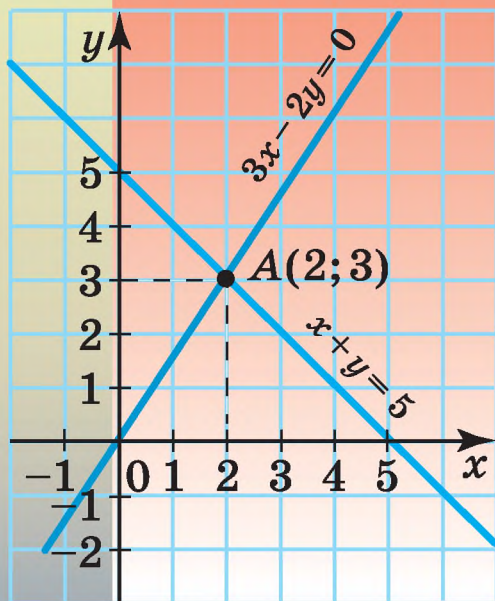


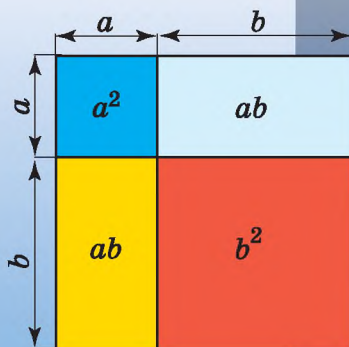
О.С. Істер

АЛГЕБРА



7

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$



$$(a + b)^2 = \dots$$



УДК 512(075.3)
ББК 22.14я721
І-89

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(лист МОН України від 20.07.2015 № 777)*

**Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено**

Істер О. С.

І-89 Алгебра : підруч. для 7-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / О. С. Істер. – Київ : Генеза, 2015. – 256 с.

ISBN 978-966-11-0612-2.

Підручник відповідає чинній програмі з математики та містить достатню кількість диференційованих вправ. Після кожного розділу є вправи для повторення. Є також низка цікавих і складних задач у рубриці «Цікаві задачі для учнів неледачих». Для підготовки до контрольної роботи передбачено «Домашню самостійну роботу» та «Завдання для перевірки знань». У кінці підручника наведено матеріал для повторення курсу математики 5–6 класів, задачі підвищеної складності, предметний покажчик та відповіді до більшості вправ.

**УДК 512(075.3)
ББК 22.14я721**

ISBN 978-966-11-0612-2

© Істер О.С., 2015
© Видавництво «Генеза»,
оригінал-макет, 2015

Шановні семикласники!

Ви починаєте вивчати одну з найважливіших математичних дисциплін – алгебру. Допоможе вам у цьому підручник, який ви тримаєте в руках.

Під час вивчення теоретичного матеріалу зверніть увагу на текст, надрукований **жирним шрифтом**. Його треба запам'ятати.

У підручнику використано такі умовні позначення:


 – треба запам'ятати;  – вправи для повторення;

 – запитання і завдання до вивченого матеріалу;


117 – завдання для класної роботи;

225 – завдання для домашньої роботи;

 – вправи підвищеної складності;

 – рубрика «Цікаві задачі для учнів неледачих».

Усі вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так:

з позначки  починаються вправи початкового рівня;

з позначки  починаються вправи середнього рівня;

з позначки  починаються вправи достатнього рівня;

з позначки  починаються вправи високого рівня.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного опціювання можна, виконуючи завдання «Домашньої самостійної роботи», які подано в тестовій формі, та «Завдання для перевірки знань». Після кожного розділу наведено вправи для його повторення, а в кінці підручника – «Завдання для перевірки знань за курс алгебри 7 класу». «Задачі підвищеної складності» допоможуть підготуватися до математичної олімпіади та поглибити знання з математики. Пригадати раніше вивчені теми допоможуть «Відомості з курсу математики 5–6 класів» та «Вправи на повторення курсу математики 5–6 класів».

Автор намагався подати теоретичний матеріал простою, доступною мовою, проілюструвати його значною кількістю прикладів. Після вивчення теоретичного матеріалу в школі його обов'язково потрібно опрацювати вдома.

Підручник містить велику кількість вправ. Більшість з них ви розглянете на уроках та під час домашньої роботи, інші вправи рекомендується розв'язати самостійно.

Цікаві факти з історії виникнення математичних понять і символів ви знайдете в рубриці «А ще раніше...».

Бажаємо успіхів в опануванні курсу!

Шановні вчителі!

Пропонований підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках, факультативних, індивідуальних, додаткових заняттях та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів, диференціації навчання тощо.

«Вправи на повторення курсу математики 5–6 класів» допоможуть діагностувати вміння й навички учнів з математики за попередні роки та повторити навчальний матеріал.

Додаткові вправи у «Завданнях для перевірки знань» призначено для учнів, які впоралися з основними завданнями раніше за інших учнів. Правильне їх розв'язання вчитель може оцінити окремо.

Вправи для повторення розділів можна запропонувати учням, наприклад, під час узагальнюючих уроків або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року.

«Задачі підвищеної складності», які розміщено в кінці підручника, допоможуть підготувати учнів до різноманітних математичних змагань та підвищити їхню цікавість до математики.

Шановні батьки!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків у школі, необхідно запропонувати їй самостійно опрацювати матеріал цих уроків за підручником удома. Спочатку дитина має прочитати теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою, проілюстровано значною кількістю прикладів. Після цього необхідно розв'язати вправи, що сильні, з розглянутого параграфа.

Упродовж опрацювання дитиною курсу алгебри 7 класу ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, що не розглядалися під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині розв'язати завдання «Домашньої самостійної роботи», які подано в тестовій формі, та «Завдання для перевірки знань». Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.

Якщо ваша дитина виявляє підвищену цікавість до математики та бажає поглибити свої знання, зверніть увагу на «Задачі підвищеної складності», які розміщено в кінці підручника.

Розділ 1.

Цілі вирази

У цьому розділі ви:

- **пригадаєте**, що таке числові і буквені вирази, вирази зі степенями, значення виразу;
- **ознайомитесь** з поняттями одночлена і многочлена, тотожності, тотожно рівних виразів;
- **навчитесь** виконувати арифметичні дії з одночленами і многочленами, тотожні перетворення виразів, застосовувати формули скороченого множення і властивості степенів, розкладати многочлени на множники.

§ 1. ВИРАЗИ ЗІ ЗМІННИМИ. ЦІЛІ РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ. ЧИСЛОВЕ ЗНАЧЕННЯ ВИРАЗУ

Числові вирази утворюють із чисел за допомогою знаків дій і дужок. Наприклад, числовими виразами є:

$$12 \cdot 3 - 9; 1,2^3; 5\frac{1}{7} - \left(5,7 : 3 + 1\frac{7}{9}\right) \text{ тощо.}$$

Число, що є результатом виконання всіх дій у числовому виразі, називають **значенням виразу**.

Оскільки $12 \cdot 3 - 9 = 36 - 9 = 27$, то число 27 є значенням числового виразу $12 \cdot 3 - 9$.

Якщо числовий вираз містить дію, яку неможливо виконати, то кажуть, що вираз не має смислу (змісту). Наприклад, вираз $5 : (8 : 2 - 4)$ не має смислу, бо $8 : 2 - 4 = 0$ і наступну дію $5 : 0$ виконати неможливо.

Окрім числових виразів, у математиці зустрічаються вирази, що містять букви. Такі вирази ми називали буквеними.

Приклад 1. Нехай необхідно знайти площу прямокутника, довжина якого дорівнює 10 см, а ширина – b см.

За формулою площі прямокутника маємо: $S = 10b$. Якщо, наприклад, $b = 3$, то $S = 30$, а якщо $b = 7$, то $S = 70$. У виразі $10b$ буква b може набувати різних значень, тобто її значення можна змінювати. При цьому буде змінюватися і значення виразу $10b$. Оскільки значення b може змінюватися (набувати різних, у даному випадку додатних значень), то букву b в такому виразі називають **змінною**, а сам вираз $10b$ – **виразом зі змінною**.

Наприклад, вирази $5 + a$; $2(b - 3x)$; $\frac{c - 5p}{d}$ є виразами зі змінними.



Вирази зі змінними утворюють із чисел та змінних за допомогою знаків арифметичних дій і дужок.

Якщо у вираз зі змінними замість змінних підставимо певні числа, то одержимо числовий вираз. Його значення називають **числовим значенням виразу** для вибраних значень змінних.

Приклад 2. Знайти значення виразу:

1) $(5 + b) : 4$, якщо $b = 0$; -2 ; 2) $\frac{a - c}{12}$, якщо $a = 17$, $c = -5$.

Розв'язання. 1) Якщо $b = 0$, то $(5 + b) : 4 = (5 + 0) : 4 = 1,25$; якщо $b = -2$, то $(5 + b) : 4 = (5 + (-2)) : 4 = 0,75$.

2) Якщо $a = 17$, $c = -5$, то $\frac{a - c}{12} = \frac{17 - (-5)}{12} = \frac{22}{12} = 1\frac{5}{6}$.

Вираз, який містить лише дії додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня, називають **раціональним виразом**. Наприклад, раціональними є вирази:

$$2a - m; \quad \frac{p + 2q}{9}; \quad -\frac{2}{3}(x - 9 + y); \quad \frac{5 + x}{m}; \quad \frac{17}{x^2 - 3}; \quad a + b - \frac{1}{c}.$$

Раціональний вираз, який не містить ділення на вираз зі змінною, називають **цілим раціональним виразом**. Якщо в раціональному виразі є ділення на вираз зі змінною, його називають **дробовим раціональним виразом**. Три перших з поданих вище виразів – цілі, а три останніх – дробові.

Вирази зі змінними використовують для запису формул.

Наприклад, $s = vt$ – формула відстані; $P = 2(a + b)$ – формула периметра прямокутника; $n = 2k$ (де k – ціле число) – формула парного числа; $n = 2k + 1$ (де k – ціле число) – формула непарного числа; $n = 7k$ (де k – ціле число) – формула числа, кратного числу 7.

Вирази, що не є раціональними, розглядатимемо в старших класах.

А ще раніше...

Поява букв і знаків арифметичних дій у математичних записах є результатом розвитку математичної науки. У своїх працях шукане невідоме число стародавні єгипетські вчені називали «хау» (у перекладі – «купа»), а знаки математичних дій взагалі не вживали, записуючи усе переважно словами. І хоча потреба у використанні знаків математичних дій виникла ще у Стародавньому Єгипті, з'явилися вони набагато пізніше. Замість знаків додавання і

віднімання стародавні математики використовували малюнки або слова, що призводило до громіздких записів.

Знаки арифметичних дій стали зустрічатися в наукових працях математиків, починаючи з XV ст. На сьогодні відомо, ким і коли було запропоновано деякі математичні знаки для записів. Так, знаки «+» і «-» зустрічаються вперше у 1489 році в праці «Арифметика» Йогана Відмана, професора Лейпцизького університету. Знак «x» для позначення дії множення введено англійським математиком Вільямом Оутредом у 1631 році. Для позначення дії ділення він використовував риску («/»). Дробову риску в математичних записах (для відокремлення чисельника дробу від його знаменника) уже в 1202 році використовував Леонардо Пізанський, відомий математик середньовічної Європи. Німецький математик, фізик і філософ Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646–1716) запропонував використовувати у якості знака множення крапку («·»), а у якості знака ділення – двокрапку («:»). Це відбулося у 1693 році та у 1684 році відповідно. Знак рівності («=») було введено в 1557 році Робертом Рекордом, математиком, який народився в Уельсі й довгий час був особистим лікарем королівської сім'ї Великої Британії.

Величезний внесок у розвиток алгебраїчної символіки зробив у XVI ст. видатний французький математик Франсуа Вієт, якого називають «батьком» алгебри. Саме він став позначати буквами не тільки змінні, а й будь-які числа, зокрема коефіцієнти при змінних. Проте його символіка відрізнялася від сучасної. Замість x , x^2 і x^3 Вієт писав відповідно букви N (*Numerus* – число), Q (*Quadratus* – квадрат) і C (*Cubus* – куб). Наприклад, рівняння $x^3 + 7x^2 - 8x = 20$ він записував так: $1C + 7Q - 8N \text{ aequi } 20$ (*aequali* – дорівнює).



Франсуа Вієт
(1540–1603)



Із чого утворюють числові вирази? **Що** називають значенням числового виразу? **Із** чого утворюють вирази зі змінними? **Що** називають числовим значенням виразу для вибраних значень змінних? **Наведіть** приклад числового виразу і виразу зі змінними. **Який** вираз називають цілим раціональним виразом?



1. (Усно) Які з наведених нижче виразів є числовими, а які – виразами зі змінними:

- 1) $5 + m^2 - a$; 2) $(12 - 3) : 4$;
 3) $\frac{5+x}{a+b}$; 4) $(0 - 8) \cdot 5 - 13?$

2. (Усно) Які з раціональних виразів є цілими, а які – дробовими:

1) $\frac{a^3 + c}{5}$; 2) $\frac{5}{a^3 + c}$; 3) $m + \frac{x}{7}$; 4) $m + \frac{7}{x}$?

3. Випишіть окремо: числові вирази; вирази зі змінними; цілі раціональні вирази; дробові раціональні вирази:

1) $5 + c$; 2) $(2 - 15) \cdot 4$; 3) $\frac{a + m}{p}$; 4) $q^2 - 19$;
 5) $7 + \frac{a}{5}$; 6) $\frac{1}{4}ab$; 7) $\frac{9 - 5}{11}$; 8) $\frac{a^2 - b^2}{c^2}$.

4. Прочитайте словами вирази зі змінними:

1) $x + 7$; 2) $m - a$; 3) $5ab$; 4) $5 : (c + 9)$.

5. Складіть і запишіть по два вирази:

1) зі змінною a ; 2) зі змінними x і y .

6. Складіть і запишіть по три вирази:

1) зі змінною x ; 2) зі змінними a і b .

7. (Усно) Які з даних числових виразів не мають смислу:

1) $(5 - 6) : 7$; 2) $(10 - 2 \cdot 5) : 7$;
 3) $4 : (12 - 2 \cdot 6)$; 4) $\frac{17}{15 + 5 \cdot (-3)}$?

8. Знайдіть значення виразу:

1) $5x - 3$, якщо $x = 1,8$; $x = 2\frac{1}{5}$;
 2) $a^2 + 3a$, якщо $a = -1$; $a = 0,8$.

9. Знайдіть значення виразу:

1) $5m + 2n$, якщо $m = -1,3$; $n = 2\frac{1}{2}$;
 2) $a(2b - c)$, якщо $a = 1,5$; $b = 3,2$; $c = -1,4$.

10. Знайдіть значення виразу:

1) $b^2 - 4b$, якщо $b = -2$; $b = 0,5$;
 2) $x^2 - y^2$, якщо $x = 5$; $y = -3$; якщо $x = 0,1$; $y = 0,2$.

11. Запишіть у вигляді виразу:

1) суму чисел b і c ;
 2) добуток чисел $5m$ і n^3 ;
 3) квадрат суми чисел a і $9p$;
 4) різницю квадратів чисел $3d$ і $7r$.

12. Запишіть у вигляді виразу:

- 1) різницю чисел p і 7 ; 2) частку чисел $a + c$ і d ;
3) суму числа a і добутку чисел m і n .

13. Заповніть у зошиті наступні таблиці:

m	2	3	-1	0	-2
n	1	2	0	-5	-3
$2m - 3n$					

x	-1	0	1	2
$x^2 + 2$				
$x^2 + 2x$				

14. Дізнайтеся прізвище видатного українського кардіохірурга. Для цього знайдіть значення виразу в першій таблиці й перенесіть букви, що відповідають знайденим значенням, у другу таблицю.

x	-2	-1	0	1	2
$x^2 - 4x$					
Букви	<i>O</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>M</i>	<i>C</i>

5	-3	12	-4	12	0

15. Порівняйте суму $a + b$ з добутком ab , якщо:

- 1) $a = 0$, $b = -2$; 2) $a = -3$, $b = 2$.

16. Майстер за одну годину виготовляє x деталей, а його учень – y деталей. Скільки деталей вони виготовили разом, якщо майстер працював 8 год, а учень – 4 год?

17. (Усно) Нехай a дм – довжина прямокутника, b дм – його ширина ($a > b$). Що означають вирази:

- 1) ab ; 2) $2(a + b)$; 3) $2a$; 4) $\frac{a}{b}$?

18. Ручка коштує x грн, олівець – y грн ($x > y$). Що означають вирази:

- 1) $x + y$; 2) $3x + 4y$; 3) $x - y$; 4) $\frac{x}{y}$?

3 19. Запишіть у вигляді виразу час, який учень щоденно проводить у школі, якщо у нього a уроків по 45 хв, b перерв по 15 хв і c перерв по 10 хв. Обчисліть значення цього виразу, якщо $a = 6$; $b = 2$; $c = 3$.

20. Коли Марійка витягла зі своєї скарбнички всі монети, то виявилось, що там було x монет номіналом 10 коп., y монет номіналом 25 коп. і z монет номіналом 50 коп. Обчисліть, яку суму коштів назбирала Марійка, якщо $x = 8$; $y = 5$; $z = 20$.

21. При якому значенні змінної a значення виразу $5a - 8$ дорівнює -13 ?

22. При якому значенні x значення виразів $3x - 4$ і $-2x + 7$ рівні між собою?

23. Складіть формулу цілого числа, яке:

- 1) кратне числу 9;
- 2) при діленні на 5 дає в остачі 1.

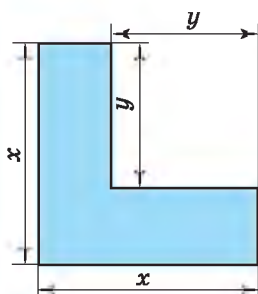
4 24. При деяких значеннях a і b значення виразу $a - b$ дорівнює 2,25. Якого значення при тих самих значеннях a і b набуває вираз:

- 1) $4(a - b)$;
- 2) $b - a$;
- 3) $\frac{1}{b - a}$;
- 4) $\frac{3(a - b)}{4(b - a)}$?

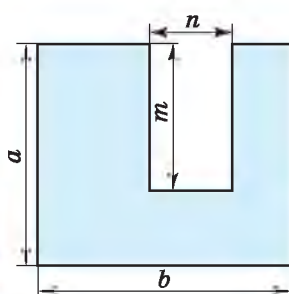
25. При деяких значеннях c і d значення виразу $c - d$ дорівнює $\frac{4}{7}$. Якого значення при тих самих значеннях c і d набуває вираз:

- 1) $7(c - d)$;
- 2) $d - c$;
- 3) $\frac{1}{d - c}$;
- 4) $\frac{5(d - c)}{4(c - d)}$?

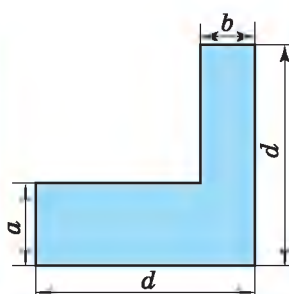
26. Складіть вирази для обчислення площ фігур (мал. 1–3):



Мал. 1



Мал. 2



Мал. 3



Вправи для повторення

2 27. Обчисліть:

- 1) 13^2 ;
- 2) 7^3 ;
- 3) $(-2,1)^2$;
- 4) $(-1,1)^3$;
- 5) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$;
- 6) $\left(-1\frac{1}{5}\right)^2$;
- 7) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$;
- 8) $0,2^3$.

3 28. Якою цифрою закінчується значення виразу:

- 1) 132^2 ; 2) 271^3 ; 3) 2017^2 ; 4) $1315^2 - 115^3$?

29. Власна швидкість катера – 26 км/год, а швидкість течії річки – 2 км/год. Знайдіть відстань між двома пристанями, якщо в одному напрямі катер проходить її на 30 хв швидше, ніж у зворотному.



Цікаві задачі для учнів неледачих



30. Чи існує таке значення x , для якого:

- 1) $-x \geq |x|$; 2) $x > |x|$?



§ 2. ТОТОЖНІ ВИРАЗИ. ТОТОЖНІСТЬ. ТОТОЖНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗУ. ДОВЕДЕННЯ ТОТОЖНОСТЕЙ

Знайдемо значення виразів $2(x - 1)$ і $2x - 2$ для деяких даних значень змінної x . Результати запишемо в таблицю:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$2(x - 1)$	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6
$2x - 2$	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6

Можна прийти до висновку, що значення виразів $2(x - 1)$ і $2x - 2$ для кожного даного значення змінної x рівні між собою. За розподільною властивістю множення відносно віднімання $2(x - 1) = 2x - 2$. Тому й для будь-якого іншого значення змінної x значення виразів $2(x - 1)$ і $2x - 2$ теж будуть рівними між собою. Такі вирази називають *тотожно рівними*.



Два вирази, відповідні значення яких рівні між собою при будь-яких значеннях змінних, називають *тотожними*, або *тотожно рівними*.

Наприклад, тотожними є вирази $2x + 3x$ і $5x$, бо при кожному значенні змінної x ці вирази набувають однакових значень (це впливає з розподільної властивості множення відносно додавання, оскільки $2x + 3x = 5x$).

Розглянемо тепер вирази $3x + 2y$ і $5xy$. Якщо $x = 1$ і $y = 1$, то відповідні значення цих виразів рівні між собою:

$$3x + 2y = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5; \quad 5xy = 5 \cdot 1 \cdot 1 = 5.$$

Проте можна вказати такі значення x і y , для яких значення цих виразів не будуть між собою рівними. Наприклад, якщо $x = 2$; $y = 0$, то

$$3x + 2y = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 6, \quad 5xy = 5 \cdot 2 \cdot 0 = 0.$$

Отже, існують такі значення змінних, при яких відповідні значення виразів $3x + 2y$ і $5xy$ не дорівнюють одне одному. Тому вирази $3x + 2y$ і $5xy$ не є тотожно рівними.



Рівність, яка є правильною при будь-яких значеннях змінних, називають тотожністю.

Виходячи з вищевикладеного, тотожностями, зокрема, є рівності: $2(x - 1) = 2x - 2$ та $2x + 3x = 5x$.

Тотожністю є кожна рівність, якою записано відомі властивості дій над числами. Наприклад,

$$a + b = b + a; \quad (a + b) + c = a + (b + c); \quad a(b + c) = ab + ac;$$

$$ab = ba; \quad (ab)c = a(bc); \quad a(b - c) = ab - ac.$$

Тотожностями є і такі рівності:

$$a + 0 = a; \quad a \cdot 0 = 0; \quad a \cdot (-b) = -ab;$$

$$a + (-a) = 0; \quad a \cdot 1 = a; \quad -a \cdot (-b) = ab.$$

Тотожностями також прийнято вважати правильні числові рівності, наприклад:

$$1 + 2 + 3 = 6; \quad 5^2 + 12^2 = 13^2; \quad 12 \cdot (7 - 6) = 3 \cdot 4.$$

Якщо у виразі $5x + 2x - 9$ звести подібні доданки, одержимо, що $5x + 2x - 9 = 7x - 9$. У такому випадку кажуть, що вираз $5x + 2x - 9$ замінили тотожним йому виразом $7x - 9$.



Заміна одного виразу іншим, йому тотожним, називають тотожним перетворенням виразу.

Тотожні перетворення виразів зі змінними виконують, застосовуючи властивості дій над числами. Зокрема, тотожними перетвореннями є розкриття дужок, зведення подібних доданків тощо.

Тотожні перетворення доводиться виконувати під час спрощення виразу, тобто заміни деякого виразу на тотожно рівний йому вираз, який має коротший запис.

Приклад 1. Спростити вираз: 1) $-0,3m \cdot 5n$;

2) $2(3x - 4) + 3(-4x + 7)$;

3) $2 + 5a - (a - 2b) + (3b - a)$.

Р о з в' я з а н н я. 1) $-0,3m \cdot 5n = -0,3 \cdot 5mn = -1,5mn$;

2) $2(3x - 4) + 3(-4x + 7) = 6x - 8 - 12x + 21 = -6x + 13$;

3) $2 + 5a - (a - 2b) + (3b - a) = 2 + 5a - a + 2b + 3b - a = 3a + 5b + 2$.

Щоб довести, що рівність є тотожністю (інакше кажучи, щоб *довести тотожність*), використовують тотожні перетворення виразів.

Довести тотожність можна одним з таких способів:

- ▼ виконати тотожні перетворення її лівої частини, тим самим звівши до вигляду правої частини;
- ▼ виконати тотожні перетворення її правої частини, тим самим звівши до вигляду лівої частини;
- ▼ виконати тотожні перетворення обох її частин, тим самим звівши обидві частини до однакових виразів.

Приклад 2. Довести тотожність: 1) $2x - (x + 5) - 11 = x - 16$;
2) $20b - 4a = 5(2a - 3b) - 7(2a - 5b)$;
3) $2(3x - 8) + 4(5x - 7) = 13(2x - 5) + 21$.

Р о з в' я з а н н я. 1) Перетворимо ліву частину даної рівності:

$$2x - (x + 5) - 11 = \underline{2x} - \underline{x} - 5 - 11 = x - 16.$$

Тотожними перетвореннями вираз у лівій частині рівності звели до вигляду правої частини і тим самим довели, що дана рівність є тотожністю.

