа 3 є число 1, отже, $3^0 = 1$. Рівність $a^0 = 1$ справджується для будь-якої основи a , якщо $a \neq 0$.

 **Нульовий степінь відмінного від нуля числа a дорівнює одиниці, тобто $a^0 = 1$ (якщо $a \neq 0$).**

Повернімося до рядка зі степенями числа 3, де ліворуч від числа $3^0 = 1$ записано число 3^{-1} . Це число втричі менше за 1, тобто дорівнює $\frac{1}{3}$. Отже, $3^{-1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3^1}$. Міркуючи аналогічно, матимемо: $3^{-2} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$; $3^{-3} = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}$ і т. д. Приходимо до наступного означення степеня із цілим від'ємним показником:



якщо $a \neq 0$ і n – натуральне число, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Приклад 1. Замініть степінь дробом:

1) 5^{-7} ; 2) x^{-1} ; 3) $(a + b)^{-9}$.

Розв'язання. За означенням:

1) $5^{-7} = \frac{1}{5^7}$; 2) $x^{-1} = \frac{1}{x^1} = \frac{1}{x}$; 3) $(a + b)^{-9} = \frac{1}{(a + b)^9}$.

Приклад 2. Замініть дріб степенем із цілим від'ємним показником:

1) $\frac{1}{a^2}$; 2) $\frac{1}{m - n}$; 3) $\frac{1}{7^{13}}$.

Розв'язання.

1) $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$; 2) $\frac{1}{m - n} = (m - n)^{-1}$; 3) $\frac{1}{7^{13}} = 7^{-13}$.

Приклад 3. Обчисліть: 1) 4^{-2} ; 2) $(-9)^0$; 3) $(-5)^{-3}$.

Розв'язання. 1) $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$; 2) $(-9)^0 = 1$;

3) $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{1}{-125} = -\frac{1}{125}$.

Розглянемо, як піднести дріб $\frac{a}{b}$ до цілого від'ємного степеня. Якщо n – натуральне число і $a \neq 0$, маємо:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = 1 : \left(\frac{a}{b}\right)^n = 1 : \frac{a^n}{b^n} = 1 \cdot \frac{b^n}{a^n} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Отже,



якщо $a \neq 0$, $b \neq 0$, n – натуральне число, то $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

Приклад 4. Знайдіть значення виразу:

$$1) \left(2\frac{1}{3}\right)^{-2}; \quad 2) 27 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^{-4}.$$

Розв'язання. 1) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$.

2) Враховуючи послідовність виконання арифметичних дій, спочатку піднесемо дріб до степеня, а потім виконаємо множення:

$$27 \cdot \left(1\frac{1}{2}\right)^{-4} = 27 \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = 27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{27 \cdot 16}{81} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}.$$

Відповідь. 1) $\frac{9}{49}$; 2) $5\frac{1}{3}$.



1. Якого значення набуває вираз a^0 , якщо $a \neq 0$?

2. Сформулюйте означення степеня із цілим від'ємним показником.

3. Доведіть тотожність $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, де $a \neq 0, b \neq 0$.



Початковий рівень

263. (Усно.) Чи правильна рівність:

$$1) 2^{-3} = \frac{1}{2^3}; \quad 2) 4^0 = 0; \quad 3) 19^{-5} = -\frac{1}{19^5}; \quad 4) (-4)^0 = 1?$$

264. Замініть дробом степінь із цілим від'ємним показником:

$$1) 4^{-5}; \quad 2) a^{-1}; \quad 3) p^{-10};$$

$$4) c^{-8}; \quad 5) (2a)^{-3}; \quad 6) (a + b)^{-4}.$$

265. Запишіть степінь із цілим від'ємним показником у вигляді дроби:

$$1) b^{-3}; \quad 2) 7^{-1}; \quad 3) 2^{-7};$$

$$4) t^{-6}; \quad 5) (3m)^{-2}; \quad 6) (c - d)^{-7}.$$

266. Запишіть дріб у вигляді степеня із цілим від'ємним показником:

$$1) \frac{1}{9^4}; \quad 2) \frac{1}{p^5}; \quad 3) \frac{1}{10^9}; \quad 4) \frac{1}{m}; \quad 5) \frac{1}{(ab)^4}; \quad 6) \frac{1}{(m - n)^4}.$$

267. Замініть дріб степенем із цілим від'ємним показником:

$$1) \frac{1}{c^3}; \quad 2) \frac{1}{19^7}; \quad 3) \frac{1}{t^5}; \quad 4) \frac{1}{b}; \quad 5) \frac{1}{(cm)^6}; \quad 6) \frac{1}{(a+x)^2}.$$



2 Середній рівень

268. Обчисліть:

$$\begin{array}{llll} 1) 7^{-2}; & 2) (-2)^{-2}; & 3) (-1)^{-5}; & 4) 12^{-1}; \\ 5) (-7)^{-1}; & 6) 10^{-3}; & 7) \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}; & 8) \left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}; \\ 9) \left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}; & 10) \left(1\frac{1}{2}\right)^{-5}; & 11) \left(-1\frac{1}{3}\right)^{-2}; & 12) \left(-2\frac{1}{5}\right)^{-1}; \\ 13) 0,1^{-1}; & 14) (-0,2)^{-2}; & 15) (1,2)^{-2}; & 16) (-0,25)^{-3}. \end{array}$$

269. Обчисліть:

$$\begin{array}{llll} 1) 2^{-3}; & 2) (-1)^{-6}; & 3) 15^{-1}; & 4) (-9)^{-1}; \\ 5) \left(\frac{1}{8}\right)^{-2}; & 6) \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}; & 7) \left(1\frac{1}{4}\right)^{-2}; & 8) \left(-3\frac{1}{7}\right)^{-1}; \\ 9) 0,2^{-1}; & 10) (-0,1)^{-2}; & 11) (1,5)^{-2}; & 12) (-0,5)^{-4}. \end{array}$$

270. Подайте числа

$$16; 8; 4; 2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}$$

у вигляді степеня з основою 2.

271. Подайте числа 100; 10; 1; 0,1; 0,01 у вигляді степеня з основою 10.

272. Знайдіть значення виразу:

$$1) -5^{-2}; \quad 2) (-0,8)^{-2}; \quad 3) -\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}; \quad 4) -\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}.$$

273. Обчисліть:

$$1) -2^{-3}; \quad 2) (-0,4)^{-2}; \quad 3) -\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}; \quad 4) -\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}.$$

274. Подайте вираз у вигляді дробу, що не містить степеня з від'ємним показником:

$$1) 2a^{-3}; \quad 2) 3mb^{-1}; \quad 3) a^2b^{-3}c; \quad 4) a^{-3}b^{-7}.$$

275. Подайте вираз у вигляді дробу, що не містить степеня з від'ємним показником:

- 1) $4b^{-5}$; 2) $7a^{-1}p$; 3) $mn^{-2}p^7$; 4) $c^{-2}b^{-5}$.



Достатній рівень

276. Обчисліть:

- 1) $81 \cdot 3^{-5}$; 2) $-25 \cdot 10^{-2}$; 3) $27 \cdot (-18)^{-1}$;
 4) $2\frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{-1}$; 5) $-8 \cdot 2^{-4} + 30$; 6) $8^{-2} + 6^{-1}$;
 7) $2,5^{-1} + (-13)^0$; 8) $4^{-3} - (-4)^{-2}$; 9) $(-8)^{-2} + (0,4)^{-1}$;
 10) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2} \cdot 10^{-3}$; 11) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-3} : \left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$; 12) $1,25^{-2} + 2,5^{-3}$.

277. Знайдіть значення виразу:

- 1) $-64 \cdot 4^{-4}$; 2) $36 \cdot (-27)^{-1}$; 3) $-3\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{-1}$;
 4) $-7 \cdot 0,1^{-2} + 5^0$; 5) $5^{-2} - 10^{-1}$; 6) $3,2^{-1} + \left(1\frac{1}{3}\right)^{-2}$;
 7) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \cdot 20^{-2}$; 8) $1,5^{-2} - 1,2^{-3}$.

278. Порівняйте з нулем вираз:

- 1) 8^{-13} ; 2) $(-3,7)^{-10}$; 3) $(-2,9)^{-11}$; 4) $-(-2,1)^{-7}$.

279. Порівняйте з нулем значення виразу a^n , якщо:

- 1) $a > 0$ і n – ціле число;
 2) $a < 0$ і n – парне від'ємне число;
 3) $a < 0$ і n – непарне від'ємне число.

280. Порівняйте з нулем значення виразу b^m , якщо:

- 1) $b = 5$, $m = -13$;
 2) $b = -1$, $m = -200$;
 3) $b = -3$, $m = -41$.

281. Перетворіть вираз так, щоб він не містив степенів з від'ємним показником:

- 1) $\frac{m^2n^2p^{-3}}{cx^3a^{-4}}$; 2) $\frac{7^0a^{-1}b^2}{5^{-2}x^{-3}m^{-1}}$.

282. Використовуючи від'ємний показник степеня, подайте дріб у вигляді добутку:

$$1) \frac{3x^2}{p}; \quad 2) \frac{15m}{n^2c^3}; \quad 3) \frac{2x}{b^5(a-b)^2}; \quad 4) \frac{(x+y)^7}{(x-y)^3}.$$

283. Подайте дріб у вигляді добутку, використовуючи степінь з від'ємним показником:

$$1) \frac{5m^2}{x}; \quad 2) \frac{7c^2}{y^7n^5}; \quad 3) \frac{p}{c^4(x-y)^3}; \quad 4) \frac{(a+2)^5}{(a-5)^2}.$$

284. Подайте вираз у вигляді дробу:

$$1) m^{-3} + n^{-2}; \quad 2) ab^{-1} + ba^{-1} + c^0;$$

$$3) (m + n^{-1})(m^{-1} + n); \quad 4) (a^{-1} + b^{-1}) : (a^{-2} - b^{-2}).$$

285. Подайте вираз у вигляді дробу:

$$1) xy^{-3} + x^{-1}y^2; \quad 2) (x^{-2} - y^{-2}) : (x^{-1} - y^{-1}).$$



4 Високий рівень

286. Обчисліть:

$$1) (1 + (1 - 5^{-2})^{-1})^{-1}; \quad 2) (1 - (1 + 3^{-1})^{-2})^{-2}.$$

287. Знайдіть значення виразу

$$(1 + (1 - 3^{-1})^{-1})^{-1} + (1 - (1 + 3^{-1})^{-1})^{-1}.$$

288. Спростіть вираз $(1 - x^{-2}) \left(1 - \frac{1}{x^{-1} - 1} + \frac{1}{x^{-1} + 1} \right)$.



Вправи для повторення

289. Подайте вираз у вигляді дробу:

$$1) \frac{a^2 + 2a}{a^2 - 4a + 4} - \frac{4a}{a^2 - 4a + 4}; \quad 2) \frac{3p}{p^2 - 2p} - \frac{8 - p}{p^2 - 2p}.$$

290. Сергій сказав Олексію: «Дай мені 2 гривні, і тоді грошей у нас стане порівну». Олексій відповів Сергію: «Краще ти дай мені 2 гривні, і тоді грошей в мене стане вдвічі більше, ніж у тебе». Скільки грошей у кожного з хлопців?



Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

291. Подайте у вигляді степеня:

- 1) $a^5 a^3$; 2) $b^7 : b^3$; 3) $(c^5)^4$;
 4) $m^7 m$; 5) $t^{10} : t$; 6) $(p^7)^2$.

292. Піднесіть до степеня одночлен:

- 1) $(mn^2)^7$; 2) $(-2p^3)^2$; 3) $(-5ct^2)^3$; 4) $(-a^2c^3)^{10}$.

293. Спростіть вираз:

- 1) $(5m^2n)^3 \cdot (0,2m^3n)^2$; 2) $(-0,1p^7c^3)^4 \cdot (10pc^2)^3$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



294. (Задача Стенфордського університету). Серед дідусевих паперів було знайдено рахунок із записом:

72 індіки – *67,9* доларів.

Першу й останню цифри вартості індіків замінили зірочками, оскільки вони стерлися і стали нерозбірливими. Що це за цифри і скільки коштував один індік?

§ 10. ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ ІЗ ЦІЛИМ ПОКАЗНИКОМ

Властивості степеня з натуральним показником справджуються і для степеня з основою, відмінною від нуля, і цілим показником.

Отже,



для будь-якого $a \neq 0$, $b \neq 0$ і будь-яких цілих m і n :

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$(ab)^n = a^n b^n;$$

$$a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

Ці властивості можна довести, спираючися на формулу $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ та властивості степеня з натуральним показником.

Доведемо, наприклад, формулу $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ для випадку, коли m і n – від'ємні цілі числа.

Нехай $m = -p$, $n = -q$, де p і q – натуральні числа. Маємо:

$$a^m \cdot a^n = a^{-p} \cdot a^{-q} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^p \cdot a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} = a^{-p+(-q)} = a^{m+n}.$$

Отже, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, якщо m і n – від'ємні цілі числа. У разі якщо один з показників m або n – від'ємне ціле число, а другий – натуральне число або нуль, формула доводиться аналогічно.

Приклад 1. Виконайте дію:

1) $a^2 a^{-7}$; 2) $b^{15} : b^{20}$; 3) $(x^{-3})^2 \cdot x^{-14}$.

Розв'язання.

1) $a^2 a^{-7} = a^{2+(-7)} = a^{-5}$; 2) $b^{15} : b^{20} = b^{15-20} = b^{-5}$;
3) $(x^{-3})^2 \cdot x^{-14} = x^{-3 \cdot 2} \cdot x^{-14} = x^{-6} \cdot x^{-14} = x^{-6+(-14)} = x^{-20}$.

Приклад 2. Спростіть вираз $(4a^5 b^{-6})^{-2}$.

Розв'язання. $(4a^5 b^{-6})^{-2} = 4^{-2} (a^5)^{-2} (b^{-6})^{-2} = \frac{1}{16} a^{-10} b^{12}$.

Приклад 3. Обчисліть $\frac{9^4 \cdot 3^{-22}}{27^{-5}}$.

Розв'язання. Подамо 9 та 27 у вигляді степеня з основою 3 та використаємо властивості степеня:

$$\frac{9^4 \cdot 3^{-22}}{27^{-5}} = \frac{(3^2)^4 \cdot 3^{-22}}{(3^3)^{-5}} = \frac{3^8 \cdot 3^{-22}}{3^{-15}} = \frac{3^{-14}}{3^{-15}} = 3^{-14-(-15)} = 3^1 = 3.$$

Відповідь. 3.



Сформулюйте властивості степеня із цілим показником.



1 Початковий рівень

295. (Усно.) Які з рівностей є тотожностями:

1) $m^3 \cdot m^{-7} = m^{-21}$; 2) $a^7 \cdot a^{-9} = a^{-2}$; 3) $a^5 \cdot a^{-5} = a$;
4) $c^8 : c^{-5} = c^{13}$; 5) $c^4 : c^5 = c$; 6) $m : m^8 = m^{-7}$;
7) $(a^7)^{-1} = a^{-7}$; 8) $(b^{-2})^{-3} = b^{-6}$; 9) $(t^5)^{-2} = t^{10}$?

296. Подайте добуток у вигляді степеня:

1) $a^5 a^{-2}$; 2) $a^{-7} a^6$; 3) $a^9 a^{-9}$; 4) $a^{-4} a^{-3}$.

297. Подайте добуток у вигляді степеня:

1) $b^7 b^{-3}$; 2) $b^{-6} b^3$; 3) $b^{-5} b^{-7}$; 4) $b^{-8} b^8$.

298. Подайте частку у вигляді степеня:

1) $m^3 : m^{-2}$; 2) $m^5 : m^6$; 3) $m^{-3} : m^{-3}$; 4) $m^{-1} : m^{-8}$.

299. Подайте частку у вигляді степеня:

1) $c^5 : c^{-1}$; 2) $c^2 : c^8$; 3) $c^{-2} : c^{-3}$; 4) $c^{-4} : c^{-4}$.

300. Піднесіть степінь до степеня:

1) $(x^{-4})^{-2}$; 2) $(x^{-1})^{17}$; 3) $(x^0)^{-5}$; 4) $(x^7)^{-4}$.

301. Піднесіть степінь до степеня:

1) $(n^{-2})^{-7}$; 2) $(n^{15})^{-1}$; 3) $(n^{-8})^0$; 4) $(n^5)^{-3}$.

2 Середній рівень

302. Подайте a^{-10} у вигляді добутку двох степенів з однаковими основами, якщо один з множників дорівнює:

1) a^{-3} ; 2) a^7 ; 3) a^{-1} ; 4) a^{12} .

303. Подайте степінь у вигляді добутку двох степенів з однаковими основами: 1) m^8 ; 2) m^{-2} ; 3) m^{-17} ; 4) m^0 .

304. Обчисліть:

1) $2^7 \cdot 2^{-6}$; 2) $5^{-3} \cdot 5$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4$;
 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$; 5) $3^8 : 3^9$; 6) $7^{-15} : 7^{-16}$;
 7) $9 : 9^{-1}$; 8) $\left(\frac{1}{15}\right)^{-15} : \left(\frac{1}{15}\right)^{-15}$; 9) $(2^{-2})^3$;
 10) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^{-2}$; 11) $(0,1^{-1})^4$; 12) $\left(\left(\frac{1}{19}\right)^{-8}\right)^0$.

305. Знайдіть значення виразу:

1) $3^9 \cdot 3^{-8}$; 2) $2^{-3} \cdot 2$; 3) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^5$;
 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7$; 5) $10^4 : 10^5$; 6) $8^{-12} : 8^{-13}$;
 7) $7 : 7^{-1}$; 8) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-7} : \left(\frac{2}{7}\right)^{-7}$; 9) $(3^{-1})^4$;
 10) $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}$; 11) $(0,2^3)^{-1}$; 12) $\left(\left(\frac{7}{13}\right)^0\right)^{-12}$.

306. Подайте вираз у вигляді степеня з основою a :

- 1) $a^7 : a^3 \cdot a^{-12}$; 2) $(a^5)^{-3} \cdot a^{12}$; 3) $(a^{-8})^3 : a^4$;
 4) $a^0 \cdot (a^{-3})^4 \cdot a^5$; 5) $a^{-3} \cdot a^0 : a^5 : a$; 6) $(a^3)^{-2} \cdot (a^{-1})^{-6}$.

307. Подайте вираз у вигляді степеня з основою b :

- 1) $b^3 : b^7 \cdot b^2$; 2) $(b^{-2})^4 \cdot b^{10}$; 3) $(b^3)^{-2} : b^3$;
 4) $b^7 \cdot (b^{-2})^3 \cdot b^0$; 5) $b^0 \cdot b^{-4} : b^3 : b$; 6) $(b^{-4})^{-1} \cdot (b^2)^{-2}$.

308. Спростіть вираз:

- 1) $4a^{-8}b^7 \cdot 5a^{10}b^{-3}$; 2) $10m^{-6}n^4 \cdot 0,4m^6n^{-9}$;
 3) $\frac{1}{3}x^{-4}y^6 \cdot (-9x^5y^{-3})$; 4) $\left(-\frac{2}{7}b^{-6}m^{-4}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{6}b^{-4}m^{-2}\right)$.

309. Спростіть вираз:

- 1) $10m^3n^{-2} \cdot 2m^{-5}n^4$; 2) $0,02a^{-8}b^3 \cdot 100a^8b^{-7}$;
 3) $-\frac{1}{8}x^{-3}y^7 \cdot 16x^4y^{-10}$; 4) $\left(-1\frac{1}{4}p^{-3}c^{-5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}p^{-2}c^{-3}\right)$.

310. Подайте степінь у вигляді добутку:

- 1) $(xy)^{-2}$; 2) $(ab^{-2})^{-3}$; 3) $(x^{-4}y^3)^{-1}$;
 4) $(m^0c^{-3})^{-2}$; 5) $(0,1a^{-2})^{-1}$; 6) $\left(\frac{1}{3}m^{-3}p\right)^{-2}$;
 7) $(-2c^{-3}p)^{-3}$; 8) $\left(\frac{2}{3}b^{-1}c^{-8}\right)^{-1}$.

311. Подайте степінь у вигляді добутку:

- 1) $(p^{-2}n)^{-5}$; 2) $(a^{-2}b^3)^{-4}$; 3) $(0,2m^{-4})^{-1}$;
 4) $\left(\frac{1}{5}a^{-2}b\right)^{-2}$; 5) $(-4ab^{-2})^{-3}$; 6) $\left(\frac{3}{4}c^{-2}b^{-3}\right)^{-1}$.



Достатній рівень

312. Подайте вираз у вигляді степеня:

- 1) $64m^{-3}$; 2) $0,01p^{-8}$;
 3) $0,0025c^{-8}p^{12}$; 4) $5\frac{1}{16}c^{12}x^{-20}$.

313. Обчисліть:

$$\begin{array}{ll}
 1) ((5^{-2})^{-6} \cdot (5^{-8})^2)^{-1}; & 2) \frac{10^{-8} \cdot (10^{-2})^4}{(10^{-5})^3}; \\
 3) \frac{(3^{-2})^3 \cdot (3^{-1})^5}{(3^6)^{-2}}; & 4) \frac{(7^{-2})^{-5} \cdot (7^4)^{-3}}{(7^3)^{-4} \cdot (7^{-1})^{-8}}.
 \end{array}$$

314. Знайдіть значення виразу:

$$1) ((4^{-4})^{-2} \cdot (4^{-5})^2)^{-1}; \quad 2) \frac{2^{-8} \cdot (2^{-2})^5}{(2^{-4})^6 \cdot (2^2)^4}.$$

315. Знайдіть значення виразу:

$$\begin{array}{lll}
 1) 243 \cdot 3^{-6}; & 2) 64 \cdot (2^{-3})^3; & 3) 5^{-8} \cdot 25^5 : 125; \\
 4) 49^{-1} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{-4}; & 5) \frac{36^{-3} \cdot 6^{-8}}{(-6)^{-13}}; & 6) \frac{8^{-3} \cdot 2 \cdot 10}{16^{-5}}.
 \end{array}$$

316. Обчисліть:

$$\begin{array}{lll}
 1) 128 \cdot 2^{-5}; & 2) 81 \cdot (3^{-2})^3; & 3) 7^{-8} \cdot 343^3 : 49; \\
 4) 36^{-2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-6}; & 5) \frac{100^{-2} \cdot 10^{-7}}{1000^{-3}}; & 6) \frac{5^{-3} \cdot 25^8}{125^5}.
 \end{array}$$

317. Спростіть вираз:

$$1) 3,5a^3b^7 : (0,5a^{-2}b^9); \quad 2) 3\frac{1}{2}x^{-12}y^{-1} : \left(-1\frac{3}{4}x^6y^{-4}\right).$$

318. Спростіть вираз:

$$1) \frac{13a}{b^{-5}} \cdot \frac{b^{-8}}{26a^{-2}}; \quad 2) -\frac{12a^{-3}}{35x} \cdot \frac{7x^{-7}}{6a^{-8}}.$$

319. Спростіть вираз:

$$1) 4,9m^3n^{-4} : (0,7mn^{-2}); \quad 2) \frac{7c^{-3}}{x^5} \cdot \left(-\frac{x^7}{21c^{-1}}\right).$$

320. Подайте у вигляді виразу, що не містить степеня з від'ємним показником:

$$\begin{array}{ll}
 1) \left(\frac{p^{-8}c^{12}}{m^{-4}t^{15}}\right)^{-2}; & 2) \left(\frac{b^{-3}}{c^5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{b^{-2}}{c^{-4}}\right)^3; \\
 3) \left(\frac{7x^{-2}}{3y^4}\right)^{-2} \cdot 49x^{-4}y^3; & 4) \left(\frac{a^{-3}b}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{a^{-2}b^2}\right)^{-3}.
 \end{array}$$

321. Подайте у вигляді виразу, що не містить степеня з від'ємним показником:

$$1) \left(\frac{c^{-7}a^2}{b^{-2}x} \right)^{-3};$$

$$2) \left(\frac{x^{-4}}{y^2} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{x^{-3}}{y^{-3}} \right)^2;$$

$$3) \left(\frac{5a^{-2}}{2b^{-3}} \right)^{-2} \cdot 25a^{-4}b^2;$$

$$4) \left(\frac{m^{-2}n^3}{4} \right)^{-3} \cdot \left(\frac{8}{m^{-3}n^4} \right)^{-2}.$$



4 Високий рівень

322. Спростіть вираз (n – ціле число):

$$1) \frac{25^n}{5^{2n-3}};$$

$$2) \frac{12^n}{2^{2n-1} \cdot 3^{n+1}};$$

$$3) \frac{a^{4n}b^{2n-1}}{a^{2n}b^{3+2n}}.$$

323. Спростіть вираз (m – ціле число):

$$1) \frac{49^m}{7^{2m-2}};$$

$$2) \frac{18^m}{2^{m+2} \cdot 3^{2m-1}};$$

$$3) \frac{x^{9m}y^{3m-2}}{x^{3m}y^{4+3m}}.$$

324. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{5^{n+2} - 5^n}{12} \quad (n - \text{ціле число});$$

$$2) \frac{x^7 + x^{10}}{x^{-1} + x^2};$$

$$3) \frac{m^{-3} + 5 - m^7}{5m^2 - m^9 + m^{-1}}.$$

325. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{18}{4^{n+1} - 4^n} \quad (n - \text{ціле число});$$

$$2) \frac{x^9 + x^5}{x^{-3} + x};$$

$$3) \frac{b^{-5} + 3 - b^2}{3b^3 - b^5 + b^{-2}}.$$

326. Доведіть, що для будь-яких цілих значень m і n вираз набуває одного й того самого значення:

$$1) \frac{2^m \cdot 3^{n-1} - 2^{m-1} \cdot 3^n}{2^m \cdot 3^n};$$

$$2) \frac{7^{2m} \cdot 4^n}{49^{m+1} \cdot 2^{2n-1} - 49^{m-1} \cdot 2^{2n+1}}.$$



Вправи для повторення

327. Відомо, що 3 кг огірків і 2 кг помідорів разом коштували 34 грн. Після того як огірки подешевшали на 20 %, а помідори подорожчали на 10 %, за 2 кг огірків і 3 кг помідорів заплатили 36 грн. Знайдіть початкову ціну кілограма огірків і кілограма помідорів.

328. Доведіть, що різниця квадратів двох послідовних непарних натуральних чисел ділиться на 8.



Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

329. Виконайте дії:

- 1) $2,7 \cdot 10^3$; 2) $1,32 \cdot 10^3$; 3) $4,7 \cdot 10^{-3}$; 4) $3,42 \cdot 10^{-4}$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



330. (Олімпіада Нью-Йорка, 1977 р.) Розв'яжіть рівняння $2^x + 1 = y^2$ в натуральних числах¹.

§ 11. СТАНДАРТНИЙ ВИГЛЯД ЧИСЛА

У фізиці, хімії, техніці, астрономії часто мають справу як з дуже великими, так і з дуже малими значеннями величин. Наприклад,

маса Землі дорівнює 5 976 000 000 000 000 000 000 000 кг, а діаметр молекули водню 0,00000000025 м.

Читати чи записувати такі числа у вигляді десяткових дробів незручно, незручно й використовувати десятковий їх запис під час обчислень. У таких випадках доцільно записувати число у вигляді $a \cdot 10^n$, де n – ціле число, $1 \leq a < 10$. Наприклад,

$$5\,976\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \text{ кг} = 5,976 \cdot 10^{24} \text{ кг};$$

$$0,00000000025 \text{ м} = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Кажуть, що числа 5 976 000 000 000 000 000 000 000 і 0,00000000025 записано у *стандартному вигляді*.

¹ Розв'язати в натуральних числах означає знайти ті розв'язки, що є натуральними числами.



Стандартним виглядом числа називають його запис у вигляді добутку $a \cdot 10^n$, де $1 \leq a < 10$ і n – ціле число.

Якщо число записано у стандартному вигляді, то показник степеня n називають **порядком числа**. Наприклад, порядок числа, яким записано масу Землі в кілограмах, дорівнює 24, а порядок числа, яким записано діаметр молекули водню в метрах, дорівнює -10 .

У стандартному вигляді можна записати будь-яке додатне число. Порядок числа дає уявлення про це число.

Якщо порядок числа x дорівнює 4, то це означає, що $1 \cdot 10^4 \leq x < 10 \cdot 10^4$, тобто $10\,000 \leq x < 100\,000$. Якщо порядок числа y дорівнює -2 , то $1 \cdot 10^{-2} \leq y < 10 \cdot 10^{-2}$, тобто $0,01 \leq y < 0,1$. Великий додатний порядок числа показує, що число дуже велике. Великий за модулем від’ємний порядок числа показує, що число дуже мале.

Отже, якщо кажуть, що одне число *на порядок більше* за друге, то це означає, що воно у 10 разів більше за друге, якщо на два порядки – у 100 разів більше і т. д.

Приклад 1. Подайте число 272 000 у стандартному вигляді.

Розв’язання. У даному числі поставимо кому так, щоб у цілій частині була одна цифра, відмінна від нуля. У результаті матимемо 2,72. Комою відокремили 5 цифр праворуч, чим зменшили дане число у 10^5 разів. Отже, $272\,000 = 2,72 \cdot 10^5$.

Відповідь. $2,72 \cdot 10^5$.

Приклад 2. Подайте число 0,00013 у стандартному вигляді.

Розв’язання. У даному числі перенесемо кому на 4 знаки праворуч, матимемо 1,3. При цьому число збільшили у 10^4 разів (на 4 порядки). Отже, $0,00013 = 1,3 \cdot 10^{-4}$.

Відповідь. $1,3 \cdot 10^{-4}$.

Приклад 3. Виконайте дію і подайте результат у стандартному вигляді:

$$1) (5,7 \cdot 10^8) \cdot (3,6 \cdot 10^{-2}); \quad 2) (2,1 \cdot 10^7) : (4,2 \cdot 10^{-3}).$$

Розв’язання.

$$1) (5,7 \cdot 10^8) \cdot (3,6 \cdot 10^{-2}) = (5,7 \cdot 3,6) \cdot (10^8 \cdot 10^{-2}) = 20,52 \cdot 10^6 = 2,052 \cdot 10^1 \cdot 10^6 = 2,052 \cdot 10^7;$$

$$2) (2,1 \cdot 10^7) : (4,2 \cdot 10^{-3}) = \frac{2,1 \cdot 10^7}{4,2 \cdot 10^{-3}} = \frac{2,1}{4,2} \cdot \frac{10^7}{10^{-3}} = 0,5 \cdot 10^{10} = 5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{10} = 5 \cdot 10^9.$$

Відповідь. 1) $2,052 \cdot 10^7$; 2) $5 \cdot 10^9$.

Приклад 4. Знайдіть суму $2,3 \cdot 10^4 + 3,7 \cdot 10^3$ та запишіть результат у стандартному вигляді.

Розв'язання. Маємо два доданки різних порядків.
 $2,3 \cdot 10^4 + 3,7 \cdot 10^3 = 2,3 \cdot 10^4 + 3,7 \cdot 10^4 \cdot 10^{-1} = 10^4(2,3 + 3,7 \cdot 10^{-1}) =$
 $= (2,3 + 0,37) \cdot 10^4 = 2,67 \cdot 10^4.$

Відповідь. $2,67 \cdot 10^4.$



Який запис числа називають його стандартним виглядом?



1 Початковий рівень

331. (Усно.) Чи записано число у стандартному вигляді:

- 1) 0,42; 2) $2,9 \cdot 10^0$; 3) $3,7 \cdot 10^{-8}$;
 4) $0,05 \cdot 10^{-12}$; 5) $19,2 \cdot 10^2$; 6) $1,92 \cdot 10^{-29}$;
 7) $1,92 \cdot 8^{-29}$; 8) $1,001 \cdot 10^{7?}$

332. Які із чисел подано у стандартному вигляді:

- 1) $3,0017 \cdot 10^0$; 2) $4,2 \cdot 10^{-5}$; 3) 0,03; 4) 117;
 5) $10,5 \cdot 10^7$; 6) 1,115 · 1017; 7) $2,7 \cdot 10^{-3}$; 8) $2,7 \cdot 5^{-3?}$

333. (Усно.) Назвіть порядок числа, поданого у стандартному вигляді:

- 1) $1,7 \cdot 10^5$; 2) $2,001 \cdot 10^{-17}$; 3) $4,5 \cdot 10^1$; 4) 3,7.

334. Яким є порядок числа, поданого у стандартному вигляді:

- 1) $2,7 \cdot 10^{-5}$; 2) $3,8 \cdot 10^{12}$; 3) $2,45 \cdot 10^0$; 4) $4,11 \cdot 10^{-1?}$



2 Середній рівень

335. Запишіть у стандартному вигляді число:

- 1) 200 000; 2) 5800; 3) 20 500; 4) 739;
 5) 107,5; 6) 37,04; 7) 2700,5; 8) 300,8;
 9) 0,37; 10) 0,0029; 11) 0,000007; 12) 0,010203.

336. Подайте число у стандартному вигляді:

- 1) 50 000; 2) 470 000; 3) 5 030 000; 4) 975;
 5) 32,5; 6) 409,1; 7) 12900,5; 8) 87,08;
 9) 0,43; 10) 0,00017; 11) 0,00004; 12) 0,90807.

337. Подайте число у стандартному вигляді:

- 1) $27 \cdot 10^5$; 2) $427 \cdot 10^{-3}$;
 3) $0,00027 \cdot 10^5$; 4) $0,0037 \cdot 10^{-4}.$

338. Запишіть число у стандартному вигляді:

- 1) $58 \cdot 10^{-8}$; 2) $237,2 \cdot 10^7$;
3) $0,2 \cdot 10^{-4}$; 4) $0,0017 \cdot 10^5$.

339. Округліть число до сотень і отриманий результат запишіть у стандартному вигляді:

- 1) 137 152; 2) 12 311; 3) 2197,2; 4) 1000,135.

340. Подайте значення даної величини у вигляді десяткового дробу або цілого числа:

- 1) територія України складає $6,037 \cdot 10^5$ км²;
2) діаметр молекули води дорівнює $2,8 \cdot 10^{-7}$ мм;
3) населення м. Києва на 1 січня 2015 року становило приблизно $2,888 \cdot 10^6$ осіб;
4) маса пташки колібрі дорівнює $1,7 \cdot 10^{-3}$ кг.

341. Запишіть у вигляді десяткового дробу або цілого числа:

- 1) $2,735 \cdot 10^4$; 2) $3,7 \cdot 10^{-3}$; 3) $3,17 \cdot 10^7$; 4) $1,2 \cdot 10^{-5}$.

342. Виконайте множення та подайте результат у стандартному вигляді:

- 1) $(1,7 \cdot 10^3) \cdot (3 \cdot 10^{-8})$; 2) $(2,5 \cdot 10^{-5}) \cdot (6 \cdot 10^{-2})$.

343. Виконайте множення та подайте результат у стандартному вигляді:

- 1) $(1,2 \cdot 10^{-8}) \cdot (4 \cdot 10^5)$; 2) $(1,5 \cdot 10^7) \cdot (8 \cdot 10^3)$.

344. Виконайте ділення та подайте результат у стандартному вигляді:

- 1) $(4,2 \cdot 10^7) : (2,1 \cdot 10^3)$; 2) $(1,4 \cdot 10^5) : (2,8 \cdot 10^{-2})$.

345. Виконайте ділення та подайте результат у стандартному вигляді:

- 1) $(7,2 \cdot 10^5) : (2,4 \cdot 10^2)$; 2) $(1,7 \cdot 10^{-3}) : (8,5 \cdot 10^{-7})$.

346. Порівняйте числа:

- 1) $1,7 \cdot 10^5$ і $2,8 \cdot 10^5$; 2) $1,3 \cdot 10^{-4}$ і $1,29 \cdot 10^{-4}$.

347. Порівняйте числа:

- 1) $2,8 \cdot 10^{-3}$ і $3,7 \cdot 10^{-3}$; 2) $1,42 \cdot 10^5$ і $1,5 \cdot 10^5$.

348. Виконайте дію та подайте результат у стандартному вигляді:

- 1) $2,7 \cdot 10^3 + 3,2 \cdot 10^3$; 2) $4,7 \cdot 10^{-15} - 3,2 \cdot 10^{-15}$.

349. Виконайте дію та подайте результат у стандартному вигляді:

- 1) $4,7 \cdot 10^{-8} + 5,1 \cdot 10^{-8}$; 2) $2,9 \cdot 10^7 - 1,8 \cdot 10^7$.



Достатній рівень

350. Порівняйте числа:

- 1) $2,9 \cdot 10^8$ і $1,8 \cdot 10^9$; 2) $1,12 \cdot 10^{-7}$ і $1,12 \cdot 10^{-8}$.

351. Порівняйте числа:

- 1) $1,7 \cdot 10^5$ і $1,7 \cdot 10^4$; 2) $1,8 \cdot 10^{-6}$ і $8,9 \cdot 10^{-7}$.

352. Виконайте дії та подайте результат у стандартному вигляді:

- 1) $2,7 \cdot 10^4 + 3,2 \cdot 10^5$; 2) $1,42 \cdot 10^{-1} - 2,8 \cdot 10^{-2}$.

353. Виконайте дії та подайте результат у стандартному вигляді:

- 1) $2,7 \cdot 10^{-5} + 1,7 \cdot 10^{-4}$; 2) $3,7 \cdot 10^3 - 2,3 \cdot 10^2$.

354. Площа Автономної Республіки Крим дорівнює $2,61 \cdot 10^4$ км², а площа Чернівецької області – $8,1 \cdot 10^3$ км². Скільки відсотків складає площа Чернівецької області від площі Автономної Республіки Крим? (Відповідь округліть до цілих.)

355. Відстань від Землі до найближчої після Сонця зірки α -Центавра дорівнює $4,1 \cdot 10^{13}$ км. За який час світло від Землі досягне зірки α -Центавра? (Швидкість світла $3 \cdot 10^5$ км/с.)

356. Виразіть:

- 1) $8,3 \cdot 10^6$ т у грамах; 2) $3,72 \cdot 10^{-3}$ г у тоннах;
3) $4,9 \cdot 10^{-5}$ км у сантиметрах; 4) $4,97 \cdot 10^7$ см у метрах.

357. Подайте:

- 1) $3,87 \cdot 10^5$ см у кілометрах; 2) $4,92 \cdot 10^{-2}$ км у метрах;
3) $3,7 \cdot 10^{-3}$ кг у центнерах; 4) $1,8 \cdot 10^9$ т у кілограмах.



Високий рівень

358. Порядок числа a дорівнює -18 . Яким є порядок числа:

- 1) $100a$; 2) $0,00001a$; 3) $a \cdot 10^7$; 4) $\frac{a}{10^{-3}}$?

359. Порядок числа b дорівнює 15 . Яким є порядок числа:

- 1) $1000b$; 2) $0,01b$; 3) $b \cdot 10^{-3}$; 4) $\frac{b}{10^5}$?



Вправи для повторення

3 360. Обчисліть значення виразу:

1) $\frac{2x^4 - 6x^2}{12x^3 - 4x^5}$, якщо $x = -0,5$; 2) $\frac{8y^6 - 8y^4}{4y^4 + 4y^3}$, якщо $y = 10$.

4 361. При яких значеннях a рівняння

$$\frac{(x + a - 1)(x + 2a - 3)}{x - 5} = 0$$

має лише один корінь?



Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

362. Функцію задано формулою $y = \frac{x - 2}{x + 4}$.

1) Знайдіть область визначення функції.

2) Перенесіть таблицю в зошит і заповніть її, обчисливши відповідні значення функції:

| | | | | | | | | | | |
|-----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|
| x | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| y | | | | | | | | | | |

363. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2x - 1$; 2) $y = -5x$; 3) $y = -\frac{2}{3}x + 5$;

4) $y = -5$; 5) $y = 4$; 6) $y = 0,3x + 2$.

364. Чи належить графіку функції $y = x^2 - x$ точка:

1) $A(1; 1)$; 2) $B(-1; 2)$; 3) $C(0; 0)$; 4) $D(5; 30)$?



Цікаві задачі для учнів неледачих



365. (Київська математична олімпіада, 1989 р.) Двоє гравців по черзі здійснюють ходи у грі за такими правилами: у клітинках нескінченного аркуша один гравець ставить хрестики, а другий – нулики. Чи може другий гравець грати так, щоб перший ніколи не зміг заповнити хрестиками якийсь квадрат 2×2 ?

§ 12. ФУНКЦІЯ $y = \frac{k}{x}$, ЇЇ ГРАФІК І ВЛАСТИВОСТІ

Приклад 1. Пішоход має подолати 16 км. Якщо він буде йти зі швидкістю v км/год, то залежність часу t (у год), за який він подолає цю відстань, від швидкості руху можна подати формулою $t = \frac{16}{v}$. При збільшенні значення v у кілька разів значення t у стільки ж разів зменшиться. У такому випадку кажуть, що змінні t і v **обернено пропорційні**.

Приклад 2. Площа прямокутника дорівнює 32 см², а одна з його сторін a см. Тоді другу сторону b (у см) можна знайти за формулою $b = \frac{32}{a}$. Тут змінні a і b також обернено пропорційні.

У прикладах 1 і 2 змінні t , v , a і b набувають лише додатних значень. Далі розглядатимемо функції, що задають формулою вигляду $y = \frac{k}{x}$ (де k – число, $k \neq 0$), у яких змінні x і y можуть набувати як додатних, так і від’ємних значень. Кожну з таких функцій називають **оберненою пропорційністю**.



Функцію вигляду $y = \frac{k}{x}$, де x – незалежна змінна, k – деяке відмінне від нуля число, називають **оберненою пропорційністю.**

Областю визначення функції $y = \frac{k}{x}$ є всі числа за виключенням нуля, оскільки вираз $\frac{k}{x}$ не має змісту, якщо $x = 0$.

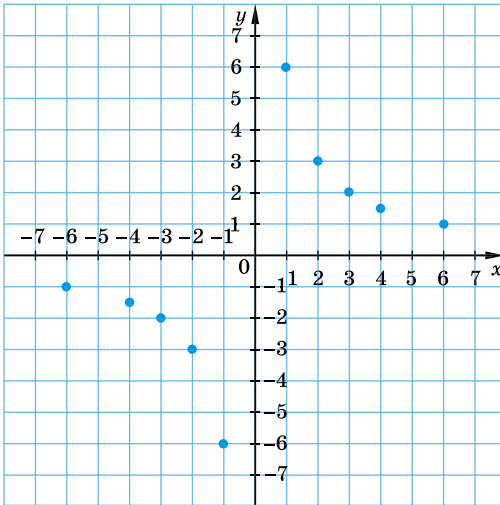
Побудуємо графік функції $y = \frac{k}{x}$ окремо для випадків, коли $k > 0$ і коли $k < 0$.

Приклад 3. Побудуйте графік функції $y = \frac{6}{x}$.

Розв’язання. Складемо таблицю значень функції $y = \frac{6}{x}$ для кількох значень аргументу:

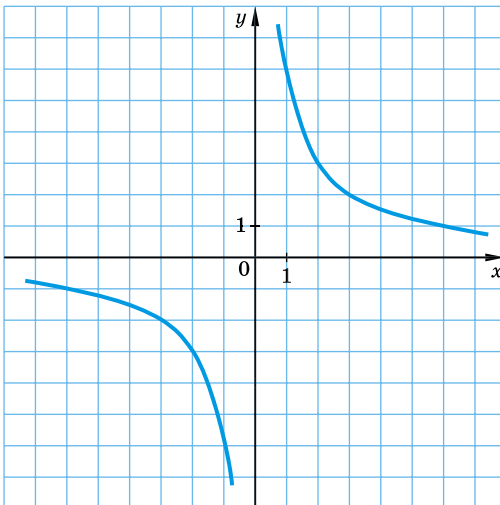
| | | | | | | | | | | |
|-----|----|------|----|----|----|---|---|---|-----|---|
| x | -6 | -4 | -3 | -2 | -1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
| y | -1 | -1,5 | -2 | -3 | -6 | 6 | 3 | 2 | 1,5 | 1 |

Позначимо на координатній площині точки, координати яких подано в таблиці (мал. 2).



Мал. 2

Якби на цій площині позначили більшу кількість точок, що задовольняють формулу $y = \frac{6}{x}$, а потім з'єднали їх плавною лінією, то отримали б графік функції $y = \frac{6}{x}$ (мал. 3).



Мал. 3

Графік оберненої пропорційності називають *гіперболою*. Гіпербола складається з двох *гілок*. У випадку функції $y = \frac{6}{x}$ одна з них лежить у першій координатній чверті, а друга – у третій. Гіпербола не перетинає координатних осей: на графіку немає точки, у якої $x = 0$ (оскільки нуль не належить області визначення функції), і немає точки, у якої $y = 0$ (оскільки рівняння $\frac{6}{x} = 0$ не має розв'язків). Що більшим за модулем є значення x , то меншим за модулем є значення y , і навпаки, що меншим за модулем є значення x , то більшим за модулем є значення y . Це означає, що гілки гіперболи необмежено наближаються до осей координат.

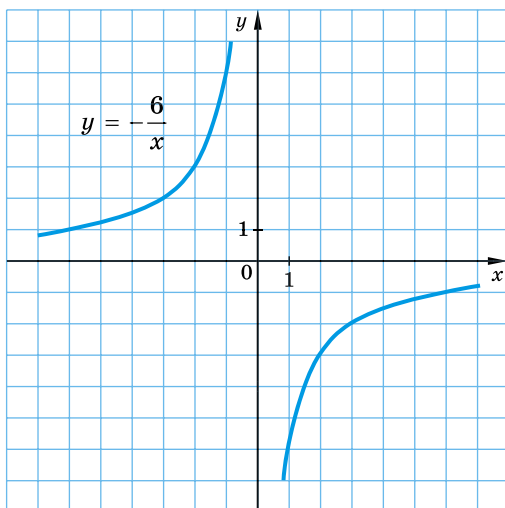
Так само виглядає графік функції $y = \frac{k}{x}$ при будь-якому $k > 0$.

Приклад 4. Побудуйте графік функції $y = -\frac{6}{x}$.

Розв'язання. Міркуючи як у попередньому прикладі, побудуємо графік функції $y = -\frac{6}{x}$. Його зображено на малюнку 4.

Це також гіпербола, одна з гілок якої лежить у другій координатній чверті, а друга – у четвертій.

Так само виглядає графік функції $y = \frac{k}{x}$ при будь-якому $k < 0$.



Мал. 4

Узагальнимо властивості оберненої пропорційності $y = \frac{k}{x}$.

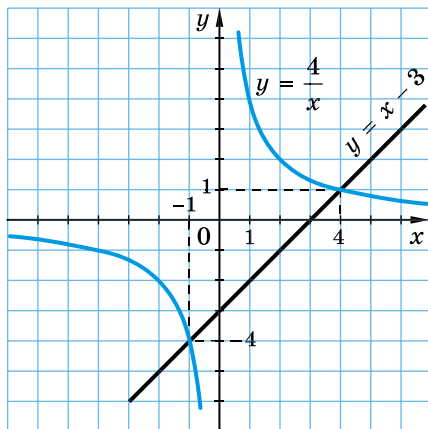


1. Область визначення функції складається з усіх чисел, крім числа нуль.
2. Область значень функції складається з усіх чисел, крім числа нуль.
3. Графік функції – гіпербола, гілки якої лежать у першому і третьому координатних кутах, якщо $k > 0$, та в другому і четвертому, якщо $k < 0$.
4. Гілки гіперболи необмежено наближаються до осей координат.

Приклад 5. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{4}{x}$ і $y = x - 3$. Знайдіть точки їх перетину та, користуючись побудованими графіками, розв'яжіть рівняння $\frac{4}{x} = x - 3$.

Розв'язання. Графіком функції $y = \frac{4}{x}$ є гіпербола, гілки якої лежать в першому і третьому координатних кутах, а графіком функції $y = x - 3$ є пряма, що проходить через точки $(0; -3)$ і $(3; 0)$. Графіки зображено на малюнку 5.

Вони перетинаються в точках $(4; 1)$ і $(-1; -4)$, абсциси яких 4 і -1 є розв'язками рівняння $\frac{4}{x} = x - 3$. Справді, якщо $x = 4$, то вирази $\frac{4}{x}$ і $x - 3$ набувають однакових зна-



Мал. 5

чень: $\frac{4}{x} = \frac{4}{4} = 1$ і $x - 3 = 4 - 3 = 1$. Якщо $x = -1$, аналогічно:

$$\frac{4}{x} = \frac{4}{-1} = -4 \text{ і } x - 3 = -1 - 3 = -4.$$

Отже, числа 4 і -1 – корені рівняння $\frac{4}{x} = x - 3$.

Відповідь: (4; 1); (-1; -4) – точки перетину; 4, -1 – корені рівняння.

Запропонований у прикладі 5 метод розв'язування рівнянь називають **графічним методом розв'язування рівнянь**.

Якщо абсциса точки перетину графіків функцій – ціле число, треба виконати перевірку, оскільки в багатьох випадках корені рівняння цим методом можна знайти лише наближено.

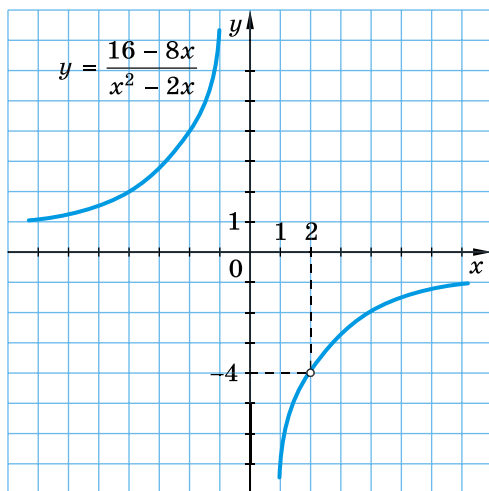
Приклад 6. Побудуйте графік функції $y = \frac{16 - 8x}{x^2 - 2x}$.

Розв'язання. Областю визначення функції є усі числа, крім 0 і 2, тобто ті, при яких знаменник $x^2 - 2x$ не дорівнює нулю.

$$\text{Спростимо дріб: } \frac{16 - 8x}{x^2 - 2x} = \frac{8(2 - x)}{x(x - 2)} = -\frac{8(x - 2)}{x(x - 2)} = -\frac{8}{x}.$$

Отже, за умови $x \neq 0$ і $x \neq 2$, функція має вигляд $y = -\frac{8}{x}$.

Графіком функції $y = \frac{16 - 8x}{x^2 - 2x}$ є гіпербола $y = -\frac{8}{x}$ з «виколотою» точкою (2; -4), а точок з абсцисою $x = 0$ у гіперболи немає (мал. 6).



Мал. 6



1. Яку функцію називають оберненою пропорційністю?
2. Що є графіком оберненої пропорційності і як він розташований у координатній площині?
3. Які властивості має обернена пропорційність?



Початковий рівень

366. (Усно.) Які з функцій є оберненою пропорційністю:

$$\begin{array}{llll}
 1) y = \frac{8}{x}; & 2) y = \frac{x}{8}; & 3) y = -\frac{x}{2}; & 4) y = -\frac{2}{x}; \\
 5) y = \frac{0}{x}; & 6) y = 7; & 7) y = \frac{0,0002}{x}; & 8) y = \frac{0,0002}{x^2}
 \end{array}$$

367. Випишіть функції, що задають обернену пропорційність:

$$\begin{array}{llll}
 1) y = \frac{x}{7}; & 2) y = \frac{7}{x}; & 3) y = -\frac{3}{x}; & 4) y = -\frac{x}{3}; \\
 5) y = -9; & 6) y = -\frac{0,01}{x}; & 7) y = -\frac{0,01}{x^2}; & 8) y = 0,01x.
 \end{array}$$

368. У яких координатних кутах лежить графік функції:

$$1) y = \frac{15}{x}; \quad 2) y = -\frac{9}{x}$$



Середній рівень

369. Обчисліть значення функції $y = \frac{20}{x}$, якщо значення аргументу дорівнює -2 ; 5 ; -10 ; 1 .

370. Обчисліть значення функції $y = \frac{12}{x}$, якщо значення аргументу дорівнює -3 ; 4 ; -6 ; 1 .

371. Обернену пропорційність задано формулою $y = \frac{100}{x}$.
Перенесіть таблицю в зошит і заповніть її:

| | | | | | | | | |
|-----|-----|----|-----|------|---|----|---|-----|
| x | -50 | | -20 | | 5 | 10 | | |
| y | | -4 | | 1000 | | | 5 | 0,1 |

372. Обернену пропорційність задано формулою $y = \frac{80}{x}$. Перенесіть таблицю в зошит і заповніть її:

| | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|----|---|----|----|-----|-----|
| x | -80 | -40 | | 1 | | | 160 | |
| y | | | -5 | | 20 | 16 | | 0,1 |

373. Побудуйте графік функції $y = -\frac{8}{x}$, склавши таблицю значень функції для значень аргументу -8; -4; -2; -1; 1; 2; 4; 8.

374. Побудуйте графік функції $y = \frac{12}{x}$, склавши таблицю значень y для $x = -12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12$.

375. Не будуючи графік функції $y = \frac{128}{x}$, знайдіть, через які з точок він проходить:

- 1) $A(4; 32)$; 2) $B(-8; 16)$; 3) $C(-2; -64)$; 4) $D(0; -128)$.

376. Чи належить графіку функції $y = -\frac{162}{x}$ точка:

- 1) $A(-6; 27)$; 2) $B(9; 18)$; 3) $C(0; -162)$; 4) $D(81; -2)$?

377. (Усно.) Графіки яких функцій проходять через точку $A(4; -3)$:

- 1) $y = \frac{12}{x}$; 2) $y = -\frac{12}{x}$; 3) $y = -\frac{24}{x}$; 4) $y = x - 7$?

378. На 145 грн придбали y кг цукерок по x грн за кілограм. Виразіть формулою залежність y від x . Чи є ця залежність оберненою пропорційністю?



Достатній рівень

379. Побудуйте графік функції $y = \frac{10}{x}$. За графіком знайдіть:

- значення функції, якщо значення аргументу дорівнює -2; 2,5; -1;
- значення аргументу, при яких значення функції дорівнює 10; -4; 2;
- значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень; додатних значень.

380. Побудуйте графік функції $y = -\frac{4}{x}$. За графіком знайдіть:

- 1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює $-0,5$; 2 ; -4 ;
- 2) значення аргументу, при яких функція дорівнює 4 ; -1 ; 2 ;
- 3) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень; додатних значень.

381. Графік оберненої пропорційності проходить через точку $M(-4; 12)$. Задайте цю функцію формулою.

382. Запишіть формулу оберненої пропорційності, якщо її графік проходить через точку $P\left(12; 1\frac{1}{6}\right)$.

383. Функцію задано формулою $y = \frac{8}{x}$ для $1 \leq x \leq 4$. Запишіть область значень цієї функції.

384. Розв'яжіть графічно рівняння:

$$1) \frac{8}{x} = 2; \quad 2) 2x = \frac{18}{x}; \quad 3) -\frac{4}{x} = 3 - x.$$

385. Розв'яжіть графічно рівняння:

$$1) \frac{6}{x} = 3; \quad 2) \frac{4}{x} = x; \quad 3) 4 - x = -\frac{5}{x}.$$



4 Високий рівень

386. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{4}{|x|}; \quad 2) y = -\frac{8}{|x|}.$$

387. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} -\frac{6}{x}, & \text{якщо } x \leq -2, \\ -1,5x, & \text{якщо } -2 < x < 2, \\ -\frac{6}{x}, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$

388. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} \frac{4}{x}, & \text{якщо } x \leq -2, \\ x, & \text{якщо } -2 < x < 2, \\ \frac{4}{x}, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$

389. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{24}{(x+3)^2 - (x-3)^2}$; 2) $y = \frac{6x-18}{3x-x^2}$.



Вправи для повторення

2 390. Знайдіть значення виразу:

1) 3^{-4} ; 2) $(-19)^{-1}$; 3) $\left(1\frac{1}{7}\right)^{-2}$; 4) $(-0,2)^{-3}$.

3 391. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{2}{3}a^{-1}b\right)^{-2} \cdot \left(\frac{9}{10}a^{-3}b^{-2}\right)^{-1}$; 2) $\left(\frac{4mn^{-2}}{5a}\right)^{-1} \cdot 8m^{-3}n^{-2}a^5$.

4 392. Обчисліть $((1 - (1 + 2^{-1})^{-1})^{-1})^{-4}$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



393. Вираз $(x^2 - x - 1)^{13}$ перетворили на многочлен. Знайдіть суму коефіцієнтів цього многочлена.

Домашня самостійна робота № 3

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 1. Подайте вираз $a^{-5}a^2$ у вигляді степеня з основою a .

А. a^{-3} ; Б. a^3 ; В. a^{-10} ; Г. a^{10} .

2. Укажіть число, яке подано у стандартному вигляді.

А. $12 \cdot 10^{-7}$; Б. $1,7 \cdot 8^{10}$; В. $0,05 \cdot 10^{15}$; Г. $1,7 \cdot 10^8$.

3. Укажіть функцію, що є оберненою пропорційністю.

А. $y = \frac{x}{2}$; Б. $y = \frac{2}{x}$; В. $y = 2x$; Г. $y = 2$.

2 4. Обчисліть $(-5)^{-3}$.

А. 15; Б. $\frac{1}{25}$; В. $-\frac{1}{125}$; Г. $\frac{1}{125}$.

5. Спростіть вираз $-4a^{-5}b^7 \cdot 1\frac{1}{4}a^{-3}b^{-2}$.

А. $-a^{-8}b^5$; Б. $-5a^{-8}b^5$; В. $-5a^{15}b^{-14}$; Г. $5a^{-8}b^5$.

6. Укажіть стандартний вигляд числа 217,38.

А. $2,1738 \cdot 10^2$; Б. $2,1738 \cdot 10^{-2}$;
В. $2,1738 \cdot 10$; Г. $2,1738 \cdot 10^4$.

3 7. Подайте частку $(3,5a^5b^{-3}) : (0,5a^{-3}b^{-2})$ у вигляді виразу, який не містить степеня з від'ємним показником.

А. $\frac{5a^8}{b}$; Б. $7a^8b$; В. $\frac{7a^8}{b}$; Г. $\frac{7a^2}{b^5}$.

8. Знайдіть значення виразу $\frac{2^{-3} \cdot 4^8}{8^5}$.

А. $\frac{1}{8}$; Б. $\frac{1}{4}$; В. $\frac{1}{2}$; Г. 4.

9. Укажіть формулу оберненої пропорційності, графік якої проходить через точку $A(-6; 1,5)$.

А. $y = -4x$; Б. $y = -\frac{6}{x}$; В. $y = -\frac{9}{x}$; Г. $y = \frac{9}{x}$.

4 10. Обчисліть $(1 + (1 - 2^{-1})^{-2})^{-3}$.

А. $\frac{64}{125}$; Б. $\frac{1}{8}$; В. $\frac{1}{25}$; Г. $\frac{1}{125}$.

11. Скоротіть дріб $\frac{x^{-2} + x^3}{x^2 + x^{-3}}$.

А. дріб є нескоротним; Б. 1; В. x ; Г. $\frac{1}{x}$.

12. Порядок числа a дорівнює -16 . Знайдіть порядок числа $0,0001a$.

А. -12 ; Б. -20 ; В. -4 ; Г. -16 .

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО § 9–12



1. Подайте у вигляді степеня з основою a :

1) a^2a^{-3} ; 2) $a^{-5}a^{-4}$; 3) $a^5 : a^{-7}$; 4) $(a^{-2})^3$.

2. Чи записано у стандартному вигляді число:

1) $0,37 \cdot 10^5$; 2) $2,4 \cdot 10^{-12}$; 3) $1,5 \cdot 10^8$; 4) $3,5 \cdot 8^{10}$?

3. Які з функцій задають обернену пропорційність:

1) $y = \frac{x}{5}$; 2) $y = \frac{5}{x}$; 3) $y = -\frac{6}{x}$; 4) $y = -\frac{6}{x^2}$?



4. Обчисліть:

1) 2^{-3} ; 2) $(-5)^{-1}$; 3) $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-2}$; 4) $(2,7 \cdot 10^5) \cdot (3 \cdot 10^{-8})$.

5. Спростіть вираз:

1) $-7a^{-3}b^9 \cdot 1\frac{1}{7}a^{-5}b^{-3}$; 2) $\left(-\frac{2}{3}x^3y\right) \cdot \left(-\frac{9}{10}x^{-5}y^{-1}\right)$.

6. Подайте число у стандартному вигляді:

1) 27 000; 2) 0,002; 3) 371,5; 4) 0,0109.



7. Перетворіть на вираз, який не містить степеня з від'ємним показником:

1) $(4,2a^7b^{-9}) : (0,7a^{-3}b^{-5})$; 2) $\left(\frac{2x^4}{5y^7}\right)^{-2} \cdot 4x^8y^{-18}$.

8. Побудуйте графік функції $y = -\frac{12}{x}$. За графіком знайдіть:

- 1) значення функції, якщо $x = 4$; -2 ;
- 2) значення аргументу, при яких функція дорівнює -6 ; 1 ;
- 3) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень; додатних значень.



9. Скоротіть дріб:

1) $\frac{48}{5^{n+2} - 5^n}$; 2) $\frac{x^{-3} + x^2}{x + x^6}$.

Додаткові завдання



10. Обчисліть $((1 + (1 - 2^{-1})^{-1})^{-1})^{-3}$.

11. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} \frac{8}{x}, & \text{якщо } x \leq -2, \\ -4, & \text{якщо } -2 < x < 3, \\ -\frac{12}{x}, & \text{якщо } x \geq 3. \end{cases}$

Вправи для повторення розділу 1

До § 1

1 394. З раціональних виразів

$$m^3 - mp^2; \quad \frac{t^2 + 2}{t - 7}; \quad \frac{p\left(3 - \frac{2}{x}\right)}{x^2}; \quad \frac{17}{x - y}; \quad \frac{x^2 + ax - a^2}{19}; \quad \frac{(x + p) : y}{a - b}$$

випишіть: 1) цілі раціональні вирази;
2) дробові раціональні вирази;
3) раціональні дроби.

2 395. Знайдіть область допустимих значень змінної у виразі:

$$1) c^2 - 3c; \quad 2) \frac{m + 2}{m - 8}; \quad 3) \frac{a}{a - 9} + \frac{a - 9}{a}; \quad 4) \frac{3 + c}{c(c - 1)}.$$

3 396. Турист пройшов 12 км вздовж шосе зі швидкістю a км/год та 8 км степовою дорогою зі швидкістю b км/год. Скільки часу витратив турист на весь шлях? Складіть вираз і знайдіть його значення, якщо $a = 5$; $b = 4$.

397. Обчисліть значення дробу $\frac{x^2 + 2xy + y^2}{0,1x}$, якщо $x = -100$, $y = 99$.

4 398. Знайдіть допустимі значення змінної у виразі:

$$1) \frac{1}{|x| + 7}; \quad 2) \frac{p}{|m| - m}; \quad 3) \frac{1}{1 - \frac{1}{|a|}}; \quad 4) \frac{3}{|2x - 7| - 3}.$$

399. При яких значеннях x дорівнює нулю дріб:

$$1) \frac{x^2 - 1}{x + 1}; \quad 2) \frac{x + 3}{x^2 - 9}; \quad 3) \frac{|x| - 2}{(x - 2)(x + 5)}; \quad 4) \frac{|x| - x}{x(x - 3)}?$$

До § 2

1 400. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{5m}{20n}; \quad 2) \frac{4x}{5x}; \quad 3) \frac{p}{10p}; \quad 4) \frac{-3}{6t}; \quad 5) \frac{ax}{xb}; \quad 6) \frac{mn}{2m}.$$

2 401. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{a^2b^3}{ab^7}; \quad 2) \frac{-63xa^5}{81xa^6}; \quad 3) \frac{p(a-2)}{m(a-2)}; \quad 4) \frac{7a-14b}{3a-6b};$$

$$5) \frac{a-2y}{a^2-2ay}; \quad 6) \frac{m^2-1}{7m+7}; \quad 7) \frac{x^2-4x+4}{3x-6}; \quad 8) \frac{x^2-2xy}{2y-x}.$$

402. Зведіть дріб:

$$1) \frac{c}{a^2} \text{ до знаменника } a^5; \quad 2) \frac{p}{3c} \text{ до знаменника } 12c^7.$$

3 403. Подайте частку у вигляді дробу та скоротіть його:

$$1) (x^3 + 8) : (x + 2);$$

$$2) (a^2 - 5a + 25) : (a^3 + 125).$$

404. Обчисліть значення дробу:

$$1) \frac{10xy - 5x^2}{8y^2 - 4xy}, \text{ якщо } x = 0,2; y = 0,25;$$

$$2) \frac{a^2 - 4b^2}{3a^2b - 6ab^2}, \text{ якщо } a = 20; b = -10.$$

405. Зведіть дріб $\frac{3}{a-2}$ до знаменника:

$$1) 7a - 14; \quad 2) a^2 - 2a; \quad 3) 16 - 8a; \quad 4) a^2 - 4.$$

4 406. Доведіть тотожність $\frac{22,5a^2 - 2,5b^2}{7,5a^2 - 2,5ab} = \frac{3a + b}{a}$.

407. Знайдіть значення дробу $\frac{2x - 8y}{0,2x^2 - 3,2y^2}$, якщо $x + 4y = 5$.

408. Подайте вираз $5a + 4b$ у вигляді дробу зі знаменником:

$$1) 5; \quad 2) -a; \quad 3) 2b; \quad 4) 2a - 3b.$$

409. Скоротіть дріб

$$\frac{x^2 - y^2 - z^2 + 2yz}{y^2 - x^2 - z^2 - 2xz}.$$

До § 3

1 410. Виконайте дію:

$$1) \frac{4m}{7} + \frac{m}{7}; \quad 2) \frac{9p}{8a} - \frac{2p}{8a}; \quad 3) \frac{m-n}{p} + \frac{n}{p}; \quad 4) \frac{12a^2}{5m} - \frac{3a^2}{5m}.$$

2 411. Спростіть вираз:

$$1) \frac{3m-7}{12m} + \frac{13-5m}{12m} - \frac{6m-2}{12m}; \quad 2) \frac{m^2+1}{a(m-1)} - \frac{2}{a(m-1)};$$

$$3) \frac{x-8}{x^2-25} + \frac{13}{x^2-25}; \quad 4) \frac{a-4}{a-2} - \frac{2}{2-a}.$$

412. Знайдіть значення виразу $\frac{m+1}{m^2-16} + \frac{3}{m^2-16}$, якщо $m = 14$.

3 413. Перетворіть на дріб вираз:

$$1) \frac{9b+1}{b^2-4} + \frac{8-b}{4-b^2} - \frac{7b-1}{b^2-4}; \quad 2) \frac{5m}{m^3-1} - \frac{1-4m}{1-m^3} + \frac{m^2}{m^3-1}.$$

414. При якому значенні a вирази $\frac{2x+3}{x-2}$ і $\frac{2x}{x-2} + \frac{a}{2-x}$ є тотожно рівними?

415. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення виразу $\frac{8+3a}{5-4a} + \frac{13a-14}{4a-5} - \frac{2a+7}{5-4a}$ від значення змінної не залежить.

4 416. Спростіть вираз:

$$1) \frac{16m^2}{(4m-1)(4m+1)} - \frac{8m}{16m^2-1} - \frac{1}{(1-4m)(1+4m)};$$

$$2) \frac{8x-9}{(2x+1)^2} - \frac{8x^3+3x-1}{(1+2x)^2} - \frac{5x-7}{1+4x^2+4x}.$$

417. Доведіть, що вираз $\frac{x+6}{(2-x)^4} + \frac{x^2-3}{(x-2)^4} - \frac{5x-1}{(2-x)^4}$ набуває додатних значень при всіх значеннях x , за умови $x \neq 2$.

418. Знайдіть, при яких натуральних значеннях n натуральним числом є значення дробу:

$$1) \frac{n+2}{n}; \quad 2) \frac{n^2+6}{n}; \quad 3) \frac{n^2-10n+16}{n}.$$

419. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2}{x-1} + \frac{1}{1-x}$.

До § 4

1 420. Виконайте дію:

$$1) \frac{c}{5} - \frac{a}{4}; \quad 2) \frac{a}{3} + \frac{b}{12}; \quad 3) \frac{p}{x} - \frac{x}{a}; \quad 4) \frac{4}{m} + \frac{n}{7}.$$

2 421. Виконайте дію:

$$1) \frac{2}{3p} - \frac{4}{9p}; \quad 2) \frac{7x^2}{12m} + \frac{x^2}{m}; \quad 3) \frac{3x-2y}{12} + \frac{y+x}{6};$$

$$4) \frac{3a+b}{6} - \frac{4a-b}{8}; \quad 5) \frac{1}{p^2} - \frac{p-2}{p^3}; \quad 6) \frac{4a+b}{2a} - \frac{6b-a}{3b}.$$

422. Спростіть вираз:

$$1) \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn}; \quad 2) \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}; \quad 3) \frac{a+b}{a} + \frac{a-b}{b} - \frac{1}{ab}.$$

423. Подайте у вигляді дробу:

$$1) 2x - \frac{1}{x}; \quad 2) 4p - \frac{4p^2-1}{p}; \quad 3) \frac{2}{m} + \frac{3}{m-1};$$

$$4) \frac{m}{1-m} + \frac{1+m}{m}; \quad 5) \frac{c}{3c-1} + \frac{c}{3c+1}; \quad 6) \frac{x}{x-y} - \frac{x}{x+y}.$$

424. Виконайте дію:

$$1) \frac{2c-7}{2(c+5)} + \frac{4-c}{c+5}; \quad 2) \frac{a-1}{3a+6} - \frac{a}{4a+8};$$

$$3) \frac{7}{x} - \frac{14}{x(x+2)}; \quad 4) \frac{9}{m^2+4m} - \frac{5}{m+4};$$

$$5) \frac{b}{a^2-b^2} + \frac{1}{a+b}; \quad 6) \frac{x+3}{x^2+2x+1} - \frac{1}{x+1}.$$

3 425. Доведіть, що для всіх значень змінної значення виразу

$$\frac{(a-3)(a-7)}{12} - \frac{(a-7)(a-1)}{8} + \frac{(a-1)(a-3)}{24}$$

не залежить від a .

426. Спростіть вираз:

$$1) \frac{4m+18}{m^2-9} - \frac{5}{m-3} + \frac{1}{m+3}; \quad 2) \frac{2x}{2x+3} + \frac{5}{3-2x} - \frac{4x^2+9}{4x^2-9};$$

$$3) \frac{9x}{3xy+2y^2} - \frac{4y}{3x^2+2xy}; \quad 4) \frac{4a}{4a^2-1} - \frac{2a+1}{6a-3} + \frac{2a-1}{4a+2};$$

$$5) \frac{2x-1}{x^2+x+1} + \frac{4x^2+3x-7}{x^3-1}; \quad 6) \frac{a^2}{3ab-2-a+6b} - \frac{a}{3b-1}.$$

4 427. Доведіть тотожність:

$$1) \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0;$$

$$2) \frac{yz}{(x-y)(x-z)} + \frac{xz}{(y-x)(y-z)} + \frac{xy}{(z-x)(z-y)} = 1.$$

428. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення виразу

$$\frac{3x+2}{9x^2-6x+4} - \frac{18x}{27x^3+8} - \frac{1}{3x+2}$$

дорівнює нулю.

429. Знайдіть значення a і b , при яких є тотожністю рівність:

$$1) \frac{3x}{x+2} - \frac{9x+3}{3x-1} = \frac{ax+b}{3x^2+5x-2}; \quad 2) \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+3} = \frac{18}{x^2-9}.$$

430. Човен, власна швидкість якого v км/год, подолав відстань довжиною s км і повернувся назад за t год. Виразіть t через s і v , якщо швидкість течії 3 км/год. Спростіть отриманий вираз і знайдіть його значення, якщо $v = 12$, $s = 45$.

До § 5

1 431. Виконайте множення:

$$1) \frac{7}{m} \cdot \frac{m}{9}; \quad 2) \frac{p^2}{4} \cdot \frac{5}{p}; \quad 3) \frac{4}{b} \cdot \frac{b^3}{3}; \quad 4) \frac{c}{5} \cdot \frac{10}{c^2}.$$

2 432. Подайте вираз у вигляді дробу:

$$1) \frac{4}{15m^2} \cdot \frac{5m}{16}; \quad 2) \frac{t^3}{15} \cdot \frac{20}{tk}; \quad 3) -\frac{24m}{5a^2} \cdot \frac{15a}{8m^3};$$

$$4) -12x \cdot \left(-\frac{p}{16x^2}\right); \quad 5) 15m^2n \cdot \frac{7}{25m^3n}; \quad 6) \frac{7c^3}{12a^8} \cdot \left(-\frac{8a^5}{21c}\right).$$

433. Спростіть вираз:

1) $\frac{x^2 - 3x}{7} \cdot \frac{21}{x^2 - 9}$;

2) $-\frac{3x - y}{6x + 6} \cdot \frac{8x + 8}{y - 3x}$;

3) $\frac{a^2 - 2a + 1}{15m^2} \cdot \frac{5m}{a^2 - 1}$;

4) $\frac{c^2 + 2c}{12ab} \cdot \frac{20a^2b}{c^2 + 4c + 4}$.

434. Піднесіть до степеня:

1) $\left(\frac{c}{2m}\right)^3$;

2) $\left(-\frac{p}{a^2}\right)^3$;

3) $\left(-\frac{3a^3}{b^2}\right)^4$;

4) $\left(-\frac{t^2c^3}{p^{10}}\right)^8$.

435. Виконайте дію:

1) $\frac{a^7 + a^5}{a^6 - a^4} \cdot \frac{a^6 - a^8}{a^3 + a^5}$;

2) $-\frac{a^2 - 25}{a^2 - 4b^2} \cdot \left(-\frac{a + 2b}{2a - 10}\right)$;

3) $\frac{5c^5 - 3c^4}{c^3 - 8} \cdot \frac{2c - 4}{3c^2 - 5c^3}$;

4) $(a^2 + 4a + 4) \cdot \left(-\frac{4}{10 + 5a}\right)$.

3 436. Подайте вираз у вигляді дробу:

1) $\left(-\frac{25x^2y^3}{9t}\right)^2 \cdot \left(\frac{3t^4}{5xy^2}\right)^3$;

2) $\frac{(a - b)^3}{a + b} \cdot \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - 2ab + b^2}$.

4 437. Виконайте множення:

$$\frac{x^2 + (a + b)x + ab}{x^2 - (a - c)x - ac} \cdot \frac{x^2 - c^2}{x^2 - a^2}$$

438. Доведіть, що значення виразу

$$\frac{0,5x^2 + 2}{0,5x^2 - x + 2} \cdot (2 - x) \cdot \frac{4 + 0,5x^3}{8 - 0,5x^4}$$

не залежить від будь-яких допустимих значень змінної.

439. Доведіть, що значення виразу

$$\frac{a^2 - ab + ac - bc}{a^2 + ab - ac - bc} \cdot \frac{a^2 + bc - ab - ac}{a^2 + bc + ab + ac}$$

при всіх допустимих значеннях змінних є невід'ємним.

До § 6

1 440. Виконайте ділення:

1) $\frac{c}{3} : \frac{a}{2}$;

2) $\frac{p}{4} : \frac{c}{17}$;

3) $\frac{3}{a} : \frac{7}{a}$;

4) $\frac{5}{m^2} : \frac{3}{m}$.

2 441. Спростіть вираз:

$$1) \frac{12a}{5b^2} : \frac{16a}{15b}; \quad 2) -\frac{7m^2}{n^2} : \frac{21m}{n^3}; \quad 3) -\frac{5a^3}{4b^2} : (-10a^2);$$

$$4) 20m^2n : \left(-\frac{4m^3}{p}\right); \quad 5) \frac{5c^2}{9m^3} : \frac{25c^3}{81m}; \quad 6) -\frac{22x^2}{39a} : \left(-\frac{33x^3}{26a^4}\right).$$

442. Виконайте дію:

$$1) \frac{ax - xy}{a} : \frac{a^2 - ay}{x}; \quad 2) \frac{a^2 - b^2}{5a} : \frac{3a + 3b}{10a^2};$$

$$3) \frac{x^2 - 36}{a - 2b} : \frac{x^2 + 12x + 36}{2b - a}; \quad 4) \frac{3a - a^2}{a^2 - 4a + 4} : \frac{3 - a}{4 - 2a}.$$

3 443. Подайте вираз у вигляді дробу:

$$1) \frac{27 + x^3}{81 - x^4} : \frac{x^2 - 3x + 9}{x^2 + 9};$$

$$2) \frac{(10x - 4y)^2}{100} : (2,5x^2 - 0,4y^2).$$

444. Подайте дріб $\frac{\frac{a^2 + 5a}{a^2 - 9}}{a^2 - 25}$ у вигляді раціонального дробу.

4 445. Доведіть, що значення виразу

$$\frac{2x^3 + 2y^3}{xy - x^2} : \frac{x^3 - x^2y + xy^2}{x^2 - y^2}$$

при всіх допустимих значеннях змінної набуває лише додатних значень.

446. Обчисліть значення виразу

$$\frac{27a^3 - 64b^3}{b^2 - 4} : \frac{9a^2 + 12ab + 16b^2}{b^2 + 4b + 4},$$

якщо $a = 4$; $b = 3$.

447. Доведіть тотожність:

$$\frac{a^2 - 16}{a^2 - ab + 5a - 5b} : \frac{a^2 + 5a + 4}{a^2 - ab + a - b} = \frac{a - 4}{a + 5}.$$

До § 7

2 448. Виконайте дії:

$$1) \left(\frac{2a}{2a-1} + 1 \right) \cdot \frac{6a-3}{4a^2-a}; \quad 2) \left(m + \frac{m^2}{3-m} \right) : \frac{m+3}{m-3};$$

$$3) \left(\frac{a}{a-b} - \frac{a}{a+b} \right) : \frac{ab}{a+b}; \quad 4) \left(p - \frac{p^2-3}{p+1} \right) \cdot \frac{p^2-1}{p+3}.$$

449. Доведіть тотожність:

$$1) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \right) : (a+b) = \frac{a+b}{ab};$$

$$2) \frac{m-n}{mn} : \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) = \frac{mn}{m+n}.$$

3 450. Спростіть вираз:

$$1) \left(\frac{1}{a+b} - \frac{a}{b^2+ab} \right) \cdot \left(\frac{b^2}{a^3-ab^2} - \frac{b}{a^2-ab} \right);$$

$$2) \left(\frac{6a+1}{a-3} + \frac{6a-1}{a+3} \right) : \frac{2a^2+1}{a-3}.$$

451. Обчисліть значення виразу

$$\left(\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} \right) : \left(\frac{a+b}{b} - \frac{a-b}{b} \right),$$

якщо $a = 4$; $b = 3$.

452. Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення виразу від значення змінної не залежить:

$$1) \frac{2x}{x+3} + (x-3)^2 \left(\frac{2}{x^2-6x+9} + \frac{1}{9-x^2} \right);$$

$$2) \left(\frac{3}{4m^2-9} - \frac{2m}{4m^2-12m+9} \right) \cdot \frac{8m^3-18m}{4m^2+9} + \frac{3}{2m-3}.$$

453. Доведіть тотожність:

$$1) \left(\frac{a}{a-3} + \frac{10}{a-3} + \frac{25}{a^2-3a} \right) : \left(\frac{5}{a^2} + \frac{2}{a} + \frac{1}{5} \right) = \frac{5a}{a-3};$$

$$2) \left(\frac{a-1}{a^2-a+1} - \frac{4a-5}{a^3+1} \right) : \frac{2-a}{4a^2-4a+4} = \frac{4(2-a)}{a+1}.$$

4 454. Відомо, що $x^2 + \frac{1}{x^2} = 23$. Знайдіть значення виразу $x + \frac{1}{x}$.

455. Спростіть вираз:

$$\left(\frac{4}{x^2 - 6x} - \frac{2}{6 - x} + 1 \right) \left(\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{2}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} \right).$$

456. Доведіть, що вираз

$$\frac{x^2}{x^2 + 4x + 4} \cdot \frac{8x^2 - 32}{x^3 - 2x^2} + \frac{x^5 - 8x^2}{x} : (x^2 - 4)$$

при всіх допустимих значеннях змінної набуває лише додатних значень.

457. Доведіть, що вираз

$$\left(\frac{3m + 2}{3m^2 + 1} - \frac{18m^3 - m - 9}{9m^4 - 1} + \frac{3m - 2}{3m^2 - 1} \right) : \frac{m^2 + 10m + 25}{9m^4 - 1}$$

для всіх $m < -5$ набуває лише від'ємних значень.

458. Чи може значення виразу

$$\left(\frac{1}{x^2 - xy} - \frac{3y^2}{x^4 - xy^3} - \frac{y}{x^3 + x^2y + xy^2} \right) \left(y + \frac{x^2}{x + y} \right)$$

при деяких значеннях змінних x і y дорівнювати нулю?

До § 8

1 459. Чи є число 3 коренем рівняння:

$$1) \frac{x}{x+2} = 0; \quad 2) \frac{x-3}{x+1} = 0; \quad 3) \frac{x+2}{x-3} = 0; \quad 4) \frac{x^2-9}{x} = 0?$$

2 460. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{3x-9}{2-x} = 0; \quad 2) \frac{2x-4}{2-x} = 0; \quad 3) \frac{x}{x+3} - 2 = 0;$$

$$4) \frac{x}{x-3} = \frac{2}{5}; \quad 5) \frac{x^2-x}{x+2} = \frac{x^2-8}{x+2}; \quad 6) \frac{4x^2-1}{x+1} = 4x.$$

461. Яке одне й те саме число треба додати до чисельника і до знаменника дробу $\frac{5}{12}$, щоб отримати дріб $\frac{1}{2}$?

3 462. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{2x-1}{3x+1} - \frac{2x+1}{3x-5} = 0;$$

$$2) 4 + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2-x};$$

$$3) \frac{8}{3x-3} + \frac{2+x}{x-1} = \frac{5}{2-2x} - \frac{5}{18};$$

$$4) \frac{2x}{x^2-1} = \frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1}.$$

463. Катер долає 80 км за течією річки за той самий час, що й 64 км проти течії. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год.

4 464. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{5}{(3x-1)^2} + \frac{1}{(3x+1)^2} = \frac{6}{9x^2-1};$$

$$2) \frac{|4x+3|}{x-1} = \frac{7}{x-1}.$$

465. Два робітники, працюючи разом, можуть виконати деяку роботу за 8 днів. Перший робітник може виконати цю роботу самостійно вдвічі швидше, ніж другий. За скільки днів кожний з робітників може виконати цю роботу самостійно?

466. Розв'яжіть рівняння, де x – змінна, a і b – відмінні від нуля числа:

$$1) \frac{a}{x} = 5;$$

$$2) \frac{a}{x} - \frac{b}{x} = 2.$$

До § 9

1 467. Замініть дробом степінь із цілим від'ємним показником:

$$1) 8^{-3};$$

$$2) c^{-1};$$

$$3) (3m)^{-2};$$

$$4) (a+2)^{-5}.$$

468. Замініть дріб степенем із цілим від'ємним показником:

$$1) \frac{1}{8^2};$$

$$2) \frac{1}{c};$$

$$3) \frac{1}{(ab)^3};$$

$$4) \frac{1}{(1-m)^4}.$$

2 469. Обчисліть:

$$1) 9^{-2};$$

$$2) 4^{-1};$$

$$3) (-5)^{-1};$$

$$4) \left(\frac{1}{8}\right)^{-2};$$

$$5) 0,1^{-3};$$

$$6) \left(2\frac{1}{7}\right)^{-1};$$

$$7) 0,25^{-4};$$

$$8) (-2,5)^{-3}.$$

470. Обчисліть значення виразу:

$$1) 100x^{-2}, \text{ якщо } x = 1; 10; 100; \quad 2) a^{-3}b, \text{ якщо } a = 4; b = 8.$$

471. Знайдіть значення виразів a^n і $-a^n$, якщо:

- 1) $a = -1$; $n = 8$; 2) $a = 5$; $n = -2$.

3 472. Не виконуючи обчислень, порівняйте:

- 1) 7^{-3} і $(-7)^3$; 2) $(-1,2)^0$ і $(-5)^{-5}$; 3) $(-13)^{-4}$ і $(-13)^4$;
 4) $(-12)^6$ і 12^{-6} ; 5) -14^{-2} і $(-14)^{-2}$; 6) $(-9)^{-5}$ і -9^{-5} .

473. Обчисліть:

- 1) $-0,25^{-2} : (-4^3)$; 2) $0,02 \cdot (-0,5)^{-3}$;
 3) $0,4^{-2} \cdot \left(-\frac{5}{8}\right)^{-1}$; 4) $(-1,8)^0 - 4^{-1} \cdot 0,05^{-2}$.

474. Подайте вираз у вигляді дробу:

- 1) $(1 + a^{-3})(1 + a)^{-2}$; 2) $\left(\frac{1}{x^{-1}} - \frac{1}{y^{-1}}\right) \cdot (y - x)^{-1}$.

4 475. Обчисліть $\frac{0,6^{-4} \cdot \left(1\frac{2}{3}\right)^{-6}}{(0,36)^{-5} \cdot \left(2\frac{7}{9}\right)^{-6}}$.

476. Розв'яжіть рівняння $\left(\frac{x+1}{x}\right)^{-1} + \left(\frac{x-1}{2x}\right)^{-1} = 3$.

477. Спростіть вираз $\left(\frac{1}{b^{-8}} - \frac{1}{a^{-8}}\right) \cdot \left(\frac{a^{-8} + b^{-8}}{a^{-16} - b^{-16}}\right)$.

До § 10

1 478. Подайте у вигляді степеня з основою a :

- 1) a^3a^{-5} ; 2) $a^8a^{-7}a^{-2}$; 3) $a^7 : a^{-3}$;
 4) $a^{-5} : a^{-4}$; 5) $(a^2)^{-6}$; 6) $(a^{-3})^{-5}$.

2 479. Обчисліть:

- 1) $4^{-5} \cdot 4^6$; 2) $2^{-7} \cdot 2^4$; 3) $3^{-9} : 3^{-7}$;
 4) $5^{17} : 5^{19}$; 5) $((0,3)^{-1})^{-2}$; 6) $\left(\left(\frac{1}{6}\right)^{-9}\right)^0$.

480. Спростіть вираз:

- 1) $12a^{-2}b \cdot \frac{1}{3}ab^{-3} \cdot \frac{3}{4}a^{-3}b^2$; 2) $\left(-\frac{7}{12}x^{-2}\right) \cdot (-6x^3) \cdot \frac{1}{7}x^{-8}$.

481. Подайте вираз x^{-12} , де $x \neq 0$, у вигляді степеня з основою:

- 1) x^2 ; 2) x^{-3} .

3 482. Знайдіть значення виразу

$$\frac{9}{28} x^{-2} y^7 \cdot \frac{14}{15} x^7 y^{-2} \cdot (-10x^{-5} y^{-6}),$$

якщо $x = -1,19$; $y = -0,1$.

483. Спростіть вираз:

1) $(-3p^{-3}ca^{-2})^{-2} \cdot (0,1pc^{-2}a)^2$; 2) $\left(\frac{1}{4}a^{-4}b^{-2}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^{-3}}{4b}\right)^{-3}$.

484. Доведіть тотожність $(a^{-2} - a^{-1} + 1) : (a^{-2} + a) = \frac{1}{a + 1}$.

4 485. Подайте вираз $x^3 + 5 + x^{-5}$ у вигляді добутку двох множників, один з яких дорівнює:

- 1) x ; 2) x^{-1} ; 3) x^{-3} .

486. Доведіть, що при будь-якому цілому значенні k справджується рівність:

1) $3 \cdot 7^k + 4 \cdot 7^k = 7^{k+1}$; 2) $5 \cdot 4^k - 4^k = 4^{k+1}$.

До § 11

1 487. Які із чисел записано у стандартному вигляді? Для чисел, записаних у стандартному вигляді, назвіть порядок числа:

- 1) $3,7 \cdot 108$; 2) $0,29 \cdot 10^{11}$; 3) $2,94$;
 4) $10,94$; 5) $1,135 \cdot 10^{-11}$; 6) $0,311$;
 7) $1,02 \cdot 10^{15}$; 8) $1,02 \cdot 15^{10}$.

2 488. Подайте число у стандартному вигляді:

- 1) 130 000; 2) 783,5; 3) 0,0012; 4) 0,001002003.

489. Виконайте дію із числами, поданими у стандартному вигляді:

- 1) $(2,7 \cdot 10^8) \cdot (5 \cdot 10^{-5})$; 2) $(9,6 \cdot 10^{-8}) : (3,2 \cdot 10^{-12})$;
 3) $2,7 \cdot 10^4 + 3,1 \cdot 10^4$; 4) $3,42 \cdot 10^{-5} - 2,11 \cdot 10^{-5}$.

3 490. Площа басейну річки Дніпро складає $5,04 \cdot 10^5$ км², а площа басейну річки Південний Буг – 12,6 % від площі басейну Дніпра. Знайдіть площу басейну річки Південний

Буг та подайте її у стандартному вигляді $a \cdot 10^n$, округливши число a до сотих.

4 491. Виразіть час у системі СІ і результат запишіть у стандартному вигляді:

- 1) 1 година; 2) 1 доба; 3) 1 місяць (30 днів);
4) 1 рік (365 днів); 5) 1 сторіччя.

До § 12

1 492. Які з функцій задають обернену пропорційність? У яких координатних кутах лежать їх графіки:

- 1) $y = \frac{x^2}{4}$; 2) $y = \frac{4}{x^2}$; 3) $y = \frac{x}{4}$; 4) $y = \frac{4}{x}$;
5) $y = -\frac{4}{x}$; 6) $y = -\frac{x}{4}$; 7) $y = 4x$; 8) $y = -4x$?

2 493. Обернену пропорційність задано формулою $y = -\frac{16}{x}$. Не будуючи її графіка, знайдіть:

- 1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює -8 ; 2 ; -5 ;
2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 4 ; $-0,5$; $2,5$.

494. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = -\frac{10}{x}$; 2) $y = \frac{2}{x}$, де $-2 \leq x \leq 4$, $x \neq 0$.

3 495. Точка $A(-3; 4)$ належить графіку оберненої пропорційності. Чи належить цьому графіку точка:

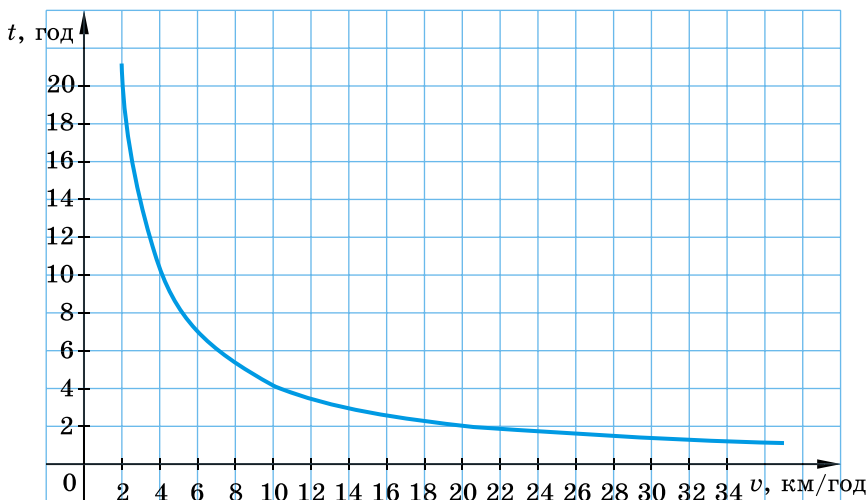
- 1) $B(1; 12)$; 2) $C(2; -6)$?

496. Прямокутний паралелепіпед, сторони основи якого дорівнюють x см і y см, має висоту 10 см та об'єм 120 см³. Виразіть формулою залежність y від x . Чи є ця залежність оберненою пропорційністю? Якою є область визначення функції? Побудуйте її графік.

497. На малюнку 7 подано графік залежності часу, що витрачається на подолання відстані від пункту A до пункту B , від швидкості. За допомогою графіка з'ясуйте:

- 1) скільки потрібно часу, щоб подолати відстань від A до B , якщо швидкість руху складатиме 10 км/год; 20 км/год;

- 2) з якою швидкістю треба рухатися, щоб дістатися з A до B за 2 год; 8 год;
 3) якою є відстань від A до B .



Мал. 7

498. Не будуючи графіка функції $y = \frac{4}{x}$, знайдіть ті його точки, координати яких між собою рівні.

499. Не будуючи графіка функції $y = -\frac{9}{x}$, знайдіть ті його точки, координати яких є протилежними числами.

500. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{30x - 18x^2}{3x^3 - 5x^2};$$

$$2) y = \frac{4 + x}{x^2 + x} + \frac{3}{x + 1}.$$



Розділ 2

Квадратні корені. Дійсні числа

У цьому розділі ви:

- **ознайомитесь** з поняттями арифметичного квадратного кореня, множини та підмножини; функціями $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$;
- **навчитесь** застосовувати означення арифметичного квадратного кореня та його властивості для обчислення значень і спрощення виразів, розв'язування рівнянь тощо; будувати графіки функцій $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$.

§ 13. ФУНКЦІЯ $y = x^2$, ЇЇ ГРАФІК І ВЛАСТИВОСТІ

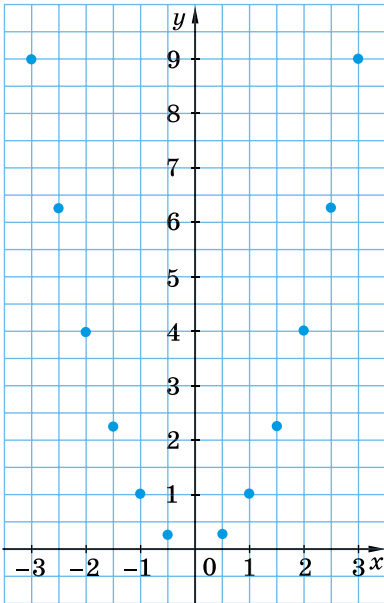
Приклад 1. Нехай сторона квадрата дорівнює a см. Тоді його площу (у см^2) можна знайти за формулою $S = a^2$. У цій формулі кожному додатному значенню змінної a відповідає єдине значення змінної S .

Якщо позначимо незалежну змінну через x , а залежну – через y , то матимемо функцію, яку задано формулою $y = x^2$. У цій формулі змінна x може набувати будь-яких значень (додатних, від'ємних, значення нуля).

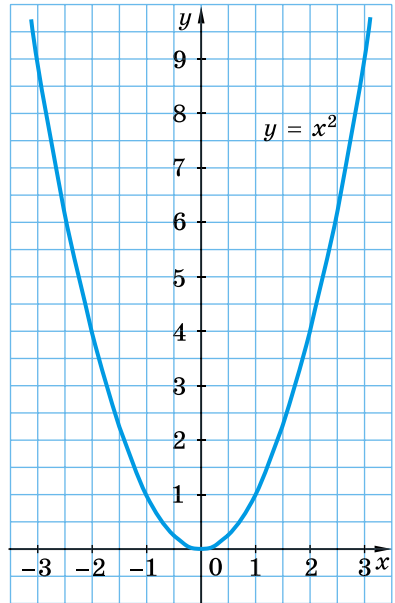
Складемо таблицю значень функції $y = x^2$ для кількох значень аргументу:

| | | | | | | | | | | | | | |
|-----|----|------|----|------|----|------|---|------|---|------|---|------|---|
| x | -3 | -2,5 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
| y | 9 | 6,25 | 4 | 2,25 | 1 | 0,25 | 0 | 0,25 | 1 | 2,25 | 4 | 6,25 | 9 |

Позначимо на координатній площині точки $(x; y)$, координати яких записано в таблиці (мал. 8). Якби на цій самій площині позначили більшу кількість точок, координати яких задовольняють формулу $y = x^2$, а потім з'єднали їх плавною лінією, то одержали б графік функції $y = x^2$ (мал. 9). Графік цієї функції називають **параболою**, точку $(0; 0)$ – **вершиною параболу**. Вершина розбиває параболу на дві частини, кожна з яких називають **гілкою параболу**.



Мал. 8



Мал. 9

Сформулюємо деякі *властивості функції* $y = x^2$.



1. *Область визначення функції складається з усіх чисел.*
2. *Область значень функції складається з усіх невід'ємних чисел, тобто $y \geq 0$.*

Справді, оскільки $x^2 \geq 0$ для всіх значень x , то $y \geq 0$.

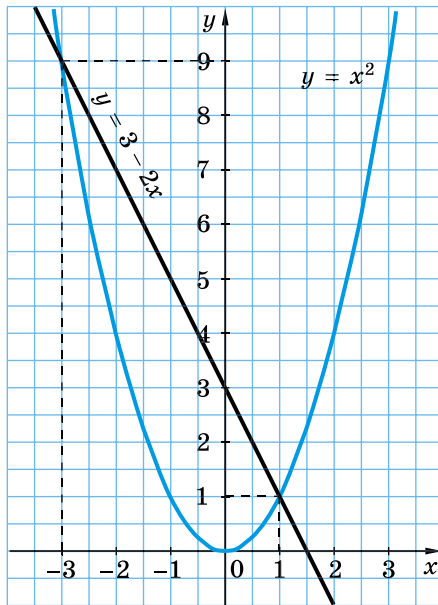


3. *Графіком функції є парабола з вершиною в точці $(0; 0)$, гілки якої напрямлені вгору. Усі точки графіка, крім вершини параболи, лежать вище осі абсцис.*
4. *Протилежним значенням аргументу відповідає одне й те саме значення функції.*

Дійсно, це слідує з того, що $(-x)^2 = x^2$ при будь-якому значенні x .

Приклад 2. Розв'яжіть графічно рівняння $x^2 = 3 - 2x$.

Розв'язання. Графік функції $y = x^2$ – парабола, а функції $y = 3 - 2x$ – пряма, що проходить через точки $(0; 3)$ і $(2; -1)$. Побудуємо графіки цих функцій в одній системі координат (мал. 10). Вони перетинаються в двох точках, абсциси яких: $x = -3$ і $x = 1$.



Мал. 10

Перевіримося, що числа -3 і 1 дійсно є коренями рівняння:

1) для $x = -3$: $x^2 = (-3)^2 = 9$ і $3 - 2x = 3 - 2 \cdot (-3) = 9$;

2) для $x = 1$: $x^2 = 1^2 = 1$ і $3 - 2x = 3 - 2 \cdot 1 = 1$.

Отже, -3 і 1 – корені рівняння $x^2 = 3 - 2x$.

Відповідь. -3 ; 1 .

Приклад 3. Між якими послідовними цілими числами міститься корінь рівняння $\frac{6}{x} = x^2$?

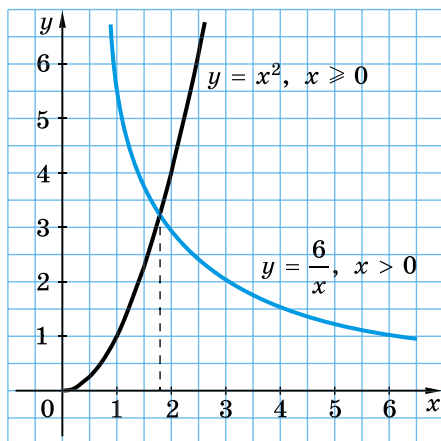
Розв'язання. Розв'яжемо рівняння графічно, побудувавши графіки функцій $y = \frac{6}{x}$ і $y = x^2$ в одній системі координат.

Оскільки $x^2 \geq 0$ для всіх значень x , то має бути і $\frac{6}{x} \geq 0$.

Звідки $x > 0$. Тому розглянемо графіки даних функцій тільки для $x > 0$. Це гілка гіперболи і гілка параболи, що лежать у першій координатній чверті (мал. 11).

Графіки перетинаються в одній точці, абсциса якої є коренем рівняння та лежить між числами 1 і 2 .

Отже, корінь рівняння $\frac{6}{x} = x^2$ міститься між числами 1 і 2 .



Мал. 11

Відповідь. Між числами 1 і 2.



1. Як називають графік функції $y = x^2$?
2. Сформулюйте властивості функції $y = x^2$.



Початковий рівень

501. (Усно.) Прямою, гіперболою чи параболою є графік функції:

- | | | |
|------------------------|-------------------|-------------------------|
| 1) $y = \frac{6}{x}$; | 2) $y = 6x$; | 3) $y = 6$; |
| 4) $y = x^2$; | 5) $y = 2x - 3$; | 6) $y = -\frac{8}{x}$? |

502. Для функції $y = x^2$ знайдіть значення y , яке відповідає значенням $x = -3$; 0 ; 5 .

503. Для функції $y = x^2$ знайдіть значення y , яке відповідає значенням $x = -2$; 1 ; 6 .



Середній рівень

504. За графіком функції $y = x^2$ (мал. 9) знайдіть:

- 1) значення y , що відповідає значенню $x = -2,5$; -1 ; $1,5$; 3 ;
- 2) значення x , якому відповідає значення $y = 1$; $3,5$; 9 ;
- 3) кілька значень x , при яких значення функції більші за 2 ; менші від 2 .

505. Використовуючи графік функції $y = x^2$ (мал. 9), знайдіть:

- 1) значення y , що відповідає значенню $x = -3; -0,5; 2,5$;
- 2) значення x , при якому значення $y = 4; 5$;
- 3) кілька значень x , при яких значення функції менше від 1; більше за 1.

506. Побудуйте графік функції $y = x^2$, якщо $-1 \leq x \leq 4$.

507. Побудуйте графік функції $y = x^2$, якщо $-2 \leq x \leq 3$.

508. Чи проходить графік функції $y = x^2$ через точку:

- 1) $A(-1; -1)$;
- 2) $B(-5; 25)$;
- 3) $C(0; 0)$;
- 4) $D(25; 5)$?

509. Чи належить графіку функції $y = x^2$ точка:

- 1) $A(-4; 16)$;
- 2) $B(16; -4)$;
- 3) $C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$;
- 4) $D(0; 2)$?



3 Достатній рівень

510. Знайдіть область значень функції $y = x^2$, якщо:

- 1) $-3 \leq x \leq 0$;
- 2) $-1 \leq x \leq 2$.

511. Порівняйте значення функції $y = x^2$, якщо:

- 1) $x = 2,7$ і $x = -2,7$;
- 2) $x = -1,9$ і $x = 1,8$;
- 3) $x = 0$ і $x = -3,2$;
- 4) $x = -1,1$ і $x = 1,2$.

512. Розв'яжіть графічно рівняння:

- 1) $x^2 = 3x$;
- 2) $x^2 = -\frac{8}{x}$.

513. Розв'яжіть графічно рівняння: 1) $x^2 = 4$; 2) $x^2 = -2x$.



4 Високий рівень

514. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \frac{x^3 + x^2}{x + 1}$;
- 2) $y = \frac{4x^2 - x^4}{4 - x^2}$.

515. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \frac{x^3}{x}$;
- 2) $y = \frac{x^2 - x^4}{1 - x^2}$.



Вправи для повторення

3 516. При яких значеннях a справджується рівність:

1) $a^2 = (-a)^2$; 2) $a^2 = |a|^2$; 3) $a^2 = -a^2$; 4) $(-a)^2 = -a^2$?

4 517. Знайдіть:

- 1) найменше значення виразу $x^2 - 19$; $18 + (x - 3)^2$;
 2) найбільше значення виразу $17 - x^2$; $-9 - (x + 7)^2$.
 При яких значеннях x досягається це значення?



Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

518. Обчисліть:

1) $25^2 + (-6)^2$; 2) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(1\frac{3}{5}\right)^2$;
 3) $0,01^2 : (-0,1)^2$; 4) $(-4)^2 \cdot (-0,5)^2$.

519. Знайдіть сторону квадрата, площа якого дорівнює:

1) 9 см^2 ; 2) $0,25 \text{ м}^2$.

520. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 16 = 0$; 2) $x^2 = \frac{4}{9}$.

521. 1) Побудуйте графіки функцій $y = x^2$ і $y = 9$ та знайдіть координати точок їх перетину.

2) Скільки точок перетину мають графіки функцій $y = x^2$ і $y = 0$?

3) Скільки точок перетину мають графіки функцій $y = x^2$ і $y = a$, де $a > 0$?

4) Скільки точок перетину мають графіки функцій $y = x^2$ і $y = a$, де $a < 0$?



Цікаві задачі для учнів неледачих



522. У ящику лежать лише чорні, білі та зелені кульки. Які б n ($n > 2$) кульок навмання не витягали з ящика, серед них обов'язково будуть біла і чорна. Яка найбільша кількість кульок може лежати в цьому ящику?



14. КВАДРАТНІ КОРЕНІ. АРИФМЕТИЧНИЙ КВАДРАТНИЙ КОРІНЬ

Якщо відомо сторону квадрата, то легко можна знайти його площу. Водночас часто доводиться розв'язувати і обернену задачу: за відомою площею квадрата знаходити його сторону.

Приклад 1. Площа квадрата дорівнює 16 см^2 . Чому дорівнює його сторона?

Розв'язання. Нехай сторона квадрата дорівнює $x \text{ см}$, тоді його площа дорівнює $x^2 \text{ см}^2$. Маємо рівняння: $x^2 = 16$. У нього два корені: числа 4 і -4 . Справді, $4^2 = 16$ і $(-4)^2 = 16$. Оскільки довжина сторони квадрата не може бути від'ємним числом, то умову задачі задовольняє лише один з коренів рівняння – число 4 . Отже, довжина сторони квадрата дорівнює 4 см .

Корені рівняння $x^2 = 16$, тобто числа, квадрати яких дорівнюють 16 , називають **квадратними коренями** із числа 16 .



Квадратним коренем із числа a називають число, квадрат якого дорівнює a .

Наприклад, квадратними коренями із числа 100 є числа 10 і -10 , бо $10^2 = 100$ і $(-10)^2 = 100$. Квадратним коренем із числа 0 є число 0 , бо $0^2 = 0$. Квадратного кореня із числа -16 ми не знайдемо, оскільки серед відомих нам чисел не існує такого числа, квадрат якого дорівнював би -16 .

Число 4 , яке є невід'ємним коренем рівняння $x^2 = 16$, називають **арифметичним квадратним коренем** із числа 16 .



Арифметичним квадратним коренем із числа a називають таке невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a .

Арифметичний квадратний корінь із числа a позначають \sqrt{a} ($\sqrt{\quad}$ – знак арифметичного квадратного кореня, або радикал). Вираз, що стоїть під знаком кореня, називають **підкореневим виразом**. Запис \sqrt{a} читають так: **квадратний корінь із числа a** (слово **арифметичний** під час читання домовилися не вживати, оскільки в школі розглядають лише арифметичні корені).

Приклад 2. 1) $\sqrt{81} = 9$, оскільки $9 \geq 0$ і $9^2 = 81$;

2) $\sqrt{0} = 0$, оскільки $0 \geq 0$ і $0^2 = 0$;

3) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, оскільки $\frac{2}{3} \geq 0$ і $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$;

$$4) \sqrt{1\frac{24}{25}} = \sqrt{\frac{49}{25}} = \frac{7}{5}, \text{ оскільки } \frac{7}{5} \geq 0 \text{ і } \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} = 1\frac{24}{25}.$$

Узагалі рівність $\sqrt{a} = x$ є правильною, якщо виконуються дві умови: 1) $x \geq 0$; 2) $x^2 = a$.

Оскільки $x^2 \geq 0$ для всіх значень змінної x , то $a \geq 0$.



Вираз \sqrt{a} не має змісту, якщо $a < 0$.

Наприклад, не мають змісту вирази $\sqrt{-1}$; $\sqrt{-2,9}$.

Дію знаходження арифметичного значення квадратного кореня називають **добуванням квадратного кореня**. З невеликих чисел квадратний корінь бажано добувати усно. Добувати квадратний корінь з більших чисел допоможе таблиця квадратів двоцифрових натуральних чисел на форзаці або калькулятор.

Приклад 3. Знайдіть значення кореня $\sqrt{4096}$.

Розв'язання. За таблицею квадратів двоцифрових натуральних чисел маємо $64^2 = 4096$. Тому $\sqrt{4096} = 64$.