2) Перетворимо праву частину даної рівності:

$$5(2a - 3b) - 7(2a - 5b) = \underline{10a} - \underline{15b} - \underline{14a} + \underline{35b} = 20b - 4a.$$

Тотожними перетвореннями праву частину рівності звели до вигляду лівої частини і тим самим довели, що дана рівність є тотожністю.

3) У цьому випадку зручно спростити як ліву, так і праву частини рівності та порівняти результати:

$$2(3x - 8) + 4(5x - 7) = \underline{6x} - 16 + \underline{20x} - 28 = 26x - 44;$$

$$13(2x - 5) + 21 = 26x - 65 + 21 = 26x - 44.$$

Тотожними перетвореннями ліву і праву частини рівності звели до одного й того самого вигляду: $26x - 44$. Тому дана рівність є тотожністю.



Які вирази називають тотожними? ➤ Наведіть приклад тотожних виразів. ➤ Яку рівність називають тотожністю? ➤ Наведіть приклад тотожності. ➤ Що називають тотожним перетворенням виразу? ➤ Як довести тотожність?

31. (Усно) Чи є вирази тотожно рівними:

- 1) $2a + a$ і $3a$; 2) $7x + b$ і $b + 7x$; 3) $x + x + x$ і x^3 ;
4) $2(x - 2)$ і $2x - 4$; 5) $m - n$ і $n - m$; 6) $2a \cdot p$ і $2p \cdot a$?

32. Чи є тотожно рівними вирази (чому?):

- 1) $7x - 2x$ і $5x$; 2) $5a - 4$ і $4 - 5a$; 3) $4m + n$ і $n + 4m$;
 4) $a + a$ і a^2 ; 5) $3(a - 4)$ і $3a - 12$; 6) $5m \cdot n$ і $5m + n$?

33. (Усно) Чи є тотожністю рівність:

- 1) $2a + 10b = 12ab$; 2) $7p - 1 = -1 + 7p$; 3) $3(x - y) = 3x - 5y$?

34. Розкрийте дужки:

- 1) $2(a - 1)$; 2) $7(3b + 2)$; 3) $-(b - 3)$; 4) $-(-5 + 4y)$.

35. Розкрийте дужки:

- 1) $-(a - 4)$; 2) $3(x + 1)$; 3) $5(1 - 4m)$; 4) $-(-2p + 7)$.

36. Зведіть подібні доданки:

- 1) $2x - x$; 2) $-3m + 5m$; 3) $-2y - 3y$; 4) $p - 7p$.

37. Назвіть кілька виразів, тотожних виразу $2a + 3a$.

38. Спростіть вираз, використовуючи переставну і сполучну властивості множення:

- 1) $-2,5x \cdot 4$; 2) $4p \cdot (-1,5)$;
 3) $0,2x \cdot (-0,3p)$; 4) $-\frac{1}{7}x \cdot (-7y)$.

39. Спростіть вираз:

- 1) $-2p \cdot 3,5$; 2) $7a \cdot (-1,2)$;
 3) $0,2x \cdot (-3y)$; 4) $-1\frac{1}{3}m \cdot (-3n)$.

40. (Усно) Спростіть вираз:

- 1) $2x - 9 + 5x$; 2) $7a - 3b + 2a + 3b$;
 3) $-2x \cdot 3$; 4) $-4a \cdot (-2b)$.

41. Зведіть подібні доданки:

- 1) $5b - 8a + 4b - a$;
 2) $17 - 2p + 3p + 19$;
 3) $1,8a + 1,9b + 2,8a - 2,9b$;
 4) $5 - 7c + 1,9p + 6,9c - 1,7p$.

42. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

- 1) $4(5x - 7) + 3x + 13$;
 2) $2(7 - 9a) - (4 - 18a)$;
 3) $3(2p - 7) - 2(p - 3)$;
 4) $-(3m - 5) + 2(3m - 7)$.

43. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

- 1) $3(8a - 4) + 6a$; 2) $7p - 2(3p - 1)$;
 3) $2(3x - 8) - 5(2x + 7)$; 4) $3(5m - 7) - (15m - 2)$.

44. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

- 1) $0,6x + 0,4(x - 20)$, якщо $x = 2,4$;
 2) $1,3(2a - 1) - 16,4$, якщо $a = 10$;
 3) $1,2(m - 5) - 1,8(10 - m)$, якщо $m = -3,7$;
 4) $2x - 3(x + y) + 4y$, якщо $x = -1$, $y = 1$.

45. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

- 1) $0,7x + 0,3(x - 4)$, якщо $x = -0,7$;
 2) $1,7(y - 11) - 16,3$, якщо $y = 20$;
 3) $0,6(2a - 14) - 0,4(5a - 1)$, якщо $a = -1$;
 4) $5(m - n) - 4m + 7n$, якщо $m = 1,8$; $n = -0,9$.

46. Доведіть тотожність:

- 1) $-(2x - y) = y - 2x$;
 2) $2(x - 1) - 2x = -2$;
 3) $2(x - 3) + 3(x + 2) = 5x$;
 4) $c - 2 = 5(c + 2) - 4(c + 3)$.

47. Доведіть тотожність:

- 1) $-(m - 3n) = 3n - m$;
 2) $7(2 - p) + 7p = 14$;
 3) $5a = 3(a - 4) + 2(a + 6)$;
 4) $4(m - 3) + 3(m + 3) = 7m - 3$.

48. Довжина однієї зі сторін трикутника a см, а довжина кожної з двох інших сторін на 2 см більша за неї. Запишіть у вигляді виразу периметр трикутника і спростіть цей вираз.

49. Ширина прямокутника дорівнює x см, а довжина на 3 см більша за ширину. Запишіть у вигляді виразу периметр прямокутника і спростіть цей вираз.

50. Розкрийте дужки і спростіть вираз:

- 1) $x - (x - (2x - 3))$;
 2) $5m - ((n - m) + 3n)$;
 3) $4p - (3p - (2p - (p + 1)))$;
 4) $5x - (2x - ((y - x) - 2y))$;
 5) $\frac{2}{3}\left(6a - \frac{3}{8}b\right) - \frac{2}{11}\left(4\frac{1}{8}a - 33b\right)$;
 6) $-\frac{2}{9}(2,7m - 1,5n) + \frac{5}{6}(2n - 0,48m)$.

51. Розкрийте дужки і спростіть вираз:

1) $a - (a - (3a - 1))$;

2) $12m - ((a - m) + 12a)$;

3) $5y - (6y - (7y - (8y - 1)))$;

4) $\frac{4}{7}(2,1a - 2,8b) - \frac{4}{5}\left(1\frac{1}{2}a - 1\frac{1}{4}b\right)$.

52. Доведіть тотожність:

1) $10x - (-(5x + 20)) = 5(3x + 4)$;

2) $-(-3p) - (-(8 - 5p)) = 2(4 - p)$;

3) $3(a - b - c) + 5(a - b) + 3c = 8(a - b)$.

53. Доведіть тотожність:

1) $12a - (-(8a - 16)) = -4(4 - 5a)$;

2) $4(x + y - t) + 5(x - t) - 4y = 9(x - t)$.

54. Доведіть, що значення виразу

$$1,8(m - 2) + 1,4(2 - m) + 0,2(1,7 - 2m)$$

не залежить від значення змінної.

55. Доведіть, що при будь-якому значенні змінної значення виразу

$$a - (a - (5a + 2)) - 5(a - 8)$$

є одним і тим самим числом.

 **56.** Доведіть, що сума трьох послідовних парних чисел ділиться на 6.

57. Доведіть, що якщо n – натуральне число, то значення виразу $-2(2,5n - 7) + 2\frac{1}{3}(3n - 6)$ є парним числом.



Вправи для повторення

 **58.** Сплав масою 1,6 кг містить 15 % міді. Скільки кг міді міститься у цьому сплаві?

 **59.** Скільки відсотків складає число 20 від свого:

1) квадрата; 2) куба?

60. Турист 2 год ішов пішки і 3 год їхав на велосипеді. Усього турист подолав 56 км. Знайдіть, з якою швидкістю турист їхав на велосипеді, якщо вона на 12 км/год більша за швидкість, з якою він ішов пішки.



Цікаві задачі для учнів неледачих



61. У чемпіонаті міста з футболу беруть участь 11 команд. Кожна команда грає з іншими по одному матчу. Доведіть, що в будь-який момент змагань знайдеться команда, яка проведе до цього моменту парну кількість матчів або не провела ще жодного.

§ 3. СТЕПІНЬ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

Нагадаємо, що добуток кількох однакових множників можна записати у вигляді виразу, який називають *степенем*.

Наприклад,

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{6 \text{ множників}} = 4^6.$$

Множник, який повторюється, називають *основою степеня*, а число, яке показує кількість таких множників, – *показником степеня*. У виразі 4^6 число 4 – основа степеня, а число 6 – показник степеня. Оскільки $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4096$, то кажуть, що число 4096 є шостим степенем числа 4.



Степенем числа a з натуральним показником n ($n > 1$) називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a . Степенем числа a з показником 1 називають саме число a .

Степень з основою a і показником n записують так: a^n , читають: « a в степені n » або « n -й степінь числа a ».

За означенням степеня: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множників}}$, $n > 1$ і $a^1 = a$.

Нам уже відомо, що другий степінь числа a називають *квадратом числа a* , а третій степінь числа a називають *кубом числа a* .

Приклад 1. Подати у вигляді степеня: 1) aa ; 2) $bbbb$; 3) $17 \cdot 17 \cdot 17$; 4) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$.

Розв'язання. 1) $aa = a^2$; 2) $bbbb = b^4$; 3) $17 \cdot 17 \cdot 17 = 17^3$; 4) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$.

Обчислення значення степеня є арифметичною дією, яку називають *піднесенням до степеня*.

Приклад 2. Виконати піднесення до степеня:

$$1) 2^4; 2) 0^3; 3) (-6)^2; 4) \left(-\frac{2}{5}\right)^3.$$

Розв'язання. 1) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$;

$$2) 0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0;$$

$$3) (-6)^2 = -6 \cdot (-6) = 36;$$

$$4) \left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{125}.$$

З'ясуємо знак степеня з натуральним показником n .

1) Якщо $a = 0$, то $0^1 = 0$; $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$; Отже, $0^n = 0$.

2) Якщо $a > 0$, то $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n > 0$ як добуток додатних чисел.

Отже, $a^n > 0$ для будь-якого $a > 0$.

3) Якщо $a < 0$, при непарному значенні n маємо: $a^n < 0$ як добуток непарної кількості від'ємних множників; при парному значенні n маємо: $a^n > 0$ як добуток парної кількості від'ємних множників.

Отже, якщо n – натуральне число, то

$0^n = 0$ для будь-якого n ;

$a^n > 0$ для будь-яких $a > 0$ та n ;

$a^n < 0$ для будь-якого $a < 0$ та непарного n ;

$a^n > 0$ для будь-якого $a < 0$ та парного n .

Якщо вираз містить декілька дій, то в першу чергу виконують дію піднесення до степеня, потім дії множення і ділення, а потім – дії додавання і віднімання.

Приклад 3. Знайти значення виразу: 1) $3 - 7 \cdot 2^3$;
2) $(2 + (-3)^4)^2$; 3) $((-1)^5 + (-1)^6)^8$; 4) $4^3 : 2^7$.

Розв'язання.

$$1) 3 - 7 \cdot 2^3 = 3 - 7 \cdot 8 = 3 - 56 = -53;$$

$$2) (2 + (-3)^4)^2 = (2 + 81)^2 = 83^2 = 6889;$$

$$3) ((-1)^5 + (-1)^6)^8 = (-1 + 1)^8 = 0^8 = 0;$$

$$4) 4^3 : 2^7 = 64 : 128 = 0,5.$$

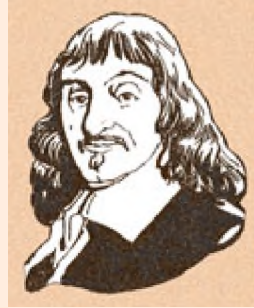
П р и м і т к а: під час обчислень можна також записувати кожен дію окремо.

А ще раніше...

Поняття степеня з натуральним показником сформувалося ще у стародавні часи. Квадрат числа використовували для обчислення площ, куб числа – для обчислення об'ємів. Степені деяких чисел у Стародавньому Єгипті та Вавилоні використовували під час розв'язування окремих задач.

Французький математик Ф. Вієт використовував букви N , Q і C не лише для записів відповідно x , x^2 і x^3 , а й для запису степенів вище третього. Наприклад, четвертий степінь він записував так: QQ .

Сучасний запис степенів було запропоновано видатним французьким математиком, фізиком, філософом Рене Декартом. У своїй праці «Геометрія» (1634) він став записувати степені з натуральним показником так, як ми це робимо зараз: c^3 , c^4 , c^5 і т. д. Проте c^2 він записував як добуток: cc .



Рене Декарт
(1596–1650)



Сформулюйте означення степеня з натуральним показником. ➤ Наведіть приклади степенів та назвіть їх основу та показник. ➤ Як називають другий степінь числа; третій степінь числа? ➤ Яким числом (додатним чи від'ємним) є степінь додатного числа; степінь від'ємного числа з парним показником; степінь від'ємного числа з непарним показником? ➤ У якому порядку виконують арифметичні дії у числових виразах, що містять степені?



62. Прочитайте вирази, назвіть основу і показник степеня:

- 1) $0,4^7$; 2) $(-8)^2$; 3) $(ab)^3$;
 4) $(x - y)^5$; 5) $\left(\frac{1}{2}a^2m\right)^4$; 6) $(a^2 - b^2)^6$.

63. Запишіть добуток у вигляді степеня:

- 1) $0,2 \cdot 0,2$; 2) $-6 \cdot (-6) \cdot (-6)$;
 3) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$; 4) $-\frac{5}{9} \cdot \left(-\frac{5}{9}\right)$;
 5) $tttt$; 6) $(ab) \cdot (ab)$;
 7) $\underbrace{p \cdot p \cdot \dots \cdot p}_{20 \text{ множників}}$; 8) $(x - y)(x - y)(x - y)$.

64. Подайте добуток у вигляді степеня:

1) $0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7$; 2) $-3 \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$; 3) $aaaaa$;

4) $(a + b)(a + b)$; 5) $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7}$; 6) $\frac{m \cdot m \cdot \dots \cdot m}{15 \text{ множників}}$

65. Запишіть степінь у вигляді добутку однакових множників:

1) 3^5 ; 2) a^3 ; 3) $(a - b)^2$; 4) $\left(\frac{x}{x + y}\right)^4$.

66. Подайте степінь у вигляді добутку однакових множників:

1) 5^7 ; 2) b^4 ; 3) $(x + y)^3$; 4) $\left(\frac{m}{m - 5}\right)^2$.

67. (Усно) Обчисліть:

1) 1^3 ; 2) 0^5 ; 3) 5^2 ; 4) $(-7)^2$; 5) $(-2)^3$; 6) $(-1)^8$.

68. Знайдіть значення виразу:

1) 3^2 ; 2) 2^3 ; 3) 0^2 ; 4) 1^7 ; 5) $(-1)^4$; 6) $(-1)^3$.

2 69. Виконайте піднесення до степеня:

1) 3^5 ; 2) $(0,7)^2$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^3$; 4) $\left(1\frac{1}{2}\right)^5$;

5) $(-7)^4$; 6) $(-0,3)^3$; 7) $\left(-1\frac{2}{3}\right)^2$; 8) $(-0,1)^4$.

70. Виконайте піднесення до степеня:

1) 5^4 ; 2) $(1,5)^2$; 3) $\left(\frac{2}{7}\right)^3$; 4) $\left(1\frac{1}{3}\right)^4$;

5) $(-3)^3$; 6) $(-1,7)^2$; 7) $\left(-1\frac{1}{8}\right)^3$; 8) $(-0,2)^4$.

71. Заповніть таблицю у зошиті:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n										
3^n										

72. Розкладіть натуральні числа на прості множники, використавши у запису степінь:

1) 16; 2) 27; 3) 50; 4) 1000; 5) 99; 6) 656.

73. Знайдіть значення виразу:

1) -5^2 ; 2) $-\left(-\frac{2}{3}\right)^3$; 3) $-(-0,2)^4$; 4) $-(-1)^{19}$.

74. Обчисліть:

1) -7^3 ; 2) $-\left(-\frac{1}{2}\right)^2$; 3) $-\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$; 4) $-(-1)^{16}$.

75. Порівняйте з нулем значення виразу (відповідь запишіть у вигляді нерівності):

1) $(-5,7)^2$; 2) $(-12,49)^0$; 3) -53^7 ; 4) $-(-2)^5$.

76. Порівняйте з нулем значення виразу (відповідь запишіть у вигляді нерівності):

1) $(-4,7)^3$; 2) $(-2,31)^4$; 3) $-(-2)^8$; 4) $-(-3)^7$.

77. Знайдіть значення виразу:

1) $0,2 \cdot 25^2$; 2) $\frac{50}{0,1^3}$; 3) $-4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$; 4) $0,2 \cdot (-5)^3$;
 5) $\left(5 \cdot \frac{2}{15}\right)^3$; 6) $\left(6 : \frac{2}{3}\right)^2$; 7) $5^2 + (-5)^4$; 8) $(3,4 - 3,6)^2$.

78. Обчисліть:

1) $0,5 \cdot 40^2$; 2) $\frac{30}{0,3^3}$; 3) $-5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3$; 4) $\left(-\frac{7}{8}\right)^2 \cdot 16$;
 5) $\left(12 : \frac{6}{7}\right)^2$; 6) $\left(-3 \cdot \frac{2}{9}\right)^4$; 7) $6^2 - (-6)^3$; 8) $(1,7 - 1,9)^4$.

79. Чи є правильними рівності:

1) $3^2 + 4^2 = 5^2$; 2) $4^2 + 5^2 = 6^2$;
 3) $2^3 + 3^3 = 5^3$; 4) $2^6 + 6^2 = 10^2$;
 5) $1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$; 6) $(-5)^2 + (-12)^2 = (-13)^2$?

80. Подайте числа:

1) 0; 4; 0,16; $\frac{9}{25}$; 169; $1\frac{24}{25}$ у вигляді квадрата;
 2) 64; -27; 0; 1; $-\frac{1}{8}$; $1\frac{91}{125}$ у вигляді куба.

81. Подайте числа:

1) 5; 125; 625 у вигляді степеня з основою 5;
 2) 100; 10 000; 10 у вигляді степеня з основою 10.

82. Подайте:

1) 8; 81; -125 ; -64 ; 0,16; 0,001; $3\frac{3}{8}$; $1\frac{11}{25}$

у вигляді квадрата або куба числа;

2) 2; 4; 8; 256 у вигляді степеня з основою 2;

3) 81; -27 ; -3 у вигляді степеня з основою -3 .

83. Обчисліть:

1) суму квадратів чисел 0,6 і $-0,7$;

2) квадрат суми чисел 5,7 і $-6,3$;

3) різницю кубів чисел 2,3 і 2,2;

4) куб суми чисел 8,2 і 1,8.

84. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{1}{27}x^3$, якщо $x = 0$; -1 ; 1; -3 ; 3;

2) $a + a^2 + a^3$, якщо $a = 1$; -1 ; -2 ;

3) $(15x)^4$, якщо $x = \frac{1}{3}$; $-\frac{1}{5}$;

4) $a^2 - b^2$, якщо $a = -6$; $b = -8$.

85. Знайдіть значення виразу:

1) $0,01a^4$, якщо $a = 2$; -5 ; 10;

2) $5c^2 - 4$, якщо $c = 0,2$; $-0,1$; 0;

3) $(m + n)^3$, якщо $m = -4$, $n = -1$;

4) $4x^2 - x^3$, якщо $x = 1$; -2 ; -3 .

86. Не виконуючи обчислень, порівняйте:

1) -2^4 і $(-2)^4$; 2) $(-7)^3$ і $(-6)^2$;

3) $(-12)^8$ і 12^8 ; 4) -5^3 і $(-5)^3$.

87. Порівняйте значення виразів:

1) $-x^2$ і $(-x)^2$, якщо $x = 5$; -3 ; 0;

2) $-x^3$ і $(-x)^3$, якщо $x = -2$; 0; 3.

88. Замініть зірочку знаком $>$, $<$, \geq , \leq так, щоб одержана нерівність була правильною при будь-яких значеннях змінних:

1) $a^2 * 0$; 2) $-b^2 * 0$; 3) $m^2 + 3 * 0$;

4) $-p^2 - 1 * 0$; 5) $(a - 3)^2 * 0$; 6) $a^2 + b^2 * 0$;

7) $x^2 + y^2 + 5 * 0$; 8) $(m - n)^2 + 1 * 0$; 9) $-(p + 9)^2 * 0$.

89. Якого найменшого значення може набувати вираз:

1) $a^2 + 1$; 2) $3 + (m - 3)^2$; 3) $(a + 8)^4 - 5$?

90. Якого найбільшого значення може набувати вираз:

1) $-x^2 + 2$; 2) $-(m - 2)^4 + 1$; 3) $5 - (a + 9)^2$?



Вправи для повторення

2 91. Запишіть дріб у вигляді відсотків:

1) 0,8; 2) 1,13; 3) 8,3; 4) 0,007.

3 92. Обчисліть:

1) $\left(9\frac{8}{15} - 7\frac{7}{15}\right) \cdot 4,5 - 2\frac{1}{6} : 0,52$;

2) $\frac{8}{13} \cdot (-0,1625) - \left(\frac{9}{22} + 1\frac{4}{11}\right) \cdot 1,32$.

4 93. При деяких натуральних значеннях x і y значення виразу $x + 3y$ ділиться на 5. Чи ділиться на 5 значення виразу $7x + 21y$ при тих самих значеннях x і y ?



Цікаві задачі для учнів неледачих



94. Доведіть ознаку подільності на 4: натуральне число ділиться на 4 тоді і тільки тоді, коли число, записане його двома останніми цифрами, ділиться на 4.

§ 4. ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

Розглянемо властивості степеня з натуральним показником.

Вираз $a^3 a^2$ є добутком двох степенів з однаковими основами. Застосувавши означення степеня, цей добуток можна переписати так:

$$a^3 a^2 = (aaa) \cdot (aa) = aaaaa = a^5.$$

Отже, $a^3 a^2 = a^5$, тобто $a^5 = a^{2+3}$. У той самий спосіб неважко перевірити, що $x^5 x^4 x^2 = x^{5+4+2} = x^{11}$. Тому добуток степенів з однаковими основами дорівнює степеню з тією самою основою і показником, який дорівнює сумі показників множників. Ця властивість справджується для кожного добутку степенів з однаковими основами.



Для будь-якого числа a й довільних натуральних чисел m і n виконується рівність $a^m a^n = a^{m+n}$.

Д о в е д е н н я. $a^m a^n = \underbrace{aa \dots a}_m \cdot \underbrace{aa \dots a}_n = \underbrace{aaa \dots a}_{(m+n)} = a^{m+n}$.
множників множників множників

Рівність $a^m a^n = a^{m+n}$ називають **основною властивістю степеня**. Вона поширюється на добуток трьох і більше степенів. Наприклад:

$$a^m a^n a^k = a^{m+n+k}.$$

З основної властивості степеня випливає **правило множення степенів з однаковими основами**:



При множенні степенів з однаковими основами основу залишають тією самою, а показники степенів додають.

Наприклад, $3^7 \cdot 3^5 = 3^{7+5} = 3^{12}$; $7^3 \cdot 7 = 7^3 \cdot 7^1 = 7^{3+1} = 7^4$,
 $a^7 a^2 a^3 = a^{7+2+3} = a^{12}$.

Оскільки $a^3 a^2 = a^5$, то за означенням частки $a^5 : a^3 = a^2$, тобто $a^2 = a^{5-3}$. У той самий спосіб неважко пересвідчитися, що $x^{15} : x^4 = x^{11}$. Тому **частка степенів з однаковими основами дорівнює степеню з тією самою основою і показником, який дорівнює різниці показників діленого і дільника**. Ця властивість справджується для кожної частки степенів з однаковими, відмінними від нуля, основами за умови, що показник степеня діленого більший за показник степеня дільника.



Для будь-якого числа $a \neq 0$ і довільних натуральних чисел m і n , таких, що $m > n$, виконується рівність:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Д о в е д е н н я. Оскільки $a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m$, тобто $a^{m-n} a^n = a^m$, то за означенням частки маємо $a^m : a^n = a^{m-n}$.

З доведеної властивості випливає **правило ділення степенів**.



При діленні степенів з однаковими основами основу залишають тією самою, а від показника степеня діленого віднімають показник степеня дільника.

Наприклад, $3^{18} : 3^5 = 3^{18-5} = 3^{13}$; $m^9 : m = m^9 : m^1 = m^{9-1} = m^8$.