Приклад 4. Обчисліть $\sqrt{37^2 - 12^2}$.

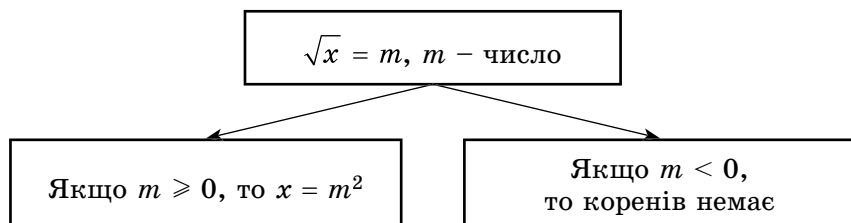
Розв'язання. Спочатку треба знайти значення виразу $37^2 - 12^2$, а потім добути з нього корінь:

$$\sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{1369 - 144} = \sqrt{1225} = 35.$$

Відповідь. 35.

Розглянемо рівняння $\sqrt{x} = t$, де t – деяке число. Якщо $t \geq 0$, то з означення квадратного кореня слідує, що $x = t^2$. Якщо ж $t < 0$, то рівняння не має розв'язків, оскільки за означенням число \sqrt{x} – невід'ємне.

Систематизуємо дані про розв'язки рівняння $\sqrt{x} = t$ за допомогою схеми:



Приклад 5. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} = 7$; 2) $\sqrt{x} = -3$; 3) $\sqrt{2x-1} = 5$.

Розв'язання.

1) $x = 7^2$; 2) розв'язків немає; 3) $2x - 1 = 5^2$;
 $x = 49$; $2x = 26$;
 $x = 13$.

Відповідь. 1) 49; 2) розв'язків немає; 3) 13.



1. Що називають квадратним коренем із числа a ?
2. Що називають арифметичним квадратним коренем із числа a ?
3. При яких значеннях a вираз \sqrt{a} не має змісту?
4. Чи має розв'язки рівняння $\sqrt{x} = m$, якщо $m \geq 0$, $m < 0$, і якщо має, то які?



1 Початковий рівень

523. (Усно). Чи існує квадратний корінь із числа:

1) 9; 2) 16; 3) -4; 4) 0?

524. Знайдіть значення квадратного кореня із числа:

1) 4; 2) 25.

525. Знайдіть значення квадратного кореня із числа:

1) 0; 2) 1; 3) 36.

526. (Усно). Чи має зміст вираз:

1) $\sqrt{1}$; 2) $\sqrt{0}$; 3) $\sqrt{-4}$?

527. Чи має зміст вираз:

1) $\sqrt{4}$; 2) $\sqrt{-36}$?

528. Доведіть, що число:

- 1) 2 є арифметичним квадратним коренем із числа 4;
- 2) -2 не є арифметичним квадратним коренем із числа 4;
- 3) 0,1 є арифметичним квадратним коренем із числа 0,01;
- 4) 0,2 не є арифметичним квадратним коренем із числа 0,4.

529. Доведіть, що:

1) $\sqrt{169} = 13$; 2) $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$.



Середній рівень

530. Обчисліть:

- 1) $\sqrt{16}$; 2) $\sqrt{49}$; 3) $\sqrt{0,25}$; 4) $\sqrt{6400}$;
 5) $\sqrt{0,09}$; 6) $\sqrt{\frac{1}{121}}$; 7) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; 8) $\sqrt{20\frac{1}{4}}$.

531. Обчисліть:

- 1) $\sqrt{25}$; 2) $\sqrt{36}$; 3) $\sqrt{0,16}$; 4) $\sqrt{4900}$;
 5) $\sqrt{0,04}$; 6) $\sqrt{\frac{1}{64}}$; 7) $\sqrt{1\frac{11}{25}}$; 8) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$.

532. Чи правильна рівність:

- 1) $\sqrt{900} = 30$; 2) $\sqrt{4} = -2$;
 3) $\sqrt{0,9} = 0,3$; 4) $\sqrt{0,64} = 0,8$?

533. За допомогою таблиці квадратів двоцифрових натуральних чисел або калькулятора знайдіть:

- 1) $\sqrt{1296}$; 2) $\sqrt{9409}$; 3) $\sqrt{2916}$; 4) $\sqrt{30,25}$.

534. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\sqrt{64} + \sqrt{25}$; 2) $\sqrt{9} \cdot \sqrt{0,36}$; 3) $2\sqrt{100} - \sqrt{144}$;
 4) $\sqrt{81} : \sqrt{0,01}$; 5) $-5\sqrt{0,64} + 3,9$; 6) $\sqrt{5^2 - 25}$;
 7) $\sqrt{6^2 + 8^2}$; 8) $\sqrt{2(0,2^2 + 0,46)}$.

535. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\sqrt{49} + \sqrt{9}$; 2) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{100}$; 3) $2\sqrt{121} - \sqrt{81}$;
 4) $\sqrt{64} : \sqrt{0,25}$; 5) $-5\sqrt{0,36} + 2,8$; 6) $\sqrt{10^2 - 8^2}$;
 7) $\sqrt{3^2 + 4^2}$; 8) $\sqrt{0,3^2 - 0,09}$.

536. Обчисліть значення виразу:

- 1) $\sqrt{12 + a}$, якщо $a = 4; -8; -12$;
 2) $\sqrt{m + n}$, якщо $m = 0,09; n = 0,07$;
 3) $x + 4\sqrt{x}$, якщо $x = 49; 121$;
 4) $3\sqrt{b} - b$, якщо $b = 1,96; 0,04$.

537. Обчисліть значення виразу: 1) $\sqrt{16 - b}$, якщо $b = -9; 15$;

- 2) $2\sqrt{m} - m$, якщо $m = 1,69; 0,49$.

538. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sqrt{x} = 2$; 2) $\sqrt{x} = 0$; 3) $\sqrt{x} = -2$;
 4) $\sqrt{x} - 3 = 0$; 5) $2\sqrt{x} = 8$; 6) $\frac{1}{3}\sqrt{x} = 2$.

539. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sqrt{x} = 1$; 2) $\sqrt{x} = -3$; 3) $\sqrt{x} - 5 = 0$; 4) $3\sqrt{x} = 21$.



3 Достатній рівень

540. Чи має зміст вираз:

- 1) $\sqrt{12 \cdot 14 - 13^2}$; 2) $\sqrt{2009^2 - 2008^2}$; 3) $\sqrt{1000^2 - 1001^2}$?

541. При яких значеннях x має зміст вираз:

- 1) $\frac{5}{\sqrt{x}}$; 2) $\sqrt{x^2}$; 3) $\sqrt{x^5}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{-x}}$?

542. При яких значеннях y має зміст вираз:

- 1) $\sqrt{2y}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{y^3}}$; 3) $\sqrt{y^6}$; 4) $\sqrt{-y}$?

543. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $3\sqrt{x} + 7 = 0$; 2) $2\sqrt{\frac{x}{8}} - 4 = 0$;
 3) $\frac{16}{\sqrt{x+3}} = 4$; 4) $7\sqrt{2x-5} - 14 = 0$.

544. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{1}{2}\sqrt{3x} - 3 = 0$; 2) $2\sqrt{\frac{x}{3}} + 6 = 0$;
 3) $\frac{14}{\sqrt{2x}} = 28$; 4) $2\sqrt{2x+7} - 6 = 0$.



4 Високий рівень

545. При яких значеннях a має зміст вираз:

- 1) $\sqrt{-a^2}$; 2) $\sqrt{-(a+3)^2}$;
 3) $\sqrt{a^{10}+1}$; 4) $\frac{\sqrt{a}}{a-3}$?

546. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{2x - 1} = 3; \quad 2) \sqrt{5 + \sqrt{x}} = 3; \quad 3) \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}} = 2.$$

547. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{2x + 3} = 5; \quad 2) \sqrt{9 + \sqrt{x}} = 4.$$



Вправи для повторення

548. Спростіть вираз:

$$\frac{4a}{a + 2} - (a - 2)^2 \cdot \left(\frac{3}{(a - 2)^2} + \frac{2}{a^2 - 4} \right).$$

549. Розв'яжіть рівняння з двома змінними:

$$1) x^2 - 6x + 9 + y^2 = 0; \quad 2) |x + 2| + y^2 + 2y + 1 = 0.$$



Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

550. Подайте у вигляді звичайного дробу або мішаного числа:

$$1) 0,3; \quad 2) 0,25; \quad 3) 1,2; \quad 4) 2,5.$$

551. Подайте десятковим дробом:

$$1) \frac{1}{2}; \quad 2) \frac{3}{4}; \quad 3) 2\frac{1}{5}; \quad 4) 3\frac{1}{4}.$$

552. Запишіть звичайний дріб у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу:

$$1) \frac{2}{3}; \quad 2) \frac{3}{11}; \quad 3) \frac{7}{9}; \quad 4) \frac{5}{6}.$$



Цікаві задачі для учнів неледачих



553. Чи існують такі прості числа x , y , z і t , для яких має місце рівність

$$xyzt + 4 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2?$$



15. МНОЖИНА. ПІДМНОЖИНА. ЧИСЛОВІ МНОЖИНИ. РАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА. ІРРАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА. ДІЙСНІ ЧИСЛА

Поняття множини є одним з основних понять математики. Під поняттям *множини* будемо розуміти сукупність об'єктів, що мають спільну природу (або об'єднаних за спільною ознакою), самі об'єкти при цьому будемо називати *елементами множини*.

Як правило, множини позначають великими латинськими літерами. Якщо, наприклад, множина A складається із чисел 1, 2, 3, а множина B – зі знаків @ і !, то це записують так: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{@, !\}$. Числа 1, 2, 3 – елементи множини A , а знаки @ і ! – елементи множини B . Той факт, що число 1 належить множині A , записують за допомогою вже відомого нам символу \in , а саме: $1 \in A$. Той факт, що число 1 не належить множині B , записують так: $1 \notin B$.

Множини, кількість елементів яких можна виразити натуральним числом, називають *скінченними*.

Множину, яка не містить жодного елемента, називають *порожньою множиною*. Її позначають символом \emptyset . Так, наприклад, порожньою множиною є множина коренів рівняння $|x| = -1$.

Множини, кількість елементів яких не можна виразити натуральним числом і які не є порожніми, називають *нескінченними*.

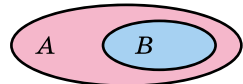


Якщо кожен елемент множини B є елементом множини A , то кажуть, що множина B є підмножиною множини A .

Записують це так: $B \subset A$. Схематичну ілюстрацію цього факту подано на мал. 12.

Приклад 1. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{4, 5\}$. Тоді множина B є підмножиною множини A , тобто $B \subset A$. Множина C не є підмножиною множини A , оскільки множина C містить елемент – число 5, що не є елементом множини A .

Вважають, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини, тобто $\emptyset \subset A$.



Мал. 12



Цілі числа і дробові числа утворюють множину *раціональних чисел*.

Множину натуральних чисел позначають літерою N , множину цілих чисел – літерою Z , множину раціональних чисел – літерою Q .

Можна стверджувати, що $5 \in N$, $\frac{2}{3} \notin Z$, $-7 \in Z$, $@ \notin Q$.

N , Z і Q є нескінченними множинами.



Будь-яке раціональне число можна подати у вигляді $\frac{m}{n}$, де m – ціле число, n – натуральне число.

Наприклад,

$$9 = \frac{9}{1}; \quad 2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}; \quad -5 = \frac{-5}{1}; \quad -0,2 = \frac{-2}{10} = \frac{-1}{5}.$$

Раціональні числа можна також подати у вигляді десяткового дробу. Для цього достатньо чисельник дробу поділити на його знаменник. Наприклад,

$$\frac{3}{8} = 0,375; \quad \frac{-5}{4} = -1,25; \quad \frac{8}{33} = 0,242424\dots = 0,(24).$$

В останньому випадку ми отримали нескінченний десятковий періодичний дріб. Дроби $\frac{3}{8}$ і $\frac{-5}{4}$ також можна подати у вигляді нескінченних десяткових періодичних дробів, дописавши праворуч як десяткові знаки нескінченну кількість нулів:

$$\frac{3}{8} = 0,375 = 0,375000\dots; \quad \frac{-5}{4} = -1,25 = -1,25000\dots$$

Отже,



кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу.

Справджується і обернене твердження:



кожний нескінченний десятковий періодичний дріб є записом деякого раціонального числа.

Наприклад,

$$1,2000\dots = 1,2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}; \quad 0,(3) = \frac{1}{3}; \quad -1,(15) = -1\frac{5}{33}.$$

У правильності цих рівностей легко переконатися, виконавши відповідне ділення.

Але в математиці існують числа, які не можна записати у вигляді $\frac{m}{n}$, де m – ціле число, а n – натуральне.



Числа, які не можна записати у вигляді $\frac{m}{n}$, де m – ціле число, а n – натуральне, називають *іраціональними числами*.

Префікс *ір* означає заперечення, *іраціональні* означає не раціональні.

Наприклад, іраціональними є числа π , $\sqrt{2}$, $-\sqrt{7}$ тощо. Наближені значення таких чисел можна знаходити з певною точністю (тобто округленими до певного розряду) за допомогою мікрокалькулятора або комп'ютера:

$$\pi \approx 3,1415926; \quad \sqrt{2} \approx 1,4142135; \quad -\sqrt{7} \approx -2,6457513.$$



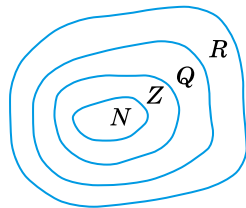
Кожне іраціональне число можна подати у вигляді нескінченного десяткового неперіодичного дробу.



Раціональні числа разом з іраціональними числами утворюють множину дійсних чисел.

Множину дійсних чисел позначають літерою R .

Оскільки кожне натуральне число є цілим числом, то множина N є підмножиною множини Z (мал. 13). Аналогічно, множина Z є підмножиною множини Q , а множина Q – підмножиною множини R .



Мал. 13

Дійсні числа, які записано за допомогою нескінченних десяткових неперіодичних дробів, можна порівнювати між собою за тими самими правилами, що й скінченні десяткові дробі. Наприклад,

$$\sqrt{2} > 1,4 \text{ (бо } \sqrt{2} \approx 1,41); \quad -\sqrt{7} < -2,6 \text{ (бо } -\sqrt{7} \approx -2,63).$$

У задачах практичного змісту дійсні числа (для виконання арифметичних дій з ними) замінюють на їхні наближені значення, округлені до певного розряду.

Приклад 2. Обчисліть $\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{3} + \sqrt{3}$ з точністю до тисячних.

Розв'язання.

$$\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{3} + \sqrt{3} \approx 2,3562 + 0,3333 + 1,7321 = 4,4218 \approx 4,422.$$

Зауважимо, що під час додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до степеня дійсних чисел мають місце всі властивості та обмеження, що й для дій над раціональними числами.

А ще раніше...

Поняття числа з'явилося дуже давно. Воно є одним з найзагальніших понять математики. Потреба у вимірюваннях та підрахунках зумовила появу додатних раціональних чисел. Саме тоді виникли і використовувалися натуральні числа та дробові числа, які розглядалися як відношення натуральних чисел.

Наступним етапом розвитку поняття числа є введення у практику від'ємних чисел. У Стародавньому Китаї ці числа з'явилися у II ст. до н. е. Там уміли додавати і віднімати від'ємні числа. Від'ємні числа тлумачили як борг, а додатні – як майно. В Індії у VII ст. ці числа сприймали так само, але ще й знали як їх множити і ділити.

Давні вавилоняни, а це близько 4 тис. років тому, знали відповідь на запитання: «Якою має бути сторона квадрата, щоб його площа дорівнювала S ?». Ними було складено таблиці квадратів чисел та квадратних коренів. Вавилоняни використовували й метод добування наближеного значення квадратного кореня із числа S , яке не є квадратом натурального числа. Суть методу полягала в тому, що число S записували у вигляді $a^2 + b$, де число b було досить малим у порівнянні з a^2 , і застосовували формулу

$$\sqrt{S} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}.$$

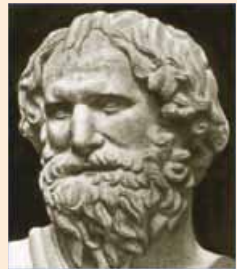
Наприклад за цим методом:

$$\sqrt{102} = \sqrt{10^2 + 2} \approx 10 + \frac{2}{2 \cdot 10} = 10,1.$$

Перевіримо точність результату: $10,1^2 = 102,01$.

Такий метод обчислення наближеного значення квадратного кореня використовувався й у Стародавній Греції. Його детально було описано Героном Александрійським (I ст. н. е.).

В епоху Відродження (XV – поч. XVII ст.) європейські математики позначали корінь латинським словом *Radix* (корінь), потім – скорочено – літерою *R*. Так з'явився термін «радикал», яким називають знак кореня. Згодом для позначення кореня стали використовувати крапку, а потім ромбик. Через деякий час – уже знак $\sqrt{\quad}$ та горизонтальну риску над підкореневим виразом. Згодом знак $\sqrt{\quad}$ і риску було об'єднано і сучасні математики стали використовувати знак квадратного кореня у звичному нам вигляді: $\sqrt{\quad}$.



Герон
Александрійський
(I ст. н. е.)



1. Які числа утворюють множину раціональних чисел?
2. Які числа утворюють множину дійсних чисел?
3. У вигляді якого дробу можна подати будь-яке раціональне число?
4. Як можна записати кожний нескінченний десятковий періодичний дріб?
5. Які числа називають ірраціональними?
6. У якому вигляді можна подати кожне ірраціональне число?



1 Початковий рівень

554. (Усно.) Чи правильно, що:

- | | |
|------------------------------------|-----------------------------------|
| 1) 5 – натуральне число; | 2) $-2,1$ – ціле число; |
| 3) $\sqrt{3}$ – раціональне число; | 4) $-\frac{5}{7}$ – дійсне число? |

555. Із чисел $\sqrt{7}$; $0,222\dots$; 52 ; $-2,(4)$; π ; 19 ; $-3,7$; 0 ; $-\sqrt{5}$; $-2\frac{1}{9}$

випишіть:

- | | |
|--------------------------------|---------------------------|
| 1) натуральні числа; | 2) цілі невід’ємні числа; |
| 3) раціональні від’ємні числа; | 4) ірраціональні числа. |

556. Із чисел 8 ; $-\sqrt{7}$; -5 ; $\frac{2}{3}$; $\sqrt{17}$; $3,(7)$; $\sqrt{13}$; $-1\frac{1}{3}$; 0 ; $5,137$

випишіть:

- | | |
|-------------------------------|--------------------------|
| 1) натуральні числа; | 2) цілі недодатні числа; |
| 3) раціональні додатні числа; | 4) ірраціональні числа. |



2 Середній рівень

557. Подайте число як відношення цілого числа до натурального:

- | | | | |
|--------|-----------|---------------------|-------------|
| 1) 31; | 2) -8 ; | 3) $2\frac{1}{7}$; | 4) $-5,1$. |
|--------|-----------|---------------------|-------------|

558. Подайте число як відношення цілого числа до натурального:

- | | | | |
|------------|-----------|----------------------|------------|
| 1) -21 ; | 2) 10 ; | 3) $-3\frac{1}{5}$; | 4) $2,8$. |
|------------|-----------|----------------------|------------|

559. З множини $\left\{\frac{1}{8}; \frac{7}{9}; \frac{7}{3}; \frac{5}{5}; \frac{2}{3}; \frac{10}{1}\right\}$ виділіть підмножину

- | | |
|-----------------------|-------------------------|
| 1) правильних дробів; | 2) неправильних дробів. |
|-----------------------|-------------------------|

560. З множини $\{27; 36; 48; 19; 2; 11\}$ виділіть підмножину:

- 1) парних чисел; 2) непарних чисел.

561. Подайте число $\frac{2}{33}$ у вигляді нескінченного десяткового дробу й округліть його: 1) до сотих; 2) до тисячних.

562. Подайте число $\frac{4}{11}$ у вигляді нескінченного десяткового дробу й округліть його: 1) до сотих; 2) до тисячних.

563. (Усно.) Чи правильно, що:

- | | | |
|-----------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $7 \notin N$; | 2) $10 \in Z$; | 3) $5 \notin Q$; |
| 4) $32 \in R$; | 5) $-3,9 \notin N$; | 6) $-9,2 \in Q$; |
| 7) $-3,17 \notin R$; | 8) $\sqrt{3} \in Q$; | 9) $\sqrt{64} \in N$; |
| 10) $-\sqrt{27} \notin R$; | 11) $\sqrt{\frac{4}{9}} \notin Z$; | 12) $\sqrt{1\frac{7}{9}} \in Q$? |

564. Порівняйте:

- | | | |
|--------------------------|----------------------|------------------------------|
| 1) 1,366 і 1,636; | 2) -2,63 і -2,36; | 3) $-\frac{1}{17}$ і 0; |
| 4) π і 3,2; | 5) $-\pi$ і -3,1; | 6) 1,7 і 1,(7); |
| 7) -1,41 і $-\sqrt{2}$; | 8) $\sqrt{3}$ і 1,8; | 9) $2\frac{5}{13}$ і 2,(39). |

565. Порівняйте:

- | | | |
|----------------------|-------------------------|-----------------------------|
| 1) -2,17 і -2,71; | 2) 0 і $\frac{1}{16}$; | 3) 2,(3) і 2,3; |
| 4) $\sqrt{2}$ і 1,4; | 5) $-\sqrt{3}$ і -1,7; | 6) $\frac{1}{11}$ і 0,(08). |

566. Знайдіть наближене значення виразу, округливши значення кореня до сотих:

- 1) $\sqrt{17} + 2,12$; 2) $3,18 - \sqrt{5}$.

567. Знайдіть наближене значення виразу, округливши значення кореня до сотих:

- 1) $\sqrt{3} + 4,17$; 2) $4,82 - \sqrt{11}$.

568. Множина A складається з коренів рівняння $0x = 7$. Що це за множина?

569. Чи правильно, що $A \subset B$, якщо:

- 1) $A = \{1\}$; $B = \{1; 3; 5\}$; 2) $A = \{\Delta; @\}$; $B = \{\Delta; \square; !\}$;
- 3) $A = \emptyset$; $B = \{1; 2; 3\}$; 4) $A = \{\alpha; \beta; \gamma\}$; $B = \{\alpha\}$;
- 5) A – множина простих чисел; B – множина натуральних чисел;
- 6) A – множина цілих чисел; B – множина натуральних чисел, кратних числу 5?

570. Чи правильно, що $C \subset D$, якщо:

- 1) $C = \{1; 7\}$; $D = \{1; 5; 17\}$;
- 2) $C = \{a; б\}$; $D = \{a; б; в; г\}$;
- 3) $C = \{m; n; l\}$; $D = \emptyset$;
- 4) $C = \{\Delta; 0\}$; $D = \{\Delta; 0\}$?



Достатній рівень

571. Розмістіть у порядку спадання числа:

$$0,11; \quad 0,(1); \quad 0,01; \quad \frac{1}{10}; \quad \frac{1}{2}.$$

572. Розмістіть у порядку зростання числа:

$$0,(2); \quad 0,22; \quad \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{5}; \quad 0,02.$$

573. Чи правильно, що:

- 1) сума двох цілих чисел – ціле число;
- 2) частка двох раціональних чисел – число раціональне;
- 3) будь-яке ціле число є натуральним;
- 4) множина дійсних чисел складається із додатних і від'ємних чисел?

574. Запишіть три раціональних числа, що містяться між числами 1,55 і 1,(5).

575. Запишіть два раціональних числа, що містяться між числами 2,333 і 2,(3).



Високий рівень

576. Використовуючи формулу $\sqrt{S} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$, знайдіть сторону квадрата, площа якого дорівнює: 1) 39 см²; 2) 83 дм². Порівняйте відповідь із числом, знайденим за допомогою калькулятора.

577. Доведіть, що число $\sqrt{2}$ є ірраціональним.

578. Доведіть, що число $\sqrt{3}$ є ірраціональним.



Вправи для повторення

2 579. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 16 = 0$; 2) $4x^2 - 9 = 0$;

3) $\frac{1}{16} - x^2 = 0$; 4) $\frac{9}{25} - x^2 = 0$.

3 580. З міст M і N одночасно назустріч один одному виїхали два автомобілі. Відстань між містами дорівнює s , швидкості автомобілів – v_1 і v_2 (у км/год). Через t год автомобілі зустрілися. Виразіть t через s , v_1 і v_2 . Обчисліть значення t , якщо $s = 375$ км; $v_1 = 78$ км/год; $v_2 = 72$ км/год.



Цікаві задачі для учнів неледачих



581. Два гравці по черзі беруть з купки камінці. За правилами гри дозволяється за один хід брати 1; 2; 4; 8; ... (будь-який степінь двійки) камінців. Виграє той, хто візьме останній камінець. Хто переможе у цій грі при правильній стратегії, якщо кількість камінців дорівнює:

1) 2016; 2) 2017?

§ 16. ТОТОЖНІСТЬ $(\sqrt{a})^2 = a$, $a \geq 0$. РІВНЯННЯ $x^2 = a$

Нагадаємо, що для всіх значень $a \geq 0$ рівність $\sqrt{a} = x$ є правильною, якщо виконуються дві умови: 1) $x \geq 0$; 2) $x^2 = a$. Підставивши в останню рівність замість x його запис у вигляді \sqrt{a} , одержимо тотожність

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$



Для будь-якого $a \geq 0$ справджується тотожність

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Приклад 1. Обчисліть:

$$1) (\sqrt{7})^2; \quad 2) (-\sqrt{11})^2; \quad 3) \left(\frac{1}{2}\sqrt{18}\right)^2; \quad 4) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Розв'язання. 1) $(\sqrt{7})^2 = 7$;

2) $(-\sqrt{11})^2 = (-1)^2 \cdot (\sqrt{11})^2 = 1 \cdot 11 = 11$;

3) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{18}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (\sqrt{18})^2 = \frac{1}{4} \cdot 18 = 4,5$;

4) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{(\sqrt{3})^2}{2^2} = \frac{3}{4}$.

Відповідь: 1) 7; 2) 11; 3) 4,5; 4) $\frac{3}{4}$.

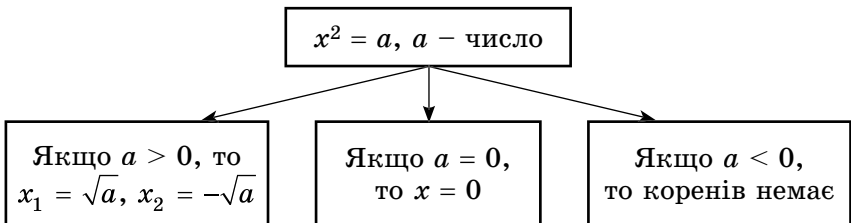
Розглянемо рівняння $x^2 = a$, де a – деяке число.

Оскільки квадрат числа не може дорівнювати від'ємному числу, то, коли $a < 0$, рівняння $x^2 = a$ не має розв'язків, що можна записати так: $x \in \emptyset$.

Якщо $a = 0$, то єдиним коренем рівняння $x^2 = 0$ є число 0.

Якщо $a > 0$, то коренями рівняння $x^2 = a$ є числа \sqrt{a} і $-\sqrt{a}$. Справді, $(\sqrt{a})^2 = a$ і $(-\sqrt{a})^2 = a$. Для того щоб впевнитися, що рівняння $x^2 = a$, де $a > 0$, інших коренів не має, звернімося до графічної інтерпретації розв'язування цього рівняння. Побудуємо графік функції $y = x^2$ і графік функції $y = a$, де $a > 0$ (мал. 14). Ці графіки перетнулися лише двічі: у точках з абсцисами \sqrt{a} і $-\sqrt{a}$.

Систематизуємо дані про розв'язки рівняння $x^2 = a$ у вигляді схеми:

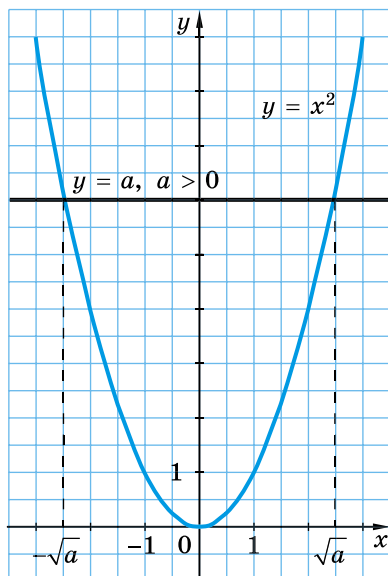


Приклад 2. Розв'яжіть рівняння:

$$1) x^2 = 9; \quad 2) x^2 = -7; \quad 3) x^2 = 7; \quad 4) (2x + 1)^2 = 25.$$

Розв'язання. 1) $x_1 = \sqrt{9} = 3$, $x_2 = -\sqrt{9} = -3$;

2) рівняння не має коренів, тобто $x \in \emptyset$;



Мал. 14

3) $x_1 = \sqrt{7}$, $x_2 = -\sqrt{7}$. Ці корені є ірраціональними числами;

4) маємо: $2x + 1 = \sqrt{25}$ або $2x + 1 = -\sqrt{25}$

$$2x + 1 = 5 \qquad 2x + 1 = -5$$

$$2x = 4 \qquad 2x = -6$$

$$x = 2 \qquad x = -3.$$

Отже, рівняння має два корені $x_1 = 2$; $x_2 = -3$.

Відповідь. 1) ± 3 ; 2) \emptyset ; 3) $\pm\sqrt{7}$; 4) 2; -3.



1. Для яких значень a є правильною рівність $(\sqrt{a})^2 = a$?

2. Чи має корені рівняння $x^2 = a$, якщо $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$, і якщо має, то скільки?



Початковий рівень

582. Обчисліть: 1) $(\sqrt{3})^2$; 2) $(\sqrt{0})^2$; 3) $(\sqrt{2,1})^2$; 4) $\left(\sqrt{\frac{1}{7}}\right)^2$.

583. Знайдіть значення виразу: 1) $(\sqrt{5})^2$; 2) $(\sqrt{4,2})^2$.

584. (Усно.) Чи має корені рівняння:

1) $x^2 = 9$; 2) $x^2 = 37$; 3) $x^2 = 0$; 4) $x^2 = -5$?

585. Чи має корені рівняння: 1) $x^2 = 25$; 2) $x^2 = -10$?



Середній рівень

586. Знайдіть значення виразу:

1) $(-\sqrt{7})^2$; 2) $\sqrt{11} \cdot \sqrt{11}$; 3) $\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2$; 4) $(-2\sqrt{5})^2$;
 5) $-5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$; 6) $0,3 \cdot (-\sqrt{10})^2$; 7) $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2$; 8) $\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$.

587. Обчисліть:

1) $(-\sqrt{11})^2$; 2) $\sqrt{19} \cdot \sqrt{19}$; 3) $(2\sqrt{7})^2$; 4) $\left(-\frac{1}{4}\sqrt{8}\right)^2$;
 5) $-7 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$; 6) $0,2 \cdot (-\sqrt{5})^2$; 7) $\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)^2$; 8) $\left(-\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2$.

588. Обчисліть:

1) $(\sqrt{15})^2 - 3,8$; 2) $5\left(-\sqrt{\frac{4}{5}}\right)^2$; 3) $7 : \left(\sqrt{\frac{7}{8}}\right)^2$; 4) $\frac{1}{8}(-\sqrt{24})^2$.

589. Знайдіть значення виразу:

1) $2,7 + (-\sqrt{13})^2$; 2) $8\left(\sqrt{\frac{5}{8}}\right)^2$;
 3) $12 : \left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2$; 4) $\frac{1}{19}(\sqrt{19})^2$.

590. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 25$; 2) $x^2 = 0,36$; 3) $x^2 = 121$;
 4) $x^2 = -9$; 5) $x^2 = 11$; 6) $x^2 = \frac{4}{9}$.

591. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 49$; 2) $x^2 = 0,16$; 3) $x^2 = 169$;
 4) $x^2 = -4$; 5) $x^2 = 5$; 6) $x^2 = \frac{9}{16}$.

592. Знайдіть корені рівняння:

1) $x^2 - 0,05 = 0,04$; 2) $24 + x^2 = 25$;
 3) $x^2 + 12 = 0$; 4) $\frac{1}{3}x^2 = 7$.

593. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 0,01 = 0,26$; 2) $x^2 - 14 = 2$;

3) $17 - x^2 = 0$; 4) $-\frac{1}{4}x^2 = 5$.

594. Чи належить графіку функції $y = x^2$ точка:

1) $M(\sqrt{5}; 5)$; 2) $N(7; \sqrt{7})$; 3) $P(-\sqrt{3}; 3)$; 4) $T(\sqrt{10}; \sqrt{10})$?

595. Знайдіть сторону квадрата, площа якого дорівнює:

1) 36 см^2 ; 2) 49 дм^2 ; 3) $0,09 \text{ м}^2$; 4) $\frac{25}{36} \text{ дм}^2$.



3 Достатній рівень

596. Обчисліть:

1) $(-\sqrt{5})^2$; 2) $(2\sqrt{5})^2 - (5\sqrt{2})^2$;

3) $36 \cdot \left(-\frac{1}{3}\sqrt{17}\right)^2 - \frac{1}{5}(2\sqrt{15})^2$; 4) $\sqrt{59,29} + \left(\frac{1}{2}\sqrt{34}\right)^2$;

5) $(-3\sqrt{5})^2 - 3(\sqrt{5})^2$; 6) $\left(-\frac{4}{5}\sqrt{\frac{25}{32}}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\sqrt{\frac{8}{9}}\right)^2$.

597. Обчисліть:

1) $((-\sqrt{7})^2)^2$; 2) $(3\sqrt{7})^2 - (7\sqrt{3})^2$;

3) $16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{7}\right)^2 + \frac{1}{3}(4\sqrt{3})^2$; 4) $\sqrt{70,56} - \left(\frac{1}{2}\sqrt{42}\right)^2$;

5) $(5\sqrt{2})^2 - 5 \cdot (-\sqrt{2})^2$; 6) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{10}}\right)^2 + \left(-\frac{5}{6}\sqrt{\frac{36}{65}}\right)^2$.

598. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 2)^2 = 36$; 2) $(y + 3)^2 = 4$; 3) $(x - 1)^2 = 0$;

4) $(x + 3)^2 = 7$; 5) $\left(y - \frac{5}{9}\right)^2 = \frac{4}{81}$; 6) $(x + 5)^2 = -9$.

599. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 1)^2 = 16$; 2) $(y - 2)^2 = 25$; 3) $(m + 2)^2 = 0$;

4) $(x - 2)^2 = 3$; 5) $\left(y - \frac{3}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}$; 6) $(m - 3)^2 = -4$.

600. Наведіть приклад рівняння вигляду $x^2 = a$, де x – змінна, a – число, яке:

- 1) має один цілий корінь;
- 2) має два цілих корені;
- 3) не має коренів;
- 4) має два раціональних корені;
- 5) має корені, але вони не є раціональними.

601. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x+1}{6} = \frac{4}{x-1}; \quad 2) (2x-3)^2 + (2x+3)^2 = 20.$$

602. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x-2}{5} = \frac{12}{x+2}; \quad 2) (3x+1)^2 + (3x-1)^2 = 4.$$



4 Високий рівень

603. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{7 + \sqrt{2 + x^2}} = 3; \quad 2) 2|x^2 - 5| + 3 = 5.$$

604. Знайдіть корені рівняння:

$$1) \sqrt{1 + \sqrt{x^2 + 4}} = 2; \quad 2) 2|x^2 - 4| + 1 = 11.$$

605. При яких значеннях b справджується рівність:

$$1) (\sqrt{b})^2 = -b; \quad 2) (\sqrt{b-4})^2 = b-4; \quad 3) b(\sqrt{b})^2 = b^2?$$

606. При яких значеннях m рівняння $mx^2 = 1$:

- 1) має два корені;
- 2) має один корінь;
- 3) не має коренів?



Вправи для повторення

3 607. Спростіть вираз: $\left(x - \frac{4x-9}{x-2}\right) : \left(2x - \frac{2x}{x-2}\right)$.

4 608. Відомо, що $2x - 4y = 1$. Знайдіть значення виразу:

$$1) \frac{4}{x-2y}; \quad 2) \frac{8y-4x}{5}; \quad 3) \frac{x^2-4y^2}{2,5x+5y}.$$



Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

609. Порівняйте значення виразів:

$$1) \sqrt{4 \cdot 9} \text{ і } \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}; \quad 2) \sqrt{\frac{25}{36}} \text{ і } \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}};$$

610. Знайдіть значення виразу:

$$1) |-2,5| + |3,7|; \quad 2) \left| \frac{4}{9} \right| \cdot \left| -\frac{3}{16} \right|.$$

611. Спростіть вираз: 1) $|5a|$, якщо $a \geq 0$; 2) $|7b|$, якщо $b < 0$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



612. Один годинник зі стрілками поспішає на 1 хв за добу, а другий – відстає на 30 с за добу. Зараз обидва годинники показують однаковий час. Через скільки діб вони знову покажуть однаковий час?

§ 17. ВЛАСТИВОСТІ АРИФМЕТИЧНОГО КВАДРАТНОГО КОРЕНЯ

Порівняємо значення виразів $\sqrt{4 \cdot 9}$ і $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$:

$$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6, \quad \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Маємо: $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$, тобто корінь із добутку двох чисел дорівнює добутку їх коренів. Така властивість справджується для добутку будь-яких двох невід'ємних чисел.



Теорема (про корінь із добутку). *Корінь із добутку двох невід'ємних чисел дорівнює добутку коренів із цих чисел, тобто якщо $a \geq 0$ і $b \geq 0$, то*

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Доведення. Оскільки $a \geq 0$ і $b \geq 0$, то вирази \sqrt{a} і \sqrt{b} мають зміст, причому $\sqrt{a} \geq 0$, $\sqrt{b} \geq 0$. Тому $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$. Крім того, $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$.

Маємо: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$ і $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = ab$. Тоді за означенням арифметичного квадратного кореня: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Доведена теорема поширюється і на випадок, коли множників під знаком кореня три і більше.



Наслідок. *Корінь з добутку невід'ємних множників дорівнює добутку коренів із цих множників.*

Доведення. Доведемо цей наслідок, наприклад, для трьох чисел $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$. Маємо:

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = \sqrt{ab}\sqrt{c} = \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}.$$

Зауваження 1. Очевидно, що вираз \sqrt{ab} має зміст за умови, коли $ab > 0$, тобто коли змінні a і b – одного знака, а значить і тоді, коли змінні a і b одночасно набувають від'ємних значень. У такому випадку тотожність, яку ми розглянули вище, набуває вигляду $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$, де $-a \geq 0$ і $-b \geq 0$. Враховуючи обидва випадки, можна записати, що

$$\sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}, \text{ де } ab \geq 0.$$

Приклад 1. 1) $\sqrt{25 \cdot 36} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{36} = 5 \cdot 6 = 30$;

2) $\sqrt{32 \cdot 72} = \sqrt{(16 \cdot 2) \cdot (36 \cdot 2)} = \sqrt{16 \cdot 36 \cdot 4} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{4} = 4 \cdot 6 \cdot 2 = 48$.

Якщо в рівності $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ поміняти місцями ліву і праву частини, то одержимо тотожність:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}, \text{ де } a \geq 0, b \geq 0.$$



Добуток коренів з невід'ємних чисел дорівнює кореню з добутку цих чисел.

Приклад 2. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$.

Розглянемо квадратний корінь з дробу.



Теорема (про корінь з дробу). *Корінь з дробу, чисельник якого є невід'ємним, а знаменник – додатним, дорівнює кореню із чисельника, поділеному на корінь із знаменника, тобто, якщо $a \geq 0$ і $b > 0$, то*

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Доведення. Оскільки $a \geq 0$ і $b > 0$, то вирази \sqrt{a} і \sqrt{b} мають зміст і $\sqrt{a} \geq 0$, $\sqrt{b} > 0$. Тому $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geq 0$. Крім того,

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}.$$

Маємо: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geq 0$ і $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$. Тоді за означенням квадратного

кореня: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Приклад 3. 1) $\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$; 2) $\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$.

З а у в а ж е н н я 2. За аналогією із зауваженням 1, тотожність, яку ми тільки що розглянули, можна записати і так:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}, \text{ де } ab \geq 0, b \neq 0.$$

Якщо в рівності $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ поміняти місцями ліву і праву частини, то одержимо тотожність:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \text{ де } a \geq 0, b > 0.$$



Частка, чисельник якої є коренем з невід'ємного числа, а знаменник — коренем з додатного числа, дорівнює кореню із частки цих чисел.

Приклад 4. 1) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$;

2) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{45}} = \sqrt{\frac{20}{45}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$.

Розглянемо, як добути квадратний корінь з квадрата.



Теорема (про корінь з квадрата). Для будь-якого значення a справджується рівність

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Д о в е д е н н я. Оскільки $|a| \geq 0$ і $|a|^2 = a^2$ для будь-якого a , то за означенням квадратного кореня: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Приклад 5. 1) $\sqrt{7^2} = |7| = 7$; 2) $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$.

Розглянемо квадратний корінь із степеня.



Теорема (про корінь із степеня). Для будь-якого значення a і натурального числа k справджується рівність

$$\sqrt{a^{2k}} = |a^k|.$$

Доведення. $\sqrt{a^{2k}} = \sqrt{(a^k)^2}$. За теоремою про корінь з квадрата маємо $\sqrt{(a^k)^2} = |a^k|$. Отже, $\sqrt{a^{2k}} = |a^k|$.

Приклад 6. Обчисліть: $\sqrt{1,7^4}$.

Розв'язання. $\sqrt{1,7^4} = \sqrt{(1,7^2)^2} = |1,7^2| = 2,89$.

Приклад 7. Спростіть вираз: 1) $\sqrt{a^{12}}$;

2) $\sqrt{p^6}$, де $p < 0$.

Розв'язання. 1) $\sqrt{a^{12}} = \sqrt{(a^6)^2} = |a^6|$. Оскільки $a^6 \geq 0$ для будь-якого a , то $|a^6| = a^6$. Отже, $\sqrt{a^{12}} = a^6$.

2) $\sqrt{p^6} = \sqrt{(p^3)^2} = |p^3|$. Оскільки $p < 0$, то $p^3 < 0$, а тому $|p^3| = -p^3$. Отже, якщо $p < 0$, то $\sqrt{p^6} = -p^3$.

Відповідь. 1) a^6 ; 2) $-p^3$.



1. Сформулюйте і доведіть теорему про корінь з добутку.
2. Чому дорівнює добуток коренів?
3. Сформулюйте і доведіть теорему про корінь з дробу.
4. Чому дорівнює частка коренів?
5. Сформулюйте і доведіть теорему про корінь з квадрата та зі степеня.



1 Початковий рівень

613. (Усно.) Чи правильно обчислено:

$$1) \sqrt{16 \cdot 9} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12; \quad 2) \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{25} = \frac{2}{25}?$$

614. Чи правильно виконано обчислення:

$$1) \sqrt{36 \cdot 4} = \sqrt{36} \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24; \quad 2) \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}?$$



Середній рівень

615. Знайдіть значення виразу:

- | | |
|---|--|
| 1) $\sqrt{25 \cdot 9}$; | 2) $\sqrt{16 \cdot 900}$; |
| 3) $\sqrt{0,25 \cdot 1,44}$; | 4) $\sqrt{0,04 \cdot 169}$; |
| 5) $\sqrt{2,25 \cdot 0,09 \cdot 100}$; | 6) $\sqrt{1,96 \cdot 0,01 \cdot 6,25}$. |

616. Обчисліть:

- | | |
|---|---|
| 1) $\sqrt{36 \cdot 49}$; | 2) $\sqrt{100 \cdot 4}$; |
| 3) $\sqrt{0,49 \cdot 1,69}$; | 4) $\sqrt{0,09 \cdot 196}$; |
| 5) $\sqrt{1,44 \cdot 0,16 \cdot 400}$; | 6) $\sqrt{2,89 \cdot 10\,000 \cdot 0,25}$. |

617. Знайдіть значення кореня:

- | | | |
|-----------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| 1) $\sqrt{\frac{49}{81}}$; | 2) $\sqrt{\frac{121}{400}}$; | 3) $\sqrt{\frac{36}{625}}$; |
| 4) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; | 5) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; | 6) $\sqrt{44\frac{4}{9}}$. |

618. Знайдіть значення кореня:

- | | | |
|------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| 1) $\sqrt{\frac{25}{64}}$; | 2) $\sqrt{\frac{289}{900}}$; | 3) $\sqrt{\frac{9}{784}}$; |
| 4) $\sqrt{1\frac{11}{25}}$; | 5) $\sqrt{1\frac{19}{81}}$; | 6) $\sqrt{42\frac{1}{4}}$. |

619. Обчисліть:

- | | | | |
|--------------------------|-------------------------------|------------------------|---|
| 1) $\sqrt{0,2^2}$; | 2) $\sqrt{(-0,9)^2}$; | 3) $2\sqrt{3^2}$; | 4) $-3\sqrt{9^2}$; |
| 5) $0,5\sqrt{(-10)^2}$; | 6) $-\frac{1}{5}\sqrt{5^2}$; | 7) $-3\sqrt{(-7)^2}$; | 8) $\frac{2}{7}\sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^2}$. |

620. Обчисліть:

- | | | | |
|---------------------------------|------------------------|------------------------|---|
| 1) $\sqrt{1,7^2}$; | 2) $\sqrt{(-0,3)^2}$; | 3) $3\sqrt{4^2}$; | 4) $-2\sqrt{7^2}$; |
| 5) $\frac{1}{3}\sqrt{(-9)^2}$; | 6) $-0,1\sqrt{20^2}$; | 7) $-5\sqrt{(-3)^2}$; | 8) $\frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2}$. |

621. Подайте вираз у вигляді добутку коренів:

- | | | | |
|-------------------------|------------------|-------------------|------------------|
| 1) $\sqrt{2 \cdot 7}$; | 2) $\sqrt{35}$; | 3) $\sqrt{17b}$; | 4) $\sqrt{6p}$. |
|-------------------------|------------------|-------------------|------------------|

622. Подайте вираз у вигляді добутку коренів:

1) $\sqrt{3 \cdot 11}$; 2) $\sqrt{15}$; 3) $\sqrt{19a}$; 4) $\sqrt{10b}$.

623. Подайте вираз у вигляді частки коренів:

1) $\sqrt{\frac{2}{5}}$; 2) $\sqrt{3\frac{2}{7}}$; 3) $\sqrt{\frac{7}{m}}$; 4) $\sqrt{\frac{p}{23}}$.

624. Подайте вираз у вигляді частки коренів:

1) $\sqrt{\frac{3}{11}}$; 2) $\sqrt{9\frac{1}{2}}$; 3) $\sqrt{\frac{a}{37}}$; 4) $\sqrt{\frac{5}{b}}$.

625. Обчисліть значення добутку:

1) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$; 2) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$; 3) $\sqrt{20} \cdot \sqrt{0,05}$;
 4) $\sqrt{0,9} \cdot \sqrt{2,5}$; 5) $\sqrt{\frac{1}{7}} \cdot \sqrt{\frac{7}{13}} \cdot \sqrt{\frac{13}{36}}$; 6) $\sqrt{\frac{3}{7}} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{7}}$.

626. Обчисліть значення добутку:

1) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$; 2) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45}$; 3) $\sqrt{0,02} \cdot \sqrt{50}$;
 4) $\sqrt{0,4} \cdot \sqrt{0,9}$; 5) $\sqrt{\frac{5}{7}} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{\frac{7}{9}}$; 6) $\sqrt{\frac{11}{12}} \cdot \sqrt{\frac{1}{12}} \cdot \sqrt{11}$.

627. Обчисліть значення частки:

1) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{7,5}}{\sqrt{0,3}}$; 3) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{1,5}}$;
 4) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27}}$; 5) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{50}}$; 6) $\frac{\sqrt{0,27}}{\sqrt{0,75}}$.

628. Обчисліть значення частки:

1) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{2,7}}{\sqrt{0,3}}$; 3) $\frac{\sqrt{160}}{\sqrt{2,5}}$;
 4) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{72}}$; 5) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}}$; 6) $\frac{\sqrt{0,18}}{\sqrt{1,28}}$.

629. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{9^4}$; 2) $\sqrt{2^6}$; 3) $\sqrt{5^8}$;
 4) $\sqrt{(-2)^{10}}$; 5) $\sqrt{(-3)^4}$; 6) $\sqrt{(-1)^{12}}$.

630. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\sqrt{10^4}$; 2) $\sqrt{3^6}$; 3) $\sqrt{2^8}$;
 4) $\sqrt{(-5)^4}$; 5) $\sqrt{(-1)^{10}}$; 6) $\sqrt{(-2)^{12}}$.

631. Замініть вираз йому тотожно рівним:

- 1) $\sqrt{m^2}$; 2) $4\sqrt{p^2}$; 3) $-0,1\sqrt{a^2}$; 4) $\frac{17}{\sqrt{c^2}}$.

632. Замініть вираз йому тотожно рівним:

- 1) $\sqrt{t^2}$; 2) $-2\sqrt{b^2}$; 3) $\frac{1}{7}\sqrt{x^2}$; 4) $\frac{7}{\sqrt{a^2}}$.



3 Достатній рівень

633. Обчисліть:

- 1) $\sqrt{4 \frac{33}{64} \cdot 52 \frac{9}{16}}$; 2) $\sqrt{1 \frac{4}{9} \cdot 1 \frac{3}{13}}$;
 3) $\sqrt{20^2 - 16^2}$; 4) $\sqrt{0,85^2 - 0,84^2}$.

634. Обчисліть:

- 1) $\sqrt{4 \frac{21}{25} \cdot 23 \frac{73}{81}}$; 2) $\sqrt{1 \frac{1}{36} \cdot 1 \frac{12}{37}}$;
 3) $\sqrt{37^2 - 12^2}$; 4) $\sqrt{0,25^2 - 0,24^2}$.

635. Обчисліть:

- 1) $\sqrt{90 \cdot 490}$; 2) $\sqrt{72 \cdot 32}$; 3) $\sqrt{4,9 \cdot 32,4}$;
 4) $\sqrt{4,5 \cdot 72}$; 5) $\sqrt{13 \cdot 3 \cdot 39}$; 6) $\sqrt{22 \cdot 14 \cdot 77}$.

636. Обчисліть:

- 1) $\sqrt{40 \cdot 640}$; 2) $\sqrt{45 \cdot 125}$; 3) $\sqrt{14,4 \cdot 8,1}$;
 4) $\sqrt{1,6 \cdot 90}$; 5) $\sqrt{17 \cdot 34 \cdot 2}$; 6) $\sqrt{63 \cdot 18 \cdot 14}$.

637. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\sqrt{3^4 \cdot 6^2 \cdot (-2)^6}$; 2) $\sqrt{2^{10} \cdot 5^2} - \sqrt{(-4)^4}$; 3) $\sqrt{25^3}$; 4) $\sqrt{9^5}$.

638. Обчисліть:

- 1) $\sqrt{(-2)^4 \cdot 7^2} - \sqrt{(-3)^6}$; 2) $\sqrt{36^3}$.

639. Обчисліть, попередньо розклавши підкореневий вираз на прості множники: 1) $\sqrt{12\,544}$; 2) $\sqrt{186\,624}$.

640. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{0,36x^2}$, якщо $x \geq 0$;

2) $\sqrt{121y^2}$, якщо $y < 0$;

3) $-3\sqrt{\frac{1}{9}p^2}$, якщо $p < 0$;

4) $5\sqrt{x^4}$;

5) $\sqrt{25a^6}$, якщо $a \geq 0$;

6) $\sqrt{\frac{25}{49}c^{10}}$, якщо $c < 0$.

641. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{0,49p^2}$, якщо $p \geq 0$;

2) $\sqrt{\frac{25}{64}m^2}$, якщо $m < 0$;

3) $7\sqrt{b^8}$;

4) $\sqrt{0,01a^{14}}$, якщо $a < 0$.

642. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{25m^2n^{12}}$, якщо $m \leq 0$;

2) $\sqrt{\frac{49}{169}m^{14}n^{18}}$, якщо $m \geq 0$, $n < 0$;

3) $\frac{1}{8}xy^3\sqrt{64x^4y^2}$, якщо $y > 0$;

4) $\sqrt{\frac{p^6m^{12}}{x^8}}$, якщо $p < 0$;

5) $2m^5\sqrt{\frac{p^{20}}{m^2}}$, якщо $m < 0$;

6) $\sqrt{\frac{x^{14}y^{16}z^{26}}{x^3y^8z^{12}}}$, якщо $x > 0$, $z < 0$.

643. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{64a^2b^8}$, якщо $a \geq 0$;

2) $\frac{1}{10}bc\sqrt{25b^6c^{10}}$, якщо $b < 0$, $c > 0$;

3) $\sqrt{\frac{x^8y^{12}}{z^2}}$, якщо $z < 0$;

4) $3a^2\sqrt{\frac{b^{14}}{a^4}}$, якщо $b > 0$.

4

Високий рівень

644. Відомо, що $x < 0$, $y < 0$. Подайте вираз:

- 1) $\sqrt{7xy}$ у вигляді добутку коренів;
- 2) $\sqrt{\frac{2x}{3y}}$ у вигляді частки коренів.

645. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{(x - y)^2}$, якщо $x \geq y$;
- 2) $\sqrt{(m - n)^2}$, якщо $m < n$;
- 3) $\sqrt{x^2 - 10x + 25}$, якщо $x \geq 5$;
- 4) $\sqrt{36 - 12a + a^2}$, якщо $a < 6$;
- 5) $(x + 2)\sqrt{\frac{25}{x^2 + 4x + 4}}$, якщо $x > -2$;
- 6) $(a - b)\sqrt{\frac{4}{a^2 - 2ab + b^2}}$, якщо $a < b$.

646. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{(m - 2)^2}$, якщо $m \geq 2$;
- 2) $\sqrt{p^2 + 8p + 16}$, якщо $p < -4$;
- 3) $(a - 5)\sqrt{\frac{1}{a^2 - 10a + 25}}$, якщо $a > 5$;
- 4) $(x - 1)\sqrt{\frac{9}{x^2 - 2x + 1}}$, якщо $x < 1$.

647. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{(\sqrt{3} - 5)^2} + (\sqrt{\sqrt{3} - 1})^2$;
- 2) $\sqrt{(3 - \sqrt{7})^2} + \sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}$;
- 3) $\sqrt{(\sqrt{21} - 5)^2} - \sqrt{(\sqrt{21} - 4)^2}$;
- 4) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$.

648. Спростіть вираз:

- 1) $(\sqrt{5 - \sqrt{8}})^2 - \sqrt{(\sqrt{8} - 13)^2}$;
- 2) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$.



Вправи для повторення

2 649. Розкладіть многочлен на множники:

1) $2x^2y^3 - 8xy^5$;

2) $49a^2 - 36$;

3) $36m^3n + 27m^2n^8$;

4) $\frac{25}{49}m^8 - n^4$.

650. Скоротіть дріб:

1) $\frac{m^2 - 4}{6 + 3m}$;

2) $\frac{a^2 + 10a + 25}{4a + 20}$;

3) $\frac{x^2 - 25}{x^2 - 10x + 25}$;

4) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 8}$.

3 651. Доведіть тотожність:

$$\left(\frac{a}{a-6} - \frac{2a}{a^2 - 12a + 36} \right) : \frac{a-8}{36-a^2} + \frac{12a}{a-6} = -a.$$

4 652. Побудуйте графік функції $y = 3x + \sqrt{x^2}$, якщо $x \leq 0$.



Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

653. Розкладіть на прості множники число:

1) 18;

2) 72;

3) 175;

4) 448.

654. Спростіть вираз:

1) $2a + 3a$;

2) $7b - b$;

3) $5m + m - 7m$.

655. Подайте вираз у вигляді многочлена:

1) $a(3a - 4)$;

2) $(b - 3)(b + 2)$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



656. (Зовнішнє незалежне оцінювання, 2012 р.) Батьки разом із двома дітьми, Марійкою (4 роки) та Богданом (7 років), збираються провести вихідний день у парку атракціонів. Батьки дозволяють кожній дитині відвідати не більше трьох атракціонів і кожний атракціон – лише по одному разу. Відомо, що на атракціони «Електричні машинки» і «Веселі гірки» допускають лише дітей старше 6 років. На «Паровозик» Богдан не

підє. Для відвідування будь-якого атракціону необхідно купити квиток для кожної дитини. Скориставшись таблицею, визначте *максимальну* суму коштів (у грн), яку витратять батьки на придбання квитків для дітей.

| Назва атракціону | Вартість квитка для однієї дитини, грн |
|--------------------|--|
| Веселі гірки | 17 |
| Паровозик | 16 |
| Електричні машинки | 20 |
| Карусель | 12 |
| Батут | 15 |
| Дитяча риболовля | 8 |
| Лебеді | 13 |

§ 18. ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗІВ, ЩО МІСТЯТЬ КВАДРАТНІ КОРЕНІ

Розглянемо тотожні перетворення виразів, що містять квадратні корені.

1. Винесення множника з-під знака кореня.

Скористаємося теоремою про корінь з добутку для перетворення виразу $\sqrt{12}$:

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

Кажуть, що *множник винесли з-під знака кореня*. У даному випадку з-під знака кореня винесли множник 2.

Приклад 1. Винесіть множник з-під знака кореня у виразі $\sqrt{x^{11}}$.

Розв'язання. Вираз $\sqrt{x^{11}}$ має зміст, якщо $x \geq 0$, бо якщо $x < 0$, то й $x^{11} < 0$. Подамо вираз x^{11} у вигляді добутку $x^{10} \cdot x$, у якому x^{10} є степенем з парним показником. Тоді

$$\sqrt{x^{11}} = \sqrt{x^{10} \cdot x} = \sqrt{x^{10}} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{(x^5)^2} \cdot \sqrt{x} = |x^5| \sqrt{x}.$$

Оскільки $x \geq 0$, то $x^5 \geq 0$. Тому $|x^5| = x^5$.

Отже, $\sqrt{x^{11}} = x^5 \sqrt{x}$.

Відповідь. $x^5 \sqrt{x}$.

2. Внесення множника під знак кореня.

Розглянемо тотожне перетворення, обернене до попереднього. Скористаємося правилом множення коренів:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}.$$

Кажуть, що *множник внесли під знак кореня*. У даному випадку під знак кореня внесли множник 2.

Зазначимо, що під знак кореня можна вносити лише додатний множник.

Приклад 2. Внести множник під знак кореня:

1) $-2\sqrt{3}$; 2) $m\sqrt{5}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} 1) -2\sqrt{3} &= -1 \cdot 2\sqrt{3} = -1 \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = -1 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = \\ &= -1 \cdot \sqrt{4 \cdot 3} = -\sqrt{12}. \end{aligned}$$

2) Множник m може набувати будь-яких значень (бути додатним, нулем або від'ємним). Тому слід розглянути два випадки:

якщо $m \geq 0$, то $m\sqrt{5} = |m|\sqrt{5} = \sqrt{m^2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5m^2}$;

якщо $m < 0$, то $m\sqrt{5} = -|m|\sqrt{5} = -\sqrt{m^2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{5m^2}$.

Відповідь. 1) $-\sqrt{12}$;

2) $\sqrt{5m^2}$, якщо $m \geq 0$; $-\sqrt{5m^2}$, якщо $m < 0$.

3. Додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня виразів, що містять квадратні корені.

Використовуючи властивості множення і ділення коренів, можна виконувати арифметичні дії з виразами, що містять квадратні корені.

Приклад 3. 1) $5\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{2} = 35\sqrt{6}$; 2) $7\sqrt{a} \cdot (-3\sqrt{6}) = -21\sqrt{6a}$;

$$3) 8\sqrt{18} : 4\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{18}}{4\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6;$$

$$4) 7\sqrt{x} : (-2\sqrt{x}) = -\frac{7\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = -\frac{7}{2}.$$

Використовуючи тотожність $(\sqrt{a})^2 = a$, де $a \geq 0$, можна підносити до степеня вирази, що містять квадратні корені.

Приклад 4. 1) $(-5\sqrt{2})^2 = (-5)^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 25 \cdot 2 = 50$;

2) $(\sqrt{a})^3 = (\sqrt{a})^2 \sqrt{a} = a\sqrt{a}$.

Розглянемо приклади, коли квадратні корені можна додавати.

Приклад 5. Спростіть вираз $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$.

Розв'язання. Доданки містять спільний множник $\sqrt{2}$. Винесемо його за дужки та виконаємо дію в дужках: $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \sqrt{2}(5 + 3) = 8\sqrt{2}$.

Зазвичай розв'язання записують коротше: $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

Зауважимо, що вирази $5\sqrt{2}$ і $3\sqrt{2}$ у даному прикладі називають *подібними радикалами* (за аналогією до подібних доданків), ми їх додали за правилом зведення подібних доданків.

Приклад 6. Спростіть вираз $\sqrt{12a} + \sqrt{48a} - \sqrt{27a}$.

Розв'язання. У кожному з доданків можна винести множник з-під знака кореня: $\sqrt{12a} + \sqrt{48a} - \sqrt{27a} = \sqrt{4 \cdot 3a} + \sqrt{16 \cdot 3a} - \sqrt{9 \cdot 3a} = 2\sqrt{3a} + 4\sqrt{3a} - 3\sqrt{3a}$.

Одержали суму, що містить подібні радикали, після зведення яких одержимо $3\sqrt{3a}$.

Відповідь. $3\sqrt{3a}$.

Приклад 7. Спростіть вираз:

$$1) (\sqrt{7} + 2\sqrt{3})(\sqrt{7} - 2\sqrt{3}); \quad 2) (2\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 + \sqrt{15}.$$

Розв'язання. Можемо застосувати формули скороченого множення.

$$1) (\sqrt{7} + 2\sqrt{3})(\sqrt{7} - 2\sqrt{3}) = (\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 7 - 4 \cdot 3 = -5;$$

$$2) (2\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 + \sqrt{15} = ((2\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2) + \sqrt{15} = 4 \cdot 5 - 4\sqrt{15} + 3 + \sqrt{15} = 23 - 3\sqrt{15}.$$

Відповідь. 1) -5 ; 2) $23 - 3\sqrt{15}$.

4. Скорочення дробів.

Приклад 8. Скоротіть дріб: 1) $\frac{a^2 - 7}{a - \sqrt{7}}$; 2) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{3 - \sqrt{3}}$.

Розв'язання. 1) Врахувавши, що $7 = (\sqrt{7})^2$, чисельник дробу подамо у вигляді різниці квадратів, тоді матимемо:

$$\frac{a^2 - 7}{a - \sqrt{7}} = \frac{a^2 - (\sqrt{7})^2}{a - \sqrt{7}} = \frac{(a - \sqrt{7})(a + \sqrt{7})}{a - \sqrt{7}} = a + \sqrt{7}.$$

2) Врахувавши, що $\sqrt{6} = \sqrt{2}\sqrt{3}$, а $3 = (\sqrt{3})^2$, у чисельнику і знаменнику винесемо за дужки спільний множник, матимемо:

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Відповідь. 1) $a + \sqrt{7}$; 2) $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

5. Звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу.

Приклад 9. Перетворіть дріб $\frac{a}{\sqrt{5}}$ так, щоб він не містив кореня в знаменнику.

Розв'язання. Враховуючи, що $(\sqrt{a})^2 = a$, достатньо чисельник і знаменник дробу помножити на $\sqrt{5}$:

$$\frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Відповідь. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

У такому випадку кажуть, що ми звільнилися від ірраціональності в знаменнику дробу.

Приклад 10. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{2}{\sqrt{7}-1}$.

Розв'язання. Помножимо чисельник і знаменник дробу на $\sqrt{7}+1$, щоб у знаменнику отримати формулу скороченого множення різниці двох виразів на їх суму:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{7}-1} &= \frac{2(\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)} = \frac{2(\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7})^2-1^2} = \frac{2(\sqrt{7}+1)}{7-1} = \\ &= \frac{2(\sqrt{7}+1)}{6} = \frac{\sqrt{7}+1}{3}. \end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{\sqrt{7}+1}{3}$.

Зауважимо, що вираз $\sqrt{7}+1$ називають *спряженим* до виразу $\sqrt{7}-1$. Узагалі, якщо у формулах скороченого множення результатом множення дужок, що містять радикали, є раціональний вираз, то вирази у дужках називають *взаємно спряженими*. Так $\sqrt{7}-1$ і $\sqrt{7}+1$ – взаємно спряжені вирази.

Взаємно спряженими також є вирази $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ і $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $3\sqrt{2}+\sqrt{5}$ і $3\sqrt{2}-\sqrt{5}$ тощо.



1. На прикладі виразу $\sqrt{4m}$ покажіть, як можна винести множник з-під знака кореня.
2. На прикладі добутку $3\sqrt{p}$ покажіть, як можна внести множник під знак кореня.

3. Наведіть приклади подібних радикалів.
 4. За яким правилом можна додавати (віднімати) подібні радикали?
 5. На який множник треба помножити чисельник і знаменник, щоб звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу: $\frac{2}{\sqrt{7}}$; $\frac{5}{\sqrt{a+1}}$?
 6. Наведіть приклади взаємно спряжених виразів.



Початковий рівень

657. (Усно.) Виконайте дії:

1) $5\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$; 2) $7\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$; 3) $3\sqrt{7} + \sqrt{7}$; 4) $2\sqrt{5} - \sqrt{5}$.

658. Виконайте дії:

1) $7\sqrt{11} + 2\sqrt{11}$; 2) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{3} + 6\sqrt{3}$; 4) $3\sqrt{7} - \sqrt{7}$.

659. Подайте у вигляді кореня:

1) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$; 2) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11}}$; 3) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{b}$; 4) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{a}}$.

660. Подайте у вигляді кореня:

1) $\sqrt{3}\sqrt{7}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}}$; 3) $\sqrt{5}\sqrt{a}$; 4) $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{x}}$.



Середній рівень

661. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{8}$; 2) $\sqrt{63}$; 3) $\sqrt{250}$; 4) $\sqrt{363}$;
 5) $\sqrt{3^2 \cdot 19}$; 6) $\sqrt{2^4 \cdot 7}$; 7) $\sqrt{5^2 \cdot 7^3}$; 8) $\sqrt{5^3 \cdot 2^5}$.

662. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{20}$; 2) $\sqrt{50}$; 3) $\sqrt{27}$; 4) $\sqrt{192}$;
 5) $\sqrt{5^2 \cdot 17}$; 6) $\sqrt{3^4 \cdot 2}$; 7) $\sqrt{7^2 \cdot 2^3}$; 8) $\sqrt{3^5 \cdot 5^3}$.

663. Винесіть множник з-під знака кореня і спростіть отриманий вираз:

1) $\frac{1}{2}\sqrt{28}$; 2) $-\frac{3}{5}\sqrt{500}$; 3) $1,2\sqrt{75}$; 4) $-1,25\sqrt{48}$.

664. Внесіть множник з-під знака кореня і спростіть отриманий вираз:

$$1) 0,5\sqrt{44}; \quad 2) -\frac{2}{5}\sqrt{125}; \quad 3) 0,7\sqrt{300}; \quad 4) -1,5\sqrt{112}.$$

665. Внесіть множник під знак кореня:

$$1) 3\sqrt{2}; \quad 2) 7\sqrt{5}; \quad 3) -2\sqrt{3}; \quad 4) -5\sqrt{10};$$

$$5) 10\sqrt{m}; \quad 6) \frac{1}{2}\sqrt{8x}; \quad 7) -0,1\sqrt{10a}; \quad 8) 7\sqrt{\frac{1}{7}c}.$$

666. Внесіть множник під знак кореня:

$$1) 4\sqrt{3}; \quad 2) 2\sqrt{11}; \quad 3) -3\sqrt{5}; \quad 4) -7\sqrt{2};$$

$$5) 5\sqrt{p}; \quad 6) \frac{1}{3}\sqrt{18x}; \quad 7) -0,2\sqrt{10t}; \quad 8) 6\sqrt{\frac{1}{6}y}.$$

667. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt{25x} + \sqrt{49x} - \sqrt{36x}; \quad 2) \sqrt{18} - \sqrt{32} + \sqrt{50};$$

$$3) \sqrt{8a} + \frac{1}{2}\sqrt{200a} - \sqrt{50a}; \quad 4) \sqrt{3m} - \sqrt{p} + \sqrt{12m}.$$

668. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt{100a} + \sqrt{64a} - \sqrt{121a}; \quad 2) \sqrt{48} - \sqrt{27} + \sqrt{75};$$

$$3) \sqrt{5b} - \frac{1}{2}\sqrt{20b} + \sqrt{500b}; \quad 4) \sqrt{7a} + \sqrt{b} + \sqrt{63a}.$$

669. Виконайте множення:

$$1) \sqrt{2}(\sqrt{8} - \sqrt{72}); \quad 2) (2\sqrt{3} - \sqrt{27} + \sqrt{48})\sqrt{3};$$

$$3) (2 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}); \quad 4) (3 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5}).$$

670. Виконайте множення:

$$1) \sqrt{5}(\sqrt{5} + \sqrt{20}); \quad 2) (5\sqrt{2} - \sqrt{18} + \sqrt{50})\sqrt{2};$$

$$3) (1 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}); \quad 4) (2 + \sqrt{7})(1 - \sqrt{7}).$$

671. Спростіть вираз, використовуючи формули скороченого множення:

$$1) (\sqrt{11} + \sqrt{7})(\sqrt{11} - \sqrt{7}); \quad 2) (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3});$$

$$3) (2\sqrt{3} - \sqrt{5})(2\sqrt{3} + \sqrt{5}); \quad 4) (\sqrt{2} + \sqrt{7})^2 - 9;$$

$$5) (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + 2\sqrt{6}; \quad 6) (\sqrt{3} - \sqrt{27})^2.$$

672. Спростіть вираз, використовуючи формули скороченого множення:

- 1) $(\sqrt{19} + \sqrt{3})(\sqrt{19} - \sqrt{3})$; 2) $(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})$;
 3) $(4\sqrt{3} - \sqrt{19})(4\sqrt{3} + \sqrt{19})$; 4) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 - 8$;
 5) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{10}$; 6) $(\sqrt{50} - \sqrt{2})^2$.

673. Розкладіть на множники, використовуючи формулу різниці квадратів:

- 1) $x^2 - 3$; 2) $17 - a^2$; 3) $4a^2 - 5$;
 4) $1 - 2x^2$; 5) $a - 9$, де $a \geq 0$; 6) $b - c$, де $b \geq 0, c \geq 0$.

674. Розкладіть на множники, використовуючи формулу різниці квадратів:

- 1) $5 - x^2$; 2) $9m^2 - 7$; 3) $16 - 3b^2$; 4) $b - 2$, де $b \geq 0$.

675. Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{x^2 - 5}{x + \sqrt{5}}$; 2) $\frac{7 - \sqrt{a}}{49 - a}$; 3) $\frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2}}$; 4) $\frac{2\sqrt{3} + 3}{5\sqrt{3}}$.

676. Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{a^2 - 3}{a - \sqrt{3}}$; 2) $\frac{5 + \sqrt{b}}{25 - b}$; 3) $\frac{\sqrt{5} + 5}{\sqrt{5}}$; 4) $\frac{7\sqrt{2} - 2}{3\sqrt{2}}$.

677. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

- 1) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{10}{\sqrt{5}}$; 3) $\frac{m}{\sqrt{n}}$; 4) $\frac{6}{5\sqrt{3}}$.

678. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

- 1) $\frac{5}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{9}{\sqrt{3}}$; 3) $\frac{a}{\sqrt{b}}$; 4) $\frac{8}{3\sqrt{2}}$.



Достатній рівень

679. Винесіть множник з-під знака кореня:

- 1) $\sqrt{13m^2}$, якщо $m \geq 0$; 2) $\sqrt{b^3}$;
 3) $\sqrt{7a^6}$, якщо $a < 0$; 4) $\sqrt{16x^7}$.

680. Винесіть множник з-під знака кореня:

- 1) $\sqrt{11x^2}$, якщо $x \geq 0$; 2) $\sqrt{c^5}$;
 3) $\sqrt{2p^{10}}$, якщо $p < 0$; 4) $\sqrt{36m^{11}}$.

681. Внесіть множник під знак кореня:

- 1) $a\sqrt{2}$, якщо $a \geq 0$; 2) $b^3\sqrt{5}$, якщо $b < 0$;
 3) $b\sqrt{\frac{3}{b}}$; 4) $x^3\sqrt{-x}$.

682. Внесіть множник під знак кореня:

- 1) $b\sqrt{3}$, якщо $b \geq 0$; 2) $c^5\sqrt{7}$, якщо $c < 0$;
 3) $x^2\sqrt{\frac{5}{x}}$; 4) $y\sqrt{-y}$.

683. Спростіть вираз:

- 1) $(\sqrt{2} - 3\sqrt{5})^2 + \sqrt{360}$;
 2) $(3\sqrt{2} + 7\sqrt{3})^2 - \sqrt{150}$;
 3) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})$.

684. Розкладіть на множники:

- 1) $\sqrt{a} - \sqrt{3a}$; 2) $\sqrt{7p} + \sqrt{4p}$; 3) $\sqrt{21} + \sqrt{7}$;
 4) $\sqrt{6} - \sqrt{10}$; 5) $2\sqrt{m} - \sqrt{6m}$; 6) $\sqrt{5x} - \sqrt{10x}$.

685. Розкладіть на множники:

- 1) $\sqrt{p} + \sqrt{2p}$; 2) $\sqrt{42} - \sqrt{6}$; 3) $3\sqrt{a} + \sqrt{6a}$.

686. Скоротіть дріб:

- 1) $\frac{x + 6\sqrt{x}}{x - 36}$; 2) $\frac{a + 6\sqrt{a}\sqrt{b} + 9b}{a - 9b}$; 3) $\frac{\sqrt{10} - 5}{2 - \sqrt{10}}$.

687. Скоротіть дріб:


- 1) $\frac{a - 25}{a - 5\sqrt{a}}$; 2) $\frac{x - 4\sqrt{x}\sqrt{y} + 4y}{x - 4y}$; 3) $\frac{11 + \sqrt{22}}{\sqrt{22} + 2}$.

688. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

- 1) $\frac{15}{\sqrt{6} - 1}$; 2) $\frac{2}{\sqrt{11} + \sqrt{7}}$; 3) $\frac{1}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$.

689. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

- 1) $\frac{10}{\sqrt{3} + 1}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{15} - \sqrt{3}}$; 3) $\frac{1}{5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}}$.


4 Високий рівень

690. Обчисліть:

1) $(\sqrt{3} - \sqrt{5} - \sqrt{3 + \sqrt{5}})^2$;

2) $\frac{15}{11 + 2\sqrt{30}} + \frac{15}{11 - 2\sqrt{30}}$;

3) $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$;

4) $\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}\right)^2$.

691. Знайдіть:

1) $(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}})^2$;

2) $\frac{3}{10 - 3\sqrt{11}} + \frac{3}{10 + 3\sqrt{11}}$;

3) $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{6}}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{6}}{\sqrt{7} + \sqrt{6}}$;

4) $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}\right)^2$.

692. Знайдіть суму:


$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{13}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{45} + \sqrt{49}}.$$

693. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sqrt{m} + 1}{m\sqrt{m} + m + \sqrt{m}} : \frac{1}{m^2 - \sqrt{m}}$;

2) $\frac{a + b}{\sqrt{ab} - b} - \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$;

3) $\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right) : \sqrt{\frac{y}{x}}$.



Вправи для повторення

3 694. Обчисліть:

1) $\frac{216^3}{36^4}$;

2) $\frac{81^6}{27^8}$;

3) $\frac{4^8 \cdot 16}{64^3}$;

4) $\frac{2^8 \cdot 13^8}{26^7}$.

695. Розв'яжіть рівняння $\frac{2x + 1}{x} - \frac{1}{x - 1} = \frac{2x^2}{x^2 - x}$.

4 696. Доведіть, що значення виразу $\sqrt{10n - 3}$, де $n \in \mathbb{N}$, не може бути натуральним числом.



Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

697. Побудуйте графік функції $y = x^2$, де $x \geq 0$. Якою буде область значень цієї функції?

698. Використовуючи графік функції $y = 2x$, знайдіть:

- 1) значення y , що відповідає $x = -3$, $x = 1$;
- 2) значення x , що відповідає $y = -2$, $y = 6$;
- 3) два значення x , при яких значення функції більше за 3; менше від 3.



Цікаві задачі для учнів неледачих



699. (Перша міжнародна математична олімпіада школярів, 1959 р.) Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n дріб $\frac{21n + 4}{14n + 3}$ є нескоротним.



§ 19. ФУНКЦІЯ $y = \sqrt{x}$, ЇЇ ГРАФІК І ВЛАСТИВОСТІ

Приклад 1. Нехай S см² – площа квадрата, a см – довжина його сторони. Оскільки $S = a^2$, то залежність довжини сторони a квадрата від його площі S можна задати формулою

$$a = \sqrt{S}.$$

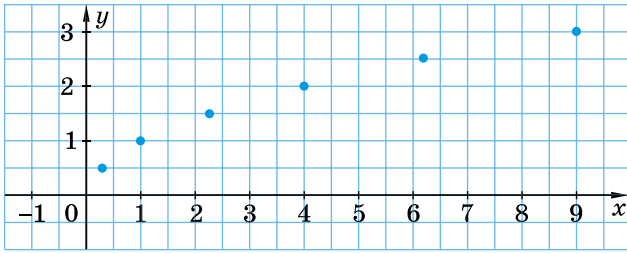
Розглянемо функцію $y = \sqrt{x}$. Очевидно, що змінна x набуває лише невід'ємних значень, тобто $x \geq 0$.

Складемо таблицю значень функції $y = \sqrt{x}$ для кількох значень аргументу:

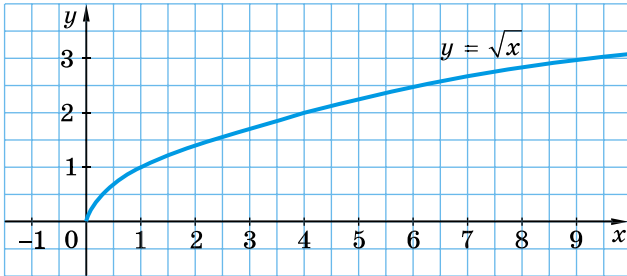
| | | | | | | | |
|-----|---|------|---|------|---|------|---|
| x | 0 | 0,25 | 1 | 2,25 | 4 | 6,25 | 9 |
| y | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |

Позначимо ці точки на координатній площині (мал. 15). Якби на цій самій площині ми позначили б більшу кількість точок, координати яких задовольняють рівняння $y = \sqrt{x}$, а потім з'єднали їх плавною лінією, то отримали б графік функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 16).

Графіком цієї функції є гілка параболи.



Мал. 15



Мал. 16

Узагальнимо *властивості* функції $y = \sqrt{x}$.



1. Областю визначення функції є множина всіх невід'ємних чисел: $x \geq 0$.
2. Областю значень функції є множина всіх невід'ємних чисел: $y \geq 0$.
3. Графік функції – гілка параболи, що виходить з точки $(0; 0)$, усі інші точки графіка лежать у першій координатній чверті.
4. Більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

Остання властивість дає змогу порівнювати значення виразів, що містять корені.

Приклад 2. Порівняйте числа:

1) $\sqrt{12}$ і $\sqrt{11}$; 2) 7 і $\sqrt{50}$; 3) $5\sqrt{2}$ і $4\sqrt{3}$.

Розв'язання. 1) Оскільки $12 > 11$, то $\sqrt{12} > \sqrt{11}$.

2) $7 = \sqrt{49}$, а $49 < 50$, тому $\sqrt{49} < \sqrt{50}$, отже, $7 < \sqrt{50}$.

3) Внесемо множник в обох виразах під знак кореня:

$$5\sqrt{2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{50}; \quad 4\sqrt{3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{48}.$$

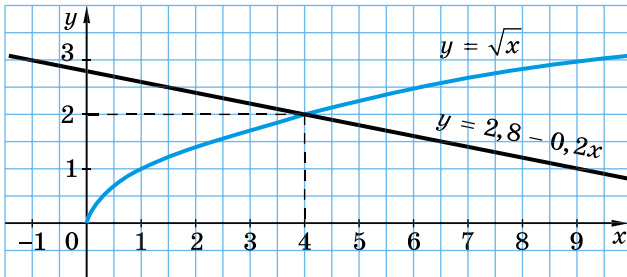
Оскільки $50 > 48$, то $\sqrt{50} > \sqrt{48}$, а тому $5\sqrt{2} > 4\sqrt{3}$.

Приклад 3. Розв'яжіть графічно рівняння $5\sqrt{x} = 14 - x$.

Розв'язання. Оскільки ми поки що не вміємо будувати графік функції $y = 5\sqrt{x}$, то поділимо обидві частини рівняння на число 5. Одержимо рівняння: $\sqrt{x} = 2,8 - 0,2x$.

Побудуємо графіки функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = 2,8 - 0,2x$ в одній системі координат (мал. 17). Графіки перетнулися в точці з абсцисою 4. Перевіркою впевнюємося, що число 4 – корінь рівняння. Дійсно, $5\sqrt{4} = 5 \cdot 2 = 10$ і $14 - 4 = 10$.

Відповідь. 4.

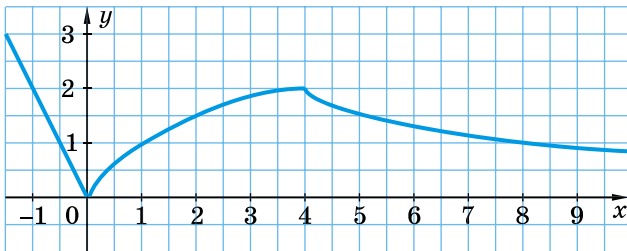


Мал. 17

Приклад 4. Побудуйте графік функції

$$y = \begin{cases} -2x, & \text{якщо } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 4, \\ \frac{8}{x}, & \text{якщо } x > 4. \end{cases}$$

Відповідь. Графік зображено на малюнку 18.



Мал. 18



1. Що собою являє графік функції $y = \sqrt{x}$?
2. Сформулюйте властивості функції $y = \sqrt{x}$.



Початковий рівень

700. Для функції $y = \sqrt{x}$ знайдіть значення y , що відповідає значенню $x = 9; 0; 81$.

701. Для функції $y = \sqrt{x}$ знайдіть значення y , що відповідає значенню $x = 1; 4; 100$.



Середній рівень

702. Використовуючи графік функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 16), знайдіть:

- 1) значення y для $x = 1,5; 3; 4; 6,5$;
- 2) значення x , при яких $y = 1; 2,5$;
- 3) два значення x , при яких значення функції є більшим за число 2; меншим від числа 2.

703. За графіком функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 16) знайдіть:

- 1) значення функції для значень аргументу $0,5; 2; 5,5$;
- 2) значення аргументу, при яких значення функції дорівнює $0,5; 4$;
- 3) два значення x , при яких значення функції є більшим за число 1; меншим від числа 1.

704. Не будуючи графіка функції $y = \sqrt{x}$, визначте, через які з даних точок він проходить:

- | | | |
|------------------|------------------|----------------------|
| 1) $A (36; 4)$; | 2) $B (4; 16)$; | 3) $C (-4; 2)$; |
| 4) $D (0; 0)$; | 5) $M (1; -1)$; | 6) $P (0,5; 0,25)$. |

705. Чи належить графіку функції $y = \sqrt{x}$ точка:

- | | |
|------------------|----------------------|
| 1) $F (16; 6)$; | 2) $K (-36; 6)$; |
| 3) $L (5; 25)$; | 4) $N (0,9; 0,81)$? |

706. Порівняйте числа:

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------|
| 1) $2\sqrt{3}$ і $\sqrt{11}$; | 2) $\sqrt{29}$ і $2\sqrt{7}$; |
| 3) $3\sqrt{5}$ і $2\sqrt{10}$; | 4) $4\sqrt{3}$ і $3\sqrt{7}$. |

707. Порівняйте значення виразів:

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| 1) $5\sqrt{2}$ і $\sqrt{51}$; | 2) $\sqrt{146}$ і $7\sqrt{3}$; |
| 3) $2\sqrt{5}$ і $3\sqrt{2}$; | 4) $2\sqrt{7}$ і $3\sqrt{3}$. |



Достатній рівень

708. Порівняйте числа:

$$1) \frac{2}{3}\sqrt{45} \text{ і } \frac{1}{2}\sqrt{84}; \quad 2) 0,2\sqrt{1\frac{3}{8}} \text{ і } 0,4\sqrt{\frac{11}{32}}.$$

709. Порівняйте числа:

$$1) \frac{3}{4}\sqrt{48} \text{ і } \frac{3}{5}\sqrt{75}; \quad 2) 0,3\sqrt{1\frac{4}{9}} \text{ і } 0,2\sqrt{1\frac{3}{4}}.$$

710. Знайдіть область значень функції $y = \sqrt{x}$, якщо:
1) $0 \leq x \leq 4$; 2) $1 \leq x \leq 9$.

711. Розв'яжіть графічно рівняння $\sqrt{x} = 6 - x$.

712. Розв'яжіть графічно рівняння $3 - 2x = \sqrt{x}$.



Високий рівень

713. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \begin{cases} x - 2, & \text{якщо } x < 4, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geq 4; \end{cases} \quad 2) y = \frac{x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}.$$

714. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < 1, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geq 1; \end{cases} \quad 2) y = \frac{\sqrt{x} - x}{1 - \sqrt{x}}.$$



Вправи для повторення

2 715. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{x} = \frac{2}{3}; \quad 2) \sqrt{x} = -5; \quad 3) x^2 = 16; \quad 4) x^2 = -1.$$

3 716. Винесіть множник з-під знака кореня:

$$1) \sqrt{c^5}; \quad 2) \sqrt{3b^{10}}, \text{ якщо } b < 0.$$



717. Знайдіть значення виразу $(\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}})^2$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



718. Обчисліть:

$$13 \frac{1}{1997} \cdot 20 \frac{1973}{2000} - 6 \frac{1991}{2000} \cdot 4 \frac{3}{1997} + \frac{3}{400}.$$

Домашня самостійна робота № 4

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 1. Для функції $y = x^2$ знайдіть значення y , що відповідає значенню $x = -3$.

А. 6; Б. -6; В. 9; Г. -9.

2. Укажіть вираз, що не має змісту.

А. $\sqrt{17}$; Б. $\sqrt{-4}$; В. $\sqrt{0}$; Г. $\sqrt{16}$.

3. Укажіть число, що є ірраціональним.

А. $\sqrt{25}$; Б. $\sqrt{\frac{9}{16}}$; В. 5; Г. $\sqrt{5}$.

2 4. Обчисліть $5\sqrt{0,16} - 2\sqrt{1\frac{9}{16}}$.

А. -0,5; Б. 0,5; В. 4,5; Г. -2,325.

5. Розв'яжіть рівняння $x^2 = 36$.

А. 6; Б. -6; 6; В. 18; Г. розв'язків немає.

6. Скоротіть дріб $\frac{2\sqrt{3} + 3}{7\sqrt{3}}$.

А. $\frac{5}{7}$; Б. $\frac{2\sqrt{3} + 1}{7}$; В. $\frac{2 + \sqrt{3}}{7}$; Г. $\frac{2 - \sqrt{3}}{7}$.

3 7. Укажіть нерівність, що є правильною.

А. $\frac{2}{3}\sqrt{27} > \sqrt{13}$; Б. $\frac{1}{2}\sqrt{48} < \frac{1}{9}\sqrt{108}$;

В. $0,1\sqrt{120} < \frac{1}{5}\sqrt{15}$; Г. $\frac{2}{5}\sqrt{125} > 0,2\sqrt{300}$.

8. Розв'яжіть рівняння $3\sqrt{\frac{x}{4}} - 6 = 0$.

- А. 64; Б. 16; В. 1; Г. 8.

9. Винесіть множник з-під знака кореня у виразі $\sqrt{7a^{10}}$, якщо відомо, що $a < 0$.

- А. $-a^5\sqrt{7}$; Б. $a^5\sqrt{7}$; В. $a^{10}\sqrt{7}$; Г. $-a\sqrt{7}$.

10. Спростіть вираз $\sqrt{(\sqrt{13} - 12)^2} + \sqrt{(\sqrt{13} - 2)^2}$.

- А. $2\sqrt{13} - 14$; Б. 14; В. 10; Г. $2\sqrt{13} - 10$.

11. Укажіть усі такі значення a , при яких рівняння $ax^2 = -9$ має два різних дійсних корені.

- А. $a > 0$; Б. $a \geq 0$; В. $a < 0$; Г. $a \leq 0$.

12. Знайдіть значення виразу $(\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 + 4\sqrt{5}})^2$.

- А. 20; Б. 18; В. 17; Г. 16.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ДО § 13–19

1. Для функції $y = x^2$ знайдіть значення y , яке відповідає значенню $x = -4$; 7.

2. Чи має зміст вираз:

- 1) $\sqrt{9}$; 2) $\sqrt{-4}$; 3) $\sqrt{0}$; 4) $\sqrt{3,7}$?

3. Із чисел 2 ; $1\frac{4}{5}$; -8 ; $\sqrt{3}$; 5 ; 0 ; $-\sqrt{8}$; $-2\frac{1}{3}$ випишіть:

- 1) натуральні числа; 2) цілі недодатні числа;
3) раціональні додатні числа; 4) ірраціональні числа.

4. Обчисліть:

1) $\sqrt{2\frac{14}{25}} - 10\sqrt{0,04}$; 2) $(-3\sqrt{5})^2$;

3) $\sqrt{0,1} \cdot \sqrt{1,6}$; 4) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1,5}}$.

5. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\sqrt{x} = \frac{3}{4}$; 2) $\sqrt{x} = -1$; 3) $x^2 = 9$; 4) $x^2 = -4$.

6. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2 - 3}{x + \sqrt{3}}$;

2) $\frac{4\sqrt{7} + 7}{5\sqrt{7}}$.

3 7. Порівняйте числа:

1) $\frac{3}{5}\sqrt{50}$ і $\frac{2}{5}\sqrt{75}$;

2) $0,2\sqrt{2\frac{3}{8}}$ і $0,4\sqrt{\frac{19}{32}}$.

8. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{b^7}$;

2) $\sqrt{5m^6}$, якщо $m < 0$.

4 9. Знайдіть значення виразу $(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{5 + 2\sqrt{6}})^2$.

Додаткові завдання

4 10. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} 6 - x, & \text{якщо } x < 4; \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geq 4. \end{cases}$

11. Спростіть вираз $\sqrt{(\sqrt{7} - 13)^2} + \sqrt{(\sqrt{7} - 2)^2}$.

Вправи для повторення розділу 2

До § 13

1 719. Укажіть область визначення і область значень функції $y = x^2$.

2 720. Побудуйте графік функції $y = x^2$, якщо $-3 \leq x \leq 2$.

3 721. Побудуйте графік функції, що задає залежність площі квадрата S (у см²) від довжини його сторони a (у см). Якою є область визначення цієї функції?

722. 1) Як зміниться площа квадрата, якщо кожен його сторону збільшити у 3 рази; зменшити в 9 разів?

2) Як треба змінити кожен сторону квадрата, щоб його площа збільшилася в 4 рази; зменшилася в 25 разів?

723. Точка $A(m; n)$, де $m \neq 0$, $n \neq 0$, належить графіку функції $y = x^2$. Чи належить цьому графіку точка:

1) $B(m; -n)$;

2) $C(-m; n)$;

3) $D(-m; -n)$?

724. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = x^2$ та $y = x + 6$ і знайдіть координати точок їх перетину.

4 725. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq 1, \\ 2 - x, & \text{якщо } x > 1; \end{cases} \quad 2) y = \begin{cases} 6 + x, & \text{якщо } x < -2, \\ x^2, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2, \\ \frac{8}{x}, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

До § 14

1 726. Доведіть, що:

1) $\sqrt{0,49} = 0,7$;

2) $\sqrt{2500} = 50$.

2 727. Обчисліть:

1) $\sqrt{49}$;

2) $\sqrt{2601}$;

3) $\sqrt{5,76}$;

4) $\sqrt{\frac{25}{36}}$;

5) $\sqrt{10,89} + \sqrt{0,01} - 3,2$;

6) $\sqrt{6\frac{1}{4}} - 2\sqrt{1,44} + 0,9$.

728. Знайдіть значення виразу $\sqrt{2x - 8y}$, якщо:

1) $x = 1,6$; $y = 0,4$;

2) $x = 0,08$; $y = -0,3$.

3 729. Обчисліть:

1) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{0,09} + 0,78\sqrt{100}\right) \cdot (\sqrt{2,25} + 2\sqrt{30,25})$;

2) $\left(-7\sqrt{\frac{4}{49}} + 3\sqrt{5,29}\right) : (\sqrt{5^2 + 12^2} - \sqrt{65,61})$.

730. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{5x} + 3 = 13$;

2) $\frac{1}{3}\sqrt{x-1} = 1,2$.

4 731. При яких значення x має зміст вираз:

1) $\sqrt{x-2}$;

2) $\sqrt{(x-3)^5}$;

3) $\frac{\sqrt{-x}}{x+1}$;

4) $\sqrt{x} + \sqrt{-x}$?

732. Розв'яжіть рівняння відносно змінної x для всіх можливих значень a :

- 1) $a\sqrt{x} = 0$; 2) $a\sqrt{x} = 1$;
 3) $a\sqrt{x-1} = 5$; 4) $\sqrt{ax} = 0$.

До § 15

733. Раціональним чи ірраціональним є дане число? Раціональне число запишіть без знака кореня:

- 1) $\sqrt{9}$; 2) $\sqrt{11}$; 3) $-\sqrt{4}$; 4) $\sqrt{13}$.

734. Подайте у вигляді нескінченного десяткового дробу число:

- 1) $\frac{1}{3}$; 2) -29 ; 3) $5,17$; 4) $\frac{7}{27}$.

735. Між якими двома послідовними натуральними числами міститься число:

- 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{99}$; 4) $\sqrt{20}$?

736. Чи правильно, що:

- 1) різниця двох цілих від'ємних чисел – число ціле від'ємне;
- 2) добуток двох раціональних чисел – число раціональне;
- 3) сума кубів двох цілих чисел – число натуральне;
- 4) сума квадратів двох цілих чисел – число ціле невід'ємне?

737. Укажіть два раціональних числа, що лежать між числами:

- 1) $\sqrt{5}$ і $\sqrt{7}$; 2) $-\sqrt{13}$ і $-\sqrt{11}$.

738. Доведіть, що не існує раціонального числа, що є розв'язком рівняння $x^2 = 7$.

739. Доведіть, що:

- 1) $\frac{1}{2} + 0,1(6) = \frac{2}{3}$; 2) $0,8(3) - \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$.

До § 16

740. Чи є правильною рівність:

- 1) $(\sqrt{19})^2 = 19$; 2) $(\sqrt{17})^2 = 17^2$;
 3) $(\sqrt{5})^2 = \sqrt{5}$; 4) $(\sqrt{0,1})^2 = 0,1$?

2 741. Обчисліть:

$$1) (-\sqrt{8})^2; \quad 2) \sqrt{13} \cdot (-\sqrt{13}); \quad 3) \left(\frac{1}{8}\sqrt{2}\right)^2;$$

$$4) (-0,1\sqrt{10})^2; \quad 5) \left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)^2; \quad 6) \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2;$$

$$7) \left(-2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2; \quad 8) \left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2.$$

742. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{1}{2}x^2 = 32; \quad 2) x^2 - 5 = 0; \quad 3) 2x^2 = 18; \quad 4) 49x^2 = 1.$$

3 743. Складіть рівняння, коренями якого є числа:

$$1) 5 \text{ і } -5; \quad 2) 0,1 \text{ і } -0,1; \quad 3) -\frac{1}{4} \text{ і } \frac{1}{4};$$

$$4) -\frac{3}{7} \text{ і } \frac{3}{7}; \quad 5) \sqrt{7} \text{ і } -\sqrt{7}; \quad 6) -\frac{1}{2}\sqrt{5} \text{ і } \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

744. Спростіть вираз:

$$1) \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}}{9}; \quad 2) (\sqrt{\sqrt{7}})^2; \quad 3) (\sqrt{3\sqrt{2}})^2; \quad 4) (\sqrt{\sqrt{5}})^4.$$

745. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{1}{8}(x-1)^2 = \frac{1}{2}; \quad 2) \frac{(x+2)^2}{5} = \frac{16}{5}.$$

4 746. Відомо, що $xy = 20$, $x^2 + y^2 = 41$. Знайдіть $x + y$.

747. При яких значеннях m рівняння $x^2 = m - 1$:

- 1) має два корені;
- 2) має тільки один корінь;
- 3) не має коренів?

До § 17

1 748. Для яких значень змінних рівність є тотожністю:

$$1) \sqrt{m \cdot n} = \sqrt{m} \cdot \sqrt{n}; \quad 2) \sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}?$$

2 749. Обчисліть:

$$1) \sqrt{\frac{0,36 \cdot 49}{121}}; \quad 2) \sqrt{\frac{25 \cdot 100}{81}}; \quad 3) \sqrt{\frac{1}{16} \cdot \frac{9}{25}}; \quad 4) \sqrt{\frac{64}{9} \cdot \frac{4}{289}}.$$

750. Обчисліть:

$$1) \sqrt{a^2}, \text{ якщо } a = 13; -17; \quad 2) -2\sqrt{x^2}, \text{ якщо } x = 0,5; -2,1.$$

751. Відомо, що $37^2 = 1369$. Знайдіть:

$$1) \sqrt{136900}; \quad 2) \sqrt{13,69}; \quad 3) \sqrt{0,1369}.$$

752. У скільки разів сторона квадрата, площа якого дорівнює 12 см^2 , більша за сторону квадрата, площа якого дорівнює 3 см^2 ?

3 753. Обчисліть:

$$1) \sqrt{4 \frac{1}{20}} \cdot \sqrt{2 \frac{2}{9}} - (\sqrt{7})^2; \quad 2) \sqrt{1 - \left(\frac{8}{17}\right)^2} + \left(-\sqrt{\frac{2}{17}}\right)^2;$$

$$3) \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2;$$

$$4) \sqrt{2 \frac{1}{5}} \cdot \sqrt{1 \frac{1}{11}} \cdot \sqrt{2 \frac{2}{5}} + \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 - (\sqrt{3})^2.$$

754. Відношення площ двох кругів дорівнює $\frac{4}{9}$, а радіус одного з них дорівнює 10 см . Знайдіть радіус другого.

755. Знайдіть значення виразу:

$$1) \sqrt{3,6 \cdot 10^5}; \quad 2) \sqrt{8,1 \cdot 0,1^3};$$

$$3) 3\sqrt{15} \cdot 2\sqrt{30} \cdot \sqrt{8}; \quad 4) \sqrt{3^5 \cdot 12^3}.$$

756. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt{p^4 c^8 a^{12}}; \quad 2) \sqrt{49(-x)^2 y^6}, \text{ якщо } x < 0, y > 0;$$

$$3) \sqrt{\frac{m^{20}}{n^{24}}}; \quad 4) \sqrt{\frac{a^{10}}{b^{14}}}, \text{ якщо } a < 0, b < 0.$$

757. Спростіть вираз:

$$1) \sqrt{\sqrt{0,16^2}}; \quad 2) \sqrt{\sqrt{(-0,09)^2}};$$

$$3) \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2}; \quad 4) \sqrt{(\sqrt{11} - \sqrt{13})^2}.$$

4 758. Спростіть вираз:

$$1) \frac{x^2 - 14x + 49}{(x + 2)^2} \sqrt{\frac{x^2 + 4x + 4}{(x - 7)^2}}, \text{ якщо } x > 7;$$

$$2) \frac{p^2 - 4}{(p + 3)^2} \cdot \sqrt{\frac{p^2 + 6p + 9}{(p + 2)^2}}, \text{ якщо } p < -3.$$

759. Доведіть, що:

$$1) \sqrt{16 + 6\sqrt{7}} + \sqrt{23 - 8\sqrt{7}} = 7;$$

$$2) \sqrt{15 + 4\sqrt{11}} - \sqrt{20 - 6\sqrt{11}} = 5.$$

До § 18

1 760. Виконайте дії:

$$1) 3\sqrt{7} + 2\sqrt{7}; \quad 2) 5\sqrt{11} - \sqrt{11}; \quad 3) \sqrt{3} \cdot \sqrt{11}; \quad 4) \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{15}}.$$

2 761. Спростіть вираз:

$$1) (\sqrt{7} - \sqrt{12})(\sqrt{7} + 3\sqrt{3}); \quad 2) (\sqrt{3} - \sqrt{11})(\sqrt{33} + 1);$$

$$3) 4\sqrt{2}(2 - 7\sqrt{8}) - 7\sqrt{2}; \quad 4) (\sqrt{5} + 1)(2 - \sqrt{5}) - \sqrt{5};$$

$$5) (\sqrt{3} - 7)(4 - \sqrt{3}) - 11\sqrt{3}; \quad 6) (2 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) + 1.$$

3 762. Винесіть множник з-під знака кореня:

$$1) \sqrt{28x^9}; \quad 2) \sqrt{\frac{7m^3}{36}};$$

$$3) \sqrt{25a^2b^5}, \text{ якщо } a < 0; \quad 4) \sqrt{8x^3y^{10}}, \text{ якщо } y > 0;$$

$$5) \sqrt{-8p^7}; \quad 6) \sqrt{x^3y^3}, \text{ якщо } x < 0, y < 0.$$

763. Зведіть вираз до вигляду $a\sqrt{b}$, де b – ціле число:

$$1) \sqrt{\frac{1}{7}}; \quad 2) \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad 3) \sqrt{4\frac{1}{3}}; \quad 4) \sqrt{5\frac{1}{2}}.$$

4 764. Спростіть вираз:

$$1) \left(\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{6}} \right)^2; \quad 2) \sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{3}{8}}.$$

765. Доведіть, що рівність є правильною:

$$1) \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}; \quad 2) \sqrt{2} + 5 = \sqrt{27 + 10\sqrt{2}}.$$

766. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{2\sqrt{2} - x\sqrt{x}}; \quad 2) \frac{x + y + \sqrt{x + y}}{\sqrt{x + y}}.$$

767. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу

$$\frac{4}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}.$$

768. Доведіть, що $\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{7 - 2\sqrt{6}}$ — число натуральне.

769. Внесіть множник під знак кореня та спростіть отриманий вираз:

$$1) (x + 2)\sqrt{\frac{3}{x^2 + 4x + 4}}, \text{ якщо } x > -2;$$

$$2) (a - b)\sqrt{\frac{1}{a^2 - 2ab + b^2}}, \text{ якщо } a < b;$$

$$3) p(p + 1)\sqrt{\frac{7}{p^2 + 2p + 1}}, \text{ якщо } p < -1;$$

$$4) (b - 3)\sqrt{\frac{1}{6 - 2b}}.$$

До § 19

1 770. Чи можна обчислити значення функції $y = \sqrt{x}$ для значень $x = 4$; $x = -1$; $x = 100$; $x = -9$?

2 771. Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x}$, якщо:

$$1) 0 \leq x \leq 4; \quad 2) 1 \leq x \leq 9; \quad 3) 4 \leq x \leq 16.$$

3 772. Чи перетинається графік функції $y = \sqrt{x}$ з прямою:

$$1) y = 1; \quad 2) y = 8; \quad 3) y = 0; \quad 4) y = -1?$$

Якщо перетинається, то в якій точці?

773. Розташуйте у порядку зростання числа:

$$1) \sqrt{19,1}; 3; \sqrt{16,2}; 4; \sqrt{14}; \quad 2) \frac{1}{4}; \sqrt{0,1}; 0,2; \sqrt{\frac{1}{11}}.$$

4 774. При яких значеннях x справджується нерівність:

$$1) \sqrt{x} \geq 1; \quad 2) \sqrt{x} < 2; \quad 3) 1 < \sqrt{x} \leq 4;$$

$$4) 9 \leq \sqrt{x} < 100; \quad 5) \sqrt{x} > -1; \quad 6) \sqrt{x} \leq -2,5?$$

Розділ 3

Квадратні рівняння

У цьому розділі ви:

- **ознайомитися** з поняттям квадратного рівняння та квадратного тричлена;
- **навчитися** розв'язувати повні та неповні квадратні рівняння та рівняння, що зводяться до них; застосовувати теорему Вієта; розкладати квадратний тричлен на множники; розв'язувати текстові і прикладні задачі, математичними моделями яких є квадратні рівняння або ті, що зводяться до них.

20. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ. НЕПОВНІ КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ


У математиці, фізиці, економіці, практичній діяльності людини трапляються задачі, математичними моделями яких є рівняння, що містять змінну у другому степені.

Приклад 1. Довжина земельної ділянки на 15 м більша за ширину, а площа дорівнює 375 м^2 . Знайдіть ширину ділянки.

Розв'язання. Нехай x м – ширина ділянки, тоді її довжина – $(x + 15)$ м. За умовою задачі площа ділянки дорівнює 375 м^2 . Тоді $x(x + 15) = 375$. Отже, одержали рівняння

$$x^2 + 15x - 375 = 0.$$

Таке рівняння називають **квадратним**.

 **Квадратним рівнянням** називають рівняння вигляду $ax^2 + bx + c = 0$, де x – змінна, a , b і c – деякі числа, причому $a \neq 0$.

Наприклад, рівняння $5x^2 - 2x - 7 = 0$, $-3x^2 + x - 8 = 0$ також є квадратними.

Числа a , b і c називають **коефіцієнтами квадратного рівняння**. Число a називають **першим коефіцієнтом**, число b – **другим коефіцієнтом**, число c – **вільним членом**.

У рівнянні $x^2 + 15x - 375 = 0$ коефіцієнти такі: $a = 1$; $b = 15$; $c = -375$. У рівнянні $5x^2 - 2x - 7 = 0$ такі: $a = 5$; $b = -2$; $c = -7$, а у рівнянні $-3x^2 + x - 8 = 0$ такі: $a = -3$; $b = 1$ і $c = -8$.

Квадратне рівняння, перший коефіцієнт якого дорівнює 1, називають *зведеним*. Рівняння $x^2 + 15x - 375 = 0$ – зведене, а рівняння $5x^2 - 2x - 7 = 0$ – не є зведеним.



Якщо у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ хоча б один з коефіцієнтів b або c дорівнює нулю, то таке рівняння називають *неповним квадратним рівнянням*.

Наприклад, неповним квадратним рівнянням, у якого $b = 0$ і $c = 0$, є рівняння $-8x^2 = 0$; у якого $b = 0$, є рівняння $2x^2 - 3 = 0$; у якого $c = 0$, є рівняння $-7x^2 + 4x = 0$.

Отже, неповні квадратні рівняння бувають трьох видів:

- 1) $ax^2 = 0$; 2) $ax^2 + c = 0$; 3) $ax^2 + bx = 0$.

Розглянемо розв'язування кожного з них.

1. Рівняння вигляду $ax^2 = 0$.

Оскільки $a \neq 0$, маємо рівняння $x^2 = 0$, коренем якого є число 0.

Отже, рівняння має єдиний корінь: $x = 0$.

2. Рівняння вигляду $ax^2 + c = 0$, $c \neq 0$.

Маємо $ax^2 = -c$, тобто $x^2 = -\frac{c}{a}$. Оскільки $c \neq 0$, то і $-\frac{c}{a} \neq 0$.

Якщо $-\frac{c}{a} > 0$, то рівняння має два корені:

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{і} \quad x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \left(\text{або скорочено: } x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \right).$$

Якщо $-\frac{c}{a} < 0$, то рівняння коренів не має.

Приклад 2. Розв'язати рівняння:

$$1) -2x^2 + 50 = 0; \quad 2) 3x^2 + 9 = 0.$$

$$\begin{array}{ll} \text{Розв'язання.} & -2x^2 = -50; & 3x^2 = -9; \\ & x^2 = 25, & x^2 = -3, \\ & x_{1,2} = \pm 5. & x \in \emptyset. \end{array}$$

Відповідь. 1) ± 5 ; 2) коренів немає.

3. Рівняння вигляду $ax^2 + bx = 0$, $b \neq 0$.

Розкладемо ліву частину рівняння на множники і розв'яжемо одержане рівняння $x(ax + b) = 0$.

$$x = 0 \quad \text{або} \quad ax + b = 0,$$

$$x = -\frac{b}{a}, \quad \text{оскільки } a \neq 0.$$

Отже, рівняння має два корені: $x_1 = 0$ і $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $2x^2 + 5x = 0$.