Вираз $(a^7)^3$ – степінь, основа якого є степенем. Цей вираз можна подати у вигляді степеня з основою a :

$$(a^7)^3 = a^7 \cdot a^7 \cdot a^7 = a^{7+7+7} = a^{7 \cdot 3} = a^{21}.$$

У той самий спосіб можна пересвідчитися, що $((x^7)^3)^2 = x^{42}$. Тобто *ступінь при піднесенні до степеня дорівнює степеню з тією самою основою і показником, що дорівнює добутку показників даних степенів.*



Для будь-якого числа a і довільних натуральних чисел m і n виконується рівність:

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Д о в е д е н н я. $(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \dots a^m}_n = a^{\overbrace{m+m+\dots+m}^n} = a^{mn}$.

З доведеної властивості випливає *правило піднесення степеня до степеня.*



При піднесенні степеня до степеня основу залишають тією самою, а показники степенів перемножують.

Наприклад, $(4^5)^4 = 4^{5 \cdot 4} = 4^{20}$; $(a^8)^{11} = a^{8 \cdot 11} = a^{88}$; $((p^3)^2)^5 = (p^{3 \cdot 2})^5 = (p^6)^5 = p^{6 \cdot 5} = p^{30}$.

Вираз $(ab)^3$ є степенем добутку множників a і b . Цей вираз можна подати у вигляді добутку степенів a і b :

$$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = (aaa) \cdot (bbb) = a^3 b^3.$$

Отже, $(ab)^3 = a^3 b^3$.

Таку саму властивість при піднесенні до степеня має будь-який добуток.



Для будь-яких чисел a і b й довільного натурального числа n виконується рівність $(ab)^n = a^n b^n$.

Д о в е д е н н я.

$$(ab)^n = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \dots (ab)}_n = \underbrace{(aa \dots a)}_n \cdot \underbrace{(bb \dots b)}_n = a^n b^n.$$

Ця властивість степеня поширюється на степінь добутку трьох і більше множників. Наприклад,

$$(tpk)^n = t^n p^n k^n; (abcd)^n = a^n b^n c^n d^n \text{ тощо.}$$

Маємо *правило піднесення добутку до степеня*.

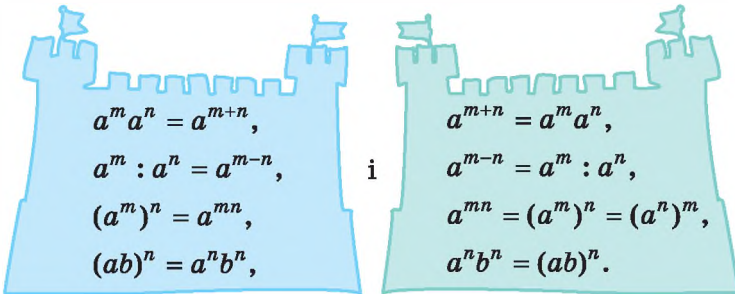


При піднесенні добутку до степеня треба піднести до цього степеня кожний із множників і результати перемножити.

Наприклад,

$$(7ab)^2 = 7^2 a^2 b^2 = 49a^2 b^2; (-2xy)^3 = (-2)^3 x^3 y^3 = -8x^3 y^3.$$

Ліву і праву частини розглянутих тотожностей можна міняти місцями:



Розглянемо, як спростити вирази, що містять степені, та обчислити їх значення.

Приклад 1. Спростити $(a^2)^3 \cdot (a^4 a)^6$.

Розв'язання. $(a^2)^3 \cdot (a^4 a)^6 = a^6 \cdot (a^5)^6 = a^6 a^{30} = a^{36}$.

Приклад 2. Обчислити: 1) $0,7^{13} : 0,7^{11}$; 2) $3^5 \cdot 9^2 : 27^2$;
3) $2^7 \cdot 0,5^8$.

Розв'язання. 1) $0,7^{13} : 0,7^{11} = 0,7^2 = 0,49$.

2) Подамо 9^2 і 27^2 у вигляді степеня з основою 3, тобто $9^2 = (3^2)^2$, $27^2 = (3^3)^2$. Отже, маємо:

$$3^5 \cdot 9^2 : 27^2 = 3^5 \cdot (3^2)^2 : (3^3)^2 = 3^5 \cdot 3^4 : 3^6 = 3^9 : 3^6 = 3^3 = 27.$$

3) Оскільки $0,5^8 = 0,5^7 \cdot 0,5$, маємо:

$$2^7 \cdot 0,5^8 = 2^7 \cdot 0,5^7 \cdot 0,5 = (2 \cdot 0,5)^7 \cdot 0,5 = 1^7 \cdot 0,5 = 1 \cdot 0,5 = 0,5.$$



Сформулюйте основну властивість степеня. Сформулюйте правила множення степенів, ділення степенів, піднесення степеня до степеня та піднесення добутку до степеня.

1 95. (Усно) Які з рівностей є правильними:

- 1) $a^6 \cdot a^2 = a^{12}$; 2) $a^7 a^3 = a^{10}$;
 3) $b^{10} : b^5 = b^2$; 4) $b^8 : b^2 = b^6$;
 5) $(a^7)^3 = a^{21}$; 6) $(a^4)^5 = a^9$?

96. (Усно) Подайте добуток у вигляді степеня:

- 1) $m^7 m^4$; 2) $a^9 a$; 3) $10^7 10^5$; 4) $9 \cdot 9^5$.

97. Запишіть добуток у вигляді степеня:

- 1) $a^4 a^9$; 2) $c^3 c^{10}$; 3) $y^5 y$; 4) $2^8 \cdot 2^{23}$.

98. Подайте добуток у вигляді степеня:

- 1) $m^3 m^2$; 2) $p^9 p^4$; 3) $3 \cdot 3^{17}$; 4) $a^5 a^2$.

99. (Усно) Представте частку у вигляді степеня:

- 1) $a^9 : a^2$; 2) $7^{15} : 7^{12}$; 3) $b^9 : b$; 4) $19^8 : 19^7$.

100. Запишіть частку у вигляді степеня:

- 1) $a^7 : a^4$; 2) $x^{10} : x^5$; 3) $c^7 : c$; 4) $p^9 : p^8$.

101. Подайте частку у вигляді степеня:

- 1) $p^9 : p^5$; 2) $x^{12} : x^3$; 3) $10^8 : 10$; 4) $t^{12} : t^{11}$.

102. (Усно) Подайте у вигляді степеня:

- 1) $(c^7)^3$; 2) $(2^{10})^7$; 3) $(p^3)^5$; 4) $(7^8)^{11}$.

103. Подайте у вигляді степеня:

- 1) $(x^2)^4$; 2) $(a^7)^2$; 3) $(8^9)^3$; 4) $(10^3)^5$.

104. Подайте у вигляді степеня:

- 1) $(m^3)^4$; 2) $(p^9)^2$; 3) $(7^3)^{10}$; 4) $(19^2)^7$.

2 105. Запишіть вираз x^{12} у вигляді добутку двох степенів, один з яких дорівнює:

- 1) x^3 ; 2) x^6 ; 3) x^9 ; 4) x^{11} .

106. Запишіть степінь у вигляді добутку двох степенів з однаковими основами:

- 1) m^7 ; 2) c^{12} ; 3) 5^{17} ; 4) p^8 .

107. Подайте добуток у вигляді степеня:

- 1) $(-7)^3 \cdot (-7)^4 \cdot (-7)$; 2) $aa^5 a^{11}$; 3) $bbbb^9$;
 4) $(x - y)^3 (x - y)^{12}$; 5) $14^7 \cdot 14^5 \cdot 14^9$; 6) $\left(3\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{10}{9}\right)^4$.

108. Запишіть у вигляді степеня вираз:

- 1) $12^3 \cdot 12^9 \cdot 12$; 2) ppp^7p ;
 3) $(a + b)^3(a + b)^5$; 4) $\left(1\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^6$.

109. Обчисліть значення виразу, використовуючи властивості степенів і таблицю степенів з основами 2 і 3 (див. вправу 71 на с. 20).

- 1) $2^3 \cdot 2^4$; 2) $3^6 : 3$; 3) $3 \cdot 3^3 \cdot 3^4$; 4) $2^9 : 2^3$.

110. Виконайте піднесення до степеня:

- 1) $(xy)^9$; 2) $(abc)^7$; 3) $(0,1a)^3$; 4) $(2xy)^4$;
 5) $(-2a)^5$; 6) $(-0,3a)^2$; 7) $(-4ab)^3$; 8) $\left(-\frac{2}{3}axz\right)^4$.

111. Запишіть степінь у вигляді добутку степенів або числа і степенів:

- 1) $(ab)^5$; 2) $(2p)^4$; 3) $(-5ax)^3$;
 4) $\left(-\frac{3}{4}ac\right)^4$; 5) $(-0,1m)^3$; 6) $(-0,07mx)^2$.

112. Знайдіть значення виразу:

- 1) $6^{18} : 6^{16}$; 2) $0,3^8 : 0,3^5$; 3) $\frac{4,92^{10}}{4,92^9}$;
 4) $\frac{10^8}{10^5}$; 5) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{10} : \left(-\frac{1}{4}\right)^7$; 6) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{12} : \left(1\frac{1}{2}\right)^8$.

113. Обчисліть:

- 1) $9^{10} : 9^8$; 2) $\frac{0,4^{17}}{0,4^{14}}$; 3) $\left(-1\frac{1}{9}\right)^{15} : \left(-1\frac{1}{9}\right)^{13}$; 4) $\frac{\left(1\frac{1}{3}\right)^{12}}{\left(1\frac{1}{3}\right)^8}$.

114. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\frac{8^{12} \cdot 8^3}{8^{13}}$; 2) $\frac{4^8}{4 \cdot 4^6}$; 3) $\frac{(-3)^5 \cdot (-3)^7}{(-3)^{10}}$; 4) $\frac{(0,2)^7 \cdot (0,2)^5}{(0,2)^3 \cdot (0,2)^6}$.

115. Обчисліть:

- 1) $5^4 \cdot 5^{12} : 5^{13}$; 2) $\frac{37^{12}}{37^5 \cdot 37^6}$; 3) $\frac{6^{17} \cdot 6^8}{6^{22}}$; 4) $\frac{(0,7)^3 \cdot (0,7)^{16}}{(0,7)^{12} \cdot (0,7)^5}$.

116. Спростіть вираз, використовуючи правила множення і ділення степенів:

1) $a^7 \cdot a^9 : a^3$; 2) $b^9 : b^5 : b^3$; 3) $m^{12} : m^7 \cdot m$; 4) $p^{10} : p^9 \cdot p^3$.

117. Запишіть вираз у вигляді степеня:

1) $(a^3)^4 \cdot a^8$; 2) $((a^7)^2)^3$; 3) $(b^3)^2 : b^4$; 4) $(a^4)^5 \cdot (a^7)^2$.

118. Подайте вираз у вигляді степеня:

1) $(b^3)^4 \cdot b^7$; 2) $((x^4)^5)^6$; 3) $(c^3)^8 : c^{10}$; 4) $(m^3)^5 \cdot (m^2)^7$.

119. Запишіть у вигляді степеня з основою mn :

1) $m^9 n^9$; 2) $m^7 n^7$; 3) $m^2 n^2$; 4) $m^{2015} n^{2015}$.

120. Подайте у вигляді степеня з основою ab :

1) $a^5 b^5$; 2) $a^3 b^3$; 3) $a^{18} b^{18}$; 4) $a^{2016} b^{2016}$.

121. Запишіть добуток у вигляді степеня:

1) $a^4 b^4$; 2) $49a^2 x^2$; 3) $0,001a^3 b^3$; 4) $-8p^3$;
 5) $-32a^5 b^5$; 6) $-a^7 b^7 c^7$; 7) $\frac{1}{27} x^3 y^3$; 8) $-\frac{64}{125} p^3 q^3$.

122. Знайдіть таке значення x , при якому рівність є правильною:

1) $3^5 \cdot 3^2 = 3^{5+x}$; 2) $2^7 \cdot 2^8 = 2^{1+x}$;
 3) $4^x \cdot 4^5 = 4^8$; 4) $9^8 : 9^x = 9^5$.

123. Замініть зірочку степенем з основою a так, щоб рівність стала тотожністю:

1) $a^2 \cdot * = a^7$; 2) $a^8 \cdot * = a^9$; 3) $a^4 \cdot * \cdot a^7 = a^{19}$.

124. Замініть зірочку степенем з основою b ($b \neq 0$) так, щоб рівність стала тотожністю:

1) $b^7 : * = b^3$; 2) $* : b^5 = b^9$;
 3) $b^9 : * \cdot b^3 = b^7$; 4) $* : b^9 \cdot b^4 = b^{10}$.

125. Знайдіть таке значення x , при якому є правильною рівність:

1) $1,8^9 : 1,8 = 1,8^{9-x}$; 2) $19^x : 19^7 = 19^9$; 3) $4^{12} : 4^x = 4^7$.

126. Подайте вираз:

1) 8^7 ; $(16^3)^5$ у вигляді степеня з основою 2;
 2) 25^3 ; 625^7 у вигляді степеня з основою 5.

127. Подайте вираз:

- 1) 9^7 ; $(81^3)^5$ у вигляді степеня з основою 3;
 2) 100^4 ; 1000^9 у вигляді степеня з основою 10.

128. Обчисліть, використовуючи властивості степенів:

- 1) $256 : 2^5$; 2) $243 : 3^4 \cdot 9$; 3) $\frac{125^3 \cdot 5^2}{5^3 \cdot 25}$; 4) $\frac{100 \cdot 10^7}{10^5 \cdot 1000}$.

129. Подайте у вигляді степеня (n – натуральне число):

- 1) $x^5 x^n$; 2) $x^8 : x^n$, $n < 8$;
 3) $x^n : (x^8 \cdot x^9)$, $n > 17$; 4) $x^{2n} : x^n \cdot x^{3n+1}$;
 5) $((x^n)^3)^5$; 6) $(-x^4)^{2n}$.

130. Знайдіть значення виразу:


- 1) $5^3 \cdot 2^3$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 20^2$; 3) $0,2^{13} \cdot 5^{13}$;
 4) $(1,5)^7 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^7$; 5) $0,5^7 \cdot 2^8$; 6) $\left(1\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8$.

131. Обчисліть:

- 1) $0,25^7 \cdot 4^7$; 2) $\left(\frac{1}{7}\right)^5 \cdot 14^5$; 3) $\left(1\frac{1}{8}\right)^9 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{10}$; 4) $1,5^7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9$.

132. Знайдіть значення виразу, використовуючи властивості степенів:

- 1) $\frac{9^5}{3^7}$; 2) $\frac{8^7}{4^8}$; 3) $\frac{27^3 \cdot 9^4}{81^3}$; 4) $\frac{25^4 \cdot 125^{10}}{5^{36}}$.

 133. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\frac{5^7 \cdot 7^8}{35^7}$; 2) $\frac{2^{17} \cdot 3^6}{24^5}$; 3) $\frac{36^7}{2^{12} \cdot 3^{10}}$; 4) $\frac{27^3}{18^4}$.

134. Обчисліть:

- 1) $\frac{7^9 \cdot 49^8}{343^8}$; 2) $\frac{6^{12}}{2^{10} \cdot 3^{11}}$; 3) $\frac{2^8 \cdot 5^7}{100^3}$; 4) $\frac{36^5}{24^6}$.

135. Порівняйте вирази:

- 1) 6^{10} і 36^5 ; 2) 10^{20} і 20^{10} ; 3) 5^{14} і 26^7 ; 4) 2^{3000} і 3^{2000} .



Вправи для повторення

136. Спростіть вираз:

- 1) $5,2 \cdot 6a$; 2) $-4,5b \cdot 8$; 3) $-5x \cdot (-12)$;
 4) $\frac{2}{3}m \cdot \frac{3}{4}k$; 5) $1\frac{1}{3}x \cdot \left(-1\frac{2}{7}y\right)$; 6) $-1,8a \cdot (-b) \cdot 5c$.

137. Вартість деякого товару становила 80 грн. Спочатку її знизили на 15 %, а потім підвищили на 10 %. Знайдіть:

- 1) вартість товару після зниження;
- 2) вартість товару після підвищення;
- 3) як саме і на скільки гривень змінилася вартість товару;
- 4) як саме і на скільки відсотків змінилася вартість товару.

138. Нехай $a + b = 5$ і $c = -2$. Знайдіть значення виразу:

- 1) $a + b - c$; 2) $a - 2c + b$; 3) $\frac{a+b+c}{c}$; 4) $c(a + b - 4c)$.

139. Спростіть вираз $1,7\left(1\frac{1}{5}a - 4b\right) - 1,5(1,2b - a)$ і знайдіть його значення, якщо $a = 5$; $b = -10$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



140. Дано п'ять різних додатних чисел, які можна розбити на дві групи так, щоб суми чисел у кожній з груп були однаковими. Скількома способами це можна зробити?

§ 5. ОДНОЧЛЕН. СТАНДАРТНИЙ ВИГЛЯД ОДНОЧЛЕНА

Розглянемо вирази 7 ; $-\frac{8}{11}$; a^9 ; $-b$; $7b^2m$; $4a^2 \cdot (-5)ac$.

Це – числа, змінні, їх степені і добутки. Такі вирази називають *одночленами*.



Цілі вирази – числа, змінні, їх степені і добутки – називають *одночленами*.

Вирази $a + b^2$; $c^3 - 5m$; $0,9a^2 : m$ не є одночленами, оскільки містять дії додавання, віднімання, ділення.

Спростимо одночлен $4a^2 \cdot (-5)ac$, використавши переставку і сполучну властивості множення:

$$4a^2 \cdot (-5)ac = 4 \cdot (-5)a^2ac = -20a^3c.$$

Звівши одночлен $4a^2 \cdot (-5)ac$ до вигляду $-20a^3c$, кажуть, що звели його до *стандартного вигляду*.



Якщо одночлен є добутком, що має один числовий множник, який записаний на першому місці, а інші множники є степенями різних змінних, то такий одночлен називають одночленом стандартного вигляду.

До одночленів стандартного вигляду належать і такі одночлени, як 5 ; -9 ; b ; $-b^3$.

Очевидно, що до стандартного вигляду можна звести будь-який одночлен.

Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді, називають *коефіцієнтом* цього одночлена.

Наприклад, коефіцієнтом одночлена $-20a^3c$ є число -20 , а коефіцієнтом одночлена $\frac{7}{11}b^9$ – число $\frac{7}{11}$.

Коефіцієнтом одночлена c^2d є 1 , оскільки $c^2d = 1 \cdot c^2d$, а коефіцієнтом одночлена $-p^7$ є -1 , оскільки $-p^7 = -1 \cdot p^7$. Тобто замість коефіцієнта -1 записують лише знак мінус, а коефіцієнт, що дорівнює 1 , взагалі не записують.

Для кожного одночлена можна вказати його *ступінь*.



Степенем одночлена називають суму показників степенів усіх змінних, які він містить. Якщо одночлен не містить змінних (тобто є числом), то вважають, що його ступінь дорівнює нулю.

Наприклад, одночлен $4a^2b^7c^3$ – одночлен дванадцятого степеня, оскільки $2 + 7 + 3 = 12$; m^7n – одночлен восьмого степеня, оскільки $7 + 1 = 8$; $-5a^4$ – одночлен четвертого степеня; $5m$ – одночлен першого степеня. Одночлен -7 не містить змінних, тому є одночленом нульового степеня.



Який вираз називають одночленом? ➤ Який вигляд одночлена називають стандартним виглядом? ➤ Наведіть приклад одночлена стандартного вигляду та назвіть його коефіцієнт. ➤ Що називають степенем одночлена?

141. (Усно) Які з виразів є одночленами:

- 1) $3,7x^2y$; 2) $-0,13mрk$; 3) $x^2 - 5$;
 4) $d \cdot (-0,7)$; 5) x^2xt ; 6) $\left(-\frac{2}{7}p + 9\right)m$;
 7) $a - b$; 8) $t^{11} : t^3$; 9) $4(x + y)^7$;
 10) $-q$; 11) $-0,7$; 12) $0?$

142. (Усно) Назвіть одночлени стандартного вигляду та їх коефіцієнти:

- 1) $4xy$; 2) $-5aba$; 3) $7m^2nm^3n$; 4) $-a^7b^9$;
 5) $0,3p \cdot 3m$; 6) $-2abc$; 7) a^9b^7 ; 8) 14 .

143. Які з виразів є одночленами? Серед одночленів укажіть ті, які записано у стандартному вигляді:

- 1) $5m \cdot 2p$; 2) $-8a^2b$; 3) $x^2 + x + 1$;
 4) $m \cdot mk \cdot 5$; 5) $\left(\frac{2}{7}p - 1\right) \cdot 8$; 6) $-a^2$;
 7) $17 + a$; 8) -129 ; 9) c^{18} ;
 10) $2(a - b)^2$; 11) $1 : c$; 12) $-abcd$.

144. Зведіть одночлен до стандартного вигляду, укажіть його коефіцієнт і степінь:

- 1) $7a^2a^3a$; 2) $8 \cdot a \cdot 0,1m \cdot 2p$;
 3) $5t \cdot (-4at)$; 4) $-1\frac{2}{3}m^4 \cdot 12m^2p$;
 5) $-5a^2 \cdot 0,2am^7 \cdot (-10m)$; 6) $t^3 \cdot (-p)^7 \cdot t$.

145. Зведіть одночлен до стандартного вигляду, вкажіть його коефіцієнт і степінь:

- 1) $-7m^2b \cdot 8mb^2$; 2) $5m \cdot 2a \cdot (-3b)$;
 3) $-7a \cdot (-5a^2)$; 4) $-2,2a^2 \cdot \frac{25}{44}a^3p$;
 5) $-a \cdot (-0,2a^2p) \cdot (-0,3p^4)$; 6) $c^5 \cdot (-a) \cdot (-c^4a) \cdot a^7$.

146. Знайдіть значення одночлена:

- 1) $3,5a^2$, якщо $a = 4$; $0,1$;
 2) $-4m^3$, якщо $m = 0$; -1 ;
 3) $10xy$, якщо $x = 1,4$, $y = -5$;
 4) $-0,01a^2c$, якщо $a = 5$, $c = -2$.

147. Обчисліть значення одночлена:

- 1) $1,6a^2$, якщо $a = -5$; 0; -1 ;
- 2) $5b^2c$, якщо $b = 0,2$ і $c = 0,1$; $b = -0,4$ і $c = 2$.

148. Заповніть таблицю в зошиті:

a	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$4a^2$											
$-2a^2$											

3 149. Знайдіть:

- 1) значення x , при якому значення одночлена $-0,8x$ дорівнює 0; 1; -1 ; 12;
- 2) значення a і b , при яких значення одночлена $15ab$ дорівнює 10; -60 ; 0.

150. Знайдіть:

- 1) значення a , при якому значення одночлена $-0,6a$ дорівнює 0; -3 ; 12; -300 ;
- 2) пару значень x і y , при яких значення одночлена $12xy$ дорівнює 15; -120 ; 0.

151. (Усно) Чи є правильним твердження? У разі позитивної відповіді обґрунтуйте її; якщо відповідь негативна – наведіть приклад, що спростовує твердження.

- 1) Одночлен $7m^2$ при будь-яких значеннях m набуває додатних значень;
- 2) одночлен $\frac{1}{16}p^4$ при будь-яких значеннях p набуває невід'ємних значень;
- 3) одночлен $-12a^2$ при будь-яких значеннях a набуває від'ємних значень;
- 4) одночлен $8b^3$ при будь-яких значеннях b набуває додатних значень.

152. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, висота якого дорівнює x см, ширина у 3 рази більша за висоту, а довжина у 2 рази більша за ширину.

153. Ширина прямокутника дорівнює b дм, а довжина втричі більша за ширину. Знайдіть площу прямокутника.



Вправи для повторення

154. Розкрийте дужки і спростіть вираз:

1) $3(12x - 5) + 4x$;

2) $7(a - 1) - 7a + 13$;

3) $4,2(x - y) + 3,5(x + y)$;

4) $12 - 5(1 - x) - 5x$.

155. Серед виразів $3(y - x)$, $-3(x - y)$, $-3x - 3y$, $-3x + 3y$ знайдіть ті, що тотожно рівні виразу $3y - 3x$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



156. *Задача Стенфордського університету.* Щоб пронумерувати всі сторінки книжки, друкар використав 1890 цифр. Скільки сторінок у цій книжці?

§ 6. МНОЖЕННЯ ОДНОЧЛЕНІВ. ПІДНЕСЕННЯ ОДНОЧЛЕНІВ ДО СТЕПЕНЯ

Під час *множення одночленів* використовують властивості дії множення та правило множення степенів з однаковими основами.

Приклад 1. Перемножити одночлени $-3x^3y^7$ і $5x^2y$.

$$\text{Р о з в' я з а н н я. } -3x^3y^7 \cdot 5x^2y = (-3 \cdot 5)(x^3x^2)(y^7y) = -15x^5y^8.$$

Добутком будь-яких одночленів є одночлен, який зазвичай подають у стандартному вигляді. Аналогічно до прикладу 1 можна множити три і більше одночленів.

Під час *піднесення одночлена до степеня* використовують властивості степенів.