Розв'язання. Маємо: $x(2x + 5) = 0$,

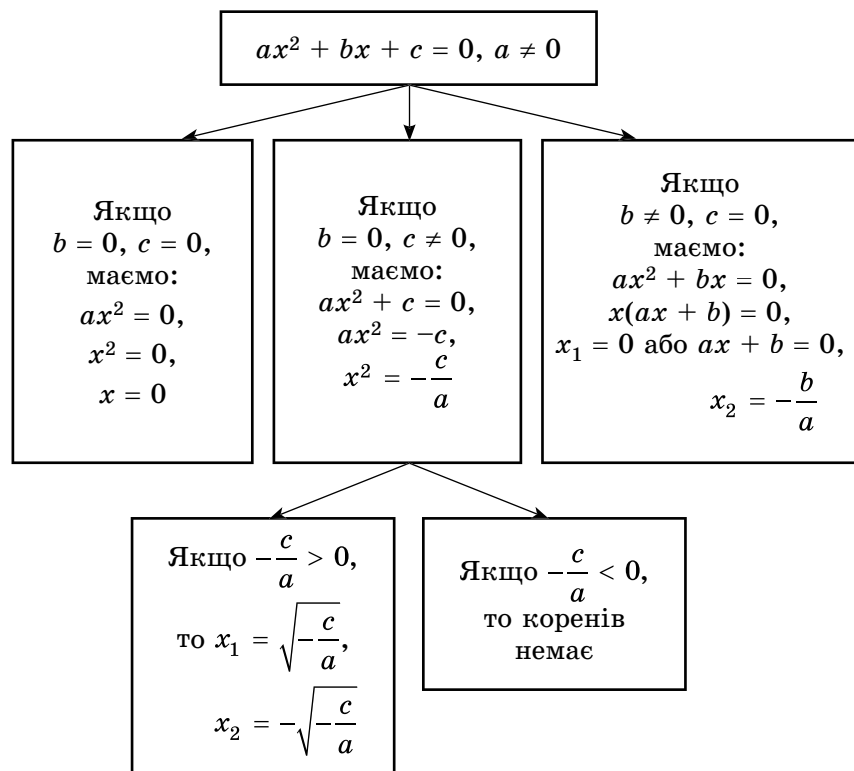
$$x = 0 \quad \text{або} \quad 2x + 5 = 0,$$

$$x = -2,5.$$

Отже, $x_1 = 0$, $x_2 = -2,5$.

Відповідь. 0; -2,5.

Систематизуємо дані про розв'язки неповного квадратного рівняння у вигляді схеми:



1. Яке рівняння називають квадратним?
2. Як називають числа a, b, c ?
3. Наведіть приклад квадратного рівняння.
4. Яке квадратне рівняння називають неповним?
5. Наведіть приклади неповних квадратних рівнянь.
6. Як розв'язати неповне квадратне рівняння кожного виду?



Початковий рівень

775. (Усно.) Які з рівнянь є квадратними:

- 1) $x^2 - 2x + 3 = 0$; 2) $x^2 - 3x^3 = 0$; 3) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 5$;
 4) $7x - x^2 = 0$; 5) $4x - 5 = 2x + 7$; 6) $1 - 5x^2 = 0$?

776. (Усно.) Серед квадратних рівнянь знайдіть неповні; зведіть:

- 1) $2x^2 + 3x = 0$; 2) $x^2 - 3x + 4 = 0$; 3) $2x^2 - 3x + 5 = 0$;
 4) $5x^2 = 0$; 5) $7x^2 - 21 = 0$; 6) $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0$.

777. Випишіть коефіцієнти a , b і c квадратного рівняння:

- 1) $2x^2 + 3x - 5 = 0$; 2) $3x^2 + 9 = 0$; 3) $3x - x^2 + 7 = 0$;
 4) $3x^2 = 0$; 5) $7x - x^2 = 0$; 6) $2 + 4x - x^2 = 0$.

778. Складіть квадратне рівняння за його коефіцієнтами:

- 1) $a = 3$; $b = 5$; $c = -2$; 2) $a = -1$; $b = 5$; $c = 0$;
 3) $a = -4$; $b = 0$; $c = 0$; 4) $a = 13$; $b = 0$; $c = -39$.

779. Перенесіть таблицю в зошит і заповніть її порожні комірки:

| Квадратне рівняння | Коефіцієнти рівняння | | |
|----------------------|----------------------|-----|-----|
| $ax^2 + bx + c = 0$ | a | b | c |
| $5x^2 - 3x - 17 = 0$ | | | |
| | 2 | -3 | 4 |
| $-15x^2 + 14x = 0$ | | | |
| | -3 | 0 | 7 |
| $-x^2 + 5x + 6 = 0$ | | | |
| | -5 | -1 | 19 |



Середній рівень

780. Зведіть до вигляду $ax^2 + bx + c = 0$ рівняння:

- 1) $(5x - 1)(5x + 1) = x(7x - 13)$;
 2) $(2x - 3)^2 = (x + 2)(x - 7)$.

781. Замініть рівняння рівносильним йому квадратним рівнянням:

1) $(2x + 3)(2x - 3) = x(9x - 12)$;

2) $(4x + 1)^2 = (x - 3)(x + 2)$.

782. Які із чисел -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 є коренями рівняння:

1) $x^2 - 5x = 0$;

2) $3x^2 = 0$;

3) $x^2 - 3x + 2 = 0$;

4) $x^2 - 2x - 3 = 0$?

783. Які із чисел -5 ; -2 ; 0 ; 2 ; 5 є коренями рівняння:

1) $x^2 + 2x = 0$;

2) $-5x^2 = 0$;

3) $x^2 - x - 6 = 0$;

4) $x^2 - 25 = 0$?

784. Розв'яжіть рівняння:

1) $3x^2 - 27 = 0$;

2) $3,7x^2 = 0$;

3) $2x^2 + 8 = 0$;

4) $-5x^2 + 10 = 0$;

5) $-5,7x^2 = 0$;

6) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{7}{9} = 0$.

785. Знайдіть корені рівняння:

1) $2x^2 - 2 = 0$;

2) $3x^2 + 9 = 0$;

3) $1,4x^2 = 0$;

4) $-7x^2 + 21 = 0$;

5) $-1,8x^2 = 0$;

6) $\frac{1}{7}x^2 - \frac{5}{7} = 0$.

786. Знайдіть корені рівняння:

1) $x^2 + 6x = 0$;

2) $2x^2 - 8x = 0$;

3) $4x^2 - x = 0$;

4) $0,1x^2 + 2x = 0$;

5) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x = 0$;

6) $3x^2 - 7x = 0$.

787. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 5x = 0$;

2) $3x^2 + 9x = 0$;

3) $5x^2 + x = 0$;

4) $0,2x^2 - 10x = 0$;

5) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x = 0$;

6) $4x^2 + 9x = 0$.



3 Достатній рівень

788. Складіть квадратне рівняння, яке:

1) не має розв'язків;

2) має тільки один розв'язок;

3) має два цілих розв'язки;

4) має два ірраціональних розв'язки.

789. При якому значенні коефіцієнта a число 3 є коренем рівняння $ax^2 + 2x - 7 = 0$?

790. При якому значенні коефіцієнта b число -2 є коренем рівняння $x^2 + bx - 8 = 0$?

791. При яких значеннях коефіцієнтів a і b числа 1 і 2 є коренями рівняння $ax^2 + bx + 4 = 0$?

792. При яких значеннях коефіцієнтів b і c числа 1 і 3 є коренями рівняння $x^2 + bx + c = 0$?

793. Розв'яжіть рівняння:

$$1) (x - 2)(x + 3) = -6;$$

$$2) \frac{1}{3}x(x + 9) = \frac{1}{8}x(x - 16);$$

$$3) (3x - 1)^2 = (x - 3)^2;$$

$$4) (2x + 1)(3x - 1) = x(x - 2) + 3\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

794. Розв'яжіть рівняння:

$$1) (x + 3)(x - 5) = -15;$$

$$2) \frac{2}{3}x(x - 3) = \frac{1}{2}x(x + 4);$$

$$3) (2x - 3)^2 = (3x - 2)^2;$$

$$4) (5x + 1)(2x - 1) = x(x + 3) - 6\left(x + \frac{1}{6}\right).$$

795. При яких значеннях x значення виразу $(3x - 1)(x + 4)$ на 4 менше від значення виразу $x(x + 2)$?

796. При яких значеннях x значення виразу $(2x + 1)(x + 3)$ на 3 більше за значення виразу $x(x - 4)$?



4 Високий рівень

797. Добуток двох чисел дорівнює їх середньому арифметичному. Знайдіть ці числа, якщо їх різниця дорівнює 1.

798. Половина добутку двох чисел дорівнює їх середньому арифметичному. Знайдіть ці числа, якщо їх різниця дорівнює 2.

799. Розв'яжіть рівняння:

$$1) x^2 - 5|x| = 0; \quad 2) -\frac{x^3}{|x|} + 4 = 0.$$

800. Розв'яжіть рівняння:

$$1) -x^2 + 3|x| = 0; \quad 2) \frac{x^3}{|x|} - 9 = 0.$$



Вправи для повторення

3 801. Доведіть тотожність:

$$\frac{3x + 3}{x^2 - x} : \left(\frac{x + 3}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 + x} \right) = 3.$$

4 802. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} -\frac{8}{x}, & \text{якщо } x < -2; \\ x^2, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 2; \\ 8 - 2x, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$



Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

803. Знайдіть значення виразу $b^2 - 4ac$, якщо

$$1) a = 1; b = 5; c = -6; \quad 2) a = 1; b = -6; c = 9; \\ 3) a = 2; b = -3; c = -5; \quad 4) a = 4; b = 5; c = -9.$$

804. Винесіть множник з-під знака кореня:

$$1) \sqrt{18}; \quad 2) \sqrt{300}; \quad 3) \sqrt{108}; \quad 4) \sqrt{363}.$$

805. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{4 + 2\sqrt{7}}{2}; \quad 2) \frac{6 - \sqrt{12}}{2}; \quad 3) \frac{8 - 2\sqrt{3}}{6}; \quad 4) \frac{16 + \sqrt{20}}{8}.$$



Цікаві задачі для учнів неледачих



806. Скільки існує двоцифрових натуральних чисел, які дорівнюють сумі добутку й суми своїх цифр?

§21. ФОРМУЛА КОРЕНІВ КВАДРАТНОГО РІВНЯННЯ

Розглянемо повне квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ та знайдемо його розв'язки в загальному вигляді.

Помножимо ліву і праву частини рівняння на $4a$ (оскільки $a \neq 0$, то і $4a \neq 0$):

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0.$$

Далі додамо до обох частин рівняння b^2 :

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 + 4ac = b^2.$$

Оскільки $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = (2ax + b)^2$, матимемо:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$



Вираз $b^2 - 4ac$ називають дискримінантом квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Слово *дискримінант* походить від латинського *розрізняючий*. Позначають дискримінант літерою D .

Ураховуючи, що $b^2 - 4ac = D$, запишемо рівняння у вигляді:

$$(2ax + b)^2 = D$$

і продовжимо його розв'язувати.

Розглянемо всі можливі випадки залежно від значення D .

1) $D > 0$. Тоді:

$$2ax + b = \sqrt{D} \quad \text{або} \quad 2ax + b = -\sqrt{D},$$

$$2ax = -b + \sqrt{D} \quad 2ax = -b - \sqrt{D},$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

(при діленні на $2a$ врахували, що $a \neq 0$).

Отже, якщо $D > 0$, то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має два різних корені:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{і} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Коротко це можна записати так:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad \text{де} \quad D = b^2 - 4ac.$$

Це *формула коренів квадратного рівняння*.

2) $D = 0$. Тоді маємо рівняння $(2ax + b)^2 = 0$,

$$2ax + b = 0, \text{ звідки } x = -\frac{b}{2a}.$$

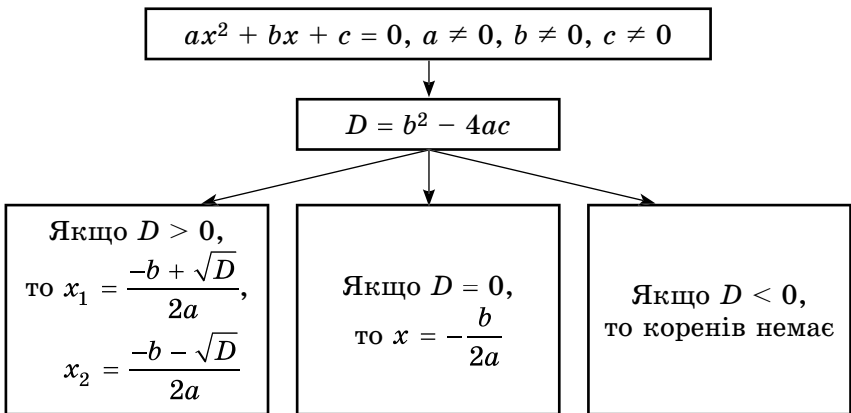
Отже, якщо $D = 0$, то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має один корінь: $x = -\frac{b}{2a}$. Цей корінь можна було б знайти і за формулою коренів квадратного рівняння, урахувавши, що $D = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a}. \text{ Тому можна вважати, що рівняння}$$

$ax^2 + bx + c = 0$ при $D = 0$ має два однакових корені, кожен з яких дорівнює $-\frac{b}{2a}$.

3) $D < 0$. У цьому випадку рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ не має коренів, оскільки не існує такого значення x , при якому значення виразу $(2ax + b)^2$ було б від'ємним.

Систематизуємо дані про розв'язки квадратного рівняння за допомогою схеми:



Приклад 1. Розв'яжіть рівняння: 1) $2x^2 + 3x + 1 = 0$;

2) $9x^2 - 6x + 1 = 0$; 3) $x^2 - 2x + 7 = 0$.

Розв'язання. 1) $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$; $D > 0$;

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 1}{4}; \quad x_1 = -1; \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$$

2) $D = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 0$; $D = 0$; $x = -\frac{-6}{2 \cdot 9} = \frac{1}{3}$.

3) $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 4 - 28 = -24 < 0$, $x \in \emptyset$.

Відповідь. 1) -1 ; $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) коренів немає.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $-\frac{1}{7}x^2 - \frac{4}{7}x + 1 = 0$.

Розв'язання. Помножимо ліву і праву частини рівняння на (-7) , щоб його коефіцієнти стали цілими числами, матимемо рівняння:

$$x^2 + 4x - 7 = 0.$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 44, \text{ тоді } x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{44}}{2}.$$

Оскільки $\sqrt{44} = \sqrt{4 \cdot 11} = 2\sqrt{11}$, то

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{11}}{2} = -2 \pm \sqrt{11}.$$

Відповідь. $-2 \pm \sqrt{11}$.

А ще раніше...

Неповні квадратні рівняння та деякі види повних квадратних рівнянь (наприклад, вигляду $x^2 \pm x = a$) вавилонські математики вміли розв'язувати ще 4 тис. років тому. У більш пізні часи деякі квадратні рівняння у Давній Греції та Індії математики розв'язували геометрично. Прийоми розв'язування деяких квадратних рівнянь без застосування геометрії виклав давньогрецький математик *Діофант* (III ст.).



Франсуа Вієт
(1540–1603)

Багато уваги квадратним рівнянням приділяв арабський математик *Мухаммед аль-Хорезмі* (IX ст.). Він знайшов, як розв'язати рівняння вигляду $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, $bx + c = ax^2$ (для додатних a, b, c) і отримати додатні корені цих рівнянь.

Формули, що пов'язують між собою корені квадратного рівняння і його коефіцієнти, віднайшов французький математик *Франсуа Вієт* у 1591 році. Його висновок (у сучасних позначеннях) виглядає так: «Коренями рівняння $(a + b)x - x^2 = ab$ є числа a і b ».

Після опублікування праць нідерландського математика *А. Жирара* (1595–1632), а також француза *Р. Декарта* (1596–1650) та англійця *І. Ньютона* (1643–1727) формула коренів квадратного рівняння набула сучасного вигляду.



1. Що називають дискримінантом квадратного рівняння?
2. Скільки коренів має квадратне рівняння залежно від значення дискримінанта?
3. Запишіть формулу коренів квадратного рівняння.



Початковий рівень

807. (Усно.) Скільки різних коренів має квадратне рівняння, якщо його дискримінант дорівнює:

- 1) 4; 2) 0; 3) -9; 4) 17?

808. Чи має корені квадратне рівняння, і якщо має, то скільки, якщо його дискримінант дорівнює:

- 1) -7; 2) 49; 3) 13; 4) 0?

809. (Усно.) Чи правильно записано дискримінант квадратного рівняння:

1) $2x^2 + 3x - 1 = 0$, $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1$;

2) $3x^2 - 4x + 2 = 0$, $D = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2$;

3) $-\frac{1}{2}x^2 - 5x + 3 = 0$, $D = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$;

4) $\frac{1}{8}x^2 + 2x - 4 = 0$, $D = 2^2 + 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot (-4)$?

810. Знайдіть дискримінант і визначте кількість коренів квадратного рівняння:

1) $6x^2 - 5x - 1 = 0$;

2) $x^2 - 4x + 4 = 0$;

3) $x^2 + 2x + 5 = 0$;

4) $7x^2 + 2x - 1 = 0$.

811. Знайдіть дискримінант і визначте кількість коренів квадратного рівняння:

1) $2x^2 - 3x - 1 = 0$;

2) $x^2 + x + 7 = 0$;

3) $x^2 + 6x + 9 = 0$;

4) $3x^2 + 4x - 1 = 0$.



Середній рівень

812. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$;

2) $2x^2 + 5x - 3 = 0$;

3) $3x^2 + 5x + 2 = 0$;

4) $x^2 + 10x + 25 = 0$;

5) $x^2 + x - 90 = 0$;

6) $x^2 - 10x - 24 = 0$.

813. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 4x - 5 = 0$;

2) $2x^2 + 7x - 4 = 0$;

3) $x^2 - 12x + 36 = 0$;

4) $x^2 - x - 56 = 0$.

814. Розв'яжіть рівняння:

1) $10x^2 = 5x + 0,6$;

2) $x^2 + 3 = 4x$;

- 3) $x^2 + 5x = -6$; 4) $1 - 4x = 5x^2$;
 5) $81y^2 + 1 = -18y$; 6) $3p = 5p^2 - 2$.

815. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $10x^2 = 0,4 - 3x$; 2) $x^2 + 7 = -8x$;
 3) $7x = x^2 + 12$; 4) $4y = 4y^2 + 1$.

816. При яких значеннях x :

- 1) значення многочлена $x^2 - 2x - 3$ дорівнює нулю;
 2) значення многочленів $x^2 + 2x$ і $0,5x + 2,5$ між собою рівні;
 3) значення двочлена $10x^2 - 8x$ дорівнює значенню тричлена $9x^2 + 2x - 25$?

817. При яких значеннях y :

- 1) значення многочлена $y^2 + 4y - 5$ дорівнює нулю;
 2) значення многочленів $y^2 - 3y$ і $0,5y + 4,5$ між собою рівні;
 3) значення тричлена $4 + 2y - y^2$ дорівнює значенню двочлена $4y^2 - 6y$?



3 Достатній рівень

818. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(x - 3)^2 = 2x - 3$;
 2) $3(x + 1)^2 = 2x + 2$;
 3) $(x + 3)(x - 1) = 2x(x - 2) + 5$;
 4) $x(x - 3) - (x - 5)(x + 5) = (x + 1)^2$.

819. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(x + 2)^2 = 2x + 3$;
 2) $5(x - 2)^2 = 3x - 6$;
 3) $(x + 2)(x - 3) = 2x(x - 4) + 6$;
 4) $x(x - 1) - (x - 3)(x + 3) = (x + 2)^2 - 1$.

820. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{x^2 + 2x}{3} = \frac{4x + 1}{5}$; 2) $\frac{x + 2}{3} + \frac{x^2 - 1}{2} = \frac{1}{3}$.

821. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{x^2 - 3x}{4} = \frac{2x + 5}{3}$; 2) $\frac{x + 1}{2} + \frac{x^2 - 1}{5} = 1$.

822. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{1}{2}x^2 - x - 7 = 0;$$

$$2) -x^2 - 2x + 4 = 0;$$

$$3) 0,1x^2 - 3x - 5 = 0;$$

$$4) 0,5x^2 + 1,5x - 4 = 0.$$

823. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{1}{2}x^2 + x - 3 = 0;$$

$$2) -x^2 + 2x + 11 = 0;$$

$$3) 0,2x^2 + 2x - 3 = 0;$$

$$4) 0,5x^2 - 2,5x - 4 = 0.$$



4 Високий рівень

824. Розв'яжіть рівняння:

$$1) (\sqrt{x} - 2)(x^2 + x - 2) = 0;$$

$$2) x^2 - \frac{3x^2}{|x|} - 4 = 0;$$

$$3) x|x| + 3x - 4 = 0;$$

$$4) \frac{x^3}{|x|} - x - 2 = 0.$$

825. Розв'яжіть рівняння:

$$1) (\sqrt{x} - 3)(x^2 - x - 6) = 0;$$

$$2) x^2 - \frac{2x^2}{|x|} - 3 = 0;$$

$$3) x|x| - 4x - 5 = 0;$$

$$4) \frac{x^3}{|x|} + 4x - 12 = 0.$$

826. При яких значеннях a має лише один корінь рівняння:

$$1) 2x^2 + x - a = 0;$$

$$2) x^2 - ax + 4 = 0?$$

827. При яких значеннях b має лише один корінь рівняння:

$$1) 4x^2 - x + b = 0;$$

$$2) x^2 + bx + 9 = 0?$$



Вправи для повторення

2 828. Скоротить дріб:

$$1) \frac{a^2 - 49}{a^2 - 14a + 49};$$

$$2) \frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1}.$$

3 829. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = 0,2x - 15$ з осями координат.

4 830. Відомо, що $a + b = 5$, $ab = -7$. Знайдіть значення виразу:

1) $ab^2 + a^2b$; 2) $a^2 + b^2$.



Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

831. Розв'яжіть рівняння, порівняйте суму його коренів із числом, протилежним другому коефіцієнту рівняння, а добуток коренів – з вільним членом рівняння:

1) $x^2 - x - 6 = 0$; 2) $x^2 + 6x + 8 = 0$.

832. 1) Нехай a , b і c – коефіцієнти квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, x_1 і x_2 – його корені. Перенесіть таблицю в зошит і заповніть її.

| Рівняння | $-\frac{b}{a}$ | $\frac{c}{a}$ | x_1 | x_2 | $x_1 + x_2$ | $x_1 x_2$ |
|----------------------|----------------|---------------|-------|-------|-------------|-----------|
| $x^2 - 2x - 8 = 0$ | | | | | | |
| $2x^2 + 5x - 7 = 0$ | | | | | | |
| $3x^2 - 16x + 5 = 0$ | | | | | | |

2) Порівняйте $-\frac{b}{a}$ і $x_1 + x_2$; $\frac{c}{a}$ і $x_1 x_2$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



833. На моніторі комп'ютера – число 2500. Щохвилини комп'ютерна програма множить або ділить це число на 2 або на 5, одержуючи при цьому натуральне число. Чи може рівно через годину на моніторі бути число:

1) 10 000; 2) 20 000?



§ 22. ТЕОРЕМА ВІСТА

Розглянемо кілька зведених квадратних рівнянь, що мають два різних корені. У таблицю занесемо такі дані про них: саме рівняння, його корені x_1 і x_2 , суму його коренів $x_1 + x_2$, добуток його коренів $x_1 \cdot x_2$.

| Рівняння | x_1 і x_2 | $x_1 + x_2$ | $x_1 \cdot x_2$ |
|--------------------|---------------|-------------|-----------------|
| $x^2 - 6x + 8 = 0$ | 2 і 4 | 6 | 8 |
| $x^2 + x - 12 = 0$ | -4 і 3 | -1 | -12 |
| $x^2 + 5x + 6 = 0$ | -3 і -2 | -5 | 6 |
| $x^2 - 4x - 5 = 0$ | -1 і 5 | 4 | -5 |

Звернемо увагу, що сума коренів кожного з рівнянь таблиці дорівнює другому коефіцієнту рівняння, узятому з протилежним знаком, а добуток коренів дорівнює вільному члену. Ця властивість справджується для будь-якого *зведеного квадратного рівняння*, що має корені.

Зведене квадратне рівняння в загальному вигляді зазвичай записують так: $x^2 + px + q = 0$.



Теорема Вієта. *Сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, а добуток коренів – вільному члену.*

Доведення. Нехай x_1 і x_2 – корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, дискримінант якого $D = p^2 - 4q$. Якщо $D > 0$, то рівняння має два корені:

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \quad \text{і} \quad x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}.$$

Якщо $D = 0$, то рівняння $x^2 + px + q = 0$ має два однакових корені: $x_1 = x_2 = \frac{-p}{2}$.

Знайдемо суму і добуток коренів:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} + \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{-p + \sqrt{D} - p - \sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p;$$

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2 - (\sqrt{D})^2}{4} = \\ &= \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{p^2 - p^2 + 4q}{4} = \frac{4q}{4} = q. \end{aligned}$$

Отже, $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 \cdot x_2 = q$. Теорему доведено.

Цю теорему називають *теоремою Вієта* – на честь видатного французького математика Франсуа Вієта, яким і було відкрито цю властивість. Її можна сформулювати так:



Якщо x_1 і x_2 – корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 \cdot x_2 = q$.

Останні дві рівності, що пов'язують між собою корені і коефіцієнти зведеного квадратного рівняння, називають *формулами Вієта*.

Використовуючи теорему Вієта, можна записати відповідні формули і для коренів будь-якого незведеного квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Оскільки $a \neq 0$, поділимо обидві частини рівняння на a . Одержимо зведене квадратне рівняння:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Тоді за теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.



Якщо x_1 і x_2 – корені незведеного квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Приклад 1. Не розв'язуючи рівняння $3x^2 - 5x - 7 = 0$, знайдіть суму і добуток його коренів.

Розв'язання. Знайдемо дискримінант рівняння, щоб пересвідчитися, що корені існують: $D = 5^2 + 4 \cdot 3 \cdot 7$. Очевидно, що $D > 0$, отже, рівняння має два корені x_1 і x_2 . За теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = -\frac{-5}{3} = \frac{5}{3}$; $x_1 x_2 = -\frac{7}{3}$.

Відповідь. $x_1 + x_2 = \frac{5}{3}$; $x_1 x_2 = -\frac{7}{3}$.

Якщо в рівнянні $x^2 + px + q = 0$ коефіцієнт q є цілим числом, то з рівності $x_1 \cdot x_2 = q$ слідує, що цілими коренями цього рівняння можуть бути лише дільники числа q .

Приклад 2. Знайдіть підбором корені рівняння $x^2 + 3x - 4 = 0$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 – корені даного рівняння. Тоді $x_1 + x_2 = -3$ і $x_1 x_2 = -4$. Якщо x_1 і x_2 – цілі числа, то вони є дільниками числа -4 . Тому серед цих дільників шукаємо ті два, сума яких дорівнює -3 . Неважко здогадатися, що це числа 1 і -4 . Отже, $x_1 = 1$; $x_2 = -4$.

Відповідь. 1 ; -4 .

Приклад 3. Один з коренів рівняння $x^2 + px - 18 = 0$ дорівнює 3. Знайдіть коефіцієнт p та другий корінь рівняння.

Розв'язання. Нехай $x_1 = 3$ – один з коренів рівняння $x^2 + px - 18 = 0$, а x_2 – другий його корінь. За теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = -18$. Ураховуючи, що $x_1 = 3$, маємо:

$$\begin{cases} 3 + x_2 = -p, & \begin{cases} x_2 = -6, \\ 3 + (-6) = -p; \end{cases} & \begin{cases} x_2 = -6, \\ p = 3. \end{cases} \\ 3 \cdot x_2 = -18; \end{cases}$$

Відповідь. $p = 3$; $x_2 = -6$.

Приклад 4. Нехай x_1 і x_2 – корені рівняння $2x^2 - 3x - 1 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$; 3) $x_1^2 + x_2^2$.

Розв'язання. За теоремою Вієта:

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{2}; \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Тоді: 1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{3}{2} : \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$;

2) $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$;

3) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3\frac{1}{4}$.

Відповідь. 1) -3 ; 2) $-\frac{3}{4}$; 3) $3\frac{1}{4}$.



Справджується і твердження, обернене до теореми Вієта.



Теорема (обернена до теореми Вієта). Якщо числа m і n такі, що $m + n = -p$, а $m \cdot n = q$, то ці числа є коренями рівняння $x^2 + px + q = 0$.

Доведення. За умовою $m + n = -p$, а $m \cdot n = q$. Тому рівняння $x^2 + px + q = 0$ можна записати так:

$$x^2 - (m + n)x + mn = 0.$$

Перевіримо, чи є число m коренем цього рівняння, для чого підставимо в ліву частину рівняння замість змінної x число m . Одержимо:

$$m^2 - (m + n)m + mn = m^2 - m^2 - mn + mn = 0.$$

Отже, m – корінь цього рівняння.

Аналогічно, підставимо в ліву частину рівняння замість змінної x число n . Одержимо:

$$n^2 - (m + n)n + mn = n^2 - mn - n^2 + mn = 0,$$

тобто n – також корінь цього рівняння.

Отже, m і n – корені рівняння $x^2 + px + q = 0$, що й треба було довести.

Приклад 5. Складіть зведене квадратне рівняння, коренями якого є числа -5 і 2 .

Розв'язання. Шукане квадратне рівняння має вигляд $x^2 + px + q = 0$. За теоремою, оберненою до теореми Вієта:

$$p = -(x_1 + x_2) = -(-5 + 2) = 3; \quad q = x_1 \cdot x_2 = -5 \cdot 2 = -10.$$

Отже, $x^2 + 3x - 10 = 0$ – шукане рівняння.

$$\text{Відповідь. } x^2 + 3x - 10 = 0.$$



1. Сформулюйте і доведіть теорему Вієта для зведеного квадратного рівняння.

2. Чому дорівнюють сума і добуток коренів рівняння $ax^2 + bx + c = 0$?

3. Сформулюйте теорему, обернену до теореми Вієта.



1 Початковий рівень

834. (Усно.) Не розв'язуючи рівняння, знайдіть суму і добуток його коренів:

$$1) x^2 - 15x + 14 = 0; \quad 2) x^2 + 12x - 28 = 0;$$

$$3) x^2 + 17x + 52 = 0; \quad 4) x^2 - 6x + 5 = 0;$$

$$5) x^2 + 2x = 0; \quad 6) x^2 - 8 = 0.$$

835. Знайдіть суму і добуток коренів рівняння:

$$1) 2x^2 + 4x - 5 = 0; \quad 2) -x^2 + 5x - 6 = 0;$$

$$3) 3x^2 - 6x - 8 = 0; \quad 4) 4x^2 - 7x = 0.$$

836. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть суму і добуток його коренів:

$$1) x^2 - 2x - 8 = 0; \quad 2) x^2 + x - 6 = 0;$$

$$3) x^2 + 9x + 5 = 0; \quad 4) 2x^2 - 6x + 3 = 0.$$



2 Середній рівень

837. Розв'яжіть рівняння, використовуючи формулу коренів, та перевірте істинність теореми Вієта для кожного з рівнянь:

$$1) x^2 + 4x - 5 = 0; \quad 2) x^2 - 4x - 21 = 0;$$

$$3) 2x^2 - 5x + 3 = 0; \quad 4) 2x^2 + 5x + 2 = 0.$$

838. Розв'яжіть квадратне рівняння за формулою коренів та перевірте для нього істинність теореми Вієта:

1) $x^2 + 3x - 28 = 0$; 2) $2x^2 - 13x + 15 = 0$.

839. Усі дані рівняння мають корені. У яких з них корені є числами одного знака, а в яких – числами різних знаків:

1) $x^2 + 2x - 8 = 0$; 2) $x^2 - 4x + 4 = 0$;
3) $3x^2 + 4x + 1 = 0$; 4) $2x^2 - 3x - 5 = 0$?



3 Достатній рівень

840. Знайдіть підбором корені рівняння:

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$; 2) $x^2 + 6x + 8 = 0$;
3) $x^2 - 6x - 7 = 0$; 4) $x^2 + 3x - 4 = 0$;
5) $x^2 - 17x + 42 = 0$; 6) $x^2 - 5x - 24 = 0$.

841. Знайдіть підбором корені рівняння:

1) $x^2 - 5x + 4 = 0$; 2) $x^2 - x - 6 = 0$;
3) $x^2 + 4x + 3 = 0$; 4) $x^2 - 12x + 27 = 0$;
5) $x^2 + x - 6 = 0$; 6) $x^2 + 9x - 22 = 0$.

842. Доведіть, що рівняння $12x^2 + 17x - 389 = 0$ не може мати коренів, які є числами одного знака.

843. Не розв'язуючи рівняння, визначте знаки його коренів (якщо корені існують):

1) $x^2 + 8x + 5 = 0$; 2) $x^2 - 12x - 1 = 0$;
3) $3x^2 + 14x - 7 = 0$; 4) $4x^2 - 7x + 2 = 0$.

844. Не розв'язуючи рівняння, визначте, чи має воно корені. Якщо так, то знайдіть знаки коренів:

1) $x^2 - 13x - 2 = 0$; 2) $x^2 + 17x + 1 = 0$;
3) $5x^2 - 14x + 1 = 0$; 4) $3x^2 + 7x - 18 = 0$.

845. Один з коренів рівняння $x^2 + 6x + q = 0$ дорівнює $-3,5$. Знайдіть q і другий корінь.

846. Один з коренів рівняння $x^2 + px - 9 = 0$ дорівнює $1,5$. Знайдіть p і другий корінь.

847. Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 + px - 10 = 0$ задовольняють умову $2x_1 + 5x_2 = 0$. Знайдіть корені рівняння та коефіцієнт p .

848. Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 - 4x + q = 0$ задовольняють умову $2x_1 - 3x_2 = 13$. Знайдіть корені рівняння та коефіцієнт q .



4 Високий рівень

849. x_1 і x_2 – корені рівняння $x^2 + 4x - 3 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

- 1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$; 3) $x_1^2 + x_2^2$;
 4) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; 5) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$; 6) $(x_1 - x_2)^2$.

850. x_1 і x_2 – корені рівняння $x^2 - 5x - 2 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

- 1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1$; 3) $x_1^2 + x_2^2$;
 4) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; 5) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$; 6) $(x_1 - x_2)^2$.



Додаткові задачі

2 **851.** Складіть зведене квадратне рівняння, коренями якого є числа:

- 1) 2 і 3; 2) -3 і 4; 3) -7 і 2; 4) 0,3 і -0,5.

852. Складіть зведене квадратне рівняння, корені якого дорівнюють:

- 1) 5 і 1; 2) 2 і -7; 3) -2 і -3; 4) 0,7 і -0,1.

3 **853.** Складіть квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють:

- 1) $-\frac{1}{3}$ і 5; 2) $-\frac{1}{4}$ і $-\frac{5}{6}$; 3) $\sqrt{5}$ і $-\sqrt{5}$; 4) $2 - \sqrt{3}$ і $2 + \sqrt{3}$.

854. Складіть квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють:

- 1) -2 і $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{8}$ і $\frac{1}{2}$; 3) $-\sqrt{7}$ і $\sqrt{7}$; 4) $3 + \sqrt{7}$ і $3 - \sqrt{7}$.

4 **855.** Складіть квадратне рівняння, корені якого відповідно на 2 більші за корені рівняння $x^2 - 3x - 9 = 0$.

856. Складіть квадратне рівняння, корені якого на 3 менші від відповідних коренів рівняння $x^2 + 2x - 7 = 0$.



Вправи для повторення

3 857. Маємо два шматки сплаву міді й цинку. Перший містить 20 % міді, а другий – 35 % міді. Скільки кілограмів першого сплаву і скільки другого треба взяти, щоб отримати сплав масою 200 кг, який містить 29 % міді?

4 858. Спростіть вираз: $\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{y}}$.



Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

859. Сума двох чисел дорівнює 32, а одне з них у 7 разів більше за друге. Знайдіть ці числа.

860. Різниця двох чисел дорівнює 3, а різниця між квадратом більшого і квадратом меншого з них становить 81. Знайдіть ці числа.



Цікаві задачі для учнів неледачих



861. До збірної команди України на Всесвітній шаховій олімпіаді входить 6 шахістів і капітан, який керує командою, але не бере участі в змаганнях. Середній вік усіх членів команди на 2 роки більший за середній вік її шахістів. На скільки років вік капітана більший за середній вік членів його команди?



§ 23. КВАДРАТНЕ РІВНЯННЯ ЯК МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТЕКСТОВИХ І ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

У 7 класі ми вже розглядали задачі, які можна розв'язати за допомогою лінійних рівнянь або систем лінійних рівнянь. Щоб розв'язати прикладну задачу, спочатку створюють її математичну модель, тобто записують залежність між відомими і невідомими величинами за допомогою математичних понять, відношень, формул, рівнянь тощо. Математичною моделлю багатьох задач у математиці, фізиці, техніці, практичній діяльності людини може бути не тільки

лінійне рівняння чи система лінійних рівнянь, а й квадратне рівняння.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Різниця кубів двох натуральних чисел дорівнює 279. Знайдіть ці числа, якщо одне з них на 3 більше за друге.

Розв'язання. Нехай менше із цих чисел дорівнює n , тоді більше дорівнює $n + 3$. За умовою маємо рівняння:

$$(n + 3)^3 - n^3 = 279.$$

Спростимо ліву частину рівняння.

Маємо: $n^2 + 3n - 28 = 0$, звідки $n_1 = 4$; $n_2 = -7$. За змістом задачі $n \in \mathbb{N}$. Тому умову задачі задовольняє тільки число 4. Отже, перше шукане число 4, а друге $4 + 3 = 7$.

Відповідь. 4; 7.

Приклад 2. У кінотеатрі кількість місць у ряду на 6 більша за кількість рядів. Скільки рядів у кінотеатрі, якщо місць у ньому 432?

Розв'язання. Нехай у кінотеатрі x рядів, тоді місць у кожному ряді $-(x + 6)$. Усього місць у залі $x(x + 6)$.

Маємо рівняння: $x(x + 6) = 432$.

Перепишемо рівняння у вигляді $x^2 + 6x - 432 = 0$, звідки $x_1 = 18$, $x_2 = -24$.

За змістом задачі значення x може бути лише додатним. Цю умову задовольняє лише x_1 . Отже, у кінотеатрі 18 рядів.

Відповідь. 18 рядів.

Приклад 3. Деякий опуклий многокутник має 54 діагоналі. Знайдіть, скільки в нього вершин.

Розв'язання. Нехай у многокутника n вершин. З кожної його вершини виходить $(n - 3)$ діагоналі. Тоді з усіх n його вершин виходить $n(n - 3)$ діагоналі. Але при цьому кожену діагональ пораховано двічі. Отже, всього діагоналей буде $\frac{n(n - 3)}{2}$.

Маємо рівняння: $\frac{n(n - 3)}{2} = 54$, тобто $n^2 - 3n - 108 = 0$,

звідки $n_1 = 12$ і $n_2 = -9$. Від'ємний корінь рівняння не може бути розв'язком задачі.

Відповідь. 12 сторін.

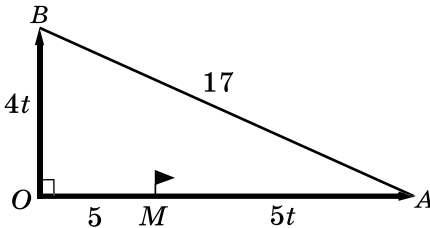
Приклад 4. Тіло підкинули вертикально вгору зі швидкістю 20 м/с. Висота h (у м), на якій через t с буде тіло, обчислюється за формулою $h = 20t - 5t^2$. У який момент часу тіло опиниться на висоті 15 м?

Розв'язання. За умовою: $15 = 20t - 5t^2$, отже, після спрощення маємо рівняння: $t^2 - 4t + 3 = 0$, розв'язавши яке, знайдемо корені: $t_1 = 1$, $t_2 = 3$.

Обидва корені є розв'язком задачі, оскільки на висоті 15 м тіло буде двічі: спочатку під час руху вгору (це відбудеться через 1 с), а вдруге – під час падіння (це відбудеться через 3 с).

Відповідь. 1 с, 3 с.

Приклад 5. О 9-й годині ранку з базового табору у східному напрямку вирушила група туристів зі швидкістю 5 км/год. Через годину з того самого табору зі швидкістю 4 км/год вирушила інша група туристів, але в північному напрямку. О котрій годині відстань між групами туристів буде 17 км?



Мал. 19

Розв'язання. За першу годину перша група туристів подолає 5 км: $OM = 5$ (мал. 19). Далі рухатимуться обидві групи.

Нехай відстань у 17 км між групами буде через t годин після початку руху другої групи. Тоді за цей час перша група подолає $5t$ км, а друга – $4t$ км, $OB = 4t$. Усього перша група подолає відстань $OA = OM + MA = 5 + 5t$ (км).

Із $\triangle OAB$ за теоремою Піфагора $AB^2 = OA^2 + OB^2$, тобто маємо рівняння: $(5 + 5t)^2 + (4t)^2 = 17^2$, звідки $41t^2 + 50t - 264 = 0$.

Враховуючи, що $t > 0$, отримаємо $t = 2$ (год).

Отже, відстань у 17 км між групами туристів буде о 12-й годині.

Відповідь. О 12-й годині.

А ще раніше...

Прикладні задачі виникли як результат діяльності людини, їх розв'язують вже протягом кількох тисячоліть. Найдавніші відомі нам письмові пам'ятки, що містять правила знаходження площ та об'ємів, було складено в Єгипті та Вавилоні десь 4 тис. років тому. Близько 2,5 тис. років тому греки перейняли геометричні знання єгиптян та вавилонян і почали розвивати теоретичну (чисту) математику.

Також у давні часи математики використовували математичні моделі, зокрема і під час геометричних побудов (метод подібності фігур).

Сучасне поняття математичної моделі як опис деякого реального процесу мовою математики стало використовуватися в середині ХХ ст. у зв'язку з розвитком *кібернетики* – науки про загальні закони добування, зберігання, передачі та обробки інформації. А розділ сучасної математики, що вивчає математичне моделювання реальних процесів, навіть виокремили в окрему науку – *прикладну математику*.

Значний внесок у розвиток прикладної математики було зроблено нашими видатними земляками – математиками М.П. Кравчуком та М.В. Остроградським.

Розвиток кібернетики в Україні пов'язують з ім'ям академіка Віктора Михайловича Глушкова – видатного українського математика, доктора фізико-математичних наук, професора. У 1953 р. він очолив лабораторію обчислювальної техніки Інституту математики АН УРСР, став її мозковим і енергетичним центром. На базі цієї лабораторії у 1957 р. було створено Обчислювальний центр, а у 1962 р. – Інститут кібернетики АН УРСР, який і очолив В.М. Глушков. Лабораторія відома тим, що в 1951 р. у ній було створено першу в Євразії Малу електронну лічильну машину, а вже в Обчислювальному центрі завершено роботу щодо створення першої в Україні великої електронно-обчислювальної машини «Київ». Сьогодні Інститут кібернетики НАН України має ім'я свого першого очільника – В.М. Глушкова та є, зокрема, розробником прикладних інформаційних технологій для розв'язання нагальних практичних задач, що виникають під час моделювання економічних процесів, проектування об'єктів теплоенергетики, вирішення проблем екології та захисту довкілля.



Поясніть, як розв'язано задачі у прикладах 1–5.



Середній рівень

862. Одне з двох натуральних чисел на 5 менше від другого. Знайдіть ці числа, якщо їх добуток дорівнює 204.

863. Добуток двох натуральних чисел дорівнює 180. Знайдіть ці числа, якщо одне з них на 3 більше за друге.

864. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює 108 см^2 , а одна зі сторін на 3 см більша за другу.

865. Ділянку прямокутної форми, одна зі сторін якої на 10 м більша за другу, треба обнести парканом. Знайдіть довжину паркана, якщо площа ділянки 375 м^2 .

866. Сума двох суміжних сторін прямокутника – 17 см, а його площа – 70 см^2 . Знайдіть сторони прямокутника.



867. Один з катетів прямокутного трикутника на 7 см менший від другого. Знайдіть периметр трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 13 см.

868. Знайдіть площу прямокутника, якщо сума двох його непаралельних сторін дорівнює 14 см, а діагональ дорівнює 10 см.

869. Добуток двох послідовних натуральних чисел на 181 більший за їх суму. Знайдіть ці числа.

870. Шматок скла має форму квадрата. Коли від нього відрізали смужку завширшки 30 см, його площа стала дорівнювати 2800 см^2 . Знайдіть початкові розміри шматка скла.

871. Площа прямокутного листа фанери дорівнює 300 дм^2 . Його розрізали на дві частини, одна з яких – квадрат, а друга – прямокутник. Знайдіть сторону квадрата, якщо сторона одержаного прямокутника, що не є стороною квадрата, дорівнює 5 дм.

872. Знайдіть три послідовних цілих числа, якщо потроєний квадрат меншого з них на 242 більший за суму квадратів двох інших.

873. Знайдіть три послідовних цілих числа, якщо квадрат більшого з них на 970 менший від подвоєної суми квадратів двох інших.

874. Сума кубів двох натуральних чисел дорівнює 468. Знайдіть ці числа, якщо їх сума дорівнює 12.

875. Дві дороги перетинаються під прямим кутом. Від перехрестя доріг одночасно рушили два велосипедисти, один у східному напрямку, другий – у північному. Швидкість першого була на 4 км/год більшою за швидкість другого. Через 2 год відстань між ними становила 40 км. Якою була швидкість кожного з велосипедистів?

876. Периметр прямокутника дорівнює 44 см, а сума площ квадратів, побудованих на суміжних сторонах, дорівнює 244 см^2 . Знайдіть сторони прямокутника.



4 Високий рівень

877. Фотокартку розміром 10×15 (у см) уставлено в рамку сталої ширини, площа якої 204 см^2 . Визначте ширину рамки.

878. На земельній ділянці прямокутної форми зі сторонами 8 м і 6 м треба розмістити прямокутну клумбу площею 15 м^2 так, щоб навколо клумби впритул до меж ділянки утворилася доріжка сталої ширини. Визначте, яку ширину матиме ця доріжка.

879. На шаховому турнірі було зіграно 45 партій. Кожний з учасників зіграв з кожним по одному разу. Скільки шахістів узяло участь у турнірі?

880. До Різдва всі члени родини Петренків підготували одне одному подарунки та поклали їх під ялинку. Скільки осіб у родині Петренків, якщо під ялинкою виявилось 20 подарунків?

881. Висота h (у м), на якій через t с опиниться м'яч, котрий підкинули вертикально вгору, обчислюється за формулою $h = v_0 t - 5t^2$, де v_0 – початкова швидкість (у м/с). Після удару футболіста м'яч полетів вертикально вгору і через 1 с опинився на висоті 10 м. Через який час м'яч буде на висоті 10,8 м?

882. Футболіст, зріст якого 1,8 м, підбиває м'яч головою, і через 0,4 с м'яч опиняється на висоті 3,8 м. Через який час м'яч буде на висоті 4,25 м?

883. Сигнальна ракета, яку випустили вертикально вгору, через 2 с опинилася на висоті 40 м. Через який час вона буде на висоті 44,2 м?



Вправи для повторення

3 **884.** Знайдіть корені рівняння:

1) $3x^2 - 12 = 0$;

2) $5x^2 - 9x = 0$;

3) $3x^2 + 10x + 3 = 0$;

4) $x^2 + 4x + 4 = 0$.

885. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 2)^2 = 5x + 7$;

2) $\frac{1}{4}x^2 - x - 5 = 0$.

886. При яких значеннях a рівняння $ax^2 + 6x - 4 = 0$ має лише один корінь?



Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

887. Розкладіть на множники многочлен:

- 1) $4x^2 - 5x$; 2) $7x^2 + 14x$; 3) $x^2 - 36$;
 4) $\frac{1}{9}x^2 - 25$; 5) $x^2 - 10x + 25$; 6) $16x^2 + 8x + 1$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



888. Доведіть, що з будь-яких ста натуральних чисел можна вибрати кілька (можливо, й одне), сума яких ділитиметься на 100.

Домашня самостійна робота № 5

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.



1. Укажіть рівняння, що є квадратним.

- А. $x^3 + x^2 - x = 0$; Б. $2x^2 - 3x + 7 = 0$;
 В. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 5$; Г. $6x - 5 = 0$.

2. Якщо дискримінант квадратного рівняння дорівнює 15, то квадратне рівняння...

- А. не має коренів; Б. має один корінь;
 В. має два різних корені; Г. має безліч коренів.

3. Нехай x_1 і x_2 – корені рівняння $x^2 + x - 5 = 0$, тоді

- А. $x_1 + x_2 = 1$; $x_1x_2 = -5$; Б. $x_1 + x_2 = -1$; $x_1x_2 = 5$;
 В. $x_1 + x_2 = 1$; $x_1x_2 = 5$; Г. $x_1 + x_2 = -1$; $x_1x_2 = -5$.



4. Укажіть корені рівняння $5x^2 - 4x = 0$.

- А. 0; 1,25; Б. 0; 0,8; В. 0; -0,8; Г. 0,8.

5. Розв'яжіть рівняння $3x^2 - 10x + 3 = 0$.

- А. $\frac{1}{3}$; 3; Б. $-\frac{1}{3}$; -3; В. 1; 9; Г. коренів немає.

6. Площа прямокутника дорівнює 168 см^2 , а одна з його сторін на 2 см менша від другої. Знайдіть меншу сторону прямокутника.

- А. 14 см; Б. 13 см; В. 12 см; Г. 11 см.

3 7. При якому значенні a число 2 буде коренем рівняння $ax^2 + 4x - 20 = 0$?

- А. -3; Б. 3; В. 7; Г. -7.

8. Розв'яжіть рівняння $(x + 2)^2 = 4x + 5$.

- А. -1; 1; Б. 1; В. $2 + \sqrt{5}$; $2 - \sqrt{5}$; Г. коренів немає.

9. Дано три послідовних натуральних числа. Потроєний квадрат меншого з них на 50 більший за суму квадратів двох інших. Знайдіть менше із даних чисел.

- А. 5; Б. 11; В. 12; Г. 13.

4 10. Розв'яжіть рівняння $(\sqrt{x} - 3)(2x^2 + 3x - 5) = 0$.

- А. -2,5; 1; 9; Б. -2,5; 1; 3; В. 1; 3; Г. 1; 9.

11. x_1 і x_2 - корені рівняння $2x^2 - 3x - 7 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $x_1^2 + x_2^2$.

- А. 9,25; Б. -4,75; В. 23; Г. знайти неможливо.

12. Під час ділової зустрічі було здійснено 36 потисків руки, причому всі учасники потисли руку одне одному. Скільки осіб взяло участь у діловій зустрічі?

- А. 8; Б. 9; В. 10; Г. 18.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ДО § 20–23

1 1. Які з рівнянь є квадратними:

- 1) $x^2 - 4x + 7 = 0$; 2) $x^2 + \frac{1}{x} = 19$;
3) $x^2 - 15 = 0$; 4) $7x - 13 = 2x + 3$?

2. Скільки різних коренів має квадратне рівняння, якщо його дискримінант дорівнює:

- 1) 9; 2) 0; 3) -16; 4) 23?

3. Знайдіть суму і добуток коренів рівняння $x^2 + 2x - 17 = 0$.

2 4. Розв'яжіть неповне квадратне рівняння:

- 1) $2x^2 - 18 = 0$; 2) $3x^2 - 4x = 0$.

5. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 2x^2 - 5x + 2 = 0; \quad 2) x^2 - 6x + 9 = 0.$$

6. Одна зі сторін прямокутника на 4 см більша за другу, а площа прямокутника дорівнює 192 см^2 . Знайдіть його периметр.

3 7. Розв'яжіть рівняння:

$$1) (x + 1)^2 = 4x - 5; \quad 2) \frac{1}{2}x^2 - x - 3 = 0.$$

8. Знайдіть три послідовних натуральних числа, якщо квадрат більшого з них на 140 менший від суми квадратів двох інших.

4 9. Розв'яжіть рівняння $(\sqrt{x} - 2)(x^2 + 3x - 4) = 0$.

Додаткові задачі


4 10. Числа x_1 і x_2 є коренями рівняння $x^2 - 5x - 3 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

$$1) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}; \quad 2) x_1^2 + x_2^2.$$

11. На першості школи з баскетболу було зіграно 28 матчів, причому кожна команда зіграла з кожною по одному матчу. Скільки команд брало участь у першості школи з баскетболу?

§24. КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН. РОЗКЛАДАННЯ КВАДРАТНОГО ТРИЧЛЕНА НА ЛІНІЙНІ МНОЖНИКИ

Вирази $5x^2 - 2x + 7$ і $-x^2 + 3x - 9$ є многочленами другого степеня з однією змінною стандартного вигляду. Такі многочлени називають *квадратними тричленами*.

 **Квадратним тричленом називають многочлен вигляду $ax^2 + bx + c$, де x – змінна, a, b, c – числа, причому $a \neq 0$.**

Наприклад, вираз $x^2 + 2x - 3$ є квадратним тричленом, у якого $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$.

Приклад 1. Розглянемо квадратний тричлен $5x^2 - 3x - 8$. Якщо $x = -1$, то його значення дорівнює нулю. Дійсно $5 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 8 = 0$. У такому випадку число -1 називають *коренем* цього *квадратного тричлена*.



Коренем квадратного тричлена називають значення змінної, при якому значення тричлена дорівнює нулю.

Щоб знайти корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, треба розв'язати рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Приклад 2. Знайдіть корені квадратного тричлена $3x^2 + 2x - 16$.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння $3x^2 + 2x - 16 = 0$. Одержимо $x_1 = 2$; $x_2 = -2\frac{2}{3}$. Отже, коренями квадратного тричлена $3x^2 + 2x - 16$ є числа 2 і $-2\frac{2}{3}$.

Відповідь. 2; $-2\frac{2}{3}$.