Приклад 2. Піднести одночлен: 1) $-2x^2y$ до куба;
2) $-p^7m^2$ до четвертого степеня.

$$\text{Р о з в' я з а н н я. } 1) (-2x^2y)^3 = (-2)^3(x^2)^3y^3 = -8x^6y^3;$$

$$2) (-p^7m^2)^4 = (-1)^4(p^7)^4(m^2)^4 = p^{28}m^8.$$

Результатом піднесення одночлена до степеня є одночлен, який зазвичай записують у стандартному вигляді.

Розглянемо ще декілька прикладів.

Приклад 3. Спростити вираз $\left(-\frac{2}{3}xy^5\right)^3 \cdot 18x^5y$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } & \left(-\frac{2}{3}xy^5\right)^3 \cdot 18x^5y = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot x^3(y^5)^3 \cdot 18x^5y = \\ & = \left(-\frac{8}{27} \cdot 18\right) \cdot (x^3x^5) \cdot (y^{15}y) = -5\frac{1}{3}x^8y^{16}. \end{aligned}$$

Приклад 4. Подати одночлен $16m^8p^{10}$ у вигляді квадрата одночлена стандартного вигляду.

Розв'язання. Оскільки $16 = 4^2$, $m^8 = (m^4)^2$, $p^{10} = (p^5)^2$, то $16m^8p^{10} = 4^2 \cdot (m^4)^2 \cdot (p^5)^2 = (4m^4p^5)^2$.



Які правила та властивості використовують при множенні одночленів; піднесенні одночлена до степеня?

157. (Усно) Перемножте одночлени:

1) $2a$ і $4m$; 2) $-b$ і $3c$; 3) $7a^2$ і $-5b$; 4) $-2x^2$ і $-y^2$.

158. Виконайте множення одночленів:

1) $1,5x \cdot 12y$;

2) $-p^2 \cdot 9p^7$;

3) $8a \cdot \left(-\frac{3}{4}a^7\right)$;

4) $-\frac{2}{3}a \cdot (-12ab^3)$;

5) $0,7mn^2 \cdot (-m^7n^3)$;

6) $-0,2m^7p^9 \cdot (-4m^4p)$;

7) $-0,6ab^2c^3 \cdot 0,5a^3bc^7$;

8) $\frac{3}{4}mn^2 \cdot \left(-\frac{4}{5}m\right) \cdot \frac{5}{3}n^7$.

159. Знайдіть добуток одночленів:

1) $20a \cdot (-0,5b)$;

2) $-a^2 \cdot (-3a^7b)$;

3) $5b \cdot \left(-\frac{1}{5}b^3\right) \cdot 2c$;

4) $\frac{3}{5}xy^3 \cdot \frac{10}{21}x^2y^5$;

5) $\frac{3}{5}ab^2 \cdot \left(-\frac{5}{6}a^3\right) \cdot 2b^7$;

6) $-\frac{1}{2}m^2p \cdot \frac{2}{3}m^3p \cdot \frac{1}{5}mp^3$.

160. Перемножте одночлени:

1) $-13x^2y$ і $12xy^3$;

2) $0,8mn^8$ і $50m^2n$;

3) $-\frac{1}{5}ab^2$; $15a^2p$ і $-\frac{1}{3}pb^4$;

4) $20xy^2$; $-0,1x^2y$ і $0,2x^2y^2$.

161. Знайдіть два різних записи одночлена $-12m^2n^5$ у вигляді добутку двох одночленів стандартного вигляду.

162. Знайдіть два різних записи одночлена $18m^2n^7$ у вигляді добутку:

- 1) двох одночленів стандартного вигляду;
- 2) трьох одночленів стандартного вигляду.

163. (Усно) Піднесіть одночлен до степеня:

- 1) $(-mn^2)^2$;
- 2) $(2a^2b)^3$;
- 3) $(-m^3b^2)^4$;
- 4) $(-a^3b^5)^7$.

164. Піднесіть до квадрата одночлен:

- 1) $3a$;
- 2) $2b^2$;
- 3) $-4a^3b^7$;
- 4) $-0,1p^9a^4$;
- 5) $-\frac{1}{5}m^5$;
- 6) $\frac{6}{7}p^6m^8$.

165. Піднесіть до куба одночлен:

- 1) $2p$;
- 2) $7m^5$;
- 3) $-3a^3b^2$;
- 4) $-0,1a^7b^2$;
- 5) $\frac{1}{4}p^6$;
- 6) $-\frac{2}{5}mn^4$.

166. Виконайте піднесення до степеня:

- 1) $(-xy^3)^3$;
- 2) $(-7a^2bc^3)^2$;
- 3) $(p^3m^4q^5)^4$;
- 4) $(-2a^2b)^4$;
- 5) $\left(\frac{1}{6}p^2c^5\right)^3$;
- 6) $(-c^5m^{10}a^3)^5$.

167. Подайте у вигляді одночлена стандартного вигляду:

- 1) $(-5x)^2$;
- 2) $\left(\frac{1}{2}p^4\right)^3$;
- 3) $(-0,2a^2b^3)^4$;
- 4) $(-ab^7c^5)^6$;
- 5) $(-10a^{11}b)^5$;
- 6) $(a^8c^{10})^7$.

168. Подайте вираз:

- 1) $\frac{1}{9}x^6$; $0,25m^6p^{10}$; $121a^{18}b^2c^4$ у вигляді квадрата одночлена;
- 2) $0,001a^9$; $-125p^3b^{12}$; $\frac{8}{27}c^6m^{15}a^{21}$ у вигляді куба одночлена.

169. Який одночлен стандартного вигляду треба записати в дужках замість пропусків, щоб одержати правильну рівність:

- 1) $(\dots)^2 = 4m^6$;
- 2) $(\dots)^2 = 0,36p^8q^{10}$;
- 3) $(\dots)^3 = -8c^9$;
- 4) $(\dots)^3 = 1000c^6m^{12}$;
- 5) $(\dots)^4 = 16a^4b^8$;
- 6) $(\dots)^5 = c^{15}p^{45}$?

170. Який одночлен стандартного вигляду потрібно записати замість зірочки, щоб одержати правильну рівність:

- 1) $* \cdot 4m^2n = 12m^7n^{12}$; 2) $5a^2b \cdot * = a^3b^7$;
 3) $* \cdot (-2m^2p) = 24m^3p^2$; 4) $* \cdot (-9a^2b) = a^3b$;
 5) $5m^2a^3 \cdot * = -5m^2a^3$; 6) $4m^2n \cdot * = -\frac{1}{16}m^2n^8$?

171. Який одночлен стандартного вигляду треба записати замість зірочки, щоб одержати правильну рівність:

- 1) $* \cdot 3m^2n^3 = 15m^3n^8$; 2) $-7p^2x^3 \cdot * = 21p^2x^9$;
 3) $* \cdot (-3a^3b^9) = a^6b^{10}$; 4) $12p^3m \cdot * = -\frac{1}{2}p^3m$?

172. Спростіть вираз:

- 1) $15m^2 \cdot (4m^3)^2$; 2) $-0,5m^5 \cdot (2m^3)^4$;
 3) $(-3a^3b^4)^4 \cdot \left(-\frac{1}{81}ab^3\right)$; 4) $\left(-\frac{2}{3}ac^4\right)^3 \cdot 18a^5c$.

173. Подайте у вигляді одночлена стандартного вигляду:

- 1) $6a^3 \cdot (2a^5)^2$; 2) $-0,8a^4 \cdot (5a^7)^3$;
 3) $(-2b^2a^7)^4 \cdot \left(-\frac{1}{8}a^3b\right)$; 4) $\left(-\frac{4}{5}mn^4\right)^3 \cdot 25m^4n$.

174. Подайте вираз у вигляді добутку числа 5 і квадрата деякого виразу:

- 1) $5a^4b^2$; 2) $20c^4d^2m^8$; 3) $\frac{5}{16}p^{12}$.

175. Запишіть вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду:

- 1) $(8ab^3)^2 \cdot (0,5a^3b)^3$; 2) $\left(\frac{3}{4}m^2n^8\right)^3 \cdot (-4m^7)^2$;
 3) $-(-m^2n^3)^4 \cdot (7m^3n)^2$; 4) $(-0,2x^3c^7)^5 \cdot (10xc^3)^5$.

176. Спростіть вираз:

- 1) $(10m^2n)^2 \cdot (3mn^2)^3$; 2) $\left(-\frac{1}{2}ab^3\right)^3 \cdot (4a^5)^2$;
 3) $-(3a^6m^2)^3 \cdot (-a^2m)^4$; 4) $(-5xy^6)^4 \cdot (0,2x^6y)^4$.

177. Подайте одночлен у вигляді добутку двох одночленів, один з яких дорівнює $-4ab^2$:

1) $8a^2b^2$; 2) $-\frac{1}{5}ab^4$; 3) $-7,8a^3b^5$; 4) $1\frac{1}{8}a^3b^2$.

178. Подайте одночлен у вигляді добутку двох одночленів, один з яких дорівнює $3mn^2$:

1) $12m^2n^2$; 2) $-\frac{1}{4}mn^5$; 3) $-6,9m^7n^8$; 4) $1\frac{1}{5}m^8n^2$.

4 179. Запишіть у вигляді одночлена стандартного вигляду (n – натуральне число):

1) $(-0,2a^{n+5}b^{n+2}) \cdot (0,5a^{n-2}b^{n+3})$, $n > 2$;
 2) $(2a^{2n}b^5)^3 \cdot (-3a^3b^{3n})^2$;
 3) $(a^2b^3)^n \cdot (a^{2n}b)^3 \cdot (a^2b^{3n})^5$;
 4) $(x^{2n-1}y^{3n+1})^2 \cdot (x^{3n-1}y^{2n+1})^3$.

180. Відомо, що $3ab^2 = 7$. Знайдіть значення виразу:

1) ab^2 ; 2) $5ab^2$; 3) $-9a^2b^4$; 4) $27a^3b^6$.

181. Відомо, що $5xy^2 = 9$. Знайдіть значення виразу:

1) xy^2 ; 2) $7xy^2$; 3) $-25x^2y^4$; 4) $125x^3y^6$.



Вправи для повторення

2 182. Для перевезення школярів до літнього оздоровчого табору використали 3 мікроавтобуси марки «Газель» та 2 мікроавтобуси марки «Богдан». У кожній «Газелі» розмістилося по x учнів, а у кожному «Богдані» – по y учнів. Скільки всього учнів прибуло до табору на відпочинок вказаним транспортом? Запишіть відповідь у вигляді виразу і знайдіть його значення, якщо $x = 20$; $y = 22$.

3 183. Замініть зірочку таким виразом, щоб рівність стала тотожністю:

1) $(b^3)^2 \cdot * = b^{10}$; 2) $(m^2)^3 \cdot * = -m^{14}$;
 3) $(a \cdot a^4)^2 : * = a^3$; 4) $n^6 \cdot (n \cdot n^2)^2 = * \cdot (-n^4)$.

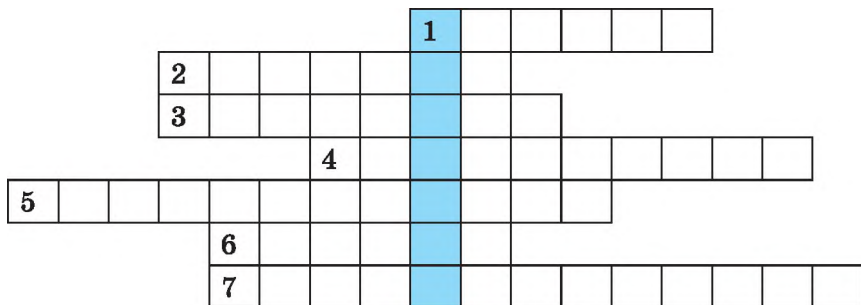
4 184. Обчисліть значення виразу $\frac{2^{n+1} \cdot 7^{n+2}}{14^n}$, де n – натуральне число.



Цікаві задачі для учнів неледачих



185. **Видатні українці.** Запишіть по горизонталях прізвища видатних українців (за потреби використайте додаткову літературу та Інтернет) та прочитайте у виділеному стовпчику одне з фундаментальних понять математики, з яким ви ознайомитеся в наступному розділі.



- Видатний письменник, поет, учений, публіцист.
- Перший президент незалежної України.
- Видатний поет і художник, літературна спадщина якого вважається основою української літератури та сучасної української мови.
- Один з найвідоміших у світі авіаконструкторів.
- Видатна актриса, яка першою в Україні здобула звання Народної артистки Української РСР.
- Видатний футболіст і тренер, володар «Золотого м'яча» як найкращий футболіст Європи 1975 року.
- Автор «Енеїди» – першого твору нової української літератури, написаного народною мовою, один із засновників нової української драматургії.

Домашня самостійна робота № 1

Кожне завдання має по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть варіант правильної відповіді.

1. Який з виразів тотожно рівний виразу $b + b + b + b$?
 А) b^4 ; Б) $4 + b$; В) $4b$; Г) $\frac{b}{4}$.

2. Який з виразів є одночленом?

- А) $7x - y$; Б) $7x + y$; В) $\frac{7x}{y}$; Г) $7xy$.

3. $a^6 : a^3 = \dots$

- А)
- a^3
- ; Б)
- a^2
- ; В)
- a
- ; Г) 1.

2 4. $(-2)^3 = \dots$

- А) 8; Б) -8; В) -6; Г) 6.

5. Запишіть у вигляді виразу квадрат суми чисел m і $3a$.

- А)
- $(m - 3a)^2$
- ; Б)
- $m^2 + (3a)^2$
- ; В)
- $(m + 3a)^2$
- ; Г)
- $(m \cdot 3a)^2$
- .

6. Обчисліть значення виразу $2,5a^2$, якщо $a = -4$.

- А) -40; Б) 40; В) 100; Г) -100.

3 7. При якому значенні a значення виразів $5a + 6$ і $-a + 7$ рівні між собою?

- А) 6; Б)
- $-\frac{1}{6}$
- ; В)
- $\frac{1}{6}$
- ; Г)
- a
- будь-яке число.

8. Обчисліть $\frac{9^{18}}{27^{12}}$.

- А) 3; Б) 9; В) 27; Г) 1.

9. $(4mp^3)^2 \cdot (0,5m^7p)^3 = \dots$

- А)
- $\frac{1}{2}m^{23}p^9$
- ; Б)
- $2m^8p^4$
- ; В)
- $2m^{23}p^9$
- ; Г)
- $2m^{12}p$
- .

4 10. Якого найбільшого значення може набувати вираз $1 - (a - 3)^2$?

- А) 1; Б) -1; В) -3; Г) -8.

11. Яке із чисел 2^{300} , 3^{200} , 7^{100} , 25^{50} є найбільшим?

- А)
- 2^{300}
- ; Б)
- 3^{200}
- ; В)
- 7^{100}
- ; Г)
- 25^{50}
- .

12. Знайдіть значення виразу $8x^2y^4$, якщо $2xy^2 = -5$.

- А) 25; Б) -50; В) 50; Г) 100.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАЇЬ ДО § 1 – § 6

1 1. Чи є тотожно рівними вирази:

- 1)
- $3b + 4b$
- і
- $7b$
- ; 2)
- $a + a + a$
- і
- a^3
- ;
-
- 3)
- $m + 2a$
- і
- $2a + m$
- ; 4)
- $3(x - 2)$
- і
- $3x - 2$
- ?

2. Подайте у вигляді степеня добуток:

1) $4 \cdot 4 \cdot 4$;

2) $-3 \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$.

3. Виконайте дії:

1) $x^5 x^4$; 2) $x^7 : x^2$.

2 4. Знайдіть значення виразу:

1) $0,4 \cdot (-5)^4$; 2) $2^5 - 4^3 + (-1)^5$.

5. Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $(m^3)^4 \cdot m^7$; 2) $(a^2)^7 : (a^3)^2$.

6. Запишіть вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду:

1) $-0,3m^2np^3 \cdot 4mn^2p^7$; 2) $\left(-\frac{1}{2}p^7a\right)^3$.

3 7. Спростіть вираз:

1) $0,2a^2b \cdot (-10ab^3)^2$; 2) $\left(-\frac{1}{4}m^2n^3\right)^4 \cdot (4m^5n)^3$.

8. Доведіть тотожність: $2(a + b - c) + 3(a - c) - 2b = 5(a - c)$.

4 9. Порівняйте вирази:

1) 5^{12} і 25^6 ; 2) 2^{30} і 3^{20} .

Додаткові вправи

4 10. Доведіть, що сума трьох послідовних непарних натуральних чисел ділиться на 3.

11. Якого найменшого значення може набувати вираз:

1) $m^4 - 12$; 2) $(a + 2)^8 + 7?$

12. Відомо, що $4m^2n = 9$. Знайдіть значення виразу:

1) $12m^2n$; 2) $4m^4n^2$.

3 історії математичного олімпіадного руху України

Математичні змагання є досить популярними серед школярів України. Це й індивідуальні змагання – математична олімпіада, і командні – турнір юних математиків або математичні бої. Участь у цих змаганнях надає можливість школярам долучитися до прекрасного світу цікавих і нестандартних задач, перевірити свої знання з математики, повірити у власні сили або віднайти в собі хист до математики.

Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики проходить щорічно в чотири етапи. Перший – це шкільні олімпіади, другий – районні й міські (для міст обласного підпорядкування), третій – обласні олімпіади, олімпіади міст Києва і Севастополя та Автономної Республіки Крим. Четвертий – це заключний етап, який з призерів третього етапу визначає переможців Всеукраїнської олімпіади.



Саме за підсумками четвертого етапу складається перелік кандидатів до складу команди України для участі в Міжнародній математичній олімпіаді. Щоб увійти до команди, переможці четвертого етапу беруть участь у відбірково-тренувальних зборах, за підсумками яких і формується остаточний склад команди. Щороку кількість представників України на Міжнародній олімпіаді визначається залежно від її рейтингу серед інших країн-учасниць. Що вищий рейтинг, то більше учасників увійдуть до команди. Рейтинг команди залежить від результатів її виступу на Міжнародній олімпіаді, причому на рейтинг впливає та кількість балів, яку вибороли учасники за всі розв'язані на олімпіаді конкурсні задачі.

Історія математичного олімпіадного руху України розпочалася з Київських математичних олімпіад. Перша в Україні олімпіада пройшла в Києві в приміщенні Київського державного університету (нині Київський національний університет імені Тараса Шевченка) у 1935 році з ініціативи видатного українського математика Михайла Пилиповича Кравчука (1892–1942). Наступного року в Київській олімпіаді взяли участь і учні інших міст України. Зокрема, у 1936 році серед переможців олімпіади був харківський десятикласник Олексій Погорелов, який згодом пов'язав свою наукову діяльність з геометрією, ставши видатним геометром, академіком Національної академії наук України та Російської академії наук, автором шкільного підручника з геометрії, за яким кілька десятиліть успішно навчалися й радянські школярі, й українські школярі після здобуття Україною незалежності. У тому ж 1936 році було започатковано районні олімпіади та проведено першу Всеукраїнську олімпіаду.

У 1938 році М.П. Кравчука було репресовано, але небайдужі до математики молоді вчені зберегли традицію щорічно проводити Київську математичну олімпіаду. У 1942–1945 рр. під час Великої Вітчизняної війни олімпіади не проводились, а потім їх проведення поновили. Важливу роль у поновленні Київської математичної олімпіади відіграв Микола Миколайович Боголюбов, що на той час був молодим професором фізико-математичного (нині механіко-математичний) факультету Київського державного університету. У післявоєнні роки до організації Київських математичних олімпіад школярів за пропозицією М.М. Боголюбова долучилася відомий педагог та історик математики Любов Миколаївна Граціанська. На той час учні 7–10 класів, що цікавилися математикою, мали можливість щонеділі відвідувати математичні гуртки при Київському державному університеті, організацією яких керувала Л.М. Граціанська. Заняття гуртка проводили студенти механіко-математичного факультету, які згодом і очолили математичний олімпіадний рух України. Серед них А.В. Скороход, М.Й. Ядренко, В.А. Випенський, В.І. Михайловський та інші. Гуртківці традиційно брали участь у Київських математичних олімпіадах. Зазначимо, що тоді учасниками Київської олімпіади могли стати як школярі Києва, так і учні з інших міст України, бо до 1961 року олімпіада проводилася лише в Києві. І нині, за традицією, у Київській математичній олімпіаді можуть брати участь усі охочі школярі.

У 1961 році організатори Московської математичної олімпіади запросили до участі в ній школярів з різних республік тодішнього СРСР. Так відбулася перша математична олімпіада, учасники якої були з різних республік СРСР, а олімпіаду назвали Всесоюзною. Участь у ній взяли й представники України. Щоб і надалі щорічно змагатися, необхідно було відбирати сильну команду учасників, збираючи талановитих школярів по різних куточках України. Це завдання могла вирішити Республіканська математична олімпіада, у якій мали між собою змагатися переможці українських обласних олімпіад, міст Києва і Севастополя та Автономної Республіки Крим, тобто школярі з усіх регіонів України. Саме 1961 рік вважають роком заснування Республіканської олімпіади – заключного етапу математичної олімпіади в Україні, який став прототипом четвертого етапу нинішньої Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики. Отже, у 1961 році Республіканська олімпіада з математики стала освітянською подією загальнодержавного значення. Саме з її переможців надалі й формувалася команда юних математиків для участі у Всесоюзних олімпіадах.

Значну роль у виявленні математично обдарованої учнівської молоді та залучення її до математичних змагань у радянські часи відіграла Республіканська заочна фізико-математич-

на школа (РЗФМШ). Її заняття демонструвалися щочетверга о 16 годині українським телебаченням. Школярі слухали цікаві лекції провідних математиків, ознайомилися із завданнями контрольних робіт, які мали розв'язати та надіслати до організаторів РЗФМШ на перевірку, а також брали участь у заочній олімпіаді, завдання якої оголошувалися в цій програмі. За результатами заочних олімпіад і контрольних робіт виявляли математично обдарованих школярів України, залучали їх до участі в очному етапі олімпіади РЗФМШ, а випускників шкіл – до навчання у провідних вишах України, зокрема і на механіко-математичному факультеті Київського державного університету. Нині багато вчених старшого покоління тепло відгукуються про РЗФМШ, наголошуючи, що саме завдяки їй вони зацікавилися математикою та прийшли в науку.

Не останню роль у підвищенні цікавості учнів до математики, залучення до її багатогранного світу задач відігравав і щорічний збірник науково-популярних статей для школярів «У світі математики», що почав виходити друком у 1968 році. Серед авторів матеріалів збірника були і відомі професори механіко-математичного факультету Київського державного університету, і його студенти й аспіранти. А в редакційну колегію збірника увійшли відомі українські математики А.Г. Конфорович, М.Я. Лященко, М.Й. Ядренко, А.Я. Дороговцев та інші. Професор Київського державного університету Микола Йосипович Ядренко до останніх своїх днів був відповідальним редактором цього видання. Збірник «У світі математики» виходить друком і нині, трохи змінивши свій формат, але не змінивши свого змісту й мети: популяризувати математику серед школярів.

Також М.Й. Ядренко понад 30 років (до 2004 р.) очолював журі Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, включаючи й 1991 рік, коли учнівські математичні олімпіади в Україні посіли чільне місце у світовій мережі математичних змагань школярів.

У 1992 році непересічною подією для українського математичного олімпіадного руху стала участь команди України в Міжнародній математичній олімпіаді (ММО), хоча в цей рік за регламентом вона мала лише статус спостерігача. А з 1993 року Україна стає офіційним учасником Міжнародної математичної олімпіади. Школярі України гідно представляють свою країну, щороку виборюючи золоті, срібні та бронзові медалі. Загалом з 1993 по 2014 рік Україна на Міжнародній математичній олімпіаді виборола 118 медалей (31 золоту, 50 срібних та 37 бронзових) і має високий рейтинг з-поміж 125 команд-учасниць з інших країн світу.



Логотип ММО

§ 7. МНОГОЧЛЕН. ПОДІБНІ ЧЛЕНИ МНОГОЧЛЕНА ТА ЇХ ЗВЕДЕННЯ. СТЕПІНЬ МНОГОЧЛЕНА

Вираз $7x^2y^3 - 5xy^7 + 9x^5 - 8$ є сумою одночленів $7x^2y^3$, $-5xy^7$, $9x^5$ і -8 . Цей вираз називають *многочленом*.



Многочленом називають суму одночленів.

Одночлени, з яких складається многочлен, називають *членами многочлена*. Наприклад, многочлен $7x^2y^3 - 5xy^7 + 9x^5 - 8$ складається із чотирьох членів: $7x^2y^3$; $-5xy^7$; $9x^5$ і 8 .

Многочлен, який містить два члени, називають *двочленом*, многочлен, який містить три члени, – *тричленом*. Наприклад, $a + b^7$, $2xy - 3y^7$ – двочлени; $x + xy + y^3$, $mn + m - n$ – тричлени. Одночлен вважають окремим видом многочлена.

У многочлені $7x^2y + 8 + 9xy - 5x^2y - 9$ члени $7x^2y$ і $-5x^2y$ є подібними доданками, оскільки вони мають одну й ту саму буквену частину x^2y . Також подібними доданками є й члени 8 і -9 , які не мають буквені частини.



Подібні доданки многочлена називають *подібними членами многочлена*, а зведення подібних доданків у многочлені – *зведенням подібних членів многочлена*.

Приклад 1. Звести подібні члени у многочлені $7x^2y + 8 + 9xy - 5x^2y - 9$.

Розв'язання. $7x^2y + 8 + 9xy - 5x^2y - 9 = (7x^2y - 5x^2y) + (8 - 9) + 9xy = 2x^2y - 1 + 9xy$.

Кожний член многочлена $2x^2y - 1 + 9xy$ є одночленом стандартного вигляду, причому цей многочлен уже не містить подібних доданків. Такі многочлени називають *многочленами стандартного вигляду*.



Многочлен, що є сумою одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних доданків, називають *многочленом стандартного вигляду*.

Приклад 2. Чи записано в стандартному вигляді многочлени: 1) $xy^2 - x^2y^3x + 7$; 2) $t^2 + 3tn - 3n^2$; 3) $9ab + 7 - 5ab$?

Р о з в' я з а н н я. 1) Оскільки x^2y^3x не є одночленом стандартного вигляду, то многочлен $x^2y - x^2y^3x + 7$ не є многочленом стандартного вигляду.

2) Многочлен $m^2 + 3mn - 3n^2$ є многочленом стандартного вигляду.

3) Многочлен $9ab + 7 - 5ab$ містить подібні доданки, тому не є многочленом стандартного вигляду.

Приклад 3. Записати у стандартному вигляді многочлен $3x^2yx + 5 - 4xy^2y - 5x^3y + 7xy^3 - 8$.

Р о з в' я з а н н я. Спочатку зведемо до стандартного вигляду члени многочлена, потім зведемо подібні доданки:

$$\begin{aligned} & 3x^2yx + 5 - 4xy^2y - 5x^3y + 7xy^3 - 8 = \\ & = \underline{3x^3y} + 5 - \underline{4xy^3} - \underline{5x^3y} + \underline{7xy^3} - 8 = -2x^3y + 3xy^3 - 3. \end{aligned}$$

Члени многочлена $7m^4p - 9m^2p^4 + 3$, що має стандартний вигляд, є одночленами відповідно п'ятого, шостого та нульового степенів. Найбільший із цих степенів називають *степенем многочлена*. Отже, $7m^4p - 9m^2p^4 + 3$ є многочленом шостого степеня.



Степенем многочлена стандартного вигляду називають найбільший зі степенів одночленів, що до нього входять.

Наприклад, многочлени $5x - 7$ та $2a - 3b + 7$ — першого степеня; многочлен $2mn + n$ — другого; $2x^4 + x^5 - x^2$ — п'ятого степеня.

Степенем довільного многочлена називають степінь тотожного рівного йому многочлена стандартного вигляду.

Приклад 4. Визначити степінь многочлена

$$2x^2y + 3xy - 6x^2y + 4x^2y - 7.$$

Р о з в' я з а н н я. Спочатку запишемо многочлен у стандартному вигляді: $\underline{2x^2y} + 3xy - \underline{6x^2y} + \underline{4x^2y} - 7 = 3xy - 7$. Многочлен $3xy - 7$ є многочленом другого степеня, а тому і многочлен $2x^2y + 3xy - 6x^2y + 4x^2y - 7$ є многочленом другого степеня.

Члени многочлена можна записувати в різній послідовності. Для многочленів стандартного вигляду, які містять одну змінну, члени, як правило, упорядковують за зростанням або спаданням показників степенів цієї змінної.

Наприклад, $7a^4 + 5a^3 - 8a^2 - 5$ або $-5 - 8a^2 + 5a^3 + 7a^4$.

Будь-який многочлен є цілим виразом. Але не кожний цілий вираз є многочленом. Наприклад, цілі вирази $3(x - 1)$; $(a + b)^2$; $(m - n)^3$ не є многочленами, бо вони не є сумою одночленів.



Що називають многочленом? Що називають членами многочлена? Який многочлен називають двочленом, а який – тричленом? Які члени многочлена називають подібними? Який многочлен називають многочленом стандартного вигляду? Що називають степенем многочлена?

186. (Усно) Які з даних виразів є многочленами:

- 1) $m^2(m - 5)$; 2) $3p^2 - p^2 + x^7$; 3) $\frac{7}{x-3}$; 4) b ;
 5) $(a + 3)(a - 2)$; 6) $n^2 - \frac{1}{3}n$; 7) $7,8$; 8) $(t - 2p)^2$?

187. Серед даних виразів виберіть многочлени:

- 1) $p^3 - p^2 - p$; 2) $\frac{a}{a-b}$; 3) c^2 ; 4) $a(a - b)$;
 5) $-3\frac{1}{5}$; 6) $(x + 1)(x - 1)$; 7) $a^3 - 1$; 8) $(c + p)^3$.

188. Назвіть члени многочлена:

- 1) $3p^2n - 5pn^2 + 3 + 7pn$; 2) $-x^3 + 5x^2 - 9x + 7$.

189. Складіть многочлен з одночленів:

- 1) $5m^2$, $-2m$ і 3 ; 2) $7ab$, $-2a^2$ і b^2 ;
 3) $4p$ і $2q^3$; 4) $-c^2$, $-3mc$, m^3 і 7 .

190. Складіть многочлен з одночленів:

- 1) $5t$ і $-5n$; 2) m^3 , $-2m^2$ і mn ; 3) $-x^3$, $-2y^2$, xy і 4 .

191. (Усно) Чи записано многочлен у стандартному вигляді? Для многочленів стандартного вигляду визначте їх степінь.

- 1) $5t^2 + m^3 + 1$; 2) $7x^2 + 2x + 3x^2$;
 3) $2 + a + a^2b + 3$; 4) $c^2c + c^5 - 8$;
 5) $3x^2x + 2xx^2 + x$; 6) $p^2 - 19$.

192. Зведіть подібні члени многочлена:

- 1) $7x - 15xy - 8xy$;
- 2) $8ab - 5ab + 4b^2$;
- 3) $9a^4 - 5a + 7a^2 - 5a^4 + 5a$;
- 4) $18a^4b - 9a^4b - 7ba^4$;
- 5) $4b^3 + b^2 - 15 - 7b^2 + b^3 - b + 18$;
- 6) $9xy^2 - x^3 - 5xy^2 + 3x^2y - 4xy^2 + 2x^3$.

193. Зведіть подібні члени многочлена:

- 1) $a^3 - 2a^3 + 3a^3$;
- 2) $-x^4 + 2x^3 - 3x^4 + 5x^2 - 3x^2$;
- 3) $7 + 3m^6 - 2m^3 - 5m^6 + 2m^6 - m^5 - 7$;
- 4) $9xy^3 + 6x^2y^2 - x^3y + x^2y^2 - 9xy^3$.

194. (Усно) Які з многочленів є многочленами четвертого степеня:

- 1) $a^3 + 3a^2 + 1$;
- 2) $a^2a^2 - 8$;
- 3) $a^4 - 4a^3 - a^4$;
- 4) $aa^3 + 2$

195. Які з многочленів є многочленами п'ятого степеня:

- 1) $m^3 + m^4 - m^2$;
- 2) $12 + mm^4$;
- 3) $mm + mm^2 + m^2m^2$;
- 4) $m^5 - 3 - m^5$?

196. Зведіть многочлен до стандартного вигляду та визначте його степінь:

- 1) $x^2y + xy^2$;
- 2) $2a \cdot a^2 \cdot 3b + a \cdot 5c$;
- 3) $7x \cdot 5y^2 - 4y \cdot 7x^2$;
- 4) $3a \cdot 4a \cdot (-5a) - a^3 \cdot (-8b)$.

197. Подайте многочлен у стандартному вигляді та визначте його степінь:

- 1) $3x \cdot x^2 + 2x \cdot 5y^2$;
- 2) $5a \cdot b^2a + 3b \cdot 2ab^2$;
- 3) $-5mn^3m + 4mmt$;
- 4) $5p \cdot 3p \cdot (-p) - p^4qr$.

198. Перепишіть многочлен у порядку спадання степенів змінної:

- 1) $7x - 5x^3 + x^4 - 9x^2 + 1$;
- 2) $8y^3 - 5 + 7y^6 - 9y^4 + y^2$.

199. Перепишіть многочлен у порядку зростання степенів змінної.

1) $3m^2 - 3m + m^3 - 8$;

2) $7a^2 - 9a^5 + 4a^3 + 5 - a^4$.

200. Знайдіть значення:

1) двочлена $3x^2 - 1$, якщо $x = -1$; 2;

2) тричлена $5m + 9n^2 - 1$, якщо $m = -2$, $n = \frac{1}{3}$.

201. Обчисліть значення многочлена:

1) $64x^3 - x^2 + 1$, якщо $x = \frac{1}{4}$;

2) $4mn - 3m + 2n - 4mn$, якщо $m = 4$, $n = -3$.

202. Обчисліть значення многочлена:

1) $9p^2 - p^3$, якщо $p = \frac{1}{3}$;

2) $2xy - 4x + 3y + 4x$, якщо $x = -1$, $y = 2$.

203. Чи існує таке значення x , при якому значення многочлена $x^2 + 5$ дорівнює нулю; є від'ємним?

204. Зведіть многочлен до стандартного вигляду і вкажіть його степінь:

1) $3a^2ab - 5a^2b^2b^2 - 6ab \cdot 2a + 5ab \cdot 0,4ab - 1,5a \cdot 2b \cdot a^2$;

2) $3xy^2 \cdot 4x^3y + 5x^3y \cdot 2y \cdot (-x) - 10x^3y^3 \cdot \frac{1}{2}x - 7xy \cdot (-3xy^3)$.

205. Зведіть многочлен до стандартного вигляду і вкажіть його степінь:

1) $3a^2b^3 - ab^3 - a^3a - a^2b^2 \cdot b + 0,5ab \cdot 2b^2 + 4ab \cdot 0,5ab^2$;

2) $7x \cdot 2y^3 - 5x \cdot 3xy \cdot (-x) + \frac{1}{2}y \cdot (-14xy) - 3yx \cdot 4y^2$.

206. Зведіть многочлен $5xy^3 + x^2y^2 - 2x^3y - 3xy^3 - x^2y^2$ до стандартного вигляду і знайдіть його значення, якщо $x = \frac{1}{2}$, $y = -1$.

207. Доведіть, що многочлен $a^2 + b^2 + 1$ при будь-яких значеннях змінних a і b набуває лише додатних значень.

208. Запишіть замість зірочки такий одночлен, щоб утворився многочлен четвертого степеня:

1) $x^3 + 3x^2 + * - 2$;

2) $m^6 - 4m^4 + mn + *$;

3) $a^3b - 3a^4b^3 + 3a^2 + *$;

4) $pq^3 - p^2q^2 + p^2q^3 + * - p^3q$.

209. Запишіть замість зірочки такий одночлен, щоб після зведення до стандартного вигляду одержати многочлен, що не містить змінної x :

- 1) $3x - 12 + 5x + 15 - 9x + *$;
 2) $5xy^2 - y^3 + 7y^2 + 7y^2x - 5 + *$.



210. Дано многочлен $5x^3 + 2x^2 - x + 7$. Утворіть з нього новий многочлен, замінивши змінну x на одночлен:

- 1) m ; 2) $-x$; 3) $2a$; 4) $3b^2$.

Отримані многочлени зведіть до стандартного вигляду.

211. Дано многочлен $3a^3 - 5a^2 + a - 8$. Утворіть з нього новий многочлен, замінивши змінну a на даний одночлен, та зведіть до стандартного вигляду:

- 1) x ; 2) $-a$; 3) $2b$; 4) $3c^2$.

212. Оберіть ті многочлени, значення яких є додатними при будь-яких значеннях змінних, що до нього входять; є від'ємними при будь-яких значеннях змінних, що до нього входять:

- 1) $a^4 + 3a^2 + 5$; 2) $c^5 + c^3 + c$;
 3) $-p^2 - 7$; 4) $-m^2 - m^2n^2 - n^2 - 9$;
 5) $-a - b - 7$; 6) $x^8 + y^6 + c^4 + 1$.



Вправи для повторення



213. Розкрийте дужки і спростіть вираз:

- 1) $x + 5 + (2x - 7)$;
 2) $2y - 7 - (3y - 8)$;
 3) $7 - (2x + 9) + (3x - 11)$.



214. Складіть числовий вираз і знайдіть його значення:

- 1) сума квадратів чисел 3,1 і $-2,7$;
 2) квадрат різниці чисел $-3,8$ і $-3,7$;
 3) куб суми чисел 1,52 і $-1,5$.

215. Замініть пропуски степенем з основою x так, щоб одержати тотожність:

- 1) $x^3 \cdot (\dots)^2 = x^{13}$; 2) $(\dots)^3 \cdot x^7 = x^{19}$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



216. Чи існують такі натуральні значення змінних x і y , при яких $x^5 + y^5 = 33^6$?

§ 8. ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ

Додамо многочлени $7x^2 - 4x + 9$ і $-3x^2 + 5x - 7$. Для цього запишемо їх суму, потім розкриємо дужки і зведемо подібні доданки:

$$\begin{aligned} & (7x^2 - 4x + 9) + (-3x^2 + 5x - 7) = \\ & = 7x^2 - 4x + 9 - 3x^2 + 5x - 7 = 4x^2 + x + 2. \end{aligned}$$

Ми записали суму многочленів $7x^2 - 4x + 9$ і $-3x^2 + 5x - 7$ у вигляді многочлена $4x^2 + x + 2$. Так само можна додавати три і більше многочленів. *Сума будь-яких многочленів є многочленом, який зазвичай записують у стандартному вигляді.*

Тепер від многочлена $5x^2 - 8x + 7$ віднімемо многочлен $2x^2 - 6x - 5$. Для цього запишемо їх різницю, потім розкриємо дужки і зведемо подібні доданки:

$$\begin{aligned} & (5x^2 - 8x + 7) - (2x^2 - 6x - 5) = \\ & = 5x^2 - 8x + 7 - 2x^2 + 6x + 5 = 3x^2 - 2x + 12. \end{aligned}$$

Різницю многочленів $5x^2 - 8x + 7$ і $2x^2 - 6x - 5$ ми подали у вигляді многочлена $3x^2 - 2x + 12$. *Різниця будь-яких многочленів є многочленом, який зазвичай записують у стандартному вигляді.*

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$(7x - 5) - (2x^2 + 3x - 7) + (9 - 2x) = 4 - 2x^2.$$

Р о з в' я з а н н я. Розкриємо дужки у лівій частині рівняння:

$$7x - 5 - 2x^2 - 3x + 7 + 9 - 2x = 4 - 2x^2.$$

Перенесемо доданки, що містять змінну, у ліву частину рівняння, а ті, що не містять змінної, — у праву. Матимемо:

$$\underline{7x} - \underline{2x^2} - \underline{3x} - \underline{2x} + \underline{2x^2} = 4 + 5 - 7 - 9;$$

$$2x = -7;$$

$$x = -3,5.$$

В і д п о в і д ь: $-3,5$.

Іноді виникає необхідність розв'язати зворотню задачу — записати многочлен у вигляді суми або різниці многочленів. У такому випадку доцільно використовувати правила взяття виразу в дужки, перед якими стоїть знак «плюс» або «мінус», які вивчалися в попередніх класах.

Приклад 2. Записати многочлен $a^2 - b^3 - a + b^7 + 5$ у вигляді:

1) суми двох многочленів, один з яких містить змінну a , а другий її не містить;

2) різниці двох многочленів, перший з яких містить змінну b , а другий її не містить.

Р о з в' я з а н н я.

$$1) a^2 - b^3 - a + b^7 + 5 = (a^2 - a) + (-b^3 + b^7 + 5);$$

$$2) a^2 - b^3 - a + b^7 + 5 = (-b^3 + b^7) - (-a^2 + a - 5).$$



Як знайти суму многочленів? Як знайти різницю многочленів? Якими правилами користуються, якщо треба записати многочлен у вигляді суми чи різниці многочленів?



217. (Усно) Прочитайте многочлен, який одержимо після розкриття дужок:

$$1) a + (b - 3); \quad 2) x + (3 - a + b);$$

$$3) m - (n - 1); \quad 4) p - (-a^2 + 3).$$



218. Знайдіть суму многочленів:

$$1) 2x^2 + 3x^3 - 1 \text{ та } 5x^3 + 3x^2 + 7;$$

$$2) a^3 + 3a^2 + 1; \quad 2a^2 - 5 \text{ та } 6 - 5a^2.$$

219. Знайдіть суму многочленів:

$$1) 3m^3 + 5m^2 - 7 \text{ та } 2m^3 + 6;$$

$$2) b^2 + 3b - 1, \quad 2b - 3b^2 \text{ та } 2b^2 + 7.$$

220. Знайдіть різницю многочленів:

$$1) 4p^3 + 7p^2 - p \text{ та } 2p^2 + p; \quad 2) m^2 + 2m - 1 \text{ та } m^3 + 2m - 1.$$

221. Знайдіть різницю многочленів:

$$1) 2a^3 - 3a^2 + 7 \text{ та } a^3 - 5a^2 - 8;$$

$$2) c^4 + c^3 - 2 \text{ та } c^3 + 2c^2 - 2.$$

222. Знайдіть суму і різницю виразів:

$$1) x + y \text{ і } x - y; \quad 2) x - y \text{ і } -x + y;$$

$$3) -x - y \text{ і } y - x; \quad 4) x - y \text{ і } y - x.$$

223. Знайдіть суму і різницю виразів:

$$1) 2a - b \text{ і } 2a + b; \quad 2) 2a - b \text{ і } -2a + b;$$

$$3) -2a - b \text{ і } 2a + b; \quad 4) 2a - b \text{ і } b - 2a.$$

224. Знайдіть суму і різницю многочленів та зведіть до многочлена стандартного вигляду:

- 1) $3x^2 - 2x + 1$ і $3x^2 - 4$; 2) $2x + 1$ і $-3x^2 - 2x - 1$;
 3) $a + 5b$ і $3a - 5b$; 4) $m^2 - 2mn - n^2$ і $m^2 + n^2$.

225. Запишіть суму і різницю першого і другого многочленів та зведіть її до многочлена стандартного вигляду:

- 1) $5y^2 + 2y - 10$ і $3y^2 - y + 7$;
 2) $5m^3 - m + 3$ і $4m^2 + m - 4$;
 3) $5p^2 - 2pq - 7q^2$ і $3p^2 + 2pq + 5q^2$.

226. Спростіть вираз:

- 1) $(1 + 2p) + (p^2 - p)$; 2) $(5a^2 + a^3) - (-a + 5a^2)$;
 3) $(x^2 - 5x) + (5x - 13)$; 4) $(3b^3 - 5b^2) - (5 + 3b^3 - 2b^2)$.

227. Перетворіть на многочлен стандартного вигляду:

- 1) $(5ab^2 - 12ab - 7a^2b) - (15ab + 8a^2b)$;
 2) $\left(\frac{3}{5}a^3b^2 - \frac{3}{4}ab^2\right) - \left(-\frac{5}{8}b^2a - \frac{7}{10}b^2a^3\right)$;
 3) $(x + y - z) - (-2x + 3y - z) - (-5y + 4z + x)$;
 4) $(2m - 3n) - (4m - 3mn + 3n^2) - (5mn - 5n^2 - 3n)$.

228. Спростіть вираз:

- 1) $(15x^2 - 3xy) - (12x^2 - 5xy + y^2)$;
 2) $(5a^2b - 12ab + 14ab^2) - (-5ab + 14ab^2 - 7a^2b)$;
 3) $(m + n - 2p) - (-2m + p - 3n) - (4n + 3m - 4p)$.

229. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $5x + 2x^2 - (2x^2 - 10) = 25$;
 2) $5 - x^3 - (2x + 7 - x^3) = -8$.

230. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $5x^2 + 7x - (2x + 5x^2 - 8) = 8$;
 2) $2 - 3x^3 - (5x - 3x^3) = -13$.

231. Подайте многочлен у вигляді суми двох многочленів, один з яких містить змінну x , а другий її не містить:

- 1) $xa + b - m - xb$; 2) $xa^2 - 17a + 5x + 10b$.

232. Запишіть многочлен $5x^2 - 9x^3 + 7x - x^4 - 1$ у вигляді суми двочлена і тричлена. Знайдіть два розв'язки задачі.

233. При якому значенні x :

- 1) значення різниці одночлена $5x$ і многочлена $3x - 5x^2 + 12$ дорівнює значенню многочлена $7x + 5x^2 - 18$;
- 2) значення різниці многочленів $5x^3 + 3x^2 - x$ і $2x^3 - 2x^2 + x$ дорівнює значенню многочлена $5x^2 + 3x^3 + 14$?

234. При якому значенні змінної y :

- 1) сума многочленів $2y^3 - 3y + y^2$ та $5y - 2y^3 - y^2 + 7$ дорівнює 19;
- 2) різниця двочлена $5y^2 - 7y$ і тричлена $2y^2 - 8y + 9$ дорівнює двочлену $3y^2 - 3y$?

235. Подайте многочлен у вигляді різниці двох многочленів, перший з яких містить змінну y , а другий її не містить:

- 1) $-ya + yx + x - y - a + 1$;
- 2) $-p^2 + y^2 + 2p - 7y - 1$.

236. Який многочлен стандартного вигляду потрібно записати замість пропусків, щоб одержати тотожність:

- 1) $-(\dots) = 4p - q$;
- 2) $-(\dots) = 4m^2 - p^2 + 5$;
- 3) $(\dots) + 2m^2n - 5mn^2 = 7m^2 - 3mn^2$;
- 4) $7a^2b + 9a^3 + (\dots) = 8a^2b$;
- 5) $3 + 2a^2 - 5a + (\dots) = 9a^2 - 12$;
- 6) $(\dots) - (4x^2 - 2xy) = 5 + 5x^2 - 2xy$

237. Знайдіть многочлен стандартного вигляду, підставивши який замість M , матимемо тотожність:

- 1) $-M = 5a - b^2 + 7$;
- 2) $M + (3a^2 - 2ab) = 5a^2 + 3ab - b^2$;
- 3) $M - (3mn - 4n^2) = m^2 - 4mn + n^2$;
- 4) $(7a^2 - b^2 - 9ba) - M = 0$.

238. Велосипедист був у дорозі 4 год. За першу годину він проїхав x км, а за кожну наступну – на 3 км більше, ніж за попередню. Яку відстань проїхав велосипедист:

- 1) за другу годину;
- 2) за третю годину;
- 3) за перші три години;
- 4) за весь час руху?



239. Бригада робітників викопала криницю за 5 днів. За перший день вони викопали a метрів, а за кожний наступний – на 2 метри менше, ніж за попередній. Скільки метрів криниці викопала бригада:

- 1) за другий день; 2) за третій день;
3) за перших два дні; 4) за останніх три дні?

240. Доведіть тотожність:

- 1) $(x - y) + (y - p) - (x - p) = 0$;
2) $(a^2 + b^2 - c^2) - (b^2 - a^2 - c^2) - (a^2 - b^2) = a^2 + b^2$.

241. Доведіть тотожність:

$$(a^3 + a^2 - a) + (2a^2 - 5a + 3a^3) - (4a^3 - 6a + 2a^2) = a^2.$$

242. Доведіть, що при будь-яких натуральних значеннях n значення виразу $(15 - 7n) - (7 - 11n)$ є кратним числу 4.

243. Доведіть, що при будь-яких натуральних значеннях m значення виразу $(m^2 - 4m + 1) - (m^2 - 9m - 14)$ ділиться на 5.

244. Доведіть, що значення виразу

$$\left(\frac{1}{8}a^2b + \frac{3}{5}ab\right) - \left(\frac{7}{10}ab - \frac{3}{4}ba^2\right) - \left(\frac{7}{8}a^2b - \frac{1}{10}ab - 2\right)$$

не залежить від значення змінних.

245. Доведіть, що значення виразу

$$(7x^5 - 4x^4 + x^3 - 8) - (3x^5 - 4x^4 + 4x^3) - (4x^5 - 3x^3 + 7)$$

не залежить від значення змінної.

246. Знайдіть значення виразу:

- 1) $(b^2 + 3b - 8) - (7b^2 - 5b + 7) + (5b^2 - 8b + 10)$, якщо $b = -2$;
2) $17x^2 - (3x^2 - 2xy + 3y^2) - (14x^2 + 3xy - 4y^2)$, якщо $x = -0,1$, $y = 10$.

247. Знайдіть значення виразу:

$$1) (m^2 - 2m - 8) - (0,1m^2 - 5m + 9) + (4m - 0,9m^2 + 5),$$

$$\text{якщо } m = \frac{1}{7};$$

$$2) 7a^2 - (3ab - 2a^2) + (4ab - 9a^2), \text{ якщо } a = -\frac{1}{8}, b = -32.$$

248. Подайте многочлен $3m^2n - 5mn + 4n^2 - 9n - 7$ у вигляді різниці двох многочленів так, щоб усі члени обох многочленів мали додатні коефіцієнти.

4 249. Нехай $a = 7m^2 + 5mn - n^2$, $b = -6m^2 + 2mn + 3n^2$, $c = m^2 - 2n^2$. Підставте ці многочлени замість a , b , c у вираз і спростіть його:

1) $a + b + c$; 2) $a - b - c$.