Квадратний тричлен, як і квадратне рівняння, може мати два різних корені, один корінь (тобто два однакових корені) або не мати коренів. Це залежить від знака дискримінанта квадратного рівняння $D = b^2 - 4ac$, який також називають і **дискримінантом квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$** .

Якщо $D > 0$, то квадратний тричлен має два різних корені, якщо $D = 0$, то квадратний тричлен має один корінь (тобто два однакових корені), якщо $D < 0$, то квадратний тричлен не має коренів.

Якщо корені квадратного тричлена відомі, то його можна розкласти на лінійні множники, тобто на множники, які є многочленами першого степеня.



Теорема (про розкладання квадратного тричлена на множники). Якщо x_1 і x_2 – корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, то справджується рівність

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Доведення. Якщо x_1 і x_2 – корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ (за теоремою Вієта).

Для доведення теореми розкриємо дужки у правій частині рівності:

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= a(x^2 - x_1x - xx_2 + x_1x_2) = \\ &= a(x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2) = a\left(x^2 - x \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) + \frac{c}{a}\right) = \\ &= ax^2 + bx + c. \end{aligned}$$

Отже, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Теорему доведено.

Якщо ж квадратний тричлен не має коренів, то його не можна розкласти на лінійні множники.

Приклад 3. Розкладіть на множники квадратний тричлен:

$$1) -2x^2 + 3x + 5; \quad 2) x^2 - 2x + 5; \quad 3) 3x^2 - 12x + 12.$$

Розв'язання.

1) Коренями тричлена $-2x^2 + 3x + 5$ є числа -1 і $2,5$. Тому $-2x^2 + 3x + 5 = -2(x + 1)(x - 2,5)$. Знайдений результат можна записати інакше, помноживши перший у розкладі множник -2 на двочлен $x - 2,5$. Матимемо:

$$-2x^2 + 3x + 5 = (x + 1)(5 - 2x).$$

2) Квадратне рівняння $x^2 - 2x + 5 = 0$ не має коренів. Тому квадратний тричлен $x^2 - 2x + 5$ на множники розкласти не можна.

3) Квадратне рівняння $3x^2 - 12x + 12 = 0$ має два однакових корені $x_1 = x_2 = 2$. Тому

$$3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)(x - 2) = 3(x - 2)^2.$$

Неважко помітити, що коли квадратний тричлен має два однакових корені, то він є квадратом двочлена або добутком деякого числа на квадрат двочлена.

Приклад 4. Скоротіть дріб $\frac{4x^2 - 2x - 2}{x^2 - 1}$.

Розв'язання. Розкладемо на множники квадратний тричлен $4x^2 - 2x - 2$. Його коренями є числа 1 і $-0,5$. Тому $4x^2 - 2x - 2 = 4(x - 1)(x + 0,5)$. Отже,

$$\frac{4x^2 - 2x - 2}{x^2 - 1} = \frac{4(x - 1)(x + 0,5)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{4(x + 0,5)}{x + 1} = \frac{4x + 2}{x + 1}.$$

Відповідь. $\frac{4x + 2}{x + 1}$.

Під час розв'язування деяких задач, пов'язаних з квадратним тричленом $ax^2 + bx + c$ буває зручно подати його у вигляді $a(x - m)^2 + n$, де m і n - деякі числа. Таке перетворення називають **виділенням квадрата двочлена** з квадратного тричлена.

Приклад 5. Виділіть з тричлена $2x^2 + 16x - 7$ квадрат двочлена.

Розв'язання. Винесемо за дужки множник 2 :

$$2x^2 + 16x - 7 = 2(x^2 + 8x - 3,5).$$

Скориставшись формулою квадрата суми двох чисел $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, перетворимо вираз у дужках, вважаючи, що $x^2 = a^2$, а $8x = 2ab$. Тоді $8x = 2 \cdot x \cdot 4$, звідки визначаємо, що число 4 є другим доданком квадрата суми, тобто $b = 4$, а тому ще додамо і віднімемо 4^2 :

$$2(x^2 + 8x - 3,5) = 2(x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 - 4^2 - 3,5) = \\ = 2((x + 4)^2 - 19,5) = 2(x + 4)^2 - 39.$$

Відповідь. $2(x + 4)^2 - 39$.

Приклад 6. Дано квадратний тричлен $-4x^2 + 24x - 20$. При якому значенні x він набуває найбільшого значення? Знайдіть це значення.

Розв'язання. Виділимо з тричлена квадрат двочлена:
 $-4x^2 + 24x - 20 = -4(x^2 - 6x + 5) = -4(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 5) = \\ = -4((x - 3)^2 - 4) = -4(x - 3)^2 + 16.$

Вираз $-4(x - 3)^2$ при будь-якому значенні x набуває недодатного значення, тобто $-4(x - 3)^2 \leq 0$, причому дорівнює нулю цей вираз лише при $x = 3$. Тому при $x = 3$ значення даного в умові тричлена дорівнює 16 і є для нього найбільшим.

Отже, квадратний тричлен $-4x^2 + 24x - 20$ набуває найбільшого значення, що дорівнює 16, якщо $x = 3$.

Відповідь. 16, якщо $x = 3$.



1. Що називають квадратним тричленом?
2. Що називають коренем квадратного тричлена?
3. Скільки коренів може мати квадратний тричлен?
4. Як розкласти квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ на множники?
5. Яке перетворення квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ називають виділенням квадрата двочлена?



Початковий рівень

889. (Усно.) Чи є квадратним тричленом вираз:

- | | |
|------------------------------|----------------------------------|
| 1) $x^2 + x - 3$; | 2) $x^3 - x + 7$; |
| 3) $3x + 7$; | 4) $x + 2$; |
| 5) $\frac{1}{x^2 + x - 3}$; | 6) $x^2 - x + x^3$; |
| 7) $3x - 7 + 5x^2$; | 8) $-7x^2 + 10x + \frac{1}{x}$? |

890. З виразів випишіть ті, що є квадратними тричленами:

- | | | |
|------------------------|-------------------------|---------------------------------|
| 1) $x^3 - x$; | 2) $x^2 - x - 1$; | 3) $4x^2 + 17x + \frac{1}{5}$; |
| 4) $4x + 17$; | 5) $x^2 - x + x^7$; | 6) $\frac{1}{2x^2 + x}$; |
| 7) $-9x^2 + 18 + 5x$; | 8) $-7 + 10x + 14x^2$. | |

891. Які із чисел 1; 2; 3 є коренями квадратного тричлена:

- 1) $x^2 - 2x + 1$; 2) $x^2 + 8x - 9$;
 3) $x^2 - 5x + 6$; 4) $x^2 - 2x - 3$?

892. Знайдіть дискримінант квадратного тричлена та визначте кількість його коренів:

- 1) $x^2 + 2x - 5$; 2) $x^2 + 3x + 7$;
 3) $x^2 - 2x + 1$; 4) $x^2 - x - 2$.

893. Знайдіть дискримінант квадратного тричлена та визначте кількість його коренів:

- 1) $x^2 + x - 6$; 2) $x^2 + 6x + 9$;
 3) $x^2 - 2x + 5$; 4) $x^2 + 3x - 7$.



2 Середній рівень

894. Знайдіть корені квадратного тричлена:

- 1) $x^2 - 6x + 5$; 2) $x^2 - 4x - 12$;
 3) $5x^2 - 10x + 5$; 4) $-2x^2 - 3x + 2$.

895. Знайдіть корені квадратного тричлена:

- 1) $x^2 - 7x + 12$; 2) $x^2 - x - 20$;
 3) $6x^2 - 7x + 1$; 4) $-3x^2 + 6x - 3$.

896. Чи можна розкласти на множники квадратний тричлен:

- 1) $16x^2 - 5x + 1$; 2) $4x^2 + 4x + 1$; 3) $2x^2 + x - 19$?

897. Розкладіть квадратний тричлен на множники:

- 1) $x^2 - 5x + 4$; 2) $x^2 + 7x - 8$; 3) $2x^2 - 5x + 2$;
 4) $-x^2 + 11x - 24$; 5) $-3x^2 + 8x + 3$; 6) $4x^2 + x - 3$.

898. Розкладіть квадратний тричлен на множники:

- 1) $x^2 - 8x + 7$; 2) $x^2 + 8x - 9$; 3) $2x^2 - 7x + 3$;
 4) $-x^2 + x + 12$; 5) $-6x^2 - 5x + 1$; 6) $7x^2 + 19x - 6$.

899. Покажіть, що квадратні тричлени

$$x^2 - 2x - 3; \quad 3x^2 - 6x - 9; \quad -4x^2 + 8x + 12$$

мають одні й ті самі корені. Розкладіть на множники кожний із цих тричленів.

900. Чи правильно розкладено на множники квадратний тричлен:

- 1) $2x^2 + 4x - 6 = (x - 1)(x + 3)$;
 2) $4x^2 - 8x + 4 = 4(x - 1)^2$?

901. Чи правильно розкладено на множники квадратний тричлен:

1) $3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1)$;

2) $2x^2 - 8x + 8 = (x - 2)^2$?

902. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x - 1}{x^2 - 4x + 3}$;

2) $\frac{x^2 - 5x - 14}{x + 2}$.

903. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x + 1}{x^2 + 3x + 2}$;

2) $\frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$.

904. Чому не можна подати у вигляді добутку лінійних множників квадратний тричлен:

1) $x^2 + 2x + 7$;

2) $-2x^2 + 4x - 7$?

905. Виділіть квадрат двочлена з квадратного тричлена:

1) $x^2 + 2x - 5$;

2) $x^2 - 4x + 7$;

3) $2x^2 - 4x + 10$;

4) $3x^2 - 18x + 27$.

906. Виділіть квадрат двочлена з квадратного тричлена:

1) $x^2 - 2x + 7$;

2) $x^2 + 4x - 13$;

3) $3x^2 - 24x + 3$;

4) $2x^2 + 4x + 2$.



3 Достатній рівень

907. Знайдіть корені квадратного тричлена:

1) $\frac{1}{3}x^2 - 2x - 7$;

2) $0,2x^2 + 7x + 40$.

908. Знайдіть корені квадратного тричлена:

1) $\frac{1}{4}x^2 + 2x - 15$;

2) $0,2x^2 - 3x - 9$.

909. Розкладіть тричлен на множники, якщо це можливо:

1) $x^2 - 2x - 11$;

2) $2x^2 - 3x + 7$;

3) $-2x^2 - 3x + 7$;

4) $-x^2 - 5x - 8$.

910. Розкладіть тричлен на множники, якщо це можливо:

1) $x^2 + 4x - 7$;

2) $-2x^2 + 3x - 6$.

911. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{4x - 12}{x^2 - 5x + 6};$$

$$2) \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 3x};$$

$$3) \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 - 9};$$

$$4) \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 5x - 14};$$

$$5) \frac{2x^2 + 9x - 5}{3x^2 + 14x - 5};$$

$$6) \frac{5x^2 - 37x + 14}{22x - 2x^2 - 56}.$$

912. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 + 5x};$$

$$2) \frac{x^2 - 16}{3x^2 - 10x - 8};$$

$$3) \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 7x + 10};$$

$$4) \frac{2x^2 + 4x + 2}{3x^2 - 6x - 9}.$$

913. Обчисліть значення дробу:

$$1) \frac{2x^2 + 9x - 5}{x^2 + 8x + 15}, \text{ якщо } x = 97;$$

$$2) \frac{3x^2 - 24x + 48}{7x - 3x^2 + 20}, \text{ якщо } x = -\frac{2}{3}.$$

914. Виконайте дії:

$$1) \frac{1}{x - 2} - \frac{x}{x^2 + 2x - 8};$$

$$2) \frac{1}{x + 4} + \frac{2}{x^2 + 6x + 8};$$

$$3) \frac{x + 4}{3x + 2} \cdot \frac{3x^2 - 10x - 8}{x^2 - 16};$$

$$4) \frac{-2x^2 + 5x - 2}{2x + 10} : \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 - 25}.$$

915. Виконайте дії:

$$1) \frac{1}{x + 2} + \frac{7}{x^2 - 3x - 10};$$

$$2) \frac{1}{x^2 - 4} : \frac{3x - 2}{3x^2 + 4x - 4}.$$

916. Виділіть з кожного квадратного тричлена квадрат дво-члена та доведіть, що при будь-якому значенні x квадратний тричлен:

$$1) x^2 - 4x + 9 \text{ набуває додатного значення};$$

$$2) 2x^2 + 8x + 8 \text{ набуває невід'ємного значення};$$

$$3) -x^2 + 6x - 16 \text{ набуває від'ємного значення};$$

$$4) -x^2 + 10x - 25 \text{ набуває недодатного значення}.$$

917. Виділіть з кожного квадратного тричлена квадрат дво-члена та доведіть, що при будь-якому значенні x квадратний тричлен:

$$1) x^2 + 6x + 17 \text{ набуває додатного значення};$$

$$2) -x^2 + 12x - 37 \text{ набуває від'ємного значення}.$$

4

Високий рівень

918. Розкладіть на множники многочлен:

- 1) $x^3 + 3x^2 + 2x$; 2) $-2x^3 - 5x^2 + 3x$;
 3) $\frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{5}{4}x^2$; 4) $-\frac{1}{2}x^5 + 2x^4 + 6x^3$.

919. Розкладіть на множники многочлен:

- 1) $x^3 - 12x^2 + 32x$; 2) $\frac{1}{3}x^4 - 4x^3 + 9x^2$.

920. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$;
 2) $y = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{x^2 + x}$.

921. Спростіть вираз:

- 1) $\frac{x^3 - 16x}{x + 40} \cdot \left(\frac{x - 4}{3x^2 + 11x - 4} - \frac{16}{16 - x^2} \right)$;
 2) $\frac{1}{(2a - 2)^2} : \left(\frac{a}{a^2 - 2a + 1} - \frac{a + 2}{a^2 + a - 2} \right)$.

922. Спростіть вираз:

- 1) $\left(\frac{x - 1}{2x^2 + 3x + 1} - \frac{1}{x^2 - 1} \right) : \frac{x - 4}{x^3 - x}$;
 2) $(3b - 9)^2 \cdot \left(\frac{b}{b^2 - 6b + 9} - \frac{b + 2}{b^2 - b - 6} \right)$.



Вправи для повторення

3 923. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{0,16a^6x^{14}}$, якщо $a > 0$, $x < 0$;
 2) $\sqrt{8m^3p^6}$, якщо $p > 0$.

4 924. Числа x_1 і x_2 є коренями рівняння $x^2 - 2x - 10 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

1) $x_1^2 + x_2^2$; 2) $x_1^3 + x_2^3$; 3) $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$; 4) $x_1^4 + x_2^4$.



Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

925. Розкладіть на множники:

1) $x^3 - 4x$; 2) $x^4 - 4x^3 + 4x^2$;
3) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36$; 4) $x^3 + x^2 - x - 1$.

926. Розв'яжіть рівняння, використавши умову рівності дробу нулю:

1) $\frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 4} = 0$; 2) $\frac{2x^2 + x - 28}{2x + 8} = 0$.

927. Розв'яжіть рівняння, використавши основну властивість пропорції.

1) $\frac{2x + 1}{x - 3} = \frac{2x - 2}{x + 5}$; 2) $\frac{x - 3}{x + 1} = \frac{x - 9}{2x + 3}$.

928. Розв'яжіть рівняння множенням обох його частин на спільний знаменник:

1) $\frac{1}{2x - 10} + \frac{2}{3x - 15} = \frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x - 1}$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



929. Вкладник поклав кошти на депозити в різні банки, перший з яких нараховує 10 % річних, а другий – 15 % річних. За рік його загальний прибуток становив 12 % від початкового розміру внесених коштів. Знайдіть відношення розміру вкладу в першому банку до розміру вкладу у другому банку.

§25. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ, ЯКІ ЗВОДЯТЬСЯ ДО КВАДРАТНИХ

1. Дробові раціональні рівняння.

Розв'язування дробових раціональних рівнянь часто зводиться до розв'язування квадратних рівнянь. Нагадаємо один з методів розв'язування дробового раціонального рівняння.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2-2x} = \frac{8}{x^3-4x}.$$

Розв'язання. Розкладемо на множники знаменники дробів у рівнянні, щоб знайти область допустимих значень змінної і спільний знаменник:

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x(x-2)} = \frac{8}{x(x-2)(x+2)}.$$

Домножимо обидві частини рівняння на спільний знаменник дробів – вираз $x(x-2)(x+2)$, враховуючи ОДЗ: $x \neq 0$, $x \neq 2$, $x \neq -2$. Матимемо:

$$\begin{cases} x(x-2) + x + 2 = 8, \\ x \neq 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0, \\ x \neq 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = -2, \\ x \neq 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

звідки $x = 3$.

Відповідь. 3.

2. Метод розкладання многочлена на множники.

Деякі рівняння можна розв'язати за допомогою розкладання многочлена на множники.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $x^3 + 2x^2 - 15x = 0$.

Розв'язання. Винесемо в лівій частині рівняння спільний множник x за дужки. Матимемо:

$$\begin{aligned} x(x^2 + 2x - 15) &= 0, \\ x = 0 \text{ або } x^2 + 2x - 15 &= 0, \\ x = 3 \text{ або } x &= -5. \end{aligned}$$

Отже, рівняння $x^3 + 2x^2 - 15x = 0$ має три корені:

$$x_1 = 0; x_2 = 3; x_3 = -5.$$

Відповідь. 0; 3; -5.

3. Бікватратні рівняння.

Рівняння вигляду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, де $a \neq 0$, називають **бікватратним рівнянням**. Його можна розв'язати, увівши нову змінну, тобто позначивши $x^2 = t$. Тоді $x^4 = (x^2)^2 = t^2$, а початкове рівняння набуде вигляду

$$at^2 + bt + c = 0.$$

Такий метод розв'язування називають **методом введення нової змінної** або **методом заміни змінної**.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$.

Розв'язання. Зробимо заміну $x^2 = t$, одержимо рівняння $t^2 + 5t - 36 = 0$, коренями якого є числа $t_1 = 4$; $t_2 = -9$.

Повернемося до змінної x .

1) $t_1 = 4$, тоді $x^2 = 4$, $x_{1,2} = \pm 2$;

2) $t_2 = -9$, тоді $x^2 = -9$, коренів немає.

Отже, коренями початкового рівняння є числа 2 і -2.

Відповідь. 2; -2.

4. Метод заміни змінної.

Не лише бікватратні, а й деякі інші види рівнянь можна розв'язувати за допомогою заміни змінної.

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $(x^2 + 4x)(x^2 + 4x + 4) = 12$.

Розв'язання. Якщо ми розкриємо дужки в лівій частині рівняння, одержимо рівняння четвертого степеня, яке не завжди можна розв'язати методами шкільної математики. Тому дужки розкривати не будемо. Помітимо, що вирази, які містять x , в обох дужках є однаковими, тому можна скористатися заміною $x^2 + 4x = t$. Одержимо рівняння $t(t + 4) = 12$, що є квадратним відносно змінної t . Перепишемо його у вигляді $t^2 + 4t - 12 = 0$, звідки $t_1 = 2$; $t_2 = -6$.

Повертаємося до змінної x .

1) $t_1 = 2$, тоді $x^2 + 4x = 2$, тобто $x^2 + 4x - 2 = 0$, звідки $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{6}$;

2) $t_2 = -6$, тоді $x^2 + 4x = -6$, тобто $x^2 + 4x + 6 = 0$, але $D < 0$, тому коренів немає.

Отже, коренями початкового рівняння є числа $-2 + \sqrt{6}$ і $-2 - \sqrt{6}$.

Відповідь. $-2 \pm \sqrt{6}$.

Приклад 5. Розв'яжіть рівняння $x(x - 2) = \frac{4}{(x + 1)(x - 3)}$.

Розв'язання. Розкриємо дужки в кожній частині рівняння, одержимо:

$$x^2 - 2x = \frac{4}{x^2 - 2x - 3}.$$

Помітимо, що вирази, які містять змінну x , в обох частинах рівняння є однаковими, тому виконаємо заміну $x^2 - 2x = t$. Одержимо рівняння зі змінною t :

$$t = \frac{4}{t - 3}.$$

Розв'язавши його, матимемо корені $t_1 = -1$, $t_2 = 4$.

Повернемося до змінної x .

1) $t_1 = -1$, тоді $x^2 - 2x = -1$, тобто $x^2 - 2x + 1 = 0$, звідки $x = 1$;

2) $t_2 = 4$, тоді $x^2 - 2x = 4$, тобто $x^2 - 2x - 4 = 0$, звідки $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$.

Отже, початкове рівняння має три корені: $1; 1 \pm \sqrt{5}$.

Відповідь. $1; 1 \pm \sqrt{5}$.



1. Якими методами можна розв'язувати рівняння?
2. Яке рівняння називають біквдратним?
3. Як розв'язують біквдратне рівняння?



Початковий рівень

930. (Усно.) Які з рівнянь – біквдратні:

1) $x^3 + 2x^2 - 5 = 0$;

2) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$;

3) $x^2 + 2x - 1 = 0$;

4) $-7x^4 - 8x^2 - 11 = 0$;

5) $\frac{1}{x^4} + \frac{4}{x^2} - 5 = 0$;

6) $8x^2 - 9x^4 - 5 = 0$?

931. Випишіть біквдратні рівняння:

1) $x^2 + x - 7 = 0$;

2) $3x^4 - 2x^3 - 5 = 0$;

3) $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$;

4) $x^5 - 3x^2 + 4 = 0$;

5) $7x^4 + 15x^2 - 9 = 0$;

6) $5 - 9x^4 - 8x^2 = 0$.



Середній рівень

932. Розв'яжіть біквдратне рівняння:

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;

2) $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$;

3) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$;

4) $2x^4 - x^2 - 6 = 0$;

5) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$;

6) $9x^4 - 6x^2 + 1 = 0$.

933. Знайдіть корені біквдратного рівняння:

1) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$;

2) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$;

3) $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$;

4) $3x^4 - 2x^2 - 8 = 0$;

5) $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$;

6) $25x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

934. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2 - x - 2}{x + 3} = 0$;

2) $\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 0$.

935. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 4} = 0;$$

$$2) \frac{x^2 - x - 12}{x + 3} = 0.$$

936. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x^2}{x + 1} = \frac{x}{x + 1};$$

$$2) \frac{x^2}{x - 2} = \frac{4}{x - 2};$$

$$3) \frac{2x^2}{x - 1} = \frac{3x - 14}{1 - x};$$

$$4) \frac{x^2 - 5}{x - 3} = \frac{2x - 10}{3 - x}.$$

937. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x^2}{x - 2} = \frac{3x}{x - 2};$$

$$2) \frac{x^2}{x + 3} = \frac{9}{x + 3};$$

$$3) \frac{3x^2}{1 - x} = \frac{x - 14}{x - 1};$$

$$4) \frac{x^2 - 3}{x - 2} = \frac{2x - 5}{2 - x}.$$

938. Знайдіть корені рівняння:

$$1) \frac{x - 3}{x} = \frac{8}{x + 3};$$

$$2) \frac{2x - 3}{x + 2} = \frac{x}{x + 6};$$

$$3) \frac{10}{x - 3} = x;$$

$$4) \frac{8}{x} = 3x + 2.$$

939. Знайдіть корені рівняння:

$$1) \frac{x - 2}{x} = \frac{3}{x + 2};$$

$$2) \frac{3x - 1}{x + 3} = \frac{x}{x + 1};$$

$$3) \frac{3}{4 - x} = x;$$

$$4) \frac{6}{x} = 2x - 1.$$

940. Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники:

$$1) x^3 - 4x = 0;$$

$$2) x^3 + 9x = 0;$$

$$3) 4x^4 - x^2 = 0;$$

$$4) x^3 + x^2 - 6x = 0.$$

941. Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники:

$$1) x^3 - 9x = 0;$$

$$2) x^3 + 4x = 0;$$

$$3) 16x^4 - x^2 = 0;$$

$$4) x^3 + x^2 - 12x = 0.$$

942. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{20}{x} - \frac{20}{x + 1} = 1;$$

$$2) \frac{2}{x} + \frac{1}{x - 2} = 1.$$

943. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{12}{x} - \frac{12}{x+1} = 1;$$

$$2) \frac{3}{x} + \frac{1}{x-4} = 1.$$



3 Достатній рівень

944. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x+3} = 0;$$

$$2) \frac{6x^2 + 19x - 7}{1-3x} = 5;$$

$$3) \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4} = 3;$$

$$4) \frac{4x+2}{1+2x} = 6x+5.$$

945. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x^4 + x^2 - 2}{x+1} = 0;$$

$$2) \frac{6x^2 + 7x - 5}{1-2x} = 4;$$

$$3) \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 9} = 2;$$

$$4) \frac{8x+2}{1+4x} = 12x+5.$$

946. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x+7}{x+2} + \frac{x-4}{x-2} = 1;$$

$$2) \frac{3x+3}{3x+2} + \frac{2x-6}{3x-2} = 2;$$

$$3) \frac{4}{x-5} - \frac{2}{x+5} = \frac{x^2+15}{x^2-25};$$

$$4) \frac{2x+2}{x-3} - \frac{18}{x^2-9} = \frac{x+6}{x+3}.$$

947. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{3x+9}{x+1} + \frac{x-6}{x-1} = 3;$$

$$2) \frac{2x+8}{x+5} + \frac{10}{x^2-25} = \frac{x-4}{x-5}.$$

948. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{2x-3}{x^2+4x+4} - \frac{x+1}{x^2+2x} = \frac{5}{x};$$

$$2) \frac{6}{x^2-9} - \frac{4}{x^2+6x+9} = \frac{1}{x-3};$$

$$3) \frac{6}{x^2-36} - \frac{3}{x^2+6x} = \frac{x+12}{x^2-6x};$$

$$4) \frac{3x+2}{x+1} + \frac{x+4}{x-3} = \frac{3x^2+1}{x^2-2x-3}.$$

949. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{21}{x^2 - 2x} - \frac{14}{x^2 + 2x} = \frac{5}{x};$$

$$2) \frac{3}{x^2 - 4x + 4} + \frac{4}{x^2 - 4} + \frac{1}{x + 2} = 0;$$

$$3) \frac{5}{x^2 + 10x} + \frac{x + 20}{x^2 - 10x} = \frac{10}{x^2 - 100};$$

$$4) \frac{2x + 7}{x + 4} - \frac{x - 2}{x - 1} = \frac{5}{x^2 + 3x - 4}.$$

950. При якому значенні x :

1) сума дробів $\frac{6}{1 - x}$ і $\frac{x}{x + 2}$ дорівнює їх добутку;

2) сума дробів $\frac{2}{x - 3}$ і $\frac{6}{x + 3}$ дорівнює їх частці?

951. Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники:

$$1) x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0;$$

$$2) 3x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = 0.$$

952. Розв'яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники:

$$1) x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0;$$

$$2) 4x^3 + 8x^2 - 3x - 6 = 0.$$

953. Розв'яжіть рівняння:

$$1) (x^2 + 3)^2 - 3(x^2 + 3) - 4 = 0;$$

$$2) (x^2 - x)^2 + 2(x^2 - x) - 8 = 0.$$

954. Розв'яжіть рівняння:

$$1) (x^2 + 2)^2 - 2(x^2 + 2) - 3 = 0;$$

$$2) (x^2 + x)^2 - 5(x^2 + x) - 6 = 0.$$



4 Високий рівень

955. Знайдіть корені рівняння:

$$1) \frac{1}{2(x^2 + 3)} - \frac{1}{3(x + 4)} = \frac{1}{x^3 + 4x^2 + 3x + 12};$$

$$2) \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{32}{x^3 + 2x^2 - x - 2}.$$

956. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{1}{x-3} - \frac{14}{x^3 - x^2 - 9x + 9} = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$$

957. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^5 + x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 5x + 5 = 0$;

2) $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 0$.

958. Знайдіть корені рівняння:

1) $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 3 = 0$;

2) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$.

959. Розв'яжіть рівняння:

1) $x - \sqrt{x} - 6 = 0$;

2) $(x^2 + 2x - 2)(x^2 + 2x - 4) = 8$;

3) $(x - 2)^4 - 2(x - 2)^2 - 3 = 0$;

4) $(x^2 + x + 1)^2 - 8x^2 - 8x - 1 = 0$.

960. Розв'яжіть рівняння:

1) $x + 2\sqrt{x} - 8 = 0$;

2) $(x^2 - 2x - 1)(x^2 - 2x - 3) = 3$;

3) $(x + 1)^4 - 5(x + 1)^2 - 6 = 0$;

4) $(x^2 - x - 1)^2 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$.



Вправи для повторення

3 961. Корені квадратного тричлена $3x^2 + bx + c$ дорівнюють -7 і $\frac{2}{3}$. Розкладіть цей квадратний тричлен на множники.

962. Сума двох чисел дорівнює 27, а сума їх квадратів дорівнює 369. Знайдіть ці числа.

4 963. Спростіть вираз $\frac{x-2}{3x+2} \cdot \frac{9x^2-4}{2x^2-5x+2} - \frac{x}{1-2x}$.



Розв'яжіть та підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

964. З двох райцентрів, відстань між якими 84 км, одночасно назустріч один одному виїхали два велосипедисти. Знайдіть швидкість кожного з них, якщо вони зустрілися через 3 год, і швидкість одного була на 4 км/год більшою за швидкість іншого.



965. (Зовнішнє незалежне оцінювання з математики, 2014 р.).

Відомо, що $\frac{y-x}{2x} = \frac{3}{4}$, де $0 < x < y$. У скільки разів число y більше за число x ?

§26. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ ДРОБОВИХ РАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Дробові раціональні рівняння також можуть бути математичними моделями текстових задач.

Приклад 1. З одного міста до іншого, відстань між якими 560 км, виїхали одночасно легковик і вантажівка. Швидкість легковика на 10 км/год більша за швидкість вантажівки, тому він прибув до пункту призначення на 1 год раніше за вантажівку. Знайдіть швидкість вантажівки і швидкість легковика.

Розв'язання. Нехай швидкість вантажівки x км/год. Систематизуємо умову задачі у вигляді таблиці:

| | s , км | v , км/год | t , год |
|------------|----------|--------------|----------------------|
| Вантажівка | 560 | x | $\frac{560}{x}$ |
| Легковик | 560 | $x + 10$ | $\frac{560}{x + 10}$ |

Оскільки значення величини $\frac{560}{x+10}$ на 1 год менше від значення величини $\frac{560}{x}$, то можемо скласти рівняння:

$$\frac{560}{x+10} + 1 = \frac{560}{x}.$$

Воно має два корені: $x_1 = 70$, $x_2 = -80$. Другий корінь не відповідає змісту задачі, тому швидкість вантажівки 70 км/год. Тоді швидкість легковика: $70 + 10 = 80$ (км/год).

Відповідь. 70 км/год; 80 км/год.

Приклад 2. Майстер і його учень, працюючи разом, можуть виконати завдання за 8 год. За скільки годин може виконати це завдання самостійно кожен з них, якщо майстру на це потрібно на 12 год менше, ніж його учню?

Розв'язання. Нехай майстру, щоб виконати завдання самостійно, потрібно x год, тоді учневі – $(x + 12)$ год. Коли вид і обсяг роботи в задачах на роботу не конкретизовано (як у даному випадку), його прийнято позначати одиницею. Нагадаємо, що *продуктивність праці* – це обсяг роботи, що може бути виконана за одиницю часу. Тоді за 1 год майстер виконає $\frac{1}{x}$ частину завдання, а учень – $\frac{1}{x + 12}$ частину, це і є їх продуктивності праці. За умовою задачі майстер і учень

пропрацювали 8 год, тому майстер виконав $8 \cdot \frac{1}{x} = \frac{8}{x}$ частину завдання, а учень $8 \cdot \frac{1}{x + 12} = \frac{8}{x + 12}$. Враховуючи, що вони виконали весь обсяг завдання, маємо рівняння:

$$\frac{8}{x} + \frac{8}{x + 12} = 1,$$

звідки: $x_1 = 12$, $x_2 = -8$.

Другий корінь не відповідає змісту задачі, оскільки є від'ємним.

Отже, майстер, працюючи окремо, може виконати завдання за 12 год, а його учень – за $12 + 12 = 24$ (год).

Умову цієї задачі, як і попередньої, можна також систематизувати в таблицю:

| | Час для самостійного виконання, год | Продуктивність праці | Фактично витрачений час, год | Обсяг виконаної роботи |
|---------|-------------------------------------|----------------------|------------------------------|------------------------|
| Майстер | x | $\frac{1}{x}$ | 8 | $\frac{8}{x}$ |
| Учень | $x + 12$ | $\frac{1}{x + 12}$ | 8 | $\frac{8}{x + 12}$ |

Відповідь. 12 год і 24 год.

Зверніть увагу, що умови більшості задач на рух або на роботу можна систематизувати в таблицю, що допоможе уникнути громіздких текстових записів.



Поясніть, як розв'язано задачі у прикладах 1 і 2.



Середній рівень

966. Одне з натуральних чисел на 2 більше за друге. Знайдіть ці числа, якщо сума обернених їм чисел дорівнює $\frac{5}{12}$.

967. Сума двох натуральних чисел дорівнює 20, а сума чисел, їм обернених, складає $\frac{5}{24}$. Знайдіть ці числа.



Достатній рівень

968. Чисельник звичайного нескоротного дробу на 1 менший від знаменника. Якщо від чисельника відняти 7, а від знаменника відняти 5, то дріб зменшиться на $\frac{1}{2}$. Знайдіть цей дріб.

969. Знаменник звичайного нескоротного дробу на 5 більший за чисельник. Якщо знаменник збільшити на 6, а чисельник збільшити на 4, то дріб збільшиться на $\frac{1}{4}$. Знайдіть цей дріб.

970. З міста в село, відстань між якими 48 км, виїхали одночасно два велосипедисти. Швидкість одного з них була на 4 км/год більшою за швидкість другого, і тому він прибув у село на 1 год раніше від другого. Знайдіть швидкість кожного з велосипедистів.

971. З міста A в місто B , відстань між якими 420 км, одночасно виїхали два легковики. Швидкість одного з них на 10 км/год більша за швидкість другого, і тому він прибув у місто B на 1 год раніше, ніж другий. Знайдіть швидкість кожного з легковиків.

972. Щоб ліквідувати запізнення на 40 хв, потяг на перегоні завдовжки 300 км збільшив швидкість на 5 км/год порівняно зі швидкістю за розкладом. Якою є швидкість потяга за розкладом?

973. Автомобіль мав проїхати 810 км. Подолавши $\frac{5}{9}$ шляху, він зробив зупинку на 30 хв. Але потім, збільшивши швидкість на 10 км/год, прибув до пункту призначення вчасно. Якою була швидкість автомобіля до зупинки?

- 974.** Потяг мав проїхати 320 км. Проїхавши $\frac{3}{8}$ шляху, він зупинився на 1 год, а потім продовжив рух зі швидкістю, на 10 км/год меншою за початкову. Знайдіть швидкість потяга, з якою він рухався до зупинки, якщо до пункту призначення він прибув через 7 год після виїзду.
- 975.** Човен, власна швидкість якого 18 км/год, проплив 40 км за течією і 16 км проти течії, витративши на весь шлях 3 год. Знайдіть швидкість течії, якщо вона менша за 4 км/год?
- 976.** Відстань між двома пристанями 48 км. На човні шлях туди і назад можна подолати за 7 год. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год.
- 977.** Моторний човен проплив 18 км за течією річки і 28 км проти течії за такий самий час, що й 48 км у стоячій воді. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії дорівнює 3 км/год.
- 978.** Катер пропливає 30 км за течією річки і 8 км проти течії річки за такий самий час, який потрібний плоту, щоб проплисти по цій річці 4 км. Знайдіть швидкість течії річки, якщо власна швидкість катера дорівнює 18 км/год.
- 979.** Моторний човен проплив 40 км по озеру, а потім 18 км по річці, що впадає в це озеро, витративши на цей шлях 3 год. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.
- 980.** Дві бригади шляховиків мали заасфальтувати по 200 м² дорожнього полотна, причому перша бригада за день асфальтувала на 10 м² більше, ніж друга, і тому виконала завдання на 1 день раніше за другу. Скільки м² дорожнього полотна щодня асфальтувала кожна з бригад?
- 981.** Для перевезення 60 т вантажу замовили деяку кількість вантажівок. Оскільки на кожну вантажили на 1 т більше, ніж передбачалося, то 3 вантажівки виявилися зайвими. Скільки вантажівок було використано для перевезення вантажу?
- 982.** Майстер і учень, працюючи разом, можуть виконати замовлення за 16 год. За скільки годин виконає це саме замовлення кожен з них самостійно, якщо майстру на це потрібно на 24 год менше, ніж учню?

983. Два маляри, працюючи разом, можуть пофарбувати певну будівлю за 20 год. За скільки годин може виконати цю роботу кожний з малярів самостійно, якщо одному з них для цього потрібно на 9 год більше, ніж іншому?

984. Через один кран басейн наповнювали 9 хв, після чого відкрили другий кран. Через 6 хв їх спільної роботи виявилось, що наповнено тільки половину басейну. За скільки хвилин можна наповнити басейн через кожний із цих кранів окремо, якщо першому на це треба на 9 хв більше, ніж другому?

985. Один з операторів комп'ютерного набору може набрати рукопис на 12 днів швидше, ніж інший. Через 6 днів роботи другого оператора до нього приєднався перший. Через 10 днів спільної роботи виявилось, що набрано $\frac{5}{7}$ рукопису. За скільки днів може набрати рукопис кожен з операторів окремо?



4 Високий рівень

986. Пішохід рухався із села A в село B 4 год. На зворотному шляху перші 10 км він пройшов із тією самою швидкістю, а потім зменшив її на 1 км/год і тому на зворотний шлях витратив на 30 хв більше. Знайдіть відстань між селами.

987. Відстань від пристані M до пристані N за течією річки човен долає за 3 год. Одного разу, не дійшовши 30 км до пристані N , човен повернув назад і прибув до пристані M через 4,5 год. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.

988. Для промивання труб завод придбав 6 літрів кислоти. Частину кислоти використали, а вміст посудини з кислотою доповнили до початкового об'єму водою. Іншим разом з цієї посудини використали таку саму кількість суміші, як кислоти першого разу, а посудину знов долили водою до початкового об'єму. Після цього чистої кислоти в посудині стало втричі менше, ніж води. Скільки літрів кислоти використали першого разу?



Вправи для повторення



989. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 2x^4 + 3x^2 - 5 = 0;$$

$$2) \frac{x^2}{x-6} = \frac{36}{x-6}.$$

3 990. Скоротіть дріб:

$$1) \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 2x};$$

$$2) \frac{x^2 - 9}{2x^2 - 4x - 6}.$$

4 991. Розв'яжіть рівняння:

$$1) x - 2\sqrt{x} - 8 = 0;$$

$$2) (x + 7)^4 - 5(x + 7)^2 - 6 = 0.$$



Цікаві задачі для учнів неледачих



992. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2 + 2x}{|x|} - 2$.

Домашня самостійна робота № 6

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 1. Укажіть вираз, який є квадратним тричленом.

А. $2x^2 + x - 3x^3$;

Б. $2x^2 + x - 3$;

В. $\frac{1}{2x^2 + x - 3}$;

Г. $\frac{2}{x^2} + x - 3$.

2. Знайдіть дискримінант квадратного тричлена $2x^2 - 3x - 7$.

А. 47;

Б. -47;

В. 64;

Г. 65.

3. Укажіть бікватратне рівняння.

А. $4x^2 + x - 3 = 0$;

Б. $4x^4 + x^2 - 3 = 0$;

В. $4x^3 + x^2 - 3 = 0$;

Г. $4x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x - 5 = 0$.

2 4. Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен $-2x^2 + 3x + 5$.

А. $-2(x + 1)(x - 2, 5)$;

Б. $2(x + 1)(x - 2, 5)$;

В. $-2(x - 1)(x + 2, 5)$;

Г. $-2(x + 1)(x + 2, 5)$.

5. Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2}{x - 7} = \frac{49}{x - 7}$.

А. коренів немає;

Б. 7;

В. -7;

Г. -7; 7.

6. Розв'яжіть рівняння $x^3 + 2x^2 - 3x = 0$, розклавши його ліву частину на множники.

А. -3; 1;

Б. -1; 3;

В. -1; 0; 3;

Г. -3; 0; 1.

3 7. Скоротіть дріб $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$.

А. $\frac{x+2}{x+3}$; Б. $\frac{x-2}{x+3}$; В. $\frac{x-2}{x-3}$; Г. $\frac{x+2}{x-3}$.

8. При яких значеннях x сума дробів $\frac{6}{1+x}$ і $\frac{x}{3-x}$ дорівнює їх добутку?

А. таких значень x не існує; Б. 2;
В. 2; 9; Г. -9; -2.

9. З міста A в місто B , відстань між якими 360 км, одночасно виїхали два автомобілі. Швидкість одного з них була на 10 км/год більшою за швидкість іншого, і тому він прибув до пункту призначення на 30 хв раніше. Знайдіть швидкість автомобіля, що рухався повільніше.

А. 70 км/год; Б. 80 км/год; В. 90 км/год; Г. 100 км/год.

4 10. Розкладіть на множники многочлен $-\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 3x^2$.

А. $-\frac{1}{4}x^2(x-2)(x+6)$; Б. $-\frac{1}{4}(x-2)(x+6)$;
В. $-\frac{1}{4}x^2(x+2)(x-6)$; Г. $-\frac{1}{4}x(x-2)(x+6)$.

11. Розв'яжіть рівняння $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$.

А. розв'язків немає; Б. -4; -1; 2;
В. 1; 2; 4; Г. -2; 1; 4.

12. Відстань від пристані A до пристані B проти течії річки човен долає за 3 год. Одного разу, не дійшовши 24 км до пристані B , човен повернув назад і прибув до пристані A через 3 год 18 хв. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії дорівнювала 2 км/год.

А. 20 км/год; Б. 22 км/год; В. 24 км/год; Г. 26 км/год.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ДО § 24–26

1 1. З даних виразів виписіть ті, що є квадратними тричленами:

1) $2x^2 - 3x + 7$; 2) $\frac{1}{2x^2 - 3x + 7}$;
3) $2x^2 - 3x + 7x^3$; 4) $-8 + 2x^2 - 3x$.

2. Знайдіть дискримінант квадратного тричлена та визначте кількість його коренів:

1) $x^2 + 3x - 7$;

2) $x^2 + x + 9$.

3. Чи є бікватратним рівняння:

1) $x^2 + 8x - 9 = 0$;

2) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$;

3) $x^3 + 8x^2 - 9 = 0$;

4) $7x^2 - x^4 - 5 = 0$?

2 4. Розкладіть на множники квадратний тричлен:

1) $x^2 + 4x - 5$;

2) $-2x^2 + 5x - 2$.

5. Знайдіть корені рівняння:

1) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$;

2) $\frac{x^2}{x+4} = \frac{16}{x+4}$.

6. Розв'яжіть рівняння $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$, розклавши його ліву частину на множники.

3 7. Скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 4x}$;

2) $\frac{x^2 - 4}{2x^2 + 7x - 22}$.

8. З одного міста в інше одночасно виїхали два велосипедисти. Швидкість першого була на 3 км/год більшою, ніж швидкість другого, тому до пункту призначення він прибув на 1 год раніше, ніж другий. Знайдіть швидкість кожного з велосипедистів, якщо відстань між містами 60 км.

4 9. Розв'яжіть рівняння:

1) $x + 3\sqrt{x} - 10 = 0$;

2) $(x - 3)^4 - 7(x - 3)^2 - 8 = 0$.

Додаткові завдання

4 10. Розкладіть на множники многочлен:

1) $x^3 - 4x^2 - 5x$;

2) $-\frac{1}{2}x^4 + 3x^3 - 4x^2$.

11. Побудуйте графік функції

$$y = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 - 2x}$$

Вправи для повторення розділу 3

До § 20

1 993. Перепишіть рівняння в зошит та підкресліть однією рискою його перший коефіцієнт, двома – другий і «хвилькою» вільний член (у разі потреби допишіть коефіцієнтом число 1) за зразком: $\underline{a}x^2 + \underline{b}x + \underline{c} = 0$, $\underline{2}x^2 - \underline{1}x + \underline{5} = 0$:

- 1) $7x^2 - 3x + 5 = 0$; 2) $-2x^2 + x - 4 = 0$;
 3) $3x + x^2 - 7 = 0$; 4) $3x^2 = 0$;
 5) $2x^2 - 7 = 0$; 6) $2x + 5x^2 = 0$.

2 994. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $1,8x^2 = 0$; 2) $2x^2 - 32 = 0$; 3) $5x^2 - 7x = 0$;
 4) $-x^2 - 9 = 0$; 5) $\frac{1}{2}x^2 + 8x = 0$; 6) $3x^2 - 15 = 0$.

3 995. Чи є число $1 - \sqrt{2}$ коренем рівняння $x^2 - 2x - 1 = 0$?

996. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{x^2 + x}{2} + \frac{x - 1}{3} = \frac{5x + 4}{6}$; 2) $\frac{2x^2 - 3x}{4} + \frac{x + 4}{2} = \frac{x + 16}{8}$.

997. Довжина прямокутника у 1,5 раза більша за ширину. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його площа 54 см^2 .

4 998. При яких значеннях a число 3 є коренем рівняння:

- 1) $ax^2 - 7x + (a^2 + 21) = 0$; 2) $x^2 + (a^2 - 4)x - 9 = 0$?

999. При яких значеннях a рівняння:

- 1) $x^2 - (4a - 5)x = 0$ має тільки один корінь;
 2) $a^2x^2 - a = 0$ має два корені?

До § 21

1 1000. Знайдіть дискримінант квадратного рівняння та визначте кількість його коренів:

- 1) $x^2 + 2x - 4 = 0$; 2) $3x^2 - 2x + 3 = 0$;
 3) $x^2 - 2x + 1 = 0$; 4) $7x^2 + x - 1 = 0$.

2 1001. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 + 7x - 8 = 0$; 2) $16x^2 - 8x + 1 = 0$;

3) $2x^2 - x - 3 = 0$;

4) $x^2 + 3x - 10 = 0$;

5) $x^2 + 4x + 7 = 0$;

6) $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

1002. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 = 6x - 7$;

2) $x^2 + 7x = -12$;

3) $10x = 25x^2 + 1$;

4) $2 - 9x = 5x^2$.

3 1003. Розв'яжіть рівняння графічно, а потім перевірте розв'язок аналітично:

1) $x^2 = 3 - 2x$;

2) $x^2 = 0,5x + 3$.

1004. Розв'яжіть рівняння:

1) $5(x - 2) = (3x + 2)(x - 2)$;

2) $\frac{1}{5}x^2 - 2x - 7 = 0$;

3) $x^2 + \sqrt{2}x - 12 = 0$;

4) $\sqrt{3}x^2 - 2x - \sqrt{3} = 0$.

4 1005. При якому значенні m має лише один корінь рівняння:

1) $x^2 + 2mx + m = 0$;

2) $mx^2 - 4x + 2 = 0$?

1006. Доведіть, що при будь-якому a рівняння $2x^2 + ax - 3 = 0$ має два різних корені.

1007. Розв'яжіть рівняння відносно x :

1) $x^2 - x(3 - 2a) - 6a = 0$;

2) $a^2x^2 - 3ax + 2 = 0$.

1008. Знайдіть корені рівняння:

1) $|x^2 + 5x - 3| = 3$;

2) $||x^2 - 5x + 1| - 4| = 3$;

3) $x^2 + x + \frac{4}{x-2} = \frac{4}{x-2} + 6$;

4) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 3\right)(x^2 + 2x) = 0$.

До § 22

1 1009. Знайдіть суму і добуток коренів рівняння:

1) $x^2 + 17x + 60 = 0$;

2) $x^2 - 12 = 0$;

3) $2x^2 - 5x + 3 = 0$;

4) $-x^2 - 4x + 5 = 0$.

2 1010. Не використовуючи формулу коренів квадратного рівняння, знайдіть другий корінь, якщо відомо перший:

1) $x^2 - 7x + 10 = 0$, $x_1 = 5$;

2) $x^2 + 3x - 18 = 0$, $x_1 = -6$.

3 1011. Різниця коренів квадратного рівняння $x^2 + 2x + q = 0$ дорівнює 6. Знайдіть ці корені та коефіцієнт q .

1012. Доведіть, що рівняння $3x^2 + bx - 7 = 0$ при будь-якому значенні b має один додатний і один від'ємний корінь.

1013. Відношення коренів рівняння $x^2 + px + 54 = 0$ дорівнює $2 : 3$. Знайдіть p та корені рівняння.

1014. Один з коренів рівняння $5x^2 - 6x + c = 0$ удвічі більший за другий. Знайдіть c .

4 **1015.** Сума квадратів коренів рівняння $3x^2 + bx - 12 = 0$ дорівнює 33. Знайдіть b .

1016. При яких значеннях a сума коренів рівняння $x^2 - 2ax + (2a - 1) = 0$ дорівнює сумі квадратів його коренів?



1017. Складіть квадратне рівняння, корені якого вдвічі менші від відповідних коренів рівняння $5x^2 - 16x + 4 = 0$.

До § 23

2 **1018.** Периметр прямокутника дорівнює 30 см, а його площа – 54 см². Знайдіть сторони прямокутника.

3 **1019.** Знайдіть три послідовних цілих числа, сума квадратів яких дорівнює 302.

1020. Знайдіть п'ять послідовних цілих чисел, коли відомо, що сума квадратів трьох перших чисел дорівнює сумі квадратів двох останніх.

1021. Один з катетів прямокутного трикутника на 2 см менший за другий, а периметр трикутника дорівнює 24 см. Знайдіть площу трикутника.

4 **1022.** У чемпіонаті України з футболу було зіграно 240 матчів. Скільки команд взяло участь у чемпіонаті, якщо всі команди зіграли одна з одною по два матчі?

1023. Дно ящика – прямокутник, ширина якого в 1,5 раза менша від довжини. Висота ящика 0,4 м. Знайдіть об'єм ящика, коли відомо, що площа його дна на 0,66 м² менша від суми площ усіх бічних стінок.

1024. Відкриту коробку об'ємом 10 500 см³ виготовили з аркуша картону прямокутної форми, довжина якого вдвічі більша за ширину, вирізавши з кутів аркуша квадрати зі стороною 5 см. Знайдіть початкові розміри аркуша.

До § 24

1 1025. Знайдіть дискримінант кожного квадратного тричлена та визначте ті з них, які можна розкласти на лінійні множники:

1) $x^2 + x - 5$; 2) $x^2 + 2x + 7$; 3) $9x^2 + 6x + 1$.

2 1026. Знайдіть корені квадратного тричлена:

1) $x^2 + 5x + 4$; 2) $x^2 - 4x - 12$;
3) $2x^2 - 12x + 18$; 4) $-4x^2 + 7x + 2$.

1027. Розкладіть на множники квадратний тричлен:

1) $x^2 + 3x - 4$; 2) $2x^2 - 7x - 4$;
3) $-x^2 + 3x + 18$; 4) $-4x^2 + 9x - 2$.

1028. Виділіть квадрат двочлена із квадратного тричлена:

1) $x^2 + 6x - 7$; 2) $x^2 - 8x - 9$.

3 1029. Скоротіть дріб:

1) $\frac{4x^2 - 81}{2x^2 - 5x - 18}$; 2) $\frac{2x^2 + 6x - 20}{x^3 - 8}$;
3) $\frac{2x^2 - 12x + 18}{2x^2 - x - 15}$; 4) $\frac{4x^2 - 11x - 3}{-3x^2 + 10x - 3}$.

1030. Виконайте дії:

1) $\frac{x-1}{x^2+2x-3} + \frac{x+1}{x^2+4x+3}$; 2) $\frac{2x^2-7}{x^2-3x-4} - \frac{x+1}{x-4}$;
3) $\frac{x^2-x-20}{2-x} \cdot \frac{2x-x^2}{x+4}$; 4) $\frac{x+5}{2x-6} : \frac{x^2+11x+30}{x-3}$.

1031. Один з коренів квадратного тричлена $x^2 + px + 6$ дорівнює -3 . Знайдіть p та другий корінь.

1032. Виділіть квадрат двочлена з квадратного тричлена:

1) $x^2 + x - 1$; 2) $2x^2 - 3x + 7$;
3) $3x^2 - 5x + 7$; 4) $-4x^2 + 9x - 2$.

4 1033. Укажіть таке значення невідомого коефіцієнта, щоб тричлен мав один корінь:

1) $x^2 + bx + 4$; 2) $ax^2 + 8x + 64$; 3) $x^2 - 18x + c$.

1034. Розкладіть на множники квадратний тричлен відносно змінної x :

1) $x^2 - 5ax - 6a^2$; 2) $x^2 + 3bx - 10b^2$.

1035. Якого найменшого значення може набувати квадратний тричлен $x^2 - 8x + 19$? При якому значенні x воно досягається?

1036. При якому a квадратний тричлен $-a^2 - 4a - 17$ набуває найбільшого значення? Знайдіть це значення.

До § 25

2 1037. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^4 + x^2 - 3 = 0$;

2) $3x^4 - 2x^2 - 40 = 0$;

3) $x^4 + x^2 + 9 = 0$;

4) $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$.

1038. Знайдіть корені рівняння:

1) $\frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 0$;

2) $\frac{3x^2}{x + 2} = \frac{5x}{x + 2}$;

3) $\frac{x^2 + 1}{x - 2} = \frac{1 - 3x}{2 - x}$;

4) $\frac{21}{x} = 2x + 1$.

1039. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^4 - 16x^2 = 0$;

2) $x^3 - x^2 - 6x = 0$.

3 1040. Знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = x^4 - 3x^2 - 4$ з віссю абсцис.

1041. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{x + 2} - \frac{4}{x + 3} = \frac{1}{x}$;

2) $\frac{1}{2(1 - x)} + \frac{1}{2 - x} = \frac{3}{3 - x}$;

3) $\frac{18}{x^2 + 6x + 9} + \frac{7}{x + 3} = 1$;

4) $\frac{13x + 4}{4x^2 + 4x + 1} - \frac{1}{2x + 1} = 4$;

5) $\frac{1}{(x + 2)^2} + \frac{9}{(x - 2)^2} = \frac{6}{x^2 - 4}$;

6) $\frac{3}{3x^2 - x} - \frac{4}{9x^2 - 1} = \frac{4}{9x^2 - 6x + 1}$.