250. Доведіть, що при будь-якому значенні x різниця многочленів $0,5x^4 + x^3 - 0,2x^2 - 5$ і $0,3x^4 + x^3 - 0,7x^2 - 9$ набуває додатного значення. Якого найменшого значення набуває ця різниця і при якому значенні x ?

251. Доведіть, що сума:

- 1) трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 3;
- 2) чотирьох послідовних натуральних чисел при діленні на 4 дає в остачі 2.

252. Запис \overline{xy} означає натуральне число, у якому x десятків і y одиниць. Доведіть, що

- 1) сума чисел \overline{xy} і \overline{yx} кратна числу 11;
- 2) різниця чисел \overline{xy} і \overline{yx} , де $x > y$, кратна числу 9.

253. Запис \overline{xyz} означає число, у якому x сотень, y десятків і z одиниць. Подайте у вигляді многочлена:

- 1) \overline{xyz} ; 2) \overline{zyx} ; 3) $\overline{xyz} + \overline{zy}$; 4) $\overline{yxz} - \overline{yx}$.



Вправи для повторення

2 254. Обчисліть значення виразу:

$(0,018 + 0,982) : (4 \cdot 0,5 - 0,2)$.

255. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $-8x \cdot 1,5y$, якщо $x = \frac{4}{7}$, $y = -1\frac{3}{4}$;

2) $-2a \cdot (-3,5b) \cdot 5c$, якщо $a = -1$, $b = -\frac{2}{5}$, $c = \frac{3}{7}$.

4 256. Подайте вираз 2^{60} у вигляді степеня з основою:

- 1) 4; 2) 8; 3) 16; 4) 32.



Цікаві задачі для учнів неледачих



257. Знайдіть цифри a і b , якщо число $\overline{9a6b2}$ кратне числу 36. Укажіть усі можливі розв'язки.

§ 9. МНОЖЕННЯ ОДНОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

Помножимо одночлен $5x$ на многочлен $3x - 7$, використовуючи розподільну властивість множення:

$$5x(3x - 7) = 5x \cdot 3x - 5x \cdot 7 = 15x^2 - 35x.$$

Отже, добутком одночлена $5x$ і многочлена $3x - 7$ є многочлен $15x^2 - 35x$, який одержали, помноживши одночлен на кожний член многочлена і додавши знайдені результати. Маємо *правило множення одночлена на многочлен*:



Щоб помножити одночлен на многочлен, треба помножити цей одночлен на кожний член многочлена і знайдені добутки додати.

Добуток будь-якого одночлена на будь-який многочлен завжди можна подати у вигляді многочлена.

Приклад 1. Виконати множення: $-3ab(5a^2 - 2ab + b^2)$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} -3ab(5a^2 - 2ab + b^2) &= -3ab \cdot 5a^2 - 3ab \cdot (-2ab) - 3ab \cdot b^2 = \\ &= -15a^3b + 6a^2b^2 - 3ab^3. \end{aligned}$$

Записати це множення можна коротше, пропустивши проміжні результати:

$$-3ab(5a^2 - 2ab + b^2) = -15a^3b + 6a^2b^2 - 3ab^3.$$

Приклад 2. Спростити вираз: $5m(m^2 - 2) - 2(m^3 - 5m)$.

Розв'язання.

$$5m(m^2 - 2) - 2(m^3 - 5m) = \underline{5m^3} - \underline{10m} - \underline{2m^3} + \underline{10m} = 3m^3.$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$\frac{2x-1}{3} - \frac{3x+2}{4} = \frac{x-14}{12}.$$

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на найменший спільний знаменник дробів, тобто на 12:

$$12\left(\frac{2x-1}{3} - \frac{3x+2}{4}\right) = 12 \cdot \frac{x-14}{12}.$$

Маємо:

$$\frac{12 \cdot (2x - 1)}{3} - \frac{12 \cdot (3x + 2)}{4} = \frac{12 \cdot (x - 14)}{12};$$

$$4(2x - 1) - 3(3x + 2) = x - 14;$$

$$8x - 4 - 9x - 6 = x - 14;$$

$$8x - 9x - x = -14 + 4 + 6;$$

$$-2x = -4;$$

$$x = 2.$$

В і д п о в і д ь: 2.



Сформулюйте правило множення одночлена на многочлен.

1 258. (Усно) Виконайте множення:

- 1) $m(a - b)$; 2) $-p(4 + a)$;
 3) $a(b + c - 4)$; 4) $-a(b - c + 2)$.

259. Виконайте множення:

- 1) $a(b - 2)$; 2) $m(a + c)$;
 3) $p(a - b - 3)$; 4) $-b(a - c + 3)$.

2 260. Виконайте множення одночлена на многочлен:

- 1) $7a^2(3 - a)$; 2) $-5x^2(x^3 + 4x)$;
 3) $-3c^3(c - 2c^2)$; 4) $2a^4(a^5 - a^3 - 1)$;
 5) $(3x^2 - 5x - 3) \cdot 2x$; 6) $(c^3 + c - 4) \cdot (-3c)$.

261. Перетворіть добуток на многочлен:

- 1) $4xy(x^2 - 2xy - y^2)$;
 2) $-a^2b(ab^2 - b^2 + a^2)$;
 3) $(2mn - 3m^2 - 5n^2) \cdot (-4m^2)$;
 4) $(-2x^2y + 3xy - x^2) \cdot xy^2$;
 5) $(2,8a^2b - 3,7a^3b - 0,8b) \cdot 10ab^2$;
 6) $-1,8a^2b^6(5a^2b - 1,5a - 2b^3)$.

262. Подайте у вигляді многочлена:

- 1) $4a(a^2 - 2a + 3)$;
 2) $-3b^2(4b^3 - 2b^2 + 3b - 8)$;
 3) $(3x^2 - 4x + 12) \cdot (-0,1x^3)$;
 4) $(p^2 - 9p^3 + 7p - 1) \cdot 3p^4$;
 5) $7ab(2a^2b - 3ab^2 - 3a^3)$;

- 6) $-6m^2n(m^2n - 3mn^2 - 4n^3)$;
 7) $(9a^2b - 8ab^3 - a^2b^2) \cdot (-3a^2b^3)$;
 8) $(p^2q^3 - 2pq^4 + 3p^3) \cdot 5p^3q^2$.

263. Виконайте множення:

- 1) $\frac{1}{7}a^2b(1,4a^2 - 2,1b^3)$; 2) $-\frac{2}{3}x^2y^3\left(1,2y^5 - \frac{9}{10}xy\right)$;
 3) $\left(1\frac{1}{5}mn^2 - 1\frac{1}{15}m^2\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}m^2n\right)$; 4) $\left(1\frac{1}{4}m - \frac{5}{6}n\right) \cdot 2\frac{2}{5}m^2n^7$.

264. Виконайте множення:

- 1) $\frac{1}{4}m^2n(2,4mn - 2,8m^2)$; 2) $-\frac{2}{5}ab^3\left(1,5ab - \frac{5}{6}b^2\right)$;
 3) $\left(1\frac{1}{2}x^2y - \frac{9}{10}xy^4\right) \cdot \frac{2}{3}xy^3$; 4) $\left(1,5a - \frac{4}{7}b\right) \cdot \left(-\frac{1}{14}a^2b^5\right)$.

265. Подайте у вигляді многочлена:

- 1) $5(x - 3) - 2(x - 3)$; 2) $5(7a - 1) - 7(5a + 3)$;
 3) $2b(b - 3) - 5b(b + 7)$; 4) $7y^2(3y - 2) + 4y^2(y + 5)$.

266. Спростіть вираз:

- 1) $5(3 - 2a) + 7(3a - 1)$; 2) $3(2x - 8) - 3(2x - 5)$;
 3) $3m(m - 2) - 5m(7 - m)$; 4) $2a^2(3a - 5) + 4a^2(a + 3)$.

267. Перетворіть вираз на многочлен:

- 1) $5m(m - n) + 3n(n - m)$;
 2) $2a(2b - 3a) - 3a(5b - 7a)$;
 3) $a(3a^2 - 2b) - b(5a^2 - 2a)$;
 4) $0,2mn(m^2 - n^2 + 3) - 0,5m(nm^2 - n^3)$.

268. Виконайте дії:

- 1) $3a(a - b) + 5b(a + b)$;
 2) $3y(x - y) + y(2y - 3x)$;
 3) $p(p^2 - 2a) - a(a^2 - 2p)$;
 4) $3xy(x^2 - y^2 + 7) - 5xy(y^2 + x^2)$.

269. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $6 + 2(5x + 4) = 24$;
 2) $3(5x - 1) = 4(4x - 8)$;
 3) $7 - 4(y - 1) = (3y - 2) \cdot (-2)$;
 4) $3(y - 2) - 5(y + 7) = -7(y - 1)$.

270. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 5(2x - 1) = 3(4x + 5); \quad 2) 9 - 5(y + 2) = (7y - 5) \cdot (-3).$$

271. Знайдіть корінь рівняння:

$$1) x(x - 3) - 9 = 12 + x^2; \quad 2) 3x - 2x^2 = 2x(5 - x) + 14.$$

272. Знайдіть корінь рівняння:

$$1) 7 - x(x - 2) = 5 - x^2; \quad 2) 3x(x - 5) = 3x^2 - 5x + 20.$$

273. Запишіть замість зірочки такий одночлен, щоб виконувалася рівність:

$$1) (a + b) \cdot * = am + bm;$$

$$2) * \cdot (x - y) = -nx + ny;$$

$$3) * \cdot (a - b + c) = ax^2 - bx^2 + cx^2;$$

$$4) * \cdot (c - n + p) = -abc + abn - abp;$$

$$5) * \cdot (x^2 - xy) = x^2y^2 - xy^3;$$

$$6) (p - 1) \cdot * = p^2q^2 - pq^2.$$

3 **274.** Доведіть, що при будь-якому значенні a вираз

$$a(3a + 1) - a^2(a + 2) + (a^3 - a^2) - (a + 1)$$

набуває одного й того самого значення.

275. Доведіть, що значення виразу

$$x(5x^2 - x + 2) - (5x - 2 + 4x^3) - x(x^2 - x - 3)$$

не залежить від значення змінної.

276. Доведіть, що вираз тотожно дорівнює нулю:

$$1) a(b - c) + b(c - a) + c(a - b);$$

$$2) a(b + c - bc) - b(c + a - ac) + c(b - a).$$

277. Перетворіть вираз на многочлен стандартного вигляду:

$$1) -7a^5b(2b^4 + ab^5 - 3a^2b^6 + a^3b^7);$$

$$2) (3x^3 + 5x^2 - 2a - 3a^2)xa;$$

$$3) -4pt^3(m^4 - 2p^3m + 7p^6m^7 + 11p^7m^3);$$

$$4) \left(-\frac{1}{2}a^2b^9 + \frac{1}{6}ab^7 - \frac{1}{3}a^3b^6 \right) (-12a^3b^7).$$

278. Доведіть, що при будь-якому значенні змінної a вираз

$2a^2(a - 5) - a(-6a + 2a^2 + 3a^3) - 4$ набуває від'ємних значень.

279. Доведіть, що при будь-якому значенні змінної m вираз $5(m^2 - 3m + 1) - 3m(m - 5)$ набуває лише додатних значень.

280. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $4a - 2(5a - 1) + (8a - 2)$, якщо $a = -3,5$;

2) $10(2 - 3x) + 12x - 9(x + 1)$, якщо $x = -\frac{1}{27}$;

3) $a(3a - 4b) - b(3b - 4a)$, якщо $a = -5$, $b = 5$;

4) $3xy(5x^2 - y^2) - 5xy(3x^2 - y^2)$, якщо $x = \frac{1}{8}$, $y = -2$.

281. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $7a(2a - 0,1) - 0,1a(10a - 7)$, якщо $a = \frac{1}{13}$;

2) $4x(2x - 5y) - 2y(4y - 10x)$, якщо $x = -15$, $y = 15$.

282. Перетворіть на многочлен стандартного вигляду:

1) $3a(5a^2 - 3ab + ab^3 - b^2) \cdot b$;

2) $-xy \cdot (x^2y - 2x^2y^2 + 3xy^3 + x^3) \cdot x^2$.

283. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{5x-9}{4} + \frac{5x-7}{4} = 1$;

2) $\frac{3x-1}{14} - \frac{x}{7} = -2$;

3) $\frac{x-6}{3} + \frac{2x+3}{3} = 2x$;

4) $\frac{2-x}{5} - \frac{x}{15} = \frac{1}{3}$.

284. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{7x-3}{6} - \frac{5x+1}{2} = 0$;

2) $\frac{x-3}{5} - \frac{x}{4} = 1$;

3) $\frac{4x+1}{6} + \frac{10x+1}{6} = x$;

4) $\frac{x+2}{15} = \frac{1}{3} - \frac{x}{5}$.

285. При якому значенні змінної:

1) значення виразу $2(3y + 1)$ у 4 рази більше за значення виразу $3y - 2$;

2) добуток виразів $3x$ і $2x + 1$ дорівнює сумі виразів $x(4x - 1)$ і $2(x^2 - 3)$?

286. Для виготовлення одного тістечка потрібно на 4 г цукру більше, ніж для виготовлення одного пиріжка або одного пончика. За день у кондитерському цеху було виготовлено 80 тістечок, 50 пончиків і 50 пиріжків. При цьому на всі тістечка

пішло на 80 г цукру більше, ніж на всі пончики і пиріжки разом. Скільки грамів цукру йде на виготовлення одного тістечка?

287. За 8 олівців, 4 ручки і блокнот заплатили 26 грн 50 коп. Олівець на 1 грн 75 коп. дешевший за ручку і на 3 грн 25 коп. дешевший за блокнот. Скільки коштують окремо олівець, ручка і блокнот?

288. Одна катушка бавовняних ниток коштує 5 грн 40 коп., а льняних – 6 грн 50 коп. Бабуся для плетіння серветок придбала бавовняних ниток на 6 катушок більше, ніж льняних, витративши на всю покупку 175 грн 20 коп. Скільки катушок бавовняних і скільки катушок льняних ниток придбала бабуся?



289. Човен плыв 3,5 год за течією річки і 2,5 год проти течії. Відстань, яку він проплив за течією річки, на 30 км більша за відстань, яку він проплив проти течії. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії 2 км/год.

290. Якими одночленами треба замінити зірочки, щоб одержати тотожність:

- 1) $5ax^2 \cdot (* + *) = 5ax^3 + 35ax^2$;
- 2) $(9a^2 + *) \cdot 3a = * + 18a^5$;
- 3) $(* - 4mc^2) \cdot * = 3m^3c^2 - 12m^2c^4$;
- 4) $(* - *) \cdot x^2y^3 = 5x^2y^3 - 7x^2y^4$?

291. Які одночлени треба вписати в клітинки, щоб одержати тотожність:

- 1) $3a^2(\square - \square) = 9a^5 - 12a^2$;
- 2) $(\square + \square) \cdot 5ab^2 = 5ab^2 + 10a^2b^3$;
- 3) $(\square - 2m^2a) \cdot 7m = 14m^2 - \square$;
- 4) $(7x^2a - 9xa^2) \cdot \square = 14x^3a^5 - \square$?

4 292. Спростіть вираз (n – натуральне число):

- 1) $x^{n+3}(x^{n+4} - x) - x^{2n+7}$;
- 2) $y^n(y^{n+2} - y^n - y^2) - y^2(y^{2n} - y^n)$;
- 3) $z^n(z^2 - 1) - z^2(z^n + 2) - 2(z^n - z^2)$.



Вправи для повторення

293. У яких координатних чвертях розташовуються точки $A(-5; -7)$, $B(4; -8)$, $C(1; 17)$, $D(-9; 8)$?

294. Спростіть: 1) $(-3a^2b^3)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}ab^2\right)^3$; 2) $(0,1mn^7)^2 \cdot (-10m^2n^3)^3$.

295. Використовуючи властивості степенів, знайдіть значення виразу:

$$1) \frac{24^{17} \cdot 6^{16}}{48^{16} \cdot 3^{17}}; \quad 2) \frac{35^9 \cdot 2^7}{5^7 \cdot 14^8}.$$



Цікаві задачі для учнів неледачих



296. Відомо, що при деяких натуральних значеннях a і b значення виразу $6a + b$ кратне числу 7. Доведіть, що при тих самих значеннях a і b значення виразу $6b + a$ також кратне числу 7.



10. РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ СПОСОБОМ ВИНЕСЕННЯ СПІЛЬНОГО МНОЖНИКА ЗА ДУЖКИ

У 6 класі ми розкладали складені числа на прості множники, тобто подавали натуральні числа у вигляді добутку. Наприклад, $12 = 2^2 \cdot 3$; $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ тощо.

Подати у вигляді добутку можна і деякі многочлени. Це означає, що ці многочлени можна розкласти на множники. Наприклад, $5x - 5y = 5(x - y)$; $a^3 + 3a^2 = a^2(a + 3)$ тощо.



Розкласти многочлен на множники означає подати його у вигляді добутку одночлена на многочлен або добутку кількох многочленів так, щоб цей добуток був тожно рівним даному многочлену.

Розглянемо один зі способів розкладання многочленів на множники – *винесення спільного множника за дужки*. Одним з відомих нам прикладів такого розкладання є розподільна властивість множення $a(b + c) = ab + ac$, якщо її записати у зворотному порядку: $ab + ac = a(b + c)$. Це означає, що многочлен $ab + ac$ розклали на два множники a і $b + c$.

Під час розкладання на множники многочленів із цілими коефіцієнтами множник, який виносять за дужки, обирають так, щоб члени многочлена, який залишиться в дужках, не мали спільного буквенного множника, а модулі їх коефіцієнтів не мали спільних дільників.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Розкласти вираз на множники:

1) $8m + 4$; 2) $at + 7ap$; 3) $15a^3b - 10a^2b^2$.

Розв'язання. 1) Спільним множником є число 4, тому
 $8m + 4 = 4 \cdot 2m + 4 \cdot 1 = 4(2m + 1)$.

2) Спільним множником є змінна a , тому
 $at + 7ap = a(t + 7p)$.

3) У даному випадку спільним числовим множником є найбільший спільний дільник чисел 10 і 15 – число 5, а спільним буквеним множником є одночлен a^2b . Отже,

$$15a^3b - 10a^2b^2 = 5a^2b \cdot 3a - 5a^2b \cdot 2b = 5a^2b(3a - 2b).$$

Приклад 2. Розкласти на множники:

1) $2m(b - c) + 3p(b - c)$; 2) $x(y - t) + c(t - y)$.

Розв'язання.

1) У даному випадку спільним множником є двочлен $b - c$.
 Отже, $2m(b - c) + 3p(b - c) = (b - c)(2m + 3p)$.

2) Доданки мають множники $y - t$ і $t - y$, які є протилежними виразами. Тому в другому доданку винесемо за дужки множник -1 , одержимо: $c(t - y) = -c(y - t)$.

Отже, $x(y - t) + c(t - y) = x(y - t) - c(y - t) = (y - t)(x - c)$.

Для перевірки правильності розкладання на множники слід перемножити отримані множники. Результат має дорівнювати даному многочлену.

Розкладання многочленів на множники часто спрощує процес розв'язування рівняння.

Приклад 3. Знайти корені рівняння $5x^2 - 7x = 0$.

Розв'язання. Розкладемо ліву частину рівняння на множники винесенням спільного множника за дужки: $x(5x - 7) = 0$. Враховуючи, що добуток дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один із множників дорівнює нулю, матимемо: $x = 0$ або $5x - 7 = 0$, звідки $x = 0$ або $x = 1,4$.

Відповідь: 0; 1,4.



Яке перетворення називають розкладанням многочлена на множники? На прикладі многочлена $ab + ac$ поясніть, як виконується розкладання на множники винесенням спільного множника за дужки.

297. (Усно) Знайдіть спільний множник у виразі:

- 1) $3a + 3b$; 2) $5m - 5$; 3) $ab - at$; 4) $pt + pk$.

298. (Усно) Розкладіть на множники:

- 1) $xt + xp$; 2) $17a - 17b$; 3) $am - an$; 4) $2p + 2q$.

299. Внесіть за дужки спільний множник:

- 1) $4a + 4x$; 2) $7p - 7b$; 3) $ax + ay$; 4) $xb - xc$.

300. Внесіть за дужки спільний множник:

- 1) $2m - 2n$; 2) $5a + 5b$; 3) $ab + cb$; 4) $xy - xt$.

301. (Усно) Чи правильно виконано розкладання на множники:

- 1) $7a + 7 = 7a$; 2) $5m - 5 = 5(m - 5)$;
 3) $2a - 2 = 2(a - 1)$; 4) $7xy - 14x = 7x(y - 2)$;
 5) $5mn + 5n = 5m(n + 3)$; 6) $7ab + 8cb = 15b(a + c)$?

302. Запишіть суму у вигляді добутку:

- 1) $3a + 12b$; 2) $-6a - 9x$; 3) $17a + 17$;
 4) $-ab - a$; 5) $14a - 21x$; 6) $8b - 8$.

303. Розкладіть на множники:

- 1) $4m - 16a$; 2) $-12m + 18a$; 3) $14m - 14$;
 4) $-xb - b$; 5) $8p + 8$; 6) $20b - 30c$.

304. Розкладіть на множники:

- 1) $5ab + 5xb$; 2) $2xy - 8y$; 3) $-5ab + 5a$;
 4) $7a + 21ay$; 5) $9x^2 - 27x$; 6) $3a - 9a^2$;
 7) $m^2 - ma$; 8) $12ax - 4a^2$; 9) $-18xy + 24y^2$;
 10) $a^2b - ab^2$; 11) $pt - p^2m$; 12) $-x^2y^2 - xy$.

305. Внесіть за дужки спільний множник:

- 1) $7ax - 7bx$; 2) $3ab + 9a$; 3) $6xm - 8xp$;
 4) $15xy + 5x$; 5) $9m^2 - 18m$; 6) $15m - 30m^2$;
 7) $9xy + 6x^2$; 8) $a^2b - ab$; 9) $-p^2q - pq^2$.

306. Розкладіть на множники:

- 1) $x^3 - x^2$; 2) $a^4 + a^2$; 3) $m^3 - m^5$;
 4) $a^3 + a^7$; 5) $3b^2 - 9b^3$; 6) $7a^3 + 6a$;
 7) $4y^2 + 12y^4$; 8) $5m^5 + 15m^2$; 9) $-16a^4 - 20a$.

307. Розкладіть на множники:

- 1) $m^4 - m^2$; 2) $a^4 + a^5$; 3) $6a - 12a^3$;
 4) $18p^3 - 12p^2$; 5) $14b^3 + 7b^4$; 6) $-25m^3 - 20m$.

308. Запишіть суму $6x^2y + 15x$ у вигляді добутку і знайдіть його значення, якщо $x = -0,5$, $y = 5$.

309. Запишіть вираз $12a^2b - 8a$ у вигляді добутку і знайдіть його значення, якщо $a = 2$, $b = \frac{1}{3}$.

310. Винесіть за дужки спільний множник:

- 1) $a^4 + a^3 - a^2$; 2) $m^9 - m^2 + m^7$;
 3) $b^6 + b^5 - b^9$; 4) $-y^7 - y^{12} - y^3$.

311. Подайте у вигляді добутку:

- 1) $p^7 + p^3 - p^4$; 2) $a^{10} - a^5 + a^8$;
 3) $b^7 - b^5 - b^2$; 4) $-m^8 - m^2 - m^4$.

312. Обчисліть зручним способом:

- 1) $132 \cdot 27 + 132 \cdot 73$; 2) $119 \cdot 37 - 19 \cdot 37$.

313. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 - 2x = 0$; 2) $x^2 + 4x = 0$.

314. Знайдіть корені рівняння:

- 1) $x^2 + 3x = 0$; 2) $x^2 - 7x = 0$.

315. Розкладіть многочлен на множники:

- 1) $4a^3 + 2a^2 - 8a$; 2) $9b^3 - 3b^2 - 27b^5$;
 3) $16m^2 - 24m^6 - 32m^3$; 4) $-5b^3 - 20b^2 - 25b^5$.

316. Винесіть за дужки спільний множник:

- 1) $5c^8 - 5c^7 + 10c^4$; 2) $9m^4 + 27m^3 - 81m$;
 3) $8p^7 - 4p^5 + 10p^3$; 4) $21b - 28b^4 - 14b^3$.

317. Винесіть за дужки спільний множник:

- 1) $7m^4 - 21m^2n^2 + 14m^3$; 2) $12a^2b - 18ab^2 + 30ab^3$;
 3) $8x^2y^2 - 4x^3y^5 + 12x^4y^3$; 4) $-5p^4q^2 - 10p^2q^4 + 15p^3q^3$.

318. Розкладіть многочлен на множники:

- 1) $12a - 6a^2x^2 - 9a^3$; 2) $12b^2y - 18b^3 - 30b^4y$;
 3) $16bx^2 - 8b^2x^3 + 24b^3x$; 4) $60m^4n^3 - 45m^2n^4 + 30m^3n^5$.