1042. Знайдіть корені рівняння:

1) $\frac{1}{2x + x^2} - \frac{1}{x - 2} = \frac{8}{4x - x^3}$;

2) $\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{x + x^2} = \frac{10}{x - x^3}$;

3) $\frac{7x + 6}{x^3 - 27} = \frac{1}{x^2 + 3x + 9} + \frac{1}{x - 3}$.

1043. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 - x^2 = x - 1$;

2) $(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3 = 0$.

1044. Знайдіть координати точок перетину графіків $y = 4x$ і $y = \frac{7}{x+1} - 1$.

1045. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{8x+29}{16x^4-1} + \frac{18x+5}{8x^3+4x^2+2x+1} = \frac{25}{4x^2+1};$$

$$2) \frac{3x}{27x^3+18x^2-12x-8} - \frac{1}{9x^2+12x+4} = \frac{x-1}{4x-9x^3}.$$

1046. Знайдіть корені рівняння:

$$1) (x^2 - 4x)(x - 2)^2 + 3 = 0;$$

$$2) x(x-1)(x-2)(x-3) = 24;$$

$$3) x^2 - 3x = \frac{8}{x^2 - 3x - 2};$$

$$4) (x+2)(x-7) = \frac{19}{(x-1)(x-4)};$$

$$5) \frac{5}{x^2 - x - 1} + \frac{1}{x^2 - x - 5} = 2;$$

$$6) \frac{2}{x^2 - 11x + 4} + \frac{3}{x^2 - 11x + 1} = \frac{8}{x^2 - 11x - 2}.$$

1047. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{x^2 - 13}{x+1} + \frac{x+1}{x^2 - 13} = 2,5; \quad 2) \frac{x^2 + 3x}{1-x} + \frac{5x-5}{3x+x^2} = 4.$$

До § 26

1048. З міста в село, відстань між якими 16 км, вийшов пішохід. Через 2 год 40 хв у тому самому напрямі виїхав велосипедист і прибув у село одночасно з пішоходом. Знайдіть швидкість велосипедиста, якщо вона на 8 км/год більша за швидкість пішохода.

1049. Потяг, який було затримано на 2 год, ліквідував запізнення на перегоні завдовжки 400 км, збільшивши швидкість на 10 км/год. Знайдіть, за який час потяг мав подолати даний перегін за розкладом.

1050. Катер проплив 45 км за течією і 7 км проти течії, витративши на весь шлях 3 год. Яка власна швидкість катера, якщо швидкість течії 2 км/год?

1051. О 8-й годині ранку від пристані за течією річки відійшов пліт, а о 17-й годині в тому самому напрямі відійшов човен, який наздогнав пліт на відстані 20 км від пристані. О котрій годині човен наздогнав пліт, якщо власна швидкість човна дорівнює 18 км/год?

1052. Рибалка відплив на човні з пункту *A* проти течії річки. Подолавши 5 км, він кинув весла, і через 3 год після відплиття з пункту *A* його знову віднесло до цього пункту. Швидкість човна у стоячій воді дорівнює 12 км/год. Знайдіть швидкість течії, якщо вона менша, ніж 5 км/год.

1053. Перший оператор комп'ютерного набору набрав 120 сторінок рукопису, а другий – 144 сторінки. Перший щодня набирив на 4 сторінки більше, ніж другий, і працював на 3 дні менше, ніж другий. Скільки сторінок щодня набирив перший оператор і скільки – другий?

1054. Робочий день становить 8 год. Щоб виготовити 15 деталей, Петру треба на 1 год менше, ніж Степану. Скільки деталей за день виготовляє кожен з майстрів, якщо Петро за робочий день виготовляє на 20 деталей більше, ніж Степан?

1055. Через перший кран водоочищувач на фермі наповнюється на 4 год швидше, ніж через другий спорожнюється. Якщо одночасно відкрити обидва крани, то водоочищувач наповниться за 3 год. За скільки годин водоочищувач може через перший кран наповнитися і за скільки годин через другий кран спорожнитися?

1056. Майстер може виконати завдання на 3 год швидше, ніж учень. Якщо майстер пропрацює 4 год, а потім його замінить учень і пропрацює 3 год, то завдання буде виконано. За скільки годин самостійно може виконати завдання майстер і за скільки – учень?

1057. Зливok міді й цинку, що містить 1 кг міді, сплавив з 2 кг міді. Отримали зливok, у якому міді на 25 % більше, ніж було у попередньому зливку. Якою була маса початкового зливка?

4 1058. З міст *A* і *B* одночасно назустріч один одному виїхали два велосипедисти і зустрілися через 5 год. Швидкість велосипедиста, який виїхав з міста *A*, на 5 км/год менша за швидкість другого велосипедиста. Якби другий велосипедист виїхав на 4,5 год пізніше, ніж перший, то велосипедисти зустрілися б на відстані 75 км від міста *B*. Знайдіть відстань між містами *A* і *B*.

1059. Бригада робітників мала виготовити у певний термін 800 однакових віконних блоків. У перші 5 днів бригада щоденно виготовляла заплановану кількість блоків, а потім кожного дня – на 5 блоків більше, ніж планувала, тому вже за день до визначеного терміну було виготовлено 830 віконних блоків. Скільки віконних блоків мала щодня виготовляти бригада за планом?

«Бажаємо тобі стати другим Остроградським...»

Михайло Васильович Остроградський народився 12 вересня 1801 року у с. Пашенна Полтавської губернії (нині с. Пашенівка). Діди і прадіди Михайла Васильовича служили в козацькому війську, брали участь у багатьох боях, не раз виявляли військову доблесть і героїзм. Мабуть саме тому в дитинстві Михайло Васильович так мріяв стати військовим. Але йому судилося стати всесвітньо відомим ученим.

У дитинстві Михайло виявляв виняткову спостережливість і захоплювався вимірюваннями. Навчався він у пансіоні при Полтавській гімназії, потім у самій гімназії. Закінчивши гімназію, став вільним слухачем Харківського університету, а згодом і його студентом. Після закінчення університету з відзнакою у серпні 1820 року менш ніж за рік потому (у квітні 1821 року) отримує степінь кандидата наук за дослідження у галузі прикладної математики. У 1822 році Остроградський вирушає до Парижа з метою удосконалення своєї математичної освіти, ставши слухачем університету у Сорбонні. Саме там він публікує свої перші наукові праці, стає відомим науковцем та здобуває авторитет у французьких математиків. Але через постійний брак коштів Михайло Васильович був вимушений залишити Париж, майже пішки подолавши взимку 1828 року шлях від Парижа до Петербурга.



М.В. Остроградський
(1801–1862)

Наукові кола Петербурга зустріли молодого вченого з радістю і надією. Його авторитет серед петербурзьких діячів науки був високим і незаперечним. У тому ж 1828 році Остроградський починає викладацьку діяльність у Морському кадетському корпусі Петербурга та стає ад'юнктом Петербурзької академії наук. А з 1830 року викладає ще у чотирьох вищих навчальних закладах Петербурга. У 1834 році Остроградського було обрано членом Американської академії наук, у 1841 році – членом Туринської академії, у 1853 – членом Римської академії Лінчів і у 1856 році – членом-кореспондентом Паризької академії наук.

Лекції Остроградського відвідували не лише студенти, а й викладачі, професори, відомі математики. Усіх приваблювала

його система викладання предмета – широка загальність теми, виразність і стислість викладу, а також веселий характер та гострий розум. На лекціях він обов’язково вживав українські слова, прислів’я та приказки. Тому студенти завжди згадували його лекції із захватом.

Улюбленим письменником Остроградського був Т.Г. Шевченко, з яким він був особисто знайомий та значну частину творів якого знав напам’ять і охоче декламував. У 1858 році, коли Тарас Григорович повертався із заслання через Петербург на батьківщину, Михайло Васильович запропонував Кобзареві для проживання свою петербурзьку квартиру.

Повернувшись із заслання, Шевченко писав у «Щоденнику»: «Великий математик прийняв мене з розпростертими обіймами, як земляка і як свого сім’янина, що надовго кудись виїжджав».

Михайло Васильович був визначною, оригінальною, усебічно обдарованою людиною. Його високо цінували не тільки за розум, а й за незалежність, демократизм, скромність, щирість і простоту, за повагу до людей праці, за його гідність. Перебуваючи на вершині слави, вшанований за свої наукові праці у всій Європі, Остроградський поводив себе надзвичайно просто і не любив говорити про свої заслуги.

І хоч які б проблеми розв’язував вчений (він займався алгеброю, прикладною математикою, теорією чисел, теорією ймовірностей, механікою тощо), усі його наукові праці позначені глибиною думки й оригінальністю, у них незмінно присутня широта його поглядів, уміння глибоко проникнути в суть проблеми і знайти численні узагальнення.

На все життя Михайло Васильович зберіг любов до рідної Землі та рідної мови. Майже щороку влітку він виїжджав в Україну, щоб поринути у повний спокій та помилуватися чудовими краєвидами. Улітку 1861 року Остроградський, відвідуючи своє рідне село, захворів і 1 січня 1862 року помер.

За свою майже 40-річну наукову діяльність Михайло Васильович написав понад 50 наукових праць з різних галузей математики: математичного аналізу, аналітичної і небесної механіки, математичної фізики, теорії ймовірностей. Свої педагогічні погляди М.В. Остроградський виклав у підручниках з елементарної і вищої математики.

Ім’я М.В. Остроградського носить Кременчуцький національний університет.

Попри те, що майже все своє життя Михайло Остроградський займався наукою поза межами України, він став широко відомим серед своїх співвітчизників. Авторитет і популярність М.В. Остроградського були настільки значними, що саме його ім’я стало синонімом вченого. Батьки, віддаючи дитину на навчання, бажали їй «стати другим Остроградським».

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ЗА КУРС АЛГЕБРИ 8 КЛАСУ

1 1. Виконайте дії:

1) $\frac{3m-4}{a} + \frac{4}{a}$; 2) $\frac{2}{b} : \frac{6}{b^2}$.

2. Подайте у вигляді степеня з основою a :

1) $a^{-7} : a^3$; 2) $(a^{-2})^5$.

3. Для функції $y = \sqrt{x}$ знайдіть значення y , яке відповідає значенню $x = 9$; 36 .

2 4. Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{2\frac{7}{9}} + 10\sqrt{0,16}$; 2) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{0,5} + (-\sqrt{7})^2$.

5. Спростіть вираз $-\frac{5}{7}a^{-2}b^7 \cdot 2\frac{1}{10}a^{-3}b^{-5}$.

6. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^2 + 13x + 6 = 0$; 2) $\frac{x^2}{x-1} = \frac{3x-2}{x-1}$.

3 7. Спростіть вираз $\frac{2x}{x-4} - \frac{x+3}{3x-12} \cdot \frac{96}{x^2+3x}$.

8. Моторний човен подолав 36 км проти течії і повернувся назад, витративши на весь шлях 5 год. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.

4 9. Побудуйте графік функції $y = \frac{8x-32}{4x-x^2}$.

Додаткові завдання

4 10. Розв'яжіть рівняння $(x^2 + 4x)(x^2 + 4x + 3) = 10$.

11. Доведіть, що значення виразу

$\frac{\sqrt{11} + \sqrt{7}}{\sqrt{11} - \sqrt{7}} + \frac{\sqrt{11} - \sqrt{7}}{\sqrt{11} + \sqrt{7}}$ є натуральним числом.



Раціональні вирази

1060. Доведіть, що при додатних значеннях a і b ($a \neq b$) значення дробу $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$ більше за відповідне значення дробу $\frac{a^2 + b^2}{a + b}$.

1061. Скоротіть дріб $\frac{m^4 + m^2n^2 + n^4}{m^3 + n^3}$.

1062. Спростіть вираз:

$$1) \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y+z}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y+z}} \cdot \left(1 + \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz}\right) : \frac{x - y - z}{xyz};$$

$$2) \frac{\frac{m-n}{2m-n} - \frac{m^2+n^2+m}{2m^2+mn-n^2}}{(4n^4+4mn^2+m^2) : (2n^2+m)} \cdot (n^2+n+mn+m);$$

$$3) \frac{4}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}} : \frac{1}{x + \frac{1}{y}} - \frac{4}{y(xyz + x + z)};$$

$$4) \left(\left(\frac{a}{b-a} \right)^{-2} - \frac{(a+b)^2 - 4ab}{a^2 - ab} \right)^2 \cdot \frac{a^4}{a^2b^2 - b^4};$$

$$5) \frac{p^{-6} - 64}{4 + 2p^{-1} + p^{-2}} \cdot \frac{p^2}{4 - 4p^{-1} + p^{-2}} - \frac{4p^2(2p+1)}{1-2p};$$

$$6) \frac{x^{-1} - y^{-1}}{x^{-3} + y^{-3}} : \frac{x^2y^2}{(x+y)^2 - 3xy} \cdot \left(\frac{x^2 - y^2}{xy} \right)^{-1}.$$

1063. Доведіть тотожність:

$$1) \frac{\left(x^2 - \frac{1}{y^2}\right)^x \cdot \left(y + \frac{1}{x}\right)^{y-x}}{\left(y^2 - \frac{1}{x^2}\right)^y \cdot \left(x - \frac{1}{y}\right)^{x-y}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{x+y};$$

$$2) \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) : \left(\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}\right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}\right)\right) = \frac{(b+c-a)^2}{2bc};$$

$$3) \frac{(x-y)^2 + xy}{(x+y)^2 - xy} : \frac{x^5 + y^5 + x^2y^3 + x^3y^2}{(x^3 + y^3 + x^2y + xy^2)(x^3 - y^3)} = x - y;$$

$$4) \left(\frac{2-y}{y-1} + \frac{2(x-1)}{x-2}\right) : \left(\frac{y(x-1)}{y-1} + \frac{x(2-y)}{x-2}\right) = \frac{1}{x-y}.$$

1064. Доведіть одну з тотожностей видатного математика Л. Ейлера (1707–1783):

$$\left(\frac{a(a^3 + 2b^3)}{a^3 - b^3}\right)^3 - \left(\frac{b(2a^3 + b^3)}{a^3 - b^3}\right)^3 = a^3 + b^3.$$

1065. Доведіть, що значення виразу

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8}$$

є від'ємним при будь-якому значенні $a > 1$.

1066. Доведіть, що коли $x + y = 1$, то

$$\frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} = \frac{2(y-x)}{x^2y^2 + 3}.$$

1067. Доведіть, що коли для чисел x, y, z, m, n, p справджуються рівності $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$ і $\frac{m}{x} + \frac{n}{y} + \frac{p}{z} = 0$, то для них

справджується і рівність $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} + \frac{z^2}{p^2} = 1$.

1068. Доведіть, що коли $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$, то $a^2b^2c^2 = 1$ або $a = b = c$.

1069. Розв'яжіть відносно змінної x рівняння:

$$1) \frac{x-2}{x-a} = 0;$$

$$2) \frac{x-a}{x^2-1} = 0;$$

$$3) (a-2)x = a^2 - 4;$$

$$4) (a^2-1)x = a^2 - 2a + 1.$$

1070. Розв'яжіть відносно змінної x рівняння:

$$1) \frac{x}{a} - \frac{a}{2x} = \frac{2x+a}{2a} - \frac{a}{x};$$

$$2) \frac{1+x}{1-x} = \frac{a}{b};$$

$$3) \frac{x-a}{a} - \frac{x}{x-a} = \frac{x+a}{a};$$

$$4) \frac{3}{x-a} + \frac{2}{x+a} = \frac{4x+7a}{x^2-a^2}.$$

1071. Порядок числа a дорівнює -3 , а порядок числа b дорівнює 5 . Яким може бути порядок числа:

- 1) ab ; 2) $\frac{a}{b}$; 3) $\frac{b}{a}$; 4) $a + b$?

Квадратні корені. Дійсні числа

1072. Розв'яжіть відносно змінної x рівняння:

- 1) $\sqrt{x} = a + 3$; 2) $a\sqrt{x} = a$; 3) $(a + 3)\sqrt{x + 2} = a^2 - 9$.

1073. Укажіть ціле число, що є найближчим до кореня рівняння:

- 1) $(5\sqrt{2} - 3\sqrt{3})x + 4 = 0$; 2) $(5\sqrt{2} + 7\sqrt{5})x = 13 + 2\sqrt{3}$.

1074. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\sqrt{3 - \sqrt{13 - 4\sqrt{3}}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{6} - \sqrt{6 - \sqrt{25 - 4\sqrt{6}}}}$;
 3) $\sqrt{|30\sqrt{3} - 52|} - \sqrt{52 + 30\sqrt{3}}$.

1075. Спростіть вираз:

- 1) $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}}$, якщо $1 \leq x \leq 2$;
 2) $\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}$.

1076. Обчисліть:

- 1) $\frac{\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5}}}$;
 2) $(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} + 1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})$.

1077. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = 4x - \sqrt{x^2}$; 2) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1} - x$.

1078. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

- 1) $\frac{\sqrt{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}}{\sqrt{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}}$; 2) $\frac{(1 + \sqrt{3})^2 - 7}{\sqrt{7} + \sqrt{3} + 1}$;
 3) $\frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}}$; 4) $\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{6 - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}}$.

1079. Чи є взаємно оберненими числа $\sqrt{\frac{7-2\sqrt{10}}{3}}$ і $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}}$?

1080. Спростіть вираз:

$$1) \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 4y}{(x - y) : \left(\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{3}{\sqrt{x}} \right)} : \frac{x + 9y + 6\sqrt{xy}}{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}};$$

$$2) \frac{2\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)}.$$

1081. Спростіть вираз:

$$1) \frac{(\sqrt{x^2 + x\sqrt{x^2 - y^2}} - \sqrt{x^2 - x\sqrt{x^2 - y^2}})^2}{2\sqrt{x^3y}} : \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} - 2 \right),$$

якщо $x > y > 0$;

$$2) \left(\frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a} + \sqrt{b-a}} + \frac{b-a}{\sqrt{b^2-a^2} + a-b} \right) : \sqrt{a^2-1},$$

якщо $b > a > 0$.

1082. Спростіть вираз:

$$1) \frac{\sqrt{(a+2)^2 - 8a}}{\sqrt{a} - \frac{2}{\sqrt{a}}}; \quad 2) \frac{x^2 + 4}{x\sqrt{\left(\frac{x^2-4}{2x}\right)^2} + 4}.$$

1083. Доведіть тотожність:

$$1) \left(1 + \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) : \left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \sqrt{1-x^2};$$

$$2) \frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}} + \frac{a^2-\frac{ab}{\sqrt{b}}}{a-\sqrt{b}} - \frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} + \frac{4a\sqrt{b}}{a^2-b} = a.$$

1084. Відомо, що $\sqrt{3-x} + \sqrt{5+x} = 3$. Не знаходячи значення x , знайдіть значення виразу $\sqrt{(3-x)(5+x)}$.

1085. Відомо, що $\sqrt{24 - x^2} - \sqrt{12 - x^2} = 2$. Не знаходячи значення x , знайдіть значення виразу $\sqrt{24 - x^2} + \sqrt{12 - x^2}$.

1086. Відомо, що $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$, $xy = 9$. Не знаходячи значень x і y , знайдіть:

- 1) $x + y$; 2) $x\sqrt{x} + y\sqrt{y}$; 3) $x^2 + y^2$.

Квадратні рівняння

1087. При якому значенні a має лише один корінь рівняння:

- 1) $(a + 4)x^2 - (a + 5)x + 1 = 0$;
2) $(a - 4)x^2 + (2a - 8)x + 15 = 0$?

1088. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $2(a - 1)x^2 + (a + 1)x + 1 = 0$;
2) $(a + 1)x^2 - (a - 1)x - 2a = 0$.

1089. Знайдіть корені рівняння:

- 1) $\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - 2x - 3} = 0$;
2) $x^2 - 4x + 4 + |x^2 + 2x - 8| = 0$;
3) $|x - \sqrt{x} - 6| + \sqrt{x^2 - 4x} = 0$.

1090. Доведіть, що число 3 не може бути дискримінантом квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, якими б не були цілі числа a , b , c .

1091. При якому значенні a сума квадратів коренів рівняння $x^2 - (a + 2)x + a - 3 = 0$ буде найменшою?

1092. При якому значенні b сума квадратів коренів рівняння $x^2 + (b + 1)x + b^2 - 1,5 = 0$ буде найбільшою?

1093. Корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 + \sqrt{a - 4} \cdot x - 5 = 0$ задовольняють умову $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{18}{25}$. Знайдіть a .

1094. Нехай x_1 і x_2 - корені рівняння $2x^2 + 7x - 1 = 0$. Складіть квадратне рівняння, коренями якого є числа:

- 1) $\frac{1}{x_1}$ і $\frac{1}{x_2}$; 2) $\frac{x_1}{x_2} - 3$ і $\frac{x_2}{x_1} - 3$; 3) $x_1x_2^3$ і $x_2x_1^3$.

1095. Доведіть, що коли a , b і c - сторони трикутника, то рівняння $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ не має коренів.

1096. Доведіть, що модуль різниці коренів рівняння $5x^2 - 2(5a + 3)x + 5a^2 + 6a + 1 = 0$ не залежить від значення a .

1097. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 - 7x + 6 = 0$;

2) $x^3 - 6x^2 + 5 = 0$;

3) $x^3 - 5x^2 + 6 = 0$;

4) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$.

1098. Розв'яжіть відносно x рівняння:

1) $(a^2 + a - 2)x = a - 1$;

2) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x - a} = 0$;

3) $\frac{x - a}{x^2 - 4x + 3} = 0$;

4) $\frac{x^2 - (3a + 4)x + 12a}{x - 3} = 0$;

5) $\frac{a(x - a)}{x + 7} = 0$;

6) $\frac{a^2 - 1}{ax - 1} = \frac{x}{a}$.

1099. При яких значеннях a рівняння $\frac{x^2 + ax + 9}{x + 1} = 0$ має лише один корінь?

1100. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{38}{x^4 - x^2 + 20x - 100} + \frac{x + 10}{x^2 - x + 10} = \frac{x + 10}{x^2 + x - 10}.$$

1101. При яких значеннях a і b тричлен $4x^2 + 36x + (a + b)$ є повним квадратом, якщо відомо, що $a - b = 3$?

1102. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{1}{x^2 + 3x + 2} + \frac{2x}{x^2 + 4x + 3} + \frac{1}{x^2 + 5x + 6} \right)^2 \cdot \frac{(x - 3)^2 + 12x}{2}$;

2) $\frac{3a^2 + 2ab - b^2}{a^2 + 4ab + 3b^2} - 2 + \frac{10(ab - 3b^2)}{a^2 - 9b^2}$.

1103. Розв'яжіть відносно x рівняння:

1) $\frac{x^2 + 1}{a^2x - 2a} - \frac{1}{2 - ax} = \frac{x}{a}$;

2) $\frac{x + 2}{3x - a} + \frac{3 - x}{3x^2 + 2xa - a^2} = \frac{3x + 2}{x + a}$.

1104. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x - 3}{x - 1} + \frac{x + 3}{x + 1} = \frac{x + 6}{x + 2} + \frac{x - 6}{x - 2}$;

$$2) \frac{x-2}{x-1} + \frac{x+2}{x+1} + \frac{28}{15} = \frac{x-4}{x-3} + \frac{x+4}{x+3}.$$

1105. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sqrt{x-5} = x-11;$$

$$2) \sqrt{x^2+20} = 22-x^2.$$

1106. Розв'яжіть рівняння:

$$1) |2x^2+4x-5| = |x^2+x|;$$

$$2) 3x^2-4 = 5|x-1|.$$

1107. Побудуйте графік рівняння $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$.

1108. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \left(\frac{2x+1}{3x-4}\right)^2 + \left(\frac{3x-4}{2x+1}\right)^2 = 2;$$

$$2) \left(\frac{5x-6}{2-7x}\right)^2 + \left(\frac{7x-2}{5x-6}\right)^2 = 4,25;$$

$$3) 7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9;$$

$$4) 3\left(\frac{4}{x^2} + \frac{x^2}{9}\right) + 4\left(\frac{x}{3} - \frac{2}{x}\right) - 8 = 0.$$

1109. У маркет привезли яблука першого сорту на суму 456 грн і другого сорту на суму 360 грн. Якщо продати всі яблука оптом по одній ціні – на 1 грн 80 коп. нижчій від ціни кілограма першого сорту, то виручка складе заплановану суму. Скільки кілограмів яблук привезли в маркет, якщо яблук другого сорту було на 5 кг більше, ніж яблук першого сорту?

1110. Загадали ціле додатне число. До нього праворуч дописали цифру 7 і від отриманого числа відняли квадрат числа, що загадали. Різницю зменшили на 75 % і одержали загадане число. Яке число загадали?

1111. З міста A в місто B , відстань між якими 164 км, зі швидкістю 20 км/год виїхав велосипедист. Через 2 год у тому самому напрямі виїхав мотоцикліст, який, обігнавши велосипедиста, прибув у місто B і одразу повернув назад. Знайдіть швидкість мотоцикліста, якщо він зустрів велосипедиста через 2 год 45 хв після того, як його обігнав.

1112. З міста M у місто N зі швидкістю 12 км/год виїхав велосипедист. Через 1 год у тому самому напрямі зі швидкістю

15 км/год виїхав другий велосипедист. Ще через 1 год з міста M у тому самому напрямі виїхав ще й мотоцикліст, який обігнав одного з велосипедистів через 10 хв після того, як обігнав іншого. Знайдіть швидкість мотоцикліста, якщо вона більша за 50 км/год.

1113. З містечка A до містечка B і з B до A одночасно вийшли два пішоходи. Перший прибув до B через 0,8 год після їх зустрічі, а другий прибув до A через 1,25 год після їх зустрічі. Скільки годин був у дорозі кожний з пішоходів?

1114. По двох взаємно перпендикулярних дорогах рухаються в напрямі перехрестя пішохід і велосипедист. У деякий момент часу пішохід знаходиться на відстані 2 км, а велосипедист – на відстані 3,75 км від перехрестя доріг. Через який час відстань між ними дорівнюватиме 1,25 км, якщо швидкість пішохода 5 км/год, а велосипедиста – 15 км/год?

1115. Сергій і Олег мали разом набрати рукопис до певного терміну. Після того як було набрано половину рукопису, Олег захворів, і тому Сергій закінчив роботу на 2 дні пізніше, ніж передбачалося. За скільки днів міг би набрати рукопис кожний з них самостійно, якщо Сергію на це було б потрібно на 5 днів менше, ніж Олегу?

1116. Через перший кран можна наповнити резервуар водою на 24 хв швидше, ніж через другий. Якщо спочатку $\frac{2}{3}$ резервуара заповнять через перший кран, а потім частину, що залишилася, – через другий, то витрачений на це час буде на 33 хв більшим, ніж час наповнення резервуара одночасно через обидва крани. За який час можна наповнити резервуар через кожний кран окремо?

Основна властивість дробу: величина дробу не зміниться, якщо його чисельник і знаменник помножити або поділити на одне й те саме натуральне число.

Приклади. 1) $\frac{15}{20} = \frac{15 : 5}{20 : 5} = \frac{3}{4}$ (скоротили дріб $\frac{15}{20}$ на 5);

2) $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{6}{14}$ (звели дріб $\frac{3}{7}$ до знаменника 14).

Дроби з однаковими знаменниками додають і віднімають, використовуючи формули:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad \text{і} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Приклади. 1) $\frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$;

2) $\frac{17}{19} - \frac{3}{19} = \frac{14}{19}$;

3) $2\frac{1}{5} + 7\frac{3}{5} = 9\frac{4}{5}$;

4) $7\frac{5}{11} - 2\frac{2}{11} = 5\frac{3}{11}$.

Щоб додати або відняти дроби з різними знаменниками, їх спочатку зводять до спільного знаменника, а потім виконують дію за правилом додавання або віднімання дробів з однаковими знаменниками.

Приклади. 1) $\frac{5}{6} + \frac{3}{10} = \frac{5+9}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$;

2) $\frac{3}{8} - \frac{2}{12} = \frac{21-10}{24} = \frac{11}{24}$.

У наступних прикладах показано, як виконати *додавання і віднімання мішаних чисел.*

Приклади. 1) $5\frac{1}{3} + 2\frac{3}{4} = 7\frac{4+9}{12} = 7\frac{13}{12} = 8\frac{1}{12}$;

2) $7\frac{4}{5} - 6\frac{5}{4} = 1\frac{16-15}{20} = 1\frac{1}{20}$;

3) $5\frac{2}{9} - 2\frac{3}{6} = 3\frac{8}{18} - \frac{15}{18} = 2\frac{26-15}{18} = 2\frac{11}{18}$.

Щоб помножити два дроби, треба перемножити їх чисельники і їх знаменники і перший добуток записати чисельником, а другий – знаменником:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Приклади. 1) $\frac{5}{8} \cdot \frac{14}{15} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot \overset{7}{\cancel{14}}}{\underset{4}{\cancel{8}} \cdot \underset{3}{\cancel{15}}} = \frac{7}{12}$;

2) $7 \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{1} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7 \cdot 3}{1 \cdot 5} = \frac{21}{5} = 4 \frac{1}{5}$;

3) $2 \frac{1}{3} \cdot 4 \frac{2}{7} = \frac{7}{3} \cdot \frac{30}{7} = \frac{\overset{1}{\cancel{7}} \cdot \overset{10}{\cancel{30}}}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{7}}} = \frac{10}{1} = 10$.

Щоб поділити один дріб на другий, треба ділене помножити на дріб, обернений до дільника:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Приклади. 1) $\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{14}{15}$;

2) $2 \frac{1}{2} : 1 \frac{3}{4} = \frac{5}{2} : \frac{7}{4} = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot 7} = \frac{10}{7} = 1 \frac{3}{7}$.

Додатні і від'ємні числа

Модулем числа називають відстань від початку відліку до точки, що зображує це число на координатній прямій.

Модулем додатного числа і числа нуль є саме це число, а модулем від'ємного числа – протилежне йому число:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

Приклади. $|3| = 3$; $|-2| = 2$; $|0| = 0$; $|\pi| = \pi$; $\left| -2 \frac{1}{7} \right| = 2 \frac{1}{7}$.

Щоб додати два від'ємних числа, треба додати їх модулі і перед отриманим результатом записати знак «-».

Приклад. $-3 + (-7) = -10$.

Щоб додати два числа з різними знаками, треба від більшого модуля доданків відняти менший модуль і перед отриманим результатом записати знак того доданка, модуль якого більший.

Приклади. 1) $-5 + 5 = 0$; 2) $7 + (-3) = 4$;
3) $-9 + 5 = -4$.

Щоб від одного числа відняти друге, треба до зменшуваного додати число, протилежне від'ємнику:

$$a - b = a + (-b).$$

- Приклади. 1) $5 - 11 = 5 + (-11) = -6$;
 2) $-3 - 7 = -3 + (-7) = -10$;
 3) $-5 - (-9) = -5 + 9 = 4$;
 4) $4 - (-7) = 4 + 7 = 11$.

Добуток двох чисел з однаковими знаками дорівнює добутку їх модулів. Добуток двох чисел з різними знаками дорівнює добутку їх модулів, узятому зі знаком «-».

- Приклади. 1) $-2 \cdot (-7) = 14$; 2) $4 \cdot (-2) = -8$.

Частка двох чисел з однаковими знаками дорівнює частці від ділення їх модулів. Частка двох чисел з різними знаками дорівнює частці від ділення їх модулів, взятій зі знаком «-».

- Приклади. 1) $-18 : (-3) = 6$; 2) $4 : (-1) = -4$;
 3) $-20 : 4 = -5$.

Рівняння

Коренем, або розв'язком, рівняння називають число, яке перетворює рівняння в правильну числову рівність.

Приклади. 1) Число 3 є коренем рівняння $2x - 5 = 1$, оскільки $2 \cdot 3 - 5 = 1$.

2) Число -2 не є коренем рівняння $3x + 7 = 0$, оскільки $3 \cdot (-2) + 7 = 1 \neq 0$.

Розв'язати рівняння – означає знайти всі його корені або довести, що коренів немає.

Два рівняння називають *рівносильними*, якщо вони мають одні й ті самі корені. Рівносильними вважають і такі рівняння, які не мають коренів.

Приклади. 1) Рівняння $4x = 8$ і $x + 3 = 5$ – рівносильні, оскільки кожне з них має єдиний корінь, що дорівнює 2.

2) Рівняння $7 - x = 6$ і $10x = 20$ не є рівносильними, оскільки перше має корінь – число 1, а друге – число 2.

Під час розв'язування *рівнянь* використовують такі *власливості*:

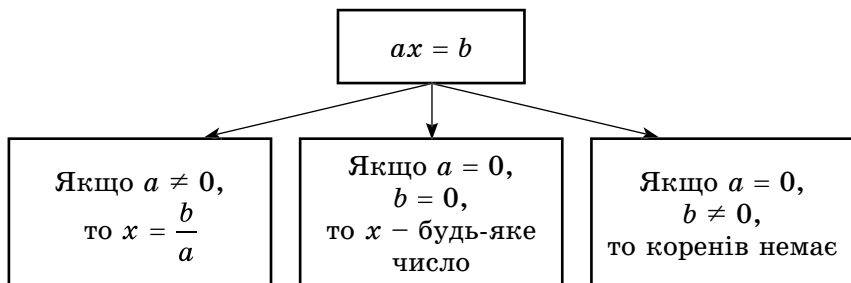
1) якщо в будь-якій частині рівняння розкрити дужки або звести подібні доданки, то одержимо рівняння, рівносильне даному;

2) якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в іншу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному;

3) якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме, відмінне від нуля, число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

Рівняння вигляду $ax = b$, де a і b – деякі числа, x – змінна, називають *лінійним рівнянням з однією змінною*.

Дані про розв'язки лінійного рівняння подамо за допомогою схеми:



Приклади. 1) $-0,5x = 14$;
 $x = 14 : (-0,5)$;
 $x = -28$.

2) $0x = 5$;
рівняння не має
коренів.

Багато рівнянь послідовними перетвореннями зводять до лінійного рівняння, рівносильного даному.

Приклади. 1) $5(x + 2) - 4x = -3(x + 7)$.

Розкриємо дужки: $5x + 10 - 4x = -3x - 21$.

Перенесемо доданки, що містять змінну, у ліву частину рівняння, а інші – у праву, змінивши знаки доданків, які переносимо, на протилежні: $5x - 4x + 3x = -21 - 10$;

зведемо подібні доданки: $4x = -31$;

розв'яжемо отримане лінійне рівняння: $x = -31 : 4$;

$x = -7,75$.

Відповідь. $-7,75$.

$$2) \frac{x+1}{2} + \frac{5-x}{3} = \frac{x+13}{6}$$

Помножимо обидві частини рівняння на найменше спільне кратне знаменників дробів – число 6:

$$\frac{6(x+1)}{2} + \frac{6(5-x)}{3} = \frac{6(x+13)}{6};$$

$$3(x+1) + 2(5-x) = x+13.$$

Далі розв'язуємо, як у попередньому прикладі:

$$3x + 3 + 10 - 2x = x + 13;$$

$$3x - 2x - x = 13 - 3 - 10;$$

$$0x = 0;$$

x – будь-яке число.

Відповідь. Будь-яке число.

Степінь з натуральним показником

Степенем числа a з натуральним показником n називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a . Степенем числа a з показником 1 називають саме це число.

Приклади. 1) $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$;

$$2) \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27};$$

$$3) 1,8^1 = 1,8;$$

$$4) 0^2 = 0 \cdot 0 = 0.$$

Властивості степеня з натуральним показником

$$a^m a^n = a^{m+n},$$

$$a^{m+n} = a^m a^n,$$

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

$$a^{m-n} = a^m : a^n,$$

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

$$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m,$$

$$(ab)^n = a^n b^n,$$

$$a^n b^n = (ab)^n.$$

Приклади. 1) $a^7 a^8 = a^{7+8} = a^{15}$;

$$2) m^5 : m = m^{5-1} = m^4;$$

$$3) (b^5)^{10} = b^{5 \cdot 10} = b^{50}.$$

Використовуючи властивості степеня з натуральним показником, можемо значно спростувати обчислення.

Приклади. 1) $127^5 : 127^4 = 127^{5-4} = 127^1 = 127$;

$$2) (2^3)^8 : 4^{10} = 2^3 \cdot 8 : (2^2)^{10} = 2^{24} : 2^{20} = 2^{24-20} = 2^4 = 16;$$

$$3) \frac{3^5 \cdot 9^2}{27^2} = \frac{3^5 \cdot (3^2)^2}{(3^3)^2} = \frac{3^5 \cdot 3^4}{3^6} = 3^{5+4-6} = 3^3 = 27;$$

$$4) 5^{12} \cdot 0,2^{12} = (5 \cdot 0,2)^{12} = 1^{12} = 1;$$

$$5) 2^9 \cdot 0,5^8 = 2 \cdot 2^8 \cdot 0,5^8 = 2 \cdot (2 \cdot 0,5)^8 = 2 \cdot 1^8 = 2 \cdot 1 = 2.$$

Одночлен

Цілі вирази – числа, змінні, їх степені й добутки називають *одночленами*.

Наприклад 7 ; $-\frac{9}{13}b^2c$; $7a^5m^3$ – одночлени;

вирази $m + c^2$, $p^3 - 2a + 3b$; $\frac{a+b}{a-b}$ – не є одночленами.

Якщо одночлен містить тільки один числовий множник, і до того ж цей множник записано першим, та містить степені різних змінних, то такий одночлен називають *одночленом стандартного вигляду*.

Наприклад, $2a^2b$ – одночлен стандартного вигляду, а одночлен $2a^2b \cdot (-3ab^7)$ не є одночленом стандартного вигляду.

Цей одночлен можна звести до одночлена стандартного вигляду:

$$2a^2b \cdot (-3ab^7) = 2 \cdot (-3) \cdot (a^2a) \cdot (bb^7) = -6a^3b^8.$$

Множення одночленів

Приклади.

$$1) -2x^2y^7 \cdot 5x = -2 \cdot 5 \cdot (x^2x) \cdot y^7 = -10x^3y^7;$$

$$2) \frac{1}{3}p^3c^8 \cdot \left(-\frac{2}{7}p^4m^2\right) \cdot 1\frac{1}{6}c^3m = \\ = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot \frac{7}{6}(p^3p^4) \cdot (c^8c^3) \cdot (m^2m) = -\frac{1}{9}p^7c^{11}m^3.$$

Піднесення одночлена до степеня

$$\text{Приклади. } 1) (-2m^3n^4)^3 = (-2)^3 \cdot (m^3)^3 \cdot (n^4)^3 = -8m^9n^{12};$$

$$2) (-c^5d^8)^6 = (-1)^6 \cdot (c^5)^6 \cdot (d^8)^6 = c^{30}d^{48}.$$

Многочлен

Многочленом називають суму одночленів. Многочлен, що є сумою одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних доданків, називають *многочленом стандартного вигляду*.

Многочлен $3m^2n - 5mn^2 + 7m^2n + mn^2$ не є многочленом стандартного вигляду, але його можна звести до многочлена стандартного вигляду:

$$\underline{3m^2n} - \underline{5mn^2} + \underline{7m^2n} + \underline{mn^2} = 10m^2n - 4mn^2.$$

Додавання і віднімання многочленів

$$\text{Приклади. } 1) (2x^2 + 3x - 5) + (x^2 - 3x) = \underline{2x^2} + \underline{3x} - 5 + \underline{x^2} - \underline{3x} = 3x^2 - 5;$$

$$2) (3a^2 - 5 + 2a) - (2a^2 + 7 - 3a) = \underline{3a^2} - 5 + \underline{2a} - \underline{2a^2} - 7 + \underline{3a} = a^2 + 5a - 12.$$

Множення одночлена на многочлен

$$\text{Приклади. } 1) 3a(a^3 - 2a + 7) = 3a \cdot a^3 + 3a \cdot (-2a) + 3a \cdot 7 = 3a^4 - 6a^2 + 21a;$$

$$2) -2xy(3x^2 - 5xy + y^2) = -2xy \cdot 3x^2 - 2xy \cdot (-5xy) - 2xy \cdot y^2 = -6x^3y + 10x^2y^2 - 2xy^3.$$

Множення многочлена на многочлен

$$(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by.$$

Приклади. 1) $(3x - 5)(x + 2) = 3x^2 + 6x - 5x - 10 = 3x^2 + x - 10;$

2) $(2a - b)(a^2 - 3ab + b^2) = 2a^3 - 6a^2b + 2ab^2 - ba^2 + 3ab^2 - b^3 = 2a^3 - 7a^2b + 5ab^2 - b^3.$

Формули скороченого множення

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2,$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3,$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$

Приклади. 1) $(x - 5)(x + 5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25;$

2) $(2m + 3)^2 = (2m)^2 + 2 \cdot 2m \cdot 3 + 3^2 = 4m^2 + 12m + 9;$

3) $(5x^2 - 2xy)^2 = (5x^2)^2 - 2 \cdot 5x^2 \cdot 2xy + (2xy)^2 = 25x^4 - 20x^3y + 4x^2y^2;$

4) $(a - 3)(a^2 + 3a + 9) = (a - 3)(a^2 + 3a + 3^2) = a^3 - 3^3 = a^3 - 27;$

5) $\left(\frac{1}{2}b + c^2\right)\left(\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}bc^2 + c^4\right) = \left(\frac{1}{2}b + c^2\right) \times$
 $\times \left(\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - \frac{1}{2}b \cdot c^2 + (c^2)^2\right) = \left(\frac{1}{2}b\right)^3 + (c^2)^3 = \frac{1}{8}b^3 + c^6.$

Розкладання многочленів на множники

Винесення спільного множника за дужки

$$\underline{ab} + \underline{ac} = \underline{a}(b + c).$$

Приклади. 1) $12x^2 + 15x = \underline{3x} \cdot 4x + \underline{3x} \cdot 5 = \underline{3x}(4x + 5);$

2) $25a^3b - 20a^2b^2 = \underline{5a^2b} \cdot 5a - \underline{5a^2b} \cdot 4b = \underline{5a^2b}(5a - 4b).$

Спосіб групування

$$ax + ay + bx + by = \underline{a(x + y)} + \underline{b(x + y)} = (x + y)(a + b).$$

Приклади. 1) $ab - 5a + 2b - 10 = (ab - 5a) + (2b - 10) = a(b - 5) + 2(b - 5) = (b - 5)(a + 2);$

2) $a^2b + c^2 - abc - ac = (a^2b - abc) + (c^2 - ac) = ab(a - c) - c(a - c) = (a - c)(ab - c).$

Використання формул скороченого множення

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2,$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Приклади. 1) $x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x - 7)(x + 7);$

2) $m^2 + 10m + 25 = m^2 + 2 \cdot m \cdot 5 + 5^2 = (m + 5)^2;$

3) $4a^2 - 12ab + 9b^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3b + (3b)^2 = (2a - 3b)^2;$

4) $c^3 - 64 = c^3 - 4^3 = (c - 4)(c^2 + c \cdot 4 + 4^2) =$
 $= (c - 4)(c^2 + 4c + 16);$

5) $\frac{1}{8}x^6 + y^9 = \left(\frac{1}{2}x^2\right)^3 + (y^3)^3 =$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + y^3\right) \left(\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 - \frac{1}{2}x^2 \cdot y^3 + (y^3)^2 \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + y^3\right) \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2y^3 + y^6\right).$$

Функція

Якщо кожному значенню незалежної змінної відповідає єдине значення залежної змінної, то таку залежність називають *функціональною залежністю*, або *функцією*.

Змінну x у цьому випадку називають *незалежною змінною* (або *аргументом*), а змінну y — *залежною змінною* (або *функцією* від заданого аргументу).

Усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент), утворюють *область визначення функції*; усі значення, яких набуває залежна змінна (функція), утворюють *область значень функції*.

Лінійною називають функцію, яку можна задати формулою вигляду $y = kx + l$, де x — незалежна змінна, k і l — деякі числа.

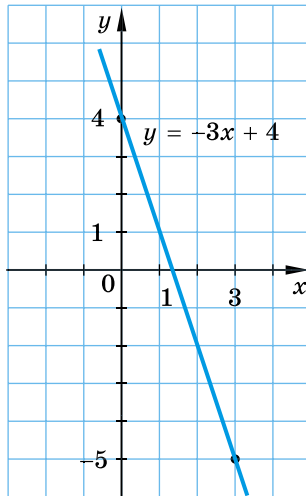
Графіком будь-якої лінійної функції є пряма. Для побудови графіка лінійної функції досить знайти координати двох точок графіка, позначити ці точки на координатній площині і провести через них пряму.

Приклад. Побудуємо графік функції $y = -3x + 4$.

Складемо таблицю для деяких двох значень аргументу:

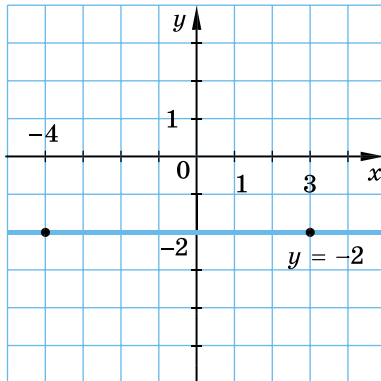
| | | |
|-----|---|----|
| x | 0 | 3 |
| y | 4 | -5 |

Позначимо на координатній площині отримані точки та проведемо через них пряму (мал. 20).



Мал. 20

П р и к л а д. Побудуємо графік функції $y = -2$. Будь-якому значенню x відповідає одне й те саме значення y , що дорівнює -2 . Графіком функції є пряма, що складається з точок з координатами $(x; -2)$, де x – будь-яке число. Позначимо дві будь-які такі точки, наприклад $(3; -2)$ і $(-4; -2)$ і проведемо через них пряму (мал. 21).



Мал. 21

Системи лінійних рівнянь з двома змінними

Якщо треба знайти спільний розв'язок двох (або більшої кількості) рівнянь, то кажуть, що ці рівняння утворюють *систему рівнянь*.

Приклад.
$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$
 – система рівнянь з двома змінними x і y .

Розв'язком системи рівнянь з двома змінними називають пару значень змінних, при яких кожне рівняння перетворюється у правильну числову рівність.

Пара чисел $x = 2$; $y = -1$ є розв'язком вище вказаної системи, оскільки $2 \cdot 2 + (-1) = 3$ і $2 - 3 \cdot (-1) = 5$.

Пара чисел $x = 5$; $y = 7$ не є розв'язком системи. Для цих значень змінних перше рівняння перетворюється у правильну рівність ($2 \cdot 5 + (-7) = 3$), а друге – ні ($5 - 3 \cdot (-7) = 26 \neq 5$).

Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Розв'язування системи двох лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки

Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 3x - 7y = 1, \\ 4x + 9y = 38. \end{cases}$$

| | | |
|----|---|--|
| 1. | Виражаємо одну змінну з якого-небудь рівняння системи через другу | $3x = 1 + 7y,$ $x = \frac{1 + 7y}{3}$ |
| 2. | Замість цієї змінної підставляємо в інше рівняння системи вираз, що утворився | $4 \cdot \frac{1 + 7y}{3} + 9y = 38$ |
| 3. | Розв'язуємо отримане рівняння з однією змінною | $4(1 + 7y) + 3 \cdot 9y = 3 \cdot 38,$ $4 + 28y + 27y = 114,$ $55y = 110,$ $y = 2$ |
| 4. | Знаходимо відповідне значення другої змінної | $x = \frac{1 + 7 \cdot 2}{3},$ $x = 5$ |
| 5. | Записуємо відповідь | $(5; 2)$ |

*Розв'язування системи двох лінійних рівнянь
з двома змінними способом додавання*

Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 7x - 4y = 2, \\ 5x + 3y = 19. \end{cases}$$

| | | |
|----|--|---|
| 1. | Множимо (якщо є необхідність) обидві частини одного чи обох рівнянь системи на такі числа, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами | $\begin{cases} 7x - 4y = 2, & \times 3 \\ 5x + 3y = 19; & \times 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 21x - 12y = 6, \\ 20x + 12y = 76 \end{cases}$ |
| 2. | Додаємо почленно ліві й праві частини рівнянь системи | $41x = 82$ |
| 3. | Розв'язуємо отримане рівняння з однією змінною | $x = 2$ |
| 4. | Підставляємо знайдене значення змінної в одне з рівнянь системи (краще початкової) і знаходимо відповідне значення другої змінної | $\begin{aligned} 7 \cdot 2 - 4y &= 2, \\ -4y &= -12, \\ y &= 3 \end{aligned}$ |
| 5. | Записуємо відповідь | $(2; 3)$ |

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ КУРСУ АЛГЕБРИ 7 КЛАСУ

1. Подайте у вигляді степеня вираз:

- | | |
|----------------------|------------------------------|
| 1) $a^3 \cdot a^5$; | 2) $x^5 : x^3$; |
| 3) $(p^3)^7$; | 4) $(-a^2)^3$; |
| 5) $(t^3)^2 : t^5$; | 6) $(a^7)^3 \cdot (a^3)^5$. |

2. Подайте у вигляді многочлена:

- | | |
|-------------------------|------------------------------|
| 1) $4m^2(m - 3)$; | 2) $-0,4ab(5a + 10ab)$; |
| 3) $7a(a^2 - 2a + 3)$; | 4) $(a + 5)(a - 7)$; |
| 5) $(3x - 1)(2x + 7)$; | 6) $(a - 1)(a^2 - 2a - 1)$. |

3. Спростіть вираз:

- $(4x^2 - 3x - 7) - (2x^2 - 3x + 1)$;
- $2x(3x - 7) - 3x(2x + 1)$;
- $(a - 2b)^2 + (a + 2b)^2$;
- $(7x - 4m)(7x + 4m) - (7x - 4m)^2$;
- $(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x - 1)(x^2 - 1)$;
- $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - (x - 1)(x^2 + 2)$.

4. Подайте многочлен у вигляді добутку:

- | | |
|------------------------|---------------------------|
| 1) $4a - 8$; | 2) $3m^2 - 9m$; |
| 3) $12a^2b + 16ab^3$; | 4) $4x^2 - 25$; |
| 5) $9m^4 - 36p^8$; | 6) $p^2 - 10p + 25$; |
| 7) $x^4 + 8x^2 + 16$; | 8) $c^3 + 27$; |
| 9) $p^6 - 1000$; | 10) $ax - ay + 2x - 2y$. |

5. Розв'яжіть рівняння:

- $-4x = -16$;
- $2,5x = -20$;
- $2x + (x - 3) = 12$;
- $(4x - 2) - (7x - 3) = 9$;
- $\frac{x + 1}{3} - \frac{x}{2} = \frac{x - 2}{6}$;
- $4(x - 1) + 3(x + 2) = 7(x + 3)$;
- $2(x + 1) + 3(x - 3) = 5x - 7$;
- $(2x + 1)(x - 1) - (x + 1)(2x - 1) = 24$.