319. Обчисліть зручним способом:

- 1) $843 \cdot 743 - 743^2$; 2) $1103^2 - 1103 \cdot 100 - 1103 \cdot 3$.

320. Знайдіть значення виразу:

- 1) $4,23a - a^2$, якщо $a = 5,23$;
- 2) $x^2y + x^3$, якщо $x = 2,51$, $y = -2,51$;
- 3) $am^5 - m^6$, якщо $m = -1$, $a = -5$;
- 4) $-xy - x^2$, якщо $x = 2,7$, $y = 7,3$.

321. Знайдіть значення виразу:

- 1) $9,11a + a^2$, якщо $a = -10,11$;
- 2) $5ax^2 + 5a^2x$, якщо $a = \frac{2}{5}$; $x = \frac{3}{5}$.

322. Розкладіть многочлен на множники:

- 1) $2p(x - y) + q(x - y)$;
- 2) $a(x + y) - (x + y)$;
- 3) $(a - 7) - b(a - 7)$;
- 4) $5(a + 1) + (a + 1)^2$;
- 5) $(x + 2)^2 - x(x + 2)$;
- 6) $-5m(m - 2) + 4(m - 2)^2$.

323. Подайте вираз у вигляді добутку:

- 1) $a(x - y) + b(y - x)$;
- 2) $p(b - 5) - n(5 - b)$;
- 3) $7x(2b - 3) + 5y(3 - 2b)$;
- 4) $(x - y)^2 - a(y - x)$;
- 5) $5(x - 3)^2 - (3 - x)$;
- 6) $(a + 1)(2b - 3) - (a + 3)(3 - 2b)$.

324. Розкладіть на множники:

- 1) $3x(b - 2) + y(b - 2)$;
- 2) $(m^2 - 3) - x(m^2 - 3)$;
- 3) $a(b - 9) + c(9 - b)$;
- 4) $7(a + 2) + (a + 2)^2$;
- 5) $(c - m)^2 - 5(m - c)$;
- 6) $-(x + 2y) - 5(x + 2y)^2$.

325. Знайдіть корені рівняння:

- 1) $4x^2 - x = 0$;
- 2) $7x^2 + 28x = 0$;
- 3) $\frac{1}{9}x^2 + x = 0$;
- 4) $\frac{2}{11}x^2 - \frac{3}{11}x = 0$.

326. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $12x^2 + x = 0$;
- 2) $0,2x^2 - 2x = 0$;
- 3) $\frac{1}{14}x^2 - x = 0$;
- 4) $1\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x = 0$.

327. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x(3x + 2) - 5(3x + 2) = 0$;
- 2) $2x(x - 2) - 5(2 - x) = 0$.

328. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x(4x + 5) - 7(4x + 5) = 0$;
- 2) $7(x - 3) - 2x(3 - x) = 0$.

329. Доведіть, що значення виразу:

- 1) $17^3 + 17^2$ кратне числу 18;
- 2) $9^{14} - 81^6$ кратне числу 80.

330. Доведіть, що значення виразу:

- 1) $39^9 - 39^8$ ділиться на 38;
- 2) $49^5 - 7^8$ ділиться на 48.

4 331. Винесіть за дужки спільний множник:

- 1) $(5m - 10)^2$;
- 2) $(18a + 27b)^2$.

332. Знайдіть корені рівняння:

- 1) $x(x - 3) = 7x - 21$;
- 2) $2x(x - 5) = 20 - 4x$.

333. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x(x - 2) = 4x - 8$;
- 2) $3x(x - 4) = 28 - 7x$.

334. Доведіть, що число:

- 1) $10^4 + 5^3$ ділиться на 9;
- 2) $4^{15} - 4^{14} + 4^{13}$ ділиться на 13;
- 3) $27^3 - 3^7 + 9^3$ ділиться на 25;
- 4) $21^3 + 14^3 - 7^3$ ділиться на 34.



Вправи для повторення

2 335. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

- 1) $-3x^2 + 7x^2 - 4x^2 + 3x^2$, якщо $x = 0,1$;
- 2) $8m + 5n - 7m + 15n$, якщо $m = 7$, $n = -1$.

3 336. Запишіть замість зірочок такі коефіцієнти одночленів, щоб рівність перетворилася на тотожність:

- 1) $2m^2 - 4mn + n^2 + (*m^2 - *mn - *n^2) = 3m^2 - 9mn - 5n^2$;
- 2) $7x^2 - 10y^2 - xy - (*x^2 - *xy + *y^2) = -x^2 + 3y^2 + xy$.

4 337. Довжина прямокутника втричі більша за його ширину. Якщо довжину прямокутника зменшити на 5 см, то його площа зменшиться на 40 см². Знайдіть довжину і ширину прямокутника.



Цікаві задачі для учнів неледачих



338. Відомо, що $a < b < c$. Чи можуть одночасно виконуватися нерівності $|a| > |c|$ і $|b| < |c|$?

§ 11. МНОЖЕННЯ МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

Помножимо многочлен $a + b$ на многочлен $x + y$. Позначимо многочлен $x + y$ буквою m . Маємо:

$$(a + b)(x + y) = (a + b)m = am + bm.$$

У виразі $am + bm$ підставимо замість m многочлен $x + y$ і знову скористаємося правилом множення одночлена на многочлен:

$$am + bm = a(x + y) + b(x + y) = ax + ay + bx + by.$$

Отже,

$$(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by.$$

Многочлен $ax + ay + bx + by$ є сумою всіх одночленів, які одержано множенням кожного члена многочлена $a + b$ на кожний член многочлена $x + y$.

Приходимо до *правила множення многочлена на многочлен*.



Щоб помножити многочлен на многочлен, треба кожний член одного многочлена помножити на кожний член другого многочлена і одержані добутки додати.

Процес множення многочлена на многочлен можна подати схематично:

$$(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by.$$

Результатом множення многочлена на многочлен є многочлен. Якщо перший із співмножників добутку містить m членів, а другий – n членів, то, перемноживши їх, одержимо многочлен, що міститиме mn членів, а після зведення подібних доданків ця кількість може зменшитися.

Приклад 1. Виконати множення $(2x - y)(4x - 3xy + 2y)$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} (2x - y)(4x - 3xy + 2y) &= 8x^2 - 6x^2y + \underline{4xy} - \underline{4xy} + 3xy^2 - 2y^2 = \\ &= 8x^2 - 6x^2y + 3xy^2 - 2y^2. \end{aligned}$$

Приклад 2. Спростити вираз $(2x - 7)(x - 3) - 2x(x + 4)$.

Розв'язання.


$$(2x - 7)(x - 3) - 2x(x + 4) = \underline{2x^2} - \underline{6x} - \underline{7x} + 21 - \underline{2x^2} - \underline{8x} = -21x + 21.$$

Якщо необхідно перемножити більше ніж два многочлени, то спочатку перемножують деякі два з них, потім отриманий результат множать на третій многочлен і т. д.

Приклад 3. Виконати множення: $(x - 2)(x + 3)(x + 1)$.

Розв'язання. Спочатку помножимо перший многочлен на другий, а потім отриманий результат помножимо на третій многочлен: $(x - 2)(x + 3)(x + 1) = (x^2 + \underline{3x} - \underline{2x} - 6)(x + 1) = (x^2 + x - 6) \cdot (x + 1) = x^3 + \underline{x^2} + \underline{x^2} + \underline{x} - \underline{6x} - 6 = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.



Сформулюйте правило множення многочлена на многочлен.  Як перемножити більше ніж два многочлени?

1 339. (Усно) Знайдіть добуток:

- 1) $(x + y)(m + p)$; 2) $(c - 2)(b + 1)$;
3) $(3 - t)(a - b)$; 4) $(1 - p)(2 - a)$.

340. Виконайте множення:

- 1) $(a - b)(x + y)$; 2) $(c + d)(m + n)$;
3) $(c - a)(m - y)$; 4) $(a + 5)(b - 2)$.

341. Перемножте двочлени:

- 1) $(c - 8)(d + 1)$; 2) $(m + n)(a + b)$;
3) $(a + 2)(x - 3)$; 4) $(m - p)(a - d)$.

2 342. Спростіть вираз:

- 1) $(a + 3)(a + 2)$; 2) $(y - 2)(y + 4)$; 3) $(2 - p)(p + 1)$;
4) $(b - 5)(2b + 1)$; 5) $(3a - 4)(2a + 1)$; 6) $(5y - 3)(1 - 2y)$.

343. Спростіть вираз:

- 1) $(y + 2)(y - 3)$; 2) $(a - 3)(a - 2)$; 3) $(4 - p)(p + 3)$;
4) $(5a - 2)(a + 3)$; 5) $(4b - 3)(2b - 1)$; 6) $(7m - 2)(1 + 2m)$.

344. Подайте вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду:

- 1) $(2 + 4x)(2y - 1)$; 2) $(x^2 + a)(x - a^2)$;
3) $(4p - 2m)(3p + 5m)$; 4) $(2x^2 - 1)(3x + 1)$;
5) $(7x^2 - 4x)(3x - 2)$; 6) $(b - 2)(3b^3 - 4b^2)$;
7) $(m^2 - 2m)(3m - 7m^2)$; 8) $(n^3 - 2n^2)(n + 7)$.

345. Спростіть вираз:

- 1) $(3m^2 - p)(m^2 + p)$; 2) $(5a^2 + b)(b^2 - 4a^2)$;
 3) $(12a^2 - 3)(5a - 7a^2)$; 4) $(2a^3 - 3a^2)(a + 5)$.

346. Виконайте множення:

- 1) $(m - n)(a + b - 1)$; 2) $(3 - a)(p + 5 - m)$;
 3) $(a + x - 3)(n + 2)$; 4) $(c - d - 7)(x + y)$.

347. Перетворіть вираз на многочлен:

- 1) $(a + b)(m - 2 + p)$; 2) $(5 - x)(m - n - p)$;
 3) $(x + y - 2)(a - m)$; 4) $(p + q + 3)(-a - x)$.

348. Виконайте дії:

- 1) $(2x + 7)(2x - 4) + 28$; 2) $5m^2 + (3 - 5m)(m + 2)$;
 3) $(a + 7)(a - 2) - a(a + 5)$; 4) $(2b + 1)(3b - 1) - (6b^2 - 1)$.

349. Спростіть вираз:

- 1) $(2p - 1)(3p + 5) - 6p^2$; 2) $12 + (3m - 2)(5m + 6)$;
 3) $(m + 3)(m - 5) - m(m - 2)$; 4) $(3a - 2)(4a + 1) - (12a^2 - 2)$.

350. Перетворіть вираз на многочлен стандартного вигляду і знайдіть його значення:

- 1) $(2a - 3)(3a + 5) - 6a^2$, якщо $a = 13,5$;
 2) $(5x - 1)(1 - 2x) - 7x$, якщо $x = -2$.

351. Спростіть вираз і обчисліть його значення:

- 1) $(7x + 3)(2x - 1) - 14x^2$, якщо $x = -8$;
 2) $(2a + 4)(1 - 3a) + 10a$, якщо $a = -1$.

352. Виконайте дії:

- 1) $x(x - 5) + (x + 4)(x + 2)$;
 2) $(m + 3)(m - 4) - m(m - 1) + 5$;
 3) $(a + 3)a - (a + 1) + (4 - a)(4 + a)$;
 4) $(y + 2)(y - 3) - 2y(1 - y)$.

353. Спростіть вираз:

- 1) $(5x - 1)(4x + 7) - 4x(5x - 8)$;
 2) $(a + 3)(a - 2) - a(a + 9) + 6$;
 3) $2x(3x - 1) + (x - 9)(5x - 6)$;
 4) $(2x + 3)(5x - 4) - 2x(x - 3) - 13(x - 1)$.

354. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(x - 1)(x + 2) - x^2 = -8$; 2) $(3x + 1)(5 - 2x) + 6x^2 = 5$.

355. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 3)(2x - 1) - 2x^2 = 7$; 2) $10x^2 + (5x - 1)(4 - 2x) = -4$.

356. Перетворіть вираз на многочлен стандартного вигляду:

1) $(a^2 + ab - b^2)(a - b)$; 2) $(x^2 - xy - y^2)(x + y)$;

3) $(m - n)(-m^2 - 3mn + n^2)$; 4) $(p - 2)(p^2 + 3p - 4)$;

5) $(9 - 4m - m^2)(m - 2)$; 6) $(y^2 - 3y - 7)(4y - 2)$.

357. Виконайте множення та спростіть одержаний вираз:

1) $(a + b)(-a^2 + ab - b^2)$; 2) $(x - y)(-x^2 - xy + y^2)$;

3) $(7a^2 + a - 1)(a + 1)$; 4) $(2m^2 - 3m - 2)(m + 5)$.

358. Перетворіть на многочлен стандартного вигляду:

1) $(3m + 2n)(9m^2 - 6mn + 4n^2)$; 2) $(4x^2 + 10xy + 25y^2)(2x - 5y)$;

3) $(-x^2 + 3xa - a^2)(x + 2a)$; 4) $(3m - x)(5mx - m^2 + x^2)$.

359. Подайте добуток у вигляді многочлена:

1) $(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$; 2) $(9a^2 - 2ab - b^2)(3a + 2b)$.

360. Виконайте дії:

1) $9m^2 - (3m - 2)(3m + 7)$; 2) $18y - (3y + 1)(6y + 4)$;

3) $(a + 4)a - (a + 2)(a - 2)$; 4) $(b + 7)(b + 1) - (b + 8)(b - 1)$.

361. Спростіть вираз:

1) $8x - (x + 5)(x + 3)$; 2) $a(a + 8) - (a + 2)(a - 5)$;

3) $12x^2 + 5 - (4x + 7)(3x - 1)$; 4) $(x + 1)(x - 5) - (x + 3)(x - 7)$.

362. Перетворіть на многочлен стандартного вигляду:

1) $a^2(a - 2)(a + 5)$; 2) $-5m^2(m - 1)(2 - m)$;

3) $-4x^3(2x - 3)(x - x^2)$; 4) $0,2b^2(5b + 10)(b^2 - 2)$.

363. Розкрийте дужки і спростіть одержаний вираз:

1) $m^2(m - 4)(m + 2)$; 2) $-a^2(2a - 3)(3a + 7)$;

3) $-5b^3(2b + b^2)(b - 1)$; 4) $0,5x^2(2x - 6)(x^2 + x)$.

364. Доведіть тотожність:

1) $(m - 3)(m + 7) - 10 = (m + 8)(m - 4) + 1$;

2) $(2x - 1)(3x + 5) + 9x = (3x - 1)(2x + 5) + 3x$.

365. Доведіть, що для кожного значення змінної a :

1) значення виразу $(a - 8)(a + 3) - (a - 7)(a + 2)$ дорівнює -10 ;

2) значення виразу $(a^2 - 2)(a^2 + 5) - (a^2 - 4)(a^2 + 4) - 3a^2$ дорівнює 6 .

366. Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної:

$$1) (m - 7)(m + 1) - (m + 2)(m - 8);$$

$$2) a^2(a^2 - 1) - (a^2 - 2)(a^2 + 3) + 2a^2.$$

367. Доведіть, що при будь-якому значенні змінної a значення виразу $(a + 7)(a - 3) - 4(a - 8)$ є додатним числом.

368. Запишіть вираз у вигляді многочлена:

$$1) (x - y)^2; \quad 2) (p + 2a)^2; \quad 3) (4x - 3y)^2; \quad 4) (7a + 2b)^2.$$

369. Перетворіть вираз на многочлен:

$$1) (2a - 3b)^2; \quad 2) (4x + 5y)^2.$$

370. Спростіть вираз і обчисліть його значення:

$$1) (2x^2 - x)(3x^2 + x) - (x^2 + x)(6x^2 - 2x), \text{ якщо } x = -2;$$

$$2) (a + 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2) - 8b^3, \text{ якщо } a = 3, b = -2015.$$

371. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

$$1) (x - 9)(x + 9) - (x - 3)(x + 27), \text{ якщо } x = 1\frac{1}{8};$$

$$2) 8a^3 - (2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2), \text{ якщо } a = -\frac{7}{8}, b = \frac{1}{3}.$$

372. Знайдіть корені рівняння:

$$1) 4x - (x + 2)(x - 3) = (5 - x)(x + 3);$$

$$2) 2x(x + 1) - (x + 2)(x - 3) = x^2 + 7.$$

373. Розв'яжіть рівняння:

$$1) x(2x - 5) - x^2 = 2 - (x - 1)(2 - x);$$

$$2) 2x^2 - (x + 1)(x + 19) = (x + 3)(x - 2) + 8.$$

374. Замість зірочки запишіть такі одночлени, щоб рівність стала тотожністю:

$$1) (x - 1)(* + 3) = x^2 + * - *; \quad 2) (y + 2)(y - *) = * + y - *.$$

375. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n значення виразу:

$$1) (n + 2)(n + 3) - n(n - 1) \text{ є кратним числу } 6;$$

$$2) (n - 5)(n + 8) + (n + 1)(2n - 5) + 46 \text{ при діленні на } 3 \text{ дає в остачі } 1.$$

376. Знайдіть три послідовних натуральних числа, якщо квадрат меншого з них на 44 менший від добутку двох інших.

377. Дано два добутки $27 \cdot 18$ і $12 \cdot 42$. На яке одне й те саме число треба зменшити кожен із чотирьох множників, щоб значення нових добутків стали між собою рівними?

378. Дано два добутки $22 \cdot 15$ і $27 \cdot 12$. На яке одне й те саме число треба збільшити кожен із чотирьох множників, щоб значення нових добутків стали між собою рівними?

4 **379.** Виконайте множення:

$$1) (a^2 - 2a + 1)(a^2 + 3a - 7); \quad 2) (7 - 2b + 3b^2)(2b^2 - 2b - 1).$$

380. Виконайте множення:

$$1) (x^2 - x - 1)(x^2 + 3x + 5); \quad 2) (7 - a - 2a^2)(a^2 + 3a - 1).$$

381. Знайдіть чотири послідовних цілих числа, якщо добуток двох більших з них на 78 більший за добуток двох менших.

382. Знайдіть чотири послідовних натуральних числа, якщо добуток двох менших з них на 102 менший від добутку двох більших.

383. Перетворіть вираз на многочлен стандартного вигляду:

$$1) (a + 2)(a - 1)(a + 3); \quad 2) (a - 4)(a - 7)(a + 1).$$

384. Виконайте множення:

$$1) (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1);$$

$$2) (b - 1)(b^4 + b^3 + b^2 + b + 1).$$

385. Периметр прямокутника дорівнює 60 см. Якщо його довжину збільшити на 1 см, а ширину зменшити на 3 см, то його площа зменшиться на 45 см^2 . Знайдіть довжину і ширину даного прямокутника.



Вправи для повторення

386. Швидкість автомобіля – 70 км/год, а мотоцикла – 50 км/год. Шлях від села до міста мотоцикл долає на 2 год довше, ніж автомобіль. Знайдіть відстань від села до міста.

387. Знайдіть додатне число, яке при піднесенні до квадрата:

$$1) \text{ збільшується у 4 рази}; \quad 2) \text{ зменшується у 5 разів}.$$

4 **388.** У першій каністрі було втричі більше бензину, ніж у другій. Коли з першої каністри перелили 2 л у другу, виявилося, що тепер об'єм бензину другої каністри складає $\frac{5}{7}$ від об'єму першої. Скільки бензину було в кожній каністрі спочатку?

389. Подайте вираз у вигляді різниці двох многочленів, один з яких містить змінну x , а другий її не містить:

1) $(5x^2 - 8b + a) - (b^2 - 5x + 1) - (2b - x^2 + 7x)$;

2) $(8mx^2 + 7mn^2 - p) - (x^2 + mx^2 + 2p) - 17x$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



390. Обчисліть: $2 \frac{124}{125} \cdot 4 \frac{2}{129} + 3 \frac{1}{125} \cdot 5 \frac{2}{129} - \frac{12}{129}$.

§ 12. РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ СПОСОБОМ ГРУПУВАННЯ

У § 10 ми ознайомилися з розкладанням многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки. Існують й інші способи розкладання многочленів на множники, наприклад, *спосіб групування*.

Приклад 1. Розкласти на множники многочлен

$$ab - 5a + 2b - 10.$$

Р о з в' я з а н н я. У даному випадку в усіх членів цього многочлена немає спільного множника. Тому тут доцільно застосувати саме спосіб групування. Розіб'ємо доданки на дві групи так, щоб доданки в кожній групі мали спільний множник:

$$ab - 5a + 2b - 10 = (ab - 5a) + (2b - 10).$$

З кожної групи винесемо спільний множник за дужки:

$$(ab - 5a) + (2b - 10) = a(b - 5) + 2(b - 5).$$

Тепер одержаний для обох груп спільний множник $b - 5$ винесемо за дужки:

$$a(b - 5) + 2(b - 5) = (b - 5)(a + 2).$$

Отже, $ab - 5a + 2b - 10 = (b - 5)(a + 2)$.

Згрупувати доданки даного многочлена можна було і в інший спосіб.

$$\text{Наприклад, } ab - 5a + 2b - 10 = (ab + 2b) + (-5a - 10) = b(a + 2) - 5(a + 2) = (a + 2)(b - 5).$$

Приходимо до висновку, що для розкладання многочлена на множники способом групування варто виконувати дії у такій послідовності:



- 1) розбити многочлен на групи доданків, кожна з яких містить спільний множник;
- 2) з кожної групи винести спільний множник за дужки;
- 3) спільний для всіх груп множник, що утворився, винести за дужки.

Для перевірки правильності розкладання слід перемножити одержані множники. Добуток цих множників має дорівнювати даному многочлену.

Приклад 2. Розкласти на множники многочлен

$$2a + 2b - t + at + bt - 2.$$

Розв'язання. 1-й спосіб. Згрупуємо члени многочлена у три групи по два доданки так, щоб доданки в кожній групі мали спільний множник. Матимемо:

$$2a + 2b - t + at + bt - 2 = (2a + at) + (2b + bt) + (-t - 2) = \\ = a(2 + t) + b(2 + t) - 1(2 + t) = (2 + t)(a + b - 1).$$

2-й спосіб. Згрупуємо тепер члени многочлена у дві групи по три доданки так, щоб доданки у кожній групі мали спільний множник. Матимемо:

$$2a + 2b - t + at + bt - 2 = (2a + 2b - 2) + (at + bt - t) = \\ = 2(a + b - 1) + t(a + b - 1) = (a + b - 1)(2 + t).$$

Приклад 3. Розкласти на множники тричлен $x^2 - 6x + 8$.

Розв'язання. Враховуючи, що $-6x = -2x + (-4x)$, можемо переписати многочлен як суму чотирьох доданків, згрупувати їх і далі розкласти на множники:

$$x^2 - 6x + 8 = x^2 - 2x - 4x + 8 = (x^2 - 2x) + (-4x + 8) = \\ = x(x - 2) - 4(x - 2) = (x - 2)(x - 4).$$

Якби ми подали доданок $-6x$ у вигляді суми двох якихось інших доданків, то не змогли б застосувати групування і розкласти на множники. Пропонуємо пересвідчитися в цьому самостійно. «Секрет» полягає в тому, що саме доданки $-2x$ і $-4x$ сприяли появі спільного множника після розбиття многочлена на групи.



Яку послідовність дій застосовують для розкладання на множники способом групування?

391. У многочлені $ca - 2c + 5a - 10$ назвіть групу зі спільним множником a і групу зі спільним множником 2 .

392. Закінчіть розкладання многочлена на множники:

$$xy + yt - 2x - 2t = (xy - 2x) + (yt - 2t) = x(y - 2) + t(y - 2) = \dots$$

393. Закінчіть розкладання многочлена на множники:

$$ab - cd - ad + cb = (ab - ad) + (cb - cd) = a(b - d) + c(b - d) = \dots$$

394. Подайте вираз у вигляді добутку многочленів:

1) $a(b + c) + 3b + 3c$; 2) $p(x - y) + 7x - 7y$;

3) $m(t - 5) + t - 5$; 4) $b(m - c) + c - m$.

395. Розкладіть на множники:

1) $c(x - y) + 3x - 3y$; 2) $a(c + m) + 9c + 9m$;

3) $x(c + 5) + c + 5$; 4) $y(p - 3) + 3 - p$.

396. Розкладіть многочлен на множники:

1) $ax + ay + 6x + 6y$; 2) $5m - 5n + pm - pn$;

3) $9p + mn + 9n + mp$; 4) $ab + ac - b - c$;

5) $1 - by - y + b$; 6) $ma + 2a - 2m - 4$.

397. Подайте у вигляді добутку многочленів:

1) $ab + 5a + bm + 5m$; 2) $mp - b + bp - m$;

3) $am - b + m - ab$; 4) $cm - 3dm + cp - 3dp$.

398. Запишіть вираз $ab - ac + 2b - 2c$ у вигляді добутку та знайдіть його значення, якщо $a = -1$; $b = 5,7$; $c = 6,7$.

399. Запишіть вираз $5x - 5y + xt - yt$ у вигляді добутку та знайдіть його значення, якщо $x = 7,2$; $y = 6,2$; $t = -4,5$.