6. Розв'яжіть систему рівнянь графічно:

$$1) \begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + y = 0, \\ 3y - x = 7. \end{cases}$$

7. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

$$1) \begin{cases} x + 2y = -5, \\ 3x - 2y = 9; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x + 3y = 8, \\ 5x - y = -9. \end{cases}$$

8. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

$$1) \begin{cases} 2x + y = 5, \\ 2x - y = 3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 2y = 0, \\ 5x + 2y = 4; \end{cases}$$
$$3) \begin{cases} 4x + 3y = 3, \\ 5x - 6y = 7; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 5x + 7y = -19, \\ 2x - 3y = 4. \end{cases}$$

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

Розділ 1

7. 7) x – будь-яке число; 8) $m \neq 0$. 11. 3) $-1,92$; 4) $-41,2$.
 13. 2) $x = -3$; 3) $x = 1$ і $x = -7$; 4) немає таких значень x .
 14. 2) $y = -1$; 3) $y = -2$ і $y = 3$; 4) немає таких значень y .
 15. 1) $a \neq 1$; $a \neq -3,5$; 2) $t \neq 0$; $t \neq 7$; 3) $m \neq 5$; $m \neq -5$; 4) $x \neq 9$.
 16. 1) $p \neq 9$; $p \neq -2,5$; 2) $a \neq 0$; $a \neq 5$; 3) $c \neq 2$; $c \neq -2$; 4) $a \neq -1$.
 18. 1) $a \neq 2$; $a \neq 3$; 2) $x \neq 1$; $x \neq -1$; 3) $m \neq 0$; $m \neq 1$; 4) $k \neq 6$; $k \neq -2$. 19. 1) $x \neq -2$; $x \neq 4$; 2) $m \neq 4$; $m \neq -4$; 3) $x \neq 0$; $x \neq -1$;
 4) $a \neq 1$; $a \neq -5$. 29. 108. 43. 1) $-\frac{1}{m}$; 2) $-\frac{3m}{2n}$; 3) $m + 3$; 4) $\frac{5}{a-2}$;
 5) $\frac{3+n}{7}$; 6) $\frac{m+n}{m-n}$. 44. 4) $\frac{m-n}{5-a}$. 45. 3) $\frac{9x+9y}{x^2-y^2}$; 4) $\frac{4k^2+4k+4}{k^3-1}$;
 5) $-\frac{a}{b-a}$; 6) $-\frac{p^2+2p}{4-p^2}$. 47. -10 . 51. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)}$;
 3) $\frac{9(b-3c)}{5}$. 52. 1) 2; 2) $\frac{(a-b)(a^2+b^2)}{a^2-ab+b^2}$; 3) $\frac{1}{8(3m+n)}$.
 53. 1) Графіком є пряма $y = \frac{x}{6}$ з «виколотою» точкою $(-6; -1)$;
 2) графіком є пряма $y = 2 - x$ з «виколотою» точкою $(2; 0)$.
 54. 1) $y = -\frac{x}{5}$ з «виколотою» точкою $(5; -1)$; 2) $y = 3 + x$ з «ви-
 колотою» точкою $(-3; 0)$. 59. Вказівка. Розгляньте суму
 $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \dots + (a_7 - b_7)$. 73. 1) $\frac{m-2}{m+2}$; 2) $\frac{3}{c}$. 74. 1) $\frac{a-3}{a+3}$;
 2) $\frac{2}{m}$. 76. 1) 15; 2) 2015. 77. 1) -2 ; 2) 198. 78. 3) $x - \frac{3}{x+5}$;
 4) $4 + \frac{7}{a-b}$. 79. 3) $y + \frac{2}{y+1}$; 4) $5 - \frac{1}{p-q}$. 80. 1) $\frac{1}{m-2}$; 2) $\frac{3}{a-2}$;
 3) $\frac{m}{n-3}$. 81. 1) $\frac{1}{3-a}$; 2) $\frac{5}{m-3}$; 3) $\frac{p}{q-4}$. 83. $\frac{x-y-z}{x+y+z}$.
 86. 12 год. 112. 1) $\frac{4}{ab}$; 2) $\frac{m+x}{x}$; 3) $\frac{1}{x(x-2)}$; 4) $\frac{b^2+3ab+9a^2}{ab}$.
 113. 1) $-\frac{2}{ab}$; 2) $\frac{t-a}{a}$; 3) $\frac{2}{a(a-3)}$; 4) $\frac{n^2+2mn+4m^2}{mn}$.
 115. 1) $-\frac{2n^2}{m+n}$; 2) $\frac{p^2-4p}{p-2}$; 3) $\frac{1}{1-a^2}$; 4) $\frac{10p+3}{2p-3}$. 118. 1) $\frac{1}{x+1}$;

- 2) $\frac{5}{m-5}$; 3) $\frac{m-6}{6m}$; 4) $\frac{1}{2(a-3)}$. **123.** 1) $\frac{2x^3}{(x-y)(x+y)^2}$;
- 2) $\frac{16}{(x-2)^2(x+2)^2}$. **124.** $a = 8$. **125.** Вказівка. Після спрощень дістанемо $a^2 + 4$. **127.** Графіком функції є пряма $y = 4$ з «виколотою» точкою (2; 4). **128.** -8. Вказівка. Після спрощень дістанемо $-\frac{8}{6a+b}$. **129.** 5. Вказівка. Після спрощень дістанемо $-\frac{5}{5x+y}$. **130.** Ні. Вказівка. Після спрощень дістанемо $-\frac{1}{2x}$. **133.** 1) 4; 2) 2; 3) 10; 4) 5. **136.** 5.
- 153.** 1) $\frac{(m-2)(m-3)}{3(m+3)}$; 2) $\frac{(x-5)(x+3)}{x+5}$. **154.** 1) $\frac{7(a+4)}{(a-1)(a-4)}$;
- 2) $\frac{(y-2)(y-3)}{y+3}$. **157.** 1) $\frac{y}{2}$; 2) $\frac{x+y}{x-y}$. **158.** 1) $\frac{n^2}{2}$; 2) $\frac{m-n}{m+n}$.
- 159.** 1) 0; 2) 9,6. **160.** 1) $\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2$; 2) $\frac{5(c-y-1)}{3(a+b+1)}$. **161.** 0.
- 166.** 4; 10. **177.** 1) $\frac{3c}{4ab}$; 2) $\frac{a}{c^3}$; 3) $\frac{c^4}{3}$; 4) $\frac{b}{2a^5}$. **178.** 1) $\frac{2a}{c^6}$; 2) $\frac{3x}{y}$.
- 179.** 1) $\frac{2a+1}{2a-3}$; 2) $\frac{1}{2-x}$; 3) $\frac{7(y-5x)}{y}$; 4) $1\frac{1}{3}$. **180.** 1) 1; 2) -5.
- 181.** 1) 0,1; 2) 5,032. **182.** $\frac{a-8}{a-5}$. **184.** $\frac{2a-3}{a-6}$. **185.** $\frac{c+y}{b-2}$. **187.** 1) $\frac{1}{4}$;
- 2) 0. **189.** 30. **190.** 1) 4; 2) $\frac{n}{x+3}$; 3) $\frac{2a}{2a+b}$; 4) $\frac{xy}{x+y}$. **191.** 1) 2;
- 2) $\frac{a}{3-b}$; 3) $\frac{2x}{3x-y}$; 4) $\frac{mn}{n-m}$. **192.** 1) $\frac{x+7}{7x}$; 2) $\frac{3n+m}{3n-m}$; 3) $-3a-5$;
- 4) $\frac{5x}{3}$. **193.** 1) $\frac{m-5}{5m}$; 2) $\frac{y-x}{y+x}$; 3) $7-2b$; 4) $\frac{m}{2}$. **196.** 1) -2;
- 2) $\frac{a-3}{2(a+3)}$. **197.** 1) 2; 2) $\frac{a-2}{a+2}$. **198.** 1) 3; 2) 4. **199.** 1) 2;
- 2) 2. **202.** 1) $-\frac{1}{1+a}$; 2) 4. **203.** 1) $\frac{1}{2-a}$; 2) 2. **207.** 3) $\frac{2x^6+2y^6}{x^4y^4}$;
- 4) $\frac{4a^2-4b^2}{ab}$. Вказівка. Спочатку розкрити квадрати суми та різниці. **208.** 2) $\frac{4m}{n^2}$. **209.** 1) $\frac{x-1}{x+1}$; 2) 1; 3) p ; 4) $3-c$;

- 5) $\frac{x+1}{x-1}$; 6) $\frac{m}{n}$. 210. 1) $\frac{m+4}{m-4}$; 2) 1; 3) t ; 4) $\frac{1}{x-1}$; 5) $\frac{2+m}{2-m}$;
 6) $\frac{x}{2}$. 211. Вказівка. Значення виразу дорівнює 2. 212. 1.
 213. 51. 214. 7. 215. 1) $\frac{2x-1}{2x(2x+1)}$; 2) $\frac{1}{2}$. 217. Вказів-
 ка. Значення виразу дорівнює $\frac{1}{(m+1)^2}$. 218. 1) $1-x^2-x$;
 2) $\frac{m^3}{m^3-m+1}$. 219. 1) x^2+2x+1 ; 2) $\frac{n^2}{n^3-n+1}$. 227. 11.
 241. $\frac{10}{15}$. 242. $\frac{3}{15}$. 243. 2. 244. 3. 245. 1) 2; 2) 3; 3) -5; 4) 9.
 246. 1) 1; 2) -2; 3) 2; 4) -3. 247. Ні, корінь першого рів-
 няння 3, а другого - 0. 248. Ні, корінь першого рівняння 4,
 а другого - 0. 249. $\frac{4}{9}$. 250. $\frac{2}{5}$. 251. 1) -4; 2) рівняння не
 має розв'язків. 252. 1) -4; 2) рівняння не має розв'язків.
 253. 1) -4; 2) рівняння не має розв'язків. 254. 1) -1; 2) рів-
 няння не має розв'язків. 255. 1) $a=0$; $a=4$; 2) $a=1$; $a=4$.
 256. $a=3$; $a=1$. 257. $\frac{10(x-2)}{x}$; 9,8. 258. $\frac{2a-b}{2a+b}$. 276. 1) $\frac{1}{3}$;
 2) $-\frac{1}{4}$; 3) -1,5; 4) -11; 5) 0,5; 6) $\frac{35}{192}$; 7) 1,4; 8) $-\frac{3}{64}$; 9) $2\frac{33}{64}$;
 10) 0,064; 11) 14; 12) $\frac{88}{125}$. 277. 1) $-\frac{1}{4}$; 2) $-1\frac{1}{3}$; 3) 19; 4) -699;
 5) $-\frac{3}{50}$; 6) $\frac{7}{8}$; 7) $\frac{5}{16}$; 8) $-\frac{29}{216}$. 279. 1) $a^n > 0$; 2) $a^n > 0$; 3) $a^n < 0$.
 281. 1) $\frac{m^2n^2a^4}{cx^3p^3}$; 2) $\frac{25x^3mb^2}{a}$. 282. 1) $3x^2p^{-1}$; 2) $15mn^{-2}c^{-3}$;
 3) $2xb^{-5}(a-b)^{-2}$; 4) $(x+y)^7(x-y)^{-3}$. 284. 3) $\frac{(mn+1)^2}{mn}$; 4) $\frac{ab}{b-a}$.
 285. 2) $\frac{y+x}{xy}$. 286. 1) $\frac{24}{49}$; 2) $5\frac{11}{49}$. 287. $4\frac{2}{5}$. 288. $\frac{3x^2-1}{x^2}$.
 290. 10 грн у Сергія; 14 грн в Олексія. 294. 3; 2; 5,11 доларів.
 312. 1) $(4m^{-1})^3$; 2) $(0,1p^{-4})^2$; 3) $(0,05c^{-4}p^6)^2$; 4) $\left(\frac{3}{2}c^3x^{-5}\right)^4$.
 313. 1) 625; 2) $\frac{1}{10}$; 3) 3; 4) 49. 314. 1) 16; 2) $\frac{1}{4}$. 315. 1) $\frac{1}{3}$;

- 2) $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) 49; 5) $-\frac{1}{6}$; 6) 2. **316.** 1) 4; 2) $\frac{1}{9}$; 3) $\frac{1}{7}$; 4) 36;
 5) $\frac{1}{100}$; 6) $\frac{1}{25}$. **317.** 1) $7a^5b^{-2}$; 2) $-2x^{-18}y^3$. **318.** 1) $\frac{a^3}{2b^3}$; 2) $-\frac{2a^5}{5x^8}$.
319. 1) $7m^2n^{-2}$; 2) $-\frac{x^2}{3c^2}$. **322.** 1) 125; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{a^{2n}}{b^4}$. **323.** 1) 49;
 2) $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{x^{6m}}{y^6}$. **324.** 1) $2 \cdot 5^n$; 2) x^8 ; 3) $\frac{1}{m^2}$. **325.** 1) $\frac{6}{4^n}$; 2) x^8 ;
 3) $\frac{1}{b^3}$. **327.** 6 грн, 8 грн. **330.** $x = 3$; $y = 3$. **354.** 31%.
355. $\approx 1,3666 \cdot 10^8$ с або 1582 доби. **358.** 1) -16; 2) -23; 3) -11;
 4) -15. **359.** 1) 18; 2) 13; 3) 12; 4) 10. **360.** 1) 1; 2) 180.
361. $a = -4$, $a = -1$. **365.** Так. **381.** $y = -\frac{48}{x}$. **382.** $y = \frac{14}{x}$.
383. $2 \leq y \leq 8$. **384.** 1) 4; 2) -3; 3) -1; 4) 3. **385.** 1) 2; 2) -2; 2;
 3) -1; 5. **389.** Вказівка. 1) Після спрощень одержимо $y = \frac{2}{x}$;
 2) графіком є гіпербола $y = -\frac{6}{x}$ з «виколотою» точкою (3; -2).
392. $\frac{1}{81}$. **393.** -1. **397.** -0,1. **398.** 1) x - будь-яке число;
 2) $m < 0$; 3) $a \neq 0$, $a \neq 1$; $a \neq -1$; 4) $x \neq 2$; $x \neq 5$. **399.** 1) 1;
 2) немає таких значень x ; 3) -2; 4) $0 < x < 3$ або $x > 3$.
404. 1) 1; 2) 0. **407.** 2. **409.** $\frac{z-x-y}{x+y+z}$. **413.** 1) $\frac{3}{b+2}$; 2) $\frac{1}{m-1}$.
414. $a = -3$. **415.** Вказівка. Значення виразу дорівнює -3.
416. 1) $\frac{4m-1}{4m+1}$; 2) $\frac{2x-1-4x^2}{2x+1}$. **417.** Вказівка. Після спрощення виразу матимемо $\frac{1}{(x-2)^2}$. **418.** Вказівка. Графіком функції є пряма $y = x + 1$ з «виколотою» точкою (1; 2).
419. 1) 1; 2) 1; 2; 3; 6; 3) 1; 16. **425.** Вказівка. Вираз тождоно дорівнює 1. **426.** 1) 0; 2) $\frac{8}{3-2x}$; 3) $\frac{3x-2y}{xy}$; 4) $\frac{2a+1}{6(2a-1)}$;
 5) $\frac{6(x+1)}{x^2+x+1}$; 6) $\frac{2a}{(1-3b)(a+2)}$. **429.** 1) $a = -24$; $b = -5$;
 2) $a = 3$; $b = -6$. **430.** $\frac{2sv}{v^2-9}$; 8 год. **436.** 1) $\frac{5xt^{10}}{3}$; 2) $a^2 - b^2$.

437. $\frac{(x+b)(x-c)}{(x-a)^2}$. 438. Вказівка. Значення виразу дорівнює 1. 439. Вказівка. Значення виразу дорівнює $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2$. 443. 1) $\frac{1}{3-x}$; 2) $\frac{2(5x-2y)}{5(5x+2y)}$. 444. $\frac{a^2}{a^2-2a-15}$. 445. Вказівка. Після спрощення виразу дістанемо $-\frac{2(x+y)^2}{x^2}$. 446. 0. 447. Вказівка. $a^2+5a+4 = a^2+a+4a+4 = a(a+1)+4(a+1) = (a+1)(a+4)$. 448. 1) $\frac{3}{a}$; 2) $-\frac{3m}{m+3}$; 3) $\frac{2}{a-b}$; 4) $p-1$. 450. 1) $\frac{1}{(a+b)^2}$; 2) $\frac{6}{a+3}$. 451. $1\frac{11}{14}$. 452. Вказівка. 1) Після спрощень одержимо 3; 2) після спрощень одержимо -1. 454. 5 або -5. 455. $\frac{1}{x^2-4}$. 456. Вказівка. Після спрощень одержимо x^2+4 . 457. Вказівка. Після спрощень одержимо $\frac{1}{m+5}$. 458. Ні, оскільки після спрощень матимемо $\frac{1}{x}$. 461. 2. 462. 4) 0. 463. 18 км/год. 464. 1) -0,5; 2) -2,5. 465. 12 днів, 24 дні. 466. 1) Якщо $a=0$, рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{a}{5}$; 2) якщо $a=b$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq b$, то $x = \frac{a-b}{2}$. 472. 1) $7^{-3} > (-7)^3$; 2) $(-1,2)^0 > (-5)^{-5}$; 3) $(-13)^{-4} > (-13)^4$; 4) $(-12)^6 > 12^{-6}$. 473. 1) $\frac{1}{4}$; 2) -0,16; 3) -10; 4) -99. 474. 1) $\frac{a^2-a+1}{a^3(1+a)}$; 2) -1. 475. 1. 476. $x=-3$. 477. a^8b^8 . 482. 30. 485. 1) $x(x^2+5x^{-1}+x^{-6})$; 2) $x^{-1}(x^4+5x+x^{-4})$; 3) $x^{-3}(x^6+5x^3+x^{-2})$. 490. $6,35 \cdot 10^4$ км². 491. 1) $3,6 \cdot 10^3$ с; 2) $8,64 \cdot 10^4$ с; 3) $2,592 \cdot 10^6$ с; 4) $3,1536 \cdot 10^7$ с; 5) $3,15576 \cdot 10^9$ с. Вказівка. Врахувати, що в будь-якому столітті 25 високосних років і 75 - не високосних. 495. 1) Ні; 2) так. 498. (2; 2) і (-2; -2). 499. (3; -3) і (-3; 3).

Розділ 2

- 510.** 1) $0 \leq y \leq 9$; 2) $0 \leq y \leq 4$. **512.** 1) 0; 3; 2) -2. **513.** 1) 2; -2; 2) 0; 2. **514.** 1) Графіком є парабола $y = x^2$ з «виколотою» точкою (-1; 1); 2) графіком є парабола $y = x^2$ з «виколотими» точками (-2; 4) і (2; 4). **515.** 1) Графіком є парабола $y = x^2$ з «виколотою» точкою (0; 0); 2) графіком є парабола $y = x^2$ з «виколотими» точками (-1; 1) і (1; 1). **522.** $2n - 3$. **540.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **541.** 1) $x > 0$; 2) x - будь-яке число; 3) $x \geq 0$; 4) $x < 0$. **542.** 1) $y \geq 0$; 2) $y > 0$; 3) y - будь-яке число; 4) $y \leq 0$. **543.** 1) Коренів немає; 2) 32; 3) 13; 4) 4,5. **544.** 1) 12; 2) рівняння не має розв'язків; 3) $\frac{1}{8}$; 4) 1. **545.** 1) $a = 0$; 2) $a = -3$; 3) a - будь-яке число; 4) $0 \leq a < 3$ або $a > 3$. **546.** 1) 5; -4; 2) 16; 3) 49. **547.** 1) 11; -14; 2) 49. **548.** -1. **549.** 1) $x = 3$; $y = 0$; 2) $x = -2$; $y = -1$. **553.** Ні. **571.** $\frac{1}{2}$; 0,(1); 0,11; $\frac{1}{10}$; 0,01. **572.** 0,02; $\frac{1}{5}$; 0,22; 0,(2); $\frac{1}{4}$. **576.** 6,25 см; $9\frac{1}{9}$ дм. **577.** Вказівка. Нехай $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, де $\frac{m}{n}$ - нескоротний дріб. Тоді $2n^2 = m^2$. **581.** 1) Другий; 2) перший. **596.** 1) 25; 2) -30; 3) 56; 4) 16,2; 5) 30; 6) 0. **597.** 1) 49; 2) -84; 3) 44; 4) -2,1; 5) 40; 6) $\frac{51}{65}$. **598.** 1) 8; -4; 2) -1; -5; 3) 1; 4) $-3 + \sqrt{7}$; $-3 - \sqrt{7}$; 5) $\frac{7}{9}$; $\frac{1}{3}$; 6) рівняння не має розв'язків. **599.** 1) 3; -5; 2) 7; -3; 3) -2; 4) $2 + \sqrt{3}$; $2 - \sqrt{3}$; 5) $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{5}$; 6) рівняння не має розв'язків. **601.** 1) 5; -5; 2) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$. **602.** 1) 8; -8; 2) $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$. **603.** 1) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; 2) 2; -2; $\sqrt{6}$; $-\sqrt{6}$. **604.** 1) $\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$; 2) 3; -3. **605.** 1) $b = 0$; 2) $b \geq 4$; 3) $b \geq 0$. **606.** 1) $m > 0$; 2) немає таких значень m ; 3) $m \leq 0$. **607.** $\frac{x-3}{2x}$. **608.** 1) 8; 2) $-\frac{2}{5}$; 3) $\frac{1}{5}$. **612.** 480 діб. **633.** 1) $15\frac{13}{32}$; 2) $1\frac{1}{3}$; 3) 12; 4) 0,13. **634.** 1) $10\frac{34}{45}$; 2) $1\frac{1}{6}$; 3) 35; 4) 0,07. **635.** 1) 210; 2) 48; 3) 12,6; 4) 18; 5) 39; 6) 154. **636.** 1) 160; 2) 75; 3) 10,8; 4) 12; 5) 34; 6) 126. **637.** 1) 432; 2) 144; 3) 125; 4) 243. **638.** 1) 1; 2) 216. **639.** 1) 112;

- 2) 432. **640.** 1) $0,6x$; 2) $-11y$; 3) p ; 4) $5x^2$; 5) $5a^3$; 6) $-\frac{5}{7}c^5$.
- 641.** 1) $0,7p$; 2) $-\frac{5}{8}m$; 3) $7b^4$; 4) $-0,1a^7$. **642.** 1) $-5mn^6$;
2) $-\frac{7}{13}m^7n^9$; 3) x^3y^4 ; 4) $-\frac{p^3m^6}{x^4}$; 5) $-2m^4p^{10}$; 6) $-x^4z$. **643.** 1) $8ab^4$;
2) $-\frac{1}{2}b^4c^6$; 3) $-\frac{x^4y^6}{z}$; 4) $3b^7$. **644.** 1) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{-x} \cdot \sqrt{-y}$; 2) $\frac{\sqrt{-2x}}{\sqrt{-3y}}$.
- 645.** 1) $x - y$; 2) $n - m$; 3) $x - 5$; 4) $6 - a$; 5) 5 ; 6) -2 .
- 646.** 1) $m - 2$; 2) $-p - 4$; 3) 1 ; 4) -3 . **647.** 1) 4 ; 2) 1 ; 3) $9 - 2\sqrt{21}$;
4) $2 + \sqrt{3}$. Вказівка. $7 + 4\sqrt{3} = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = (2 + \sqrt{3})^2$.
- 648.** 1) -8 ; 2) $\sqrt{2} - 1$. **656.** 96 грн. **679.** 1) $m\sqrt{13}$; 2) $b\sqrt{b}$;
3) $-a^3\sqrt{7}$; 4) $4x^3\sqrt{x}$. **680.** 1) $x\sqrt{11}$; 2) $c^2\sqrt{c}$; 3) $-p^5\sqrt{2}$; 4) $6m^5\sqrt{m}$.
- 681.** 1) $\sqrt{2a^2}$; 2) $-\sqrt{5b^6}$; 3) $\sqrt{3b}$; 4) $-\sqrt{-x^7}$. **682.** 1) $\sqrt{3b^2}$; 2) $-\sqrt{7c^{10}}$;
3) $\sqrt{5x^3}$; 4) $-\sqrt{-y^3}$. **683.** 1) 47 ; 2) $165 + 37\sqrt{6}$; 3) $36 - 12\sqrt{6}$.
- 684.** 1) $\sqrt{a}(1 - \sqrt{3})$; 2) $\sqrt{p}(\sqrt{7} + 2)$; 3) $\sqrt{7}(\sqrt{3} + 1)$; 4) $\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{5})$;
5) $\sqrt{2m}(\sqrt{2} - \sqrt{3m})$; 6) $\sqrt{5x}(\sqrt{x} - \sqrt{2})$. **685.** 1) $\sqrt{p}(1 + \sqrt{2})$;
2) $\sqrt{6}(\sqrt{7} - 1)$; 3) $\sqrt{3a}(\sqrt{3} + \sqrt{2a})$. **686.** 1) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 6}$; 2) $\frac{\sqrt{a} + 3\sqrt{b}}{\sqrt{a} - 3\sqrt{b}}$;
3) $\sqrt{2}, 5$. **687.** 1) $\frac{\sqrt{a} + 5}{\sqrt{a}}$; 2) $\frac{\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + 2\sqrt{y}}$; 3) $\sqrt{5}, 5$. **688.** 1) $3(\sqrt{6} + 1)$;
2) $\frac{\sqrt{11} - \sqrt{7}}{2}$; 3) $\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{6}$. **689.** 1) $5(\sqrt{3} - 1)$; 2) $\frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{4}$;
3) $\frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{5}}{30}$. **690.** 1) 2 ; 2) 330 ; 3) 8 ; 4) 14 . **691.** 1) 16 ; 2) 60 ;
3) 26 ; 4) 7 . **692.** $1,5$. **693.** 1) $m - 1$; 2) $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{b}}$; 3) $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$.
- 695.** $-\frac{1}{2}$. **696.** Вказівка. Використати те, що квадрат натурального числа не може закінчуватися цифрою 7.
- 708.** 1) $\frac{2}{3}\sqrt{45} < \frac{1}{2}\sqrt{84}$; 2) $0,2\sqrt{1\frac{3}{8}} = 0,4\sqrt{\frac{11}{32}}$. **709.** 1) $\frac{3}{4}\sqrt{48} = \frac{3}{5}\sqrt{75}$;
2) $0,3\sqrt{1\frac{4}{9}} > 0,2\sqrt{1\frac{3}{4}}$. **710.** 1) $0 \leq y \leq 2$; 2) $1 \leq y \leq 3$.
- 711.** 4. **712.** 1. **718.** 244,85. Вказівка. Позначити

$a = \frac{1}{1997}$; $b = \frac{3}{2000}$. **722.** 1) Збільшиться в 9 разів; зменшиться у 81 раз. 2) Збільшиться у 2 рази; зменшиться в 5 разів. **723.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **724.** (-2; 4), (3; 9). **729.** 1) 100; 2) 1. **730.** 1) 20; 2) 13,96. **731.** 1) $x \geq 2$; 2) $x \geq 3$; 3) $x < -1$, $-1 < x \leq 0$; 4) $x = 0$. **732.** 1) Якщо $a = 0$, то $x \geq 0$; якщо $a \neq 0$, то $x = 0$; 2) якщо $a \leq 0$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a > 0$, то $x = \frac{1}{a^2}$; 3) якщо $a \leq 0$, то рівняння не має розв'язків;

якщо $a > 0$, то $x = \frac{25}{a^2} + 1$; 4) якщо $a = 0$, то x – будь-яке число; якщо $a \neq 0$, то $x = 0$. **736.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так.

739. Вказівка. 1) Знайти $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$. **744.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\sqrt{7}$; 3) $3\sqrt{2}$;

4) 5. **746.** 9 або -9. **747.** 1) $m > 1$; 2) $m = 1$; 3) $m < 1$.

754. 15 см або $6\frac{2}{3}$ см. **755.** 1) 600; 2) 0,09; 3) 360; 4) 648.

756. 1) $p^2c^4a^6$; 2) $-7xy^3$; 3) $\frac{m^{10}}{n^{12}}$; 4) $\frac{a^5}{b^7}$. **757.** 1) 0,4;

2) 0,3; 3) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$; 4) $\sqrt{13} - \sqrt{11}$. **758.** 1) $\frac{x-7}{x+2}$; 2) $\frac{p-2}{p+3}$.

762. 1) $2x^4\sqrt{7x}$; 2) $\frac{m\sqrt{7m}}{6}$; 3) $-5ab^2\sqrt{b}$; 4) $2xy^5\sqrt{2x}$; 5) $-2p^3\sqrt{-2p}$;

6) $xy\sqrt{xy}$. **764.** 1) 24; 2) $\frac{\sqrt{6}}{12}$. **766.** 1) $-\frac{1}{2 + \sqrt{2x + x}}$;

2) $\sqrt{x + y} + 1$. **767.** $\sqrt{2}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$. **768.** Вказівка. Позначити $\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{7 - 2\sqrt{6}} = x$ та знайти x^2 . **769.** 1) $\sqrt{3}$; 2) -1;

3) $\sqrt{7p^2}$; 4) $-\sqrt{\frac{3-b}{2}}$. **772.** 1) Так, (1; 1); 2) так, (64; 8); 3) так,

(0; 0); 4) ні. **773.** 1) 3; $\sqrt{14}$; 4; $\sqrt{16,2}$; $\sqrt{19,1}$; 2) 0,2; $\frac{1}{4}$; $\sqrt{\frac{1}{11}}$; $\sqrt{0,1}$.

774. 1) $x \geq 1$; 2) $0 \leq x < 4$; 3) $1 < x \leq 16$; 4) $81 \leq x < 10000$; 5) $x \geq 0$; 6) таких значень x немає.

Розділ 3

789. $\frac{1}{9}$. 790. -2. 791. $a = 2$; $b = -6$. 792. $b = -4$; $c = 3$.
793. 1) 0; -1; 2) 0; -24; 3) -1; 1; 4) 0. 794. 1) 0; 2) 0; 24; 3) -1; 1; 4) 0. 795. 0; -4,5; 796. 0; -11. 797. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$ або $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$. 798. $\sqrt{2}$ і $\sqrt{2} + 2$ або $-\sqrt{2}$ і $-\sqrt{2} + 2$. 799. 1) 0; 5; -5; 2) 2. 800. 1) 0; 3; -3; 2) 3. 806. 9. 816. 1) -1; 3; 2) 1; -2,5; 3) 5. 817. 1) 1; -5; 2) -1; 4,5; 3) 2; -0,4. 818. 1) 2; 6; 2) -1; $-\frac{1}{3}$; 3) 2; 4; 4) 3; -8. 819. 1) -1; 2) 2; 2,6; 3) 4; 3; 4) 1; -6. 820. 1) 1; -0,6; 2) -1; $\frac{1}{3}$. 821. 1) -1; $6\frac{2}{3}$; 2) 1; -3,5.
822. 1) $1 \pm \sqrt{15}$; 2) $-1 \pm \sqrt{5}$; 3) $15 \pm 5\sqrt{11}$; 4) $\frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}$.
823. 1) $-1 \pm \sqrt{7}$; 2) $1 \pm 2\sqrt{3}$; 3) $-5 \pm 2\sqrt{10}$; 4) $\frac{5 \pm \sqrt{57}}{2}$. 824. 1) 4; 1; 2) 4; -4; 3) 1; 4) 2. 825. 1) 9; 3; 2) 3; -3; 3) 5; 4) 2. 826. 1) $-\frac{1}{8}$; 2) -4; 4. 827. 1) $\frac{1}{16}$; 2) -6; 6. 829. (0; -15), (75; 0). 830. 1) -35; 2) 39. 833. 1) Так; 2) ні. 843. 1) $x_1 < 0$, $x_2 < 0$; 2) $x_1 > 0$, $x_2 < 0$; 3) $x_1 > 0$, $x_2 < 0$; 4) $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. 844. 1) $x_1 > 0$, $x_2 < 0$; 2) $x_1 < 0$, $x_2 < 0$; 3) $x_1 > 0$, $x_2 > 0$; 4) $x_1 > 0$, $x_2 < 0$. 845. $x_2 = -2,5$; $q = 8,75$. 846. $x_2 = -6$; $p = 4,5$. 847. $x_1 = 5$; $x_2 = -2$; $p = -3$ або $x_1 = -5$; $x_2 = 2$; $p = 3$. 848. $x_1 = 5$; $x_2 = -1$; $q = -5$. 849. 1) $1\frac{1}{3}$; 2) 12; 3) 22; 4) $-7\frac{1}{3}$; 5) $2\frac{4}{9}$; 6) 28.
850. 1) -2,5; 2) -10; 3) 29; 4) -14,5; 5) 7,25; 6) 33. 853. 1) $3x^2 - 14x - 5 = 0$; 2) $24x^2 + 26x + 5 = 0$; 3) $x^2 - 5 = 0$; 4) $x^2 - 4x + 1 = 0$. 854. 1) $3x^2 + 5x - 2 = 0$; 2) $16x^2 - 10x + 1 = 0$; 3) $x^2 - 7 = 0$; 4) $x^2 - 6x + 2 = 0$. 855. $x^2 - 7x + 1 = 0$.
856. $x^2 + 8x + 8 = 0$. 857. 80 кг; 120 кг. 858. $-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$. 861. На 12 років. 862. 12 і 17. 863. 12 і 15. 864. 42 см. 865. 80 м. 866. 7 см і 10 см. 867. 30 см. 868. 48 см². 869. 14 і 15. 870. 70×70 см. 871. 15 дм. 872. 19, 20, 21 або -13, -12, -11. 873. 18, 19, 20 або -18, -17, -16. 874. 5 і 7. 875. 16 км/год і 12 км/год. 876. 10 см і 12 см. 877. 1 см. 878. 1,5 м.

879. 10 учасників. 880. 5. 881. 1,8 с; 1,2 с. Вказівка. Спочатку, виходячи з початкових умов, знайти v_0 . 882. 0,7 с.
883. 2,6 с; 3,4 с. 886. $a = 0$ або $a = -2,25$. 907. 1) $3 \pm \sqrt{30}$;
 2) $\frac{-35 \pm 5\sqrt{17}}{2}$. 908. 1) $-4 \pm 2\sqrt{19}$; 2) $\frac{15 \pm 9\sqrt{5}}{2}$.
909. 1) $(x - 1 - 2\sqrt{3})(x - 1 + 2\sqrt{3})$; 2) розкласти на множники не можна; 3) $-2\left(x + \frac{3 + \sqrt{65}}{4}\right)\left(x + \frac{3 - \sqrt{65}}{4}\right)$; 4) розкласти на множники не можна. 910. 1) $(x + 2 - \sqrt{11})(x + 2 + \sqrt{11})$;
 2) розкласти на множники не можна. 911. 1) $\frac{4}{x - 2}$; 2) $\frac{x - 4}{x}$;
 3) $\frac{2x - 1}{x - 3}$; 4) $\frac{x - 2}{x + 7}$; 5) $\frac{2x - 1}{3x - 1}$; 6) $\frac{5x - 2}{8 - 2x}$. 912. 1) $\frac{x + 1}{x}$; 2) $\frac{x + 4}{3x + 2}$;
 3) $\frac{x + 3}{x - 5}$; 4) $\frac{2(x + 1)}{3(x - 3)}$. 913. 1) 1,93; 2) $4\frac{2}{3}$. 914. 1) $\frac{4}{(x - 2)(x + 4)}$;
 2) $\frac{1}{x + 2}$; 3) 1; 4) $\frac{(x - 2)(5 - x)}{2(x + 3)}$. 915. 1) $\frac{1}{x - 5}$; 2) $\frac{1}{x - 2}$.
918. 1) $x(x + 1)(x + 2)$; 2) $-2x(x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ або $x(x + 3)(1 - 2x)$;
 3) $\frac{1}{4}x^2(x - 1)(x + 5)$; 4) $-\frac{1}{2}x^3(x + 2)(x - 6)$. 919. 1) $x(x - 4)(x - 8)$;
 2) $\frac{1}{3}x^2(x - 9)(x - 3)$. 920. 1) Графіком є пряма $y = x + 2$ з «виколотою» точкою (1; 3); 2) графіком є пряма $y = x - 3$ з «виколотими» точками (0; -3) і (-1; -4). 921. 1) $\frac{x^2}{3x - 1}$; 2) $\frac{1}{4}$.
922. 1) $\frac{x^2}{2x + 1}$; 2) 27. 923. 1) $-0,4a^3x^7$; 2) $2mp^3\sqrt{2m}$. 924. 1) 24;
 2) 68; 3) 0,68; 4) 376. 929. 3 : 2. 938. 1) 9; -1; 2) 2; -9; 3) 5; -2;
 4) -2; $1\frac{1}{3}$. 939. 1) 4; -1; 2) 1; $-\frac{1}{2}$; 3) 1; 3; 4) 2; $-\frac{1}{2}$. 940. 1) 0;
 2; -2; 2) 0; 3) 0; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 4) 0; 2; -3. 941. 1) 0; 3; -3; 2) 0;
 3) 0; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{4}$; 4) 0; 3; -4. 942. 1) 4; -5; 2) 1; 4. 943. 1) 3; -4;
 2) 2; 6. 944. 1) 1; -1; 3; 2) -6; 3) -7; 4) рівняння не має

- розв'язків. **945.** 1) 1; 2) -3; 3) 7; 4) рівняння не має розв'язків.
- 946.** 1) -6; 3; 2) -2; $-1\frac{2}{3}$; 3) -3; 4) -2. **947.** 1) -4; 3; 2) -2.
- 948.** 1) -1; -5,5; 2) -7; 3) -9; 4) рівняння не має розв'язків.
- 949.** 1) 5; -3,6; 2) -1; 3) -15; 4) рівняння не має розв'язків.
- 950.** 1) -3; 4; 2) 15. **951.** 1) 2; 3; -3; 2) -1; $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **952.** 1) 1; 2; -2; 2) -2; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. **953.** 1) 1; -1; 2) -1; 2. **954.** 1) 1; -1; 2) 2; -3.
- 955.** 1) 0; 1,5; 2) $-2 \pm \sqrt{35}$. **956.** $\frac{-1 \pm \sqrt{57}}{2}$. **957.** 1) 1; -1; $\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$; 2) 1; $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Вказівка. $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = (x^3 - 1) + (2x^2 - 2x) = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 2x(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1 + 2x) = (x - 1)(x^2 + 3x + 1)$. **958.** 1) 1; $\pm\sqrt{3}$; 2) -2; 1; 4.
- 959.** 1) 9. Вказівка. $\sqrt{x} = t$; 2) 0; -2; $-1 \pm \sqrt{7}$; 3) $2 \pm \sqrt{3}$; 4) 0; -1; 2; -3. **960.** 1) 4; 2) 0; 2; $1 \pm \sqrt{5}$; 3) $-1 \pm \sqrt{6}$; 4) 0; 1; -2; 3.
- 961.** $3(x + 7)\left(x - \frac{2}{3}\right) = (x + 7)(3x - 2)$. **962.** 12 і 15. **963.** 2.
- 964.** 12 км/год; 16 км/год. **965.** 2,5. **966.** 4 і 6. **967.** 8 і 12.
- 968.** $\frac{9}{10}$. **969.** $\frac{1}{6}$. **970.** 12 км/год; 16 км/год. **971.** 70 км/год; 60 км/год. **972.** 45 км/год. **973.** 80 км/год. **974.** 60 км/год. **975.** 2 км/год. **976.** 14 км/год. **977.** 24 км/год. **978.** 2 км/год. **979.** 20 км/год. **980.** 50 м², 40 м². **981.** 12 автомашин. **982.** 24 год; 48 год. **983.** 36 год; 45 год. **984.** 45 хв; 36 хв. **985.** 30 днів; 42 дні. **986.** 16 км або 20 км. Вказівка. Нехай x км/год - початкова швидкість, тоді $4x$ км - відстань між селами. Маємо рівняння $\frac{10}{x} + \frac{4x - 10}{x - 1} = \frac{9}{2}$. **987.** 27 км/год.
- 988.** 3 л. Вказівка. Нехай першого разу відлили x л спирту. Враховуючи те, що остаточно води в посудині стало 4,5 л, маємо рівняння $x - \frac{x}{6} \cdot x + x = 4,5$. **990.** 1) $\frac{x + 5}{x}$; 2) $\frac{x + 3}{2x + 2}$.
- 991.** 1) 16; 2) $-7 \pm \sqrt{6}$. **995.** Так. **996.** 1) $\pm\sqrt{2}$; 2) 0; $\frac{3}{4}$.
- 997.** 30 см. **998.** 1) 0; -9; 2) 2; -2. **999.** 1) $1\frac{1}{4}$; 2) $a > 0$.

1003. 1) 1; -3; 2) 2; -1,5. **1004.** 1) 1; 2; 2) $5 \pm 2\sqrt{15}$; 3) $2\sqrt{2}$; $-3\sqrt{2}$;
 4) $\sqrt{3}$; $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1005.** 1) 0; 1; 2) 0; 2. **1007.** 1) $x_1 = 3$;
 $x_2 = -2a$ для будь-якого a ; 2) якщо $a = 0$, то рівняння не має
 розв'язків; якщо $a \neq 0$, то $x_1 = \frac{1}{a}$; $x_2 = \frac{2}{a}$. **1008.** 1) 1; -6; 0; -5;
 2) -1; 6; 0; 5; $\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$; 3) -3; 4) $\frac{1}{9}$. **1011.** $x_1 = 2$; $x_2 = -4$;
 $q = -8$. **1013.** $x_1 = 6$; $x_2 = 9$; $p = -15$. **1014.** 1,6. **1015.** $b = 15$ або
 $b = -15$. **1016.** 1; $\frac{1}{2}$. **1017.** $5x^2 - 8x + 1 = 0$. **1018.** 6 см і 9 см.
1019. 9; 10; 11 або -11; -10; -9. **1020.** 10; 11; 12; 13; 14 або
 -2; -1; 0; 1; 2. **1021.** 24 см². **1022.** 16 команд. **1023.** 0,216 м³
 або $\frac{121}{375}$ м³. **1024.** 40 см; 80 см. **1029.** 1) $\frac{2x+9}{x+2}$; 2) $\frac{2(x+5)}{x^2+2x+4}$;
 3) $\frac{x-3}{x+2,5}$; 4) $\frac{4x+1}{1-3x}$. **1030.** 1) $\frac{2}{x+3}$; 2) $\frac{x+2}{x+1}$; 3) $x(x-5)$;
 4) $\frac{1}{2(x+6)}$. **1031.** $p = 5$; $x_2 = -2$. **1033.** 1) 4; -4; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 81.
1034. 1) $(x+a)(x-6a)$; 2) $(x-2b)(x+5b)$. **1035.** 3; $x = 4$.
1036. $a = -2$; -13. **1038.** 1) -2; 2) 0; $1\frac{2}{3}$; 3) 1; 4) 3; -3,5.
1040. (2; 0), (-2; 0). **1041.** 1) -1; -1,5; 2) 0; $1\frac{2}{3}$; 3) -5; 6;
 4) рівняння не має розв'язків; 5) -4; 6) 1; -1. **1042.** 1) -3;
 2) 3; -3; 3) 0. **1043.** 1) 1; -1; 2) -1; 1; -3. **1044.** (-2; -8); $\left(\frac{3}{4}; 3\right)$.
1045. 1) $\pm\frac{7}{8}$; 2) -1. Вказівка. $27x^3 + 18x^2 - 12x - 8 =$
 $= (3x-2)(3x+2)^2$. **1046.** 1) 1; 3; $2 \pm \sqrt{3}$. Вказівка. $(x-2)^2 =$
 $= x^2 - 4x + 4$ і далі $x^2 - 4x = t$; 2) -1; 4. Вказівка.
 $x(x-1)(x-2)(x-3) = (x^2-3x)(x^2-3x+2)$, заміна: $x^2-3x = t$;
 3) 1; 2; -1; 4; 4) $\frac{5 \pm \sqrt{85}}{2}$; $\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$; 5) -2; 3; $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$;
 6) 1; 10; $\frac{11 \pm \sqrt{113}}{2}$. **1047.** 1) 5; -3; $\frac{1 \pm \sqrt{217}}{4}$; 2) -1; $-4 \pm \sqrt{21}$.
1048. 12 км/год. **1049.** 10 год. **1050.** 16 км/год. **1051.** 0 18 год.
1052. 2 км/год. **1053.** 20 с.; 16 с. **1054.** Петро - 60 дета-

лей; Степан – 40 деталей. **1055.** 2 год; 6 год. **1056.** 6 год; 9 год. **1057.** 2 кг або 4 кг. **1058.** 225 км. **1059.** 40 деталей. Вказівка. Нехай x деталей – щоденна норма. Тоді $5x + \left(\frac{800}{x} - 6\right)(x + 5) = 830$.

Задачі підвищеної складності

1060. Вказівка. $\frac{a^2 - b^2}{a - b} - \frac{a^2 + b^2}{a + b} = \frac{2ab}{a + b} > 0$.

1061. $\frac{m^2 + n^2 + mn}{m + n}$. **1062.** 1) $\frac{(x - y - z)x}{2}$; 2) $\frac{n + 1}{n - 2m}$; 3) 4;

4) $\frac{a - b}{a + b}$; 5) $1 + 2p$; 6) $-\frac{xy}{(x + y)^2}$. **1065.** Вказівка. Після

спрощення дістанемо $\frac{16}{1 - a^{16}}$. **1067.** Піднесемо рівність

$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$ до квадрата. Маємо $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} + \frac{z^2}{p^2} +$

$+ 2 \cdot \frac{xyp + xzn + yzm}{mnp} = 1$. З рівності $\frac{m}{x} + \frac{n}{y} + \frac{p}{z} = 0$ знай-

демо, що $xyp + xzn + yzm = 0$. Отже, $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} + \frac{z^2}{p^2} = 1$.

1068. Вказівка. З умови випливає, що $a - b = \frac{b - c}{bc}$;

$b - c = \frac{c - a}{ac}$; $c - a = \frac{a - b}{ab}$. Перемножити утворені рівності.

1069. 1) Якщо $a = 2$, рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 2$, то $x = 2$; 2) якщо $a = 1$ або $a = -1$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 1$ і $a \neq -1$, то $x = a$; 3) якщо $a = 2$, то x – будь-яке число; якщо $a \neq 2$, то $x = a + 2$; 4) якщо $a = 1$, то x – будь-яке число; якщо $a = -1$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 1$ і $a \neq -1$, то $x = \frac{a - 1}{a + 1}$. **1070.** 1) Якщо $a \neq 0$, то $x = a$;

2) якщо $b \neq 0$ і $a = -b$, то рівняння не має розв'язків; якщо $b \neq 0$ і $a \neq -b$, то $x = \frac{a - b}{a + b}$; 3) якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{2a}{3}$; 4) якщо $a = 0$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 0$, то $x = 6a$.

1071. 1) Від 2 до 3; 2) від -9 до -8; 3) від 7 до 8; 4) від 5 до 6.

1072. 1) Якщо $a < -3$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \geq -3$, то $x = (a + 3)^2$; 2) якщо $a = 0$, то $x \geq 0$; якщо $a \neq 0$, то $x = 1$; 3) якщо $a = -3$, то $x \geq -2$; якщо $a < -3$ або $-3 < a < 3$,

то рівняння не має розв'язків; якщо $a \geq 3$, то $x = a^2 - 6a + 7$.

1073. 1) -2 ; 2) 1 . **1074.** 1) $\sqrt{3} - 1$; 2) 1 ; 3) -10 . **1075.** 1) 2 ; 2) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$. **1076.** 1) 1 ; 2) 8 . **1077.** 1) $y = \begin{cases} 3x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ 5x, & \text{якщо } x < 0; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x \geq 1, \\ 1 - 2x, & \text{якщо } x < 1. \end{cases}$ **1078.** 1) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; 2) $1 + \sqrt{3} - \sqrt{7}$;

3) $\sqrt{2} - 1$; 4) $\frac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{2} + 1)}{2}$. **1079.** Так. **1080.** 1) $\frac{1}{xy}$; 2) $\frac{1+a}{a}$.

1081. 1) $\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{x - y}$; 2) 1 . **1082.** 1) $-\sqrt{a}$, якщо $0 < a < 2$; \sqrt{a} , якщо $a > 2$; 2) -2 , якщо $x < 0$; 2 , якщо $x > 0$. **1084.** $\frac{1}{2}$. **1085.** 6 .

1086. 1) 19 ; 2) 80 ; 3) 343 . **1087.** 1) -4 ; -3 ; 2) 19 . **1088.** 1) Якщо $a = 1$, то $x = -\frac{1}{2}$; якщо $a \neq 1$, то $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{1-a}$; 2) якщо $a = -1$, то $x = -1$; якщо $a \neq -1$, $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{2a}{1+a}$. **1089.** 1) -1 ; 2) 2 ; 3) рівняння не має розв'язків. **1090.** Нехай $b^2 - 4ac = 3$, тоді $b^2 = 3 + 4ac$. Права частина рівності – непарне число, отже, $b = 2k + 1$, $k \in \mathbf{Z}$. Тоді дістанемо $2(k^2 + k - ac) = 1$, що неможливо. **1091.** -1 . **1092.** 1 . **1093.** 12 . **1094.** 1) $x^2 - 7x - 2 = 0$; 2) $2x^2 + 65x + 179 = 0$; 3) $16x^2 + 106x + 1 = 0$. **1095.** Вказівка. $D = (b + c - a)(b + c + a)(b - c + a)(b - c - a)$. **1096.** Вказівка. $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$. Далі використати теорему Вієта. **1097.** 1) 1 ; 2 ; -3 ; 2) 1 ; $\frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$;

3) -1 ; $3 \pm \sqrt{3}$; 4) $\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$. Вказівка. $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x^4 - 2x^3 + x^2) - (4x^2 + 4x + 1) = (x^2 - x)^2 - (2x + 1)^2$.

1098. 1) Якщо $a = 1$, то x – будь-яке число; якщо $a = -2$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 1$ і $a \neq -2$, то $x = \frac{1}{a+2}$;

2) якщо $a = 1$, то $x = 4$; якщо $a = 4$, то $x = 1$; якщо $a \neq 1$ і $a \neq 4$, то $x_1 = 1$, $x_2 = 4$; 3) якщо $a = 1$ або $a = 3$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 1$ і $a \neq 3$, то $x = a$; 4) якщо $a = 1$, то $x = 4$; якщо $a \neq 1$, то $x_1 = 3a$, $x_2 = 4$; 5) якщо $a = 0$, то x – будь-яке число, крім -7 ; якщо $a = -7$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 0$ і $a \neq -7$, то $x = a$; 6) якщо $a = 1$ або $a = -1$, то $x = 0$;

якщо $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$, то $x_1 = a$, $x_2 = \frac{1-a^2}{a}$. **1099.** 6; -6; 10.

1100. 9; -9. Вказівка. $x^4 - x^2 + 20x - 100 = x^4 - (x - 10)^2$.

1101. $a = 42$; $b = 39$. **1102.** 1) 2; 2) 1. **1103.** 1) Якщо $a = 1$, то $x = -1$; якщо $a = -2$, то $x = \frac{1}{3}$; якщо $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -2$,

то $x_1 = \frac{a+1}{a-1}$, $x_2 = -1$; 2) якщо $a = -\frac{9}{4}$ або $a = -\frac{1}{4}$, то $x = -1$;

якщо $a = -3$, то $x = -\frac{9}{8}$; якщо $a = 1$, то $x = \frac{7}{8}$; якщо $a \neq -3$,

$a \neq -\frac{9}{4}$; $a \neq -\frac{1}{4}$, $a \neq 1$, то $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{4a+3}{8}$. **1104.** 1) 0; 2) 2;

-2; $\pm \frac{3\sqrt{21}}{7}$. **1105.** 1) 14. Вказівка. Нехай $\sqrt{x-5} = t$. Тоді

$x = t^2 + 5$; 2) 4; -4. **1106.** 1) $\frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$; $\frac{-5 \pm \sqrt{85}}{6}$; 2) $\frac{5 + \sqrt{13}}{6}$;

$\frac{-5 - \sqrt{133}}{6}$. **1107.** Вказівка. Графіком рівняння є дві пря-

мі $y = \frac{x}{3}$ і $y = \frac{x}{2}$. **1108.** 1) 5; 0,6; 2) $-\frac{2}{9}$; $\frac{10}{19}$; $\frac{14}{17}$; $3\frac{1}{3}$; 3) 2; $\frac{1}{2}$.

Вказівка. $x + \frac{1}{x} = t$, тоді $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$; 4) $1 \pm \sqrt{7}$; $-3 \pm \sqrt{15}$.

Вказівка. $\frac{x}{3} - \frac{2}{x} = t$, тоді $\frac{4}{x^2} + \frac{x^2}{9} = t^2 + \frac{4}{3}$. **1109.** 85 кг.

1110. 7. **1111.** 52 км/год або $38\frac{2}{11}$ км/год. **1112.** 60 км/год.

Вказівка. Слід розглянути дві можливості залежно від того, якого велосипедиста мотоцикліст обігнав першим.

1113. 1,8 год і 2,25 год. **1114.** 0,2 год або 0,33 год. **1115.** Сергій - за 10 днів, Олег - за 15 днів. **1116.** 60 хв; 84 хв.

Завдання на повторення курсу алгебри 7 класу

1. 1) a^8 ; 2) x^2 ; 3) p^{21} ; 4) a^6 ; 5) t ; 6) a^{36} . 2. 1) $4m^3 - 12m^2$; 2) $-2a^2b - 4a^2b^2$; 3) $7a^3 - 14a^2 + 21a$; 4) $a^2 - 2a - 35$; 5) $6m^2 + 19x - 7$; 6) $a^3 - 3a^2 + b + 1$. 3. 1) $2x^2 - 8$; 2) $-17x$; 3) $2a^2 + 8b^2$; 4) $56xt - 32m^2$; 5) $2x^3 - x^2 - x$; 6) $x^2 - 2x + 10$. 4. 1) $4(a - 2)$; 2) $3m(m - 3)$; 3) $4ab(3a + 4b^2)$; 4) $(2x - 5)(2x + 5)$; 5) $9(m^2 - 2p^4)(m^2 + 2p^4)$; 6) $(p - 5)^2$; 7) $(x^2 + 4)^2$; 8) $(c + 3) \times (c^2 - 3c + 9)$; 9) $(p^2 - 10)(p^4 + 10p^2 + 100)$; 10) $(x - y)(a + 2)$.

5. 1) 4; 2) -8; 3) 5; 4) $-2\frac{2}{3}$; 5) 2; 6) \emptyset ; 7) будь-яке число; 8) -12. 6. 1) (4; 1); 2) (-1; 2). 7. 1) (1; -3); 2) (-1; 4). 8. 1) (2; 1); 2) (2; -3); 3) $(1; -\frac{1}{3})$; 4) (-1; -2).

Відповіді до завдань «Домашня самостійна робота»

| № завдання № роботи | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 1 | В | Б | Г | В | А | Б | Б | А | В | Г | В | А |
| 2 | Б | Г | А | В | Б | А | В | Г | В | А | Г | В |
| 3 | А | Г | Б | В | Б | А | В | Б | В | Г | В | Б |
| 4 | В | Б | Г | А | Б | В | Г | Б | А | В | В | Г |
| 5 | Б | В | Г | Б | А | В | Б | А | Б | Г | А | Б |
| 6 | Б | Г | Б | А | В | Г | Б | В | Б | А | Б | Б |

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Арифметичний квадратний корінь** 118
- Біквадратне рівняння** 207
- Вершина параболи** 112
- Виділення квадрата двочлена з квадратного тричлена** 200
- Винесення множника з-під знака кореня** 147
- Взаємно спряжені вирази** 150
- Внесення множника під знак кореня** 148
- Гілки гіперболи** 89
- параболи 112
- Гіпербола** 89
- Графічний метод розв'язування рівнянь** 91
- Дискримінант квадратного рівняння** 177
- – тричлена 199
- Дійсні числа** 126
- Добування квадратного кореня** 119
- Додатковий множник** 13
- Допустимі значення змінних** 6
- Дробові раціональні вирази** 5
- – рівняння 58, 206
- Зведене квадратне рівняння** 171
- Зведення дробів до спільного знаменника** 26
- Звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу** 150
- Ірраціональні числа** 126
- Квадратне рівняння** 170
- Квадратний корінь** 118
- тричлен 198
- Коефіцієнт квадратного рівняння** 170
- Корінь квадратного тричлена** 198
- Метод заміни змінної** 207, 208
- розкладання многочлена на множники 207
- Множина** 124
- Неповне квадратне рівняння** 171
- Обернена пропорційність** 87
- Область визначення (область допустимих значень)** 6
- Основна властивість дробу** 12
- Парабола** 112
- Підкореневий вираз** 118
- Підмножина** 124
- Подібні радикали** 149
- Порожня множина** 124
- Порядок числа** 82
- Правило віднімання дробів з однаковими знаменниками** 20
- ділення дробів 45
- додавання дробів з однаковими знаменниками 20
- множення дробів 38
- піднесення дробу до степеня 40
- Раціональне рівняння** 58
- число 124
- Раціональний вираз** 5
- дріб 6
- Скорочення дробу** 13, 149
- Спряжений вираз** 150
- Стандартний вигляд числа** 81
- Степінь із цілим показником** 70
- Теорема Вієта** 184
- , обернена до теореми Вієта 186
- про корінь з добутку 137
- – – з дробу 138
- – – зі степеня 140
- – – з квадрата 139
- – розкладання квадратного тричлена на множники 199
- Умова рівності дробу нулю** 6
- Формула коренів квадратного рівняння** 177
- Формули Вієта** 185
- Ціле раціональне рівняння** 58