400. Подайте у вигляді добутку многочленів:

1) $a^3 + a^2 + a + 1$; 2) $b^5 - b^3 - b^2 + 1$;

3) $c^4 + 3c^3 - c - 3$; 4) $a^6 - 5a^4 - 3a^2 + 15$;

5) $m^2 - mn - 8m + 8n$; 6) $ab - 9b + b^2 - 9a$;

7) $7t - ta + 7a - t^2$; 8) $xy - ty - y^2 + xt$.

401. Розкладіть на множники:

1) $x^2 + bx - b^2y - bxy$;

2) $a^2b + c^2 - abc - ac$;

3) $7a^3m + 14a^2 - 6bm - 3am^2b$;

4) $21x + 8tm^3 - 24m^2 - 7xmt$.

402. Подайте многочлен у вигляді добутку:

1) $b^2 + xb - x^2y - xby$; 2) $m^2 + 7m - bm - 7b$;

3) $4a - ax + 4x - x^2$; 4) $ma - mb - m^2 + ab$.

403. Обчисліть значення виразу найзручнішим способом:

1) $157 \cdot 37 + 29 \cdot 157 + 143 \cdot 42 + 24 \cdot 143$;

2) $9\frac{2}{3} \cdot 5\frac{1}{2} - 16 \cdot 4,5 + 10\frac{1}{3} \cdot 5\frac{1}{2} - 16$.

404. Знайдіть значення виразу, попередньо розклавши вираз на множники:

1) $5m^2 - 5mn - 7m + 7n$, якщо $m = 1,4$; $n = -5,17$;

2) $3a^3 - 2b^3 - 6a^2b^2 + ab$, якщо $a = \frac{1}{3}$; $b = \frac{2}{3}$.

405. Знайдіть значення виразу, попередньо розклавши вираз на множники:

1) $27x^3 + x^2 + 27x + 1$, якщо $x = -\frac{1}{27}$;

2) $5p + px^2 - p^2x - 5x$, якщо $p = 2,5$; $x = 2,4$.

406. Запишіть вираз у вигляді добутку:

1) $45x^3y^4 - 9x^5y^3 - 15x^2y^2 + 3x^4y$;

2) $2,1mn^2 - 2,8mp^2 - 2,7n^3 + 3,6np^2$.

407. Розкладіть на множники:

1) $8m^2c - 6m^2x - 16cx^3 + 12x^4$;

2) $1,2xy^3 + 1,6x^3y^2 - 2x^7y - 1,5x^5y^2$.

 **408.** Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 5x + 40 = 8x$; 2) $5y^3 + 2y^2 + 5y + 2 = 0$.

409. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 7x - 7 = x$; 2) $7y^3 + y^2 + 7y + 1 = 0$.

410. Розкладіть на множники:

1) $at^2 - ap + t^3 - tp - bt^2 + bp$;

2) $ax^2 + ay^2 - mx^2 - my^2 + m - a$;

3) $mb - m + 7 - 7b - 7m^2 + m^3$;

4) $6ax + 3ay - az - 6bx - 3by + bz$.

411. Розкладіть на множники:

1) $a^2b + a + ab^2 + b + 9ab + 9$;

2) $8ax + 4bx - 4x + 10am + 5bm - 5m$.

412. Розкладіть на множники тричлен:

1) $x^2 + 5x + 4$; 2) $x^2 - 5x + 4$;

3) $x^2 + x - 6$; 4) $a^2 + 4ab + 3b^2$.

413. Розкладіть на множники:

- 1) $x^2 - 6x + 5$; 2) $x^2 - x - 6$;
 3) $x^2 + 2x - 15$; 4) $a^2 + 5ab + 6b^2$.



Вправи для повторення

2 414. Спростіть вираз та знайдіть його значення:

- 1) $0,8(a - 5) - 0,6(2 - a)$, якщо $a = -5$;
 2) $\frac{4}{7}(7x - 14y) - \frac{2}{9}(18x - 27y)$, якщо $x = 2015$, $y = -\frac{1}{2}$.

3 415. Знайдіть корінь рівняння:

- 1) $6x(x - 1) - 2x(3x - 5) = -8$;
 2) $5(2 - x^2) - 4x(x - 1) = 3x(1 - 3x)$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



416. Знайдіть усі натуральні значення n , при яких виконується нерівність

$$\frac{7}{12} < \frac{n}{63} < \frac{11}{18}.$$

Домашня самостійна робота № 2

Кожне завдання має по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть варіант правильної відповіді.

17 1. Який з виразів не є многочленом?

- А) $\frac{a}{a-5}$; Б) $x^2 - 2x + 7$; В) $-b - 19$; Г) $6c^2$.

2. $k(n - m) = \dots$

- А) $kn - m$; Б) $n - km$; В) $kn + km$; Г) $kn - km$.

3. $4c + 8 = \dots$

- А) $2(c + 4)$; Б) $4(c + 2)$; В) $8(c + 1)$; Г) $4(c - 2)$.

2 4. Якому з многочленів дорівнює вираз $(x - 5)(x + 2)$?

- А) $x^2 + 3x - 10$; Б) $x^2 - 3x - 10$;
 В) $x^2 + 3x + 10$; Г) $x^2 - 3x - 3$.

5. Подайте вираз $(3m^2 - m) + (4m^2 - 5) - (7m^2 + 3)$ у вигляді многочлена стандартного вигляду.

- А) $14m^2 - m - 2$; Б) $-m - 2$; В) $-m - 8$; Г) $8 - m$.

6. Розкладіть вираз $am - an - 2m + 2n$ на множники.

- А) $(m - n)(a - 2)$; Б) $(m - n)(a + 2)$;
В) $(m + n)(a - 2)$; Г) $(m - a)(n - 2)$.

3 7. При якому значенні x значення різниці одночлена $8x$ і многочлена $3x - 4x^2 + 2$ дорівнює значенню многочлена $3x + 4x^2 - 4$?

- А) 2; Б) 1; В) -1; Г) 0.

8. Обчисліть $297 \cdot 397 - 397^2$ найзручнішим способом.

- А) 39 700; Б) -39 700; В) -29 700; Г) 29 700.

9. Знайдіть значення виразу $(x - 5)(x + 2) - (x - 7)(x + 4)$, якщо $x = 10,2$.

- А) 18,2; Б) 18; В) 28,2; Г) 7,8.

4 10. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 7x = 2(x + 7)$.

- А) -7; 2; Б) -7; В) 2; Г) -2; 7.

11. Значення виразу $27^4 - 3^9$ є кратним числу ...

- А) 7; Б) 11; В) 13; Г) 17.

12. Знайдіть найбільше із чотирьох послідовних парних чисел, якщо добуток першого і третього чисел на 44 менший від добутку двох інших.

- А) 10; Б) 6; В) 18; Г) 14.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ДО § 7 – § 12

1 Виконайте множення:

- 1) $m(a - b + 3)$; 2) $-p(x + y - 4)$.

2. Винесіть за дужки спільний множник:

- 1) $7a - 7b$; 2) $xt + yt$.

3. Виконайте множення:

- 1) $(a + 2)(x - 3)$; 2) $(b - 5)(c - m)$.

2 4. Перетворіть вираз на многочлен стандартного вигляду:

- 1) $(2x^2 - x) + (3x - 5) - (x^2 - 5)$;
2) $-2xy(x^2 - 3xy + y^2)$.

5. Розкладіть многочлен на множники:


1) $9a^2 - 12ab$; 2) $7x - 7y + ax - ay$.

6. Спростіть вираз $(x + 5)(x - 2) - x(x + 3)$.


 7. Розв'яжіть рівняння $(2x + 3)(3x - 7) = x(6x - 3) - 17$.

8. Розкладіть многочлен на множники:

1) $9m^3 - 3m^4 - 27m^8$; 2) $m^2 + 2n - 2m - mn$.

 9. Знайдіть чотири послідовних цілих числа, добуток двох менших з яких на 90 менший за добуток двох більших.

Додаткові вправи

 10. Доведіть, що сума п'яти послідовних натуральних чисел ділиться на 5.

11. Розв'яжіть рівняння $x^2 - 5x = 4x - 20$.

12. Перетворіть вираз на многочлен стандартного вигляду:

1) $(x^2 - 2x + 5)(x^2 + 3x - 1)$; 2) $(a + 3)(a - 5)(a - 1)$.


13. КВАДРАТ СУМИ І КВАДРАТ РІЗНИЦІ


Піднесемо до квадрата двочлен $a + b$:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Отже,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

 Одержану тотожність називають **формулою квадрата суми**. Ця тотожність дає змогу підносити до квадрата суму двох довільних виразів не за правилом множення многочленів, а **скорочено**: одразу записувати квадрат $(a + b)^2$ у вигляді $a^2 + 2ab + b^2$. Тому формулу квадрата суми називають ще **формулою скороченого множення**. Читають її так.

 **Квадрат суми двох виразів дорівнює квадрату першого виразу, плюс подвоєний добуток першого на другий, плюс квадрат другого виразу.**

Приклад 1. Подайте вираз $(3x + 5y)^2$ у вигляді многочлена.

Розв'язання.

$$(3x + 5y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5y + (5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2.$$

Якщо проміжні дії можна виконати усно, то можливо одразу записувати відповідь:

$$(3x + 5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2.$$

Піднесемо тепер до квадрата двочлен $a - b$:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Отже,

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Одержали *формулу квадрата різниці*, яка також є формулою скороченого множення. Читають її так.

Квадрат різниці двох виразів дорівнює квадрату першого виразу, мінус подвоєний добуток першого на другий, плюс квадрат другого виразу.

Зауважимо, що формулу квадрата різниці можна одержати, якщо переписати різницю $a - b$ у вигляді суми $a + (-b)$:

$$(a - b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a \cdot (-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Приклад 2. Піднести двочлен $4a - 7b$ до квадрата.

Розв'язання. За формулою квадрата різниці маємо:
 $(4a - 7b)^2 = (4a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot 7b + (7b)^2 = 16a^2 - 56ab + 49b^2.$

Нам уже відомо, що $x^2 = (-x)^2$, тому при піднесенні до квадрата виразів вигляду $-a - b$ і $-a + b$ доцільно попередньо замінити їх на протилежні їм вирази:

$$(-a - b)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(-a + b)^2 = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Приклад 3. Перетворити на многочлен:

1) $(-x - 6m)^2$; 2) $(-2p^2 + 9q)^2$.

Розв'язання.

1) $(-x - 6m)^2 = (x + 6m)^2 = x^2 + 12xm + 36m^2$;

2) $(-2p^2 + 9q)^2 = (2p^2 - 9q)^2 = 4p^4 - 36p^2q + 81q^2$.

Приклад 4. Спростити вираз $(-5m^3 - 2n^2)^2 + (2m^3 - 5n^2)^2$.

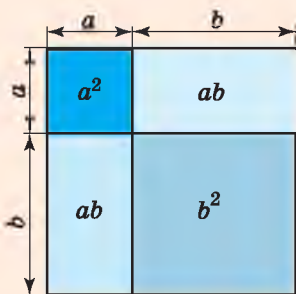
Розв'язання. $(-5m^3 - 2n^2)^2 + (2m^3 - 5n^2)^2 = (5m^3 + 2n^2)^2 + 4m^6 - 20m^3n^2 + 25n^4 = \underline{25m^6} + \underline{20m^3n^2} + \underline{4n^4} + 4m^6 - \underline{20m^3n^2} + \underline{25n^4} = 29m^6 + 29n^4.$

А ще раніше...

Деякі правила скороченого множення були відомі стародавнім китайським і грецьким математикам більше ніж 4 тисячі років тому. Тоді вони формулювали ці правила не за допомогою букв, а словами, і доводили геометрично, тобто тільки для додатних чисел.

Наприклад, тотожність $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ у другій книзі «Начал» Евкліда (III ст. до н. е.) формулювалася так: «Якщо пряма лінія (мається на увазі відрізок) як-небудь розсічена, то квадрат на всій прямій дорівнює квадратам на відрізках разом із двічі узятим прямокутником, що міститься між відрізками». Тут «квадрат на всій прямій» слід розуміти як $(a + b)^2$, «квадрати на відрізках» як a^2 і b^2 , «прямокутник, що міститься між відрізками» як ab .

Геометричний зміст цієї тотожності зображено на малюнку 4.



Мал. 4

Запишіть і прочитайте формулу квадрата суми. ● Запишіть і прочитайте формулу квадрата різниці. ● Як піднести до квадрата вирази $-a - b$ і $-a + b$?

17 417. (Усно) Які з виразів є квадратами суми двох виразів, а які – квадратами різниці:

- 1) $a^2 + b^2$; 2) $(m - n)^2$; 3) $a^2 - b^2$; 4) $(c + 5)$;
 5) $(a + 2)^2$; 6) $(a - 5)^3$; 7) $(2 - p)^2$; 8) $(t + m)^2$?

418. (Усно) Які з рівностей є правильними:

- 1) $(a - 2)^2 = a^2 - 2^2$;
 2) $(b + 3)^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot 3 + 3^2$;
 3) $(m + 5)^2 = m^2 + m \cdot 5 + 5^2$;
 4) $(7 - p)^2 = 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot p + p^2$?

419. Які з рівностей є правильними:

- 1) $(m - 3)^2 = m^2 - 2 \cdot m \cdot 3 + 3^2$;
 2) $(p + 7)^2 = p^2 + 7^2$;
 3) $(2 - a)^2 = 2^2 - 2 \cdot a + a^2$;
 4) $(b + 3)^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot 3 + 3^2$?

420. Подайте у вигляді многочлена:

- 1) $(a + c)^2$; 2) $(m - x)^2$; 3) $(b + t)^2$; 4) $(p - y)^2$.

421. Піднесіть до квадрата:

1) $(m - n)^2$; 2) $(x + b)^2$; 3) $(p - c)^2$; 4) $(a + d)^2$.

422. (Усно) Подайте вираз у вигляді многочлена:

1) $(a + 4)^2$; 2) $(x - 3)^2$; 3) $(b + 2)^2$; 4) $(m - 5)^2$.

423. Піднесіть до квадрата:

1) $(x - 9)^2$; 2) $(a + 3)^2$; 3) $(10 - m)^2$;
4) $(7 + y)^2$; 5) $(c - 0,2)^2$; 6) $(0,8 + x)^2$.

424. Перетворіть на многочлен:

1) $(2x + 5)^2$; 2) $(7b - 4)^2$; 3) $(10x + 3y)^2$;
4) $(9a - 4b)^2$; 5) $\left(\frac{1}{3}x + 3y\right)^2$; 6) $(5m - 0,2t)^2$.

425. Перетворіть на многочлен:

1) $(a - 3)^2$; 2) $(x + 9)^2$; 3) $(c + 0,3)^2$;
4) $(2a - 5)^2$; 5) $(4y + 3)^2$; 6) $(9a - 8b)^2$;
7) $(4b + 7a)^2$; 8) $\left(\frac{1}{2}m - 2n\right)^2$; 9) $(0,5p + 2q)^2$.

426. Виконайте дії:

1) $(3a + 1)^2 - 1$; 2) $12ab + (2a - 3b)^2$;
3) $(4a + 8)^2 - 16(a^2 + 4)$; 4) $-4y^2 + (5x - 2y)^2 - 25x^2$.

427. Спростіть:

1) $20a + (a - 10)^2$; 2) $(3m + 5)^2 - 9m^2$;
3) $(x + 4)^2 - 8(x + 2)$; 4) $(2a - 7b)^2 - (4a^2 + 49b^2)$.

428. Перетворіть вираз на многочлен стандартного вигляду:

1) $(a - 2)^2 + a(a + 4)$; 2) $(b + 1)(b + 2) + (b - 3)^2$.

429. Спростіть вираз:

1) $(m - 5)^2 - m(m - 10)$; 2) $(x + 4)^2 + (x + 1)(x - 9)$.

430. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x + 3)^2 - x^2 = 12$; 2) $(y - 2)^2 = y^2 - 2y$.

431. Розв'яжіть рівняння:


1) $(x - 4)^2 - x^2 = 24$; 2) $(y + 5)^2 = 5y + y^2$.

432. Заповніть у зошиті таблицю за зразком:

Вираз I	Вираз II	Квадрат різниці виразів I і II
$2x$	b	$4x^2 - 4xb + b^2$
	$7b$	$4x^2 - 28xb + 49b^2$
$3x$		$9x^2 - 2xb + \frac{1}{9}b^2$
$0,5x$	$4b$	

433. Заповніть у зошиті таблицю за зразком:

Вираз I	Вираз II	Квадрат суми виразів I і II
$3m$	a	$9m^2 + 6ma + a^2$
$5m$		$25m^2 + 20ma + 4a^2$
	$4a$	$\frac{1}{16}m^2 + 2ma + 16a^2$
$0,6m$	$5a$	
		$\frac{1}{9}m^2 + 6ma + 81a^2$

 434. За формулою квадрата суми або квадрата різниці обчисліть:

- 1) $(100 + 2)^2$; 2) 41^2 ; 3) 99^2 ; 4) $3,8^2$.

435. Обчисліть, використовуючи формули квадрата суми або квадрата різниці:

- 1) $(40 - 1)^2$; 2) 89^2 ; 3) 501^2 ; 4) $4,02^2$.

436. Серед виразів $(x - y)^2$, $(x + y)^2$, $(-y + x)^2$, $(-x - y)^2$ знайдіть ті, що є тотожно рівними виразу:

- 1) $(y + x)^2$; 2) $(y - x)^2$.

437. Подайте у вигляді многочлена:

- 1) $(-p + 5)^2$; 2) $(-a - 7)^2$; 3) $(-p - 2m)^2$; 4) $(-3b + c)^2$.

438. Перетворіть на многочлен:

- 1) $(-a + 3)^2$; 2) $(-b - 5)^2$; 3) $(-4m + p)^2$; 4) $(-a - 3b)^2$.

439. Перетворіть на многочлен:

- 1) $(-9b + 4m)^2$; 2) $(-7a - 10b)^2$; 3) $(-0,5m - 0,4p)^2$;
 4) $\left(-1\frac{1}{2}x + 6y\right)^2$; 5) $(0,04p - 50q)^2$; 6) $(-0,25c - 0,2d)^2$.

440. Подайте у вигляді многочлена:

- 1) $(-3a + 5x)^2$; 2) $(-8x - 5y)^2$; 3) $(-4b - 0,5y)^2$;
 4) $\left(8x + \frac{1}{16}y\right)^2$; 5) $(-0,02a - 10b)^2$; 6) $(-0,15m + 0,1n)^2$.

441. Виконайте дію:

- 1) $(a^2 - 9)^2$; 2) $(7 - y^3)^2$; 3) $(2a + c^4)^2$;
 4) $(-5a + b^3)^2$; 5) $(4a^2 - 5m^3)^2$; 6) $\left(\frac{1}{3}p^4 + 9q^3\right)^2$.

442. Піднесіть до квадрата:

- 1) $(a^2 + 2a)^2$; 2) $\left(\frac{1}{4}m^3 - 12m\right)^2$; 3) $\left(1\frac{1}{3}p^7 + 3p^2\right)^2$;
 4) $(7ab - 2b^3)^2$; 5) $\left(10p^6 + \frac{1}{2}p^4a^3\right)^2$; 6) $(0,2m^2n + 15m^3n^4)^2$.

443. Подайте вираз у вигляді многочлена:

- 1) $(b^7 - 5)^2$; 2) $(a^3 + 2b^4)^2$;
 3) $\left(8x^6 - \frac{1}{4}x^2\right)^2$; 4) $\left(6m^3 + 1\frac{1}{6}m^5\right)^2$;
 5) $(7a^2 + 8ap^3)^2$; 6) $\left(\frac{1}{2}b^2m^3 - \frac{1}{3}b^3m^2\right)^2$.

444. Спростіть вираз:

- 1) $(3a - 4b)^2 - (3a + 4b)^2$; 2) $(2a + 3b)^2 + (a - 6b)^2$;
 3) $a(2a - 1)^2 - 4a(a + 5)^2$; 4) $12m^2 - 3(2m - n)^2 - 12mn$.

445. Виконайте дії:

- 1) $(7a + 9b)^2 - (7a - 9b)^2$; 2) $(10a - 3b)^2 + (6a + 5b)^2$;
 3) $18x^2 - 12xy - 2(3x - y)^2$; 4) $a(9a - 1)^2 - 81a(a - 2)^2$.

446. Які одночлени треба записати замість зірочки, щоб утворилася тотожність:

- 1) $(* + 2a)^2 = b^2 + 4ab + 4a^2$; 2) $(2b - *)^2 = 4b^2 + 9 - 12b$;
 3) $(3a^4 + *)^2 = * + 30a^4 + 25$; 4) $(5x^2 - *)^2 = 25x^4 - * + 9m^2$

447. Замініть зірочку одночленом так, щоб одержати тотожність:

- 1) $(* - 7)^2 = x^2 - 14x + 49$; 2) $(4p^3 + *)^2 = * + 9 + 24p^3$.

448. Подайте вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду:

1) $(x - 2)(x + 1)^2$; 2) $(x + 1)(x - 5)^2$.

449. Доведіть тотожність:

1) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$;

2) $m^2 + n^2 = (m + n)^2 - 2mn$.

450. Доведіть тотожність:

1) $-4ab = (a - b)^2 - (a + b)^2$; 2) $(x - y)^2 + 2xy = x^2 + y^2$.

451. Розв'яжіть рівняння:


1) $(3x - 4)^2 - (3x + 2)^2 = -24$;

2) $(2x - 3)^2 + (1 - x)(9 + 4x) = 18$.

452. Розв'яжіть рівняння:

1) $x(x - 2) - (x + 5)^2 = -1$;

2) $(2y - 7)^2 + (5 - 4y)(y - 7) = 3(y - 6)$.

 453. Використовуючи малюнок 5, поясніть геометричний зміст формули $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ для $a > 0$, $b > 0$, $a > b$.

454. Спростіть вираз:

$$(((a + b)^2 - 2ab)^2 - 2a^2b^2)^2 - 2a^4b^4)^2 - 2a^8b^8.$$

455. Доведіть формулу скороченого множення для:

1) куба суми: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

2) куба різниці: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Р о з в' я з а н н я.

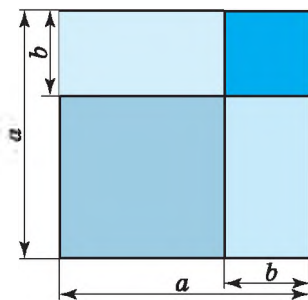
$$\begin{aligned} 1) (a + b)^3 &= (a + b)^2(a + b) = \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = \\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3 = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{aligned}$$

456. Піднесіть до куба за формулами скороченого множення:

1) $(a + 2)^3$; 2) $(2b - 1)^3$.

457. Піднесіть до куба:

1) $(x - 2)^3$; 2) $(2m + 1)^3$.



Мал. 5



Вправи для повторення

458. Знайдіть значення виразу: $\left(5,4 : \frac{9}{35} - 11\frac{2}{9}\right) \cdot 2,25 - 4\frac{2}{7}$.

459. Знайдіть три послідовних парних натуральних числа, якщо добуток двох менших з них на 104 менший від добутку двох більших.

460. Доведіть, що значення виразу:

1) $8^{10} - 8^9 + 8^8$ є кратним числу 152;

2) $15^4 - 10^4 - 5^4$ ділиться на 80.



Цікаві задачі для учнів неледачих



461. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n значення виразу $(n^2 + n)(n + 2)$ ділиться на 6.

§ 14. РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ ЗА ДОПОМОГОЮ ФОРМУЛ КВАДРАТА СУМИ І КВАДРАТА РІЗНИЦІ

Формули квадрата суми і квадрата різниці можна використовувати також для розкладання на множники виразів вигляду $a^2 + 2ab + b^2$ і $a^2 - 2ab + b^2$. Для цього перепишемо ці формули, помінявши місцями їх ліву і праву частини.



$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Такий вигляд формул зручно використовувати для перетворення тричлена у квадрат двочлена.

Тричлен вигляду $a^2 + 2ab + b^2$ або $a^2 - 2ab + b^2$ називають *повним квадратом*. Саме його можна подати у вигляді квадрата двочлена.

Наприклад, $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ і $a^2 - 6a + 9 = (a - 3)^2$, тому тричлени $x^2 + 4x + 4$ і $a^2 - 6a + 9$ є повними квадратами. Перетворення тричлена, що є повним квадратом, у квадрат двочлена називають *згортанням у повний квадрат*.

Оскільки $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ і $(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$, то згортання у повний квадрат є розкладанням тричлена на множники.

Приклад 1. Розкласти тричлен $4x^2 + 12x + 9$ на множники.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки $4x^2 = (2x)^2$; $12x = 2 \cdot 2x \cdot 3$ і $9 = 3^2$, то тричлен $4x^2 + 12x + 9$ є квадратом суми $2x + 3$, отже, його можна розкласти на множники:

$$4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = (2x + 3)^2.$$

Приклад 2. Знайти значення виразу $x^2 + 25y^4 - 10xy^2$, якщо $x = 44$, $y = -3$.

Р о з в' я з а н н я. Спочатку згорнемо тричлен у повний квадрат:

$$x^2 + 25y^4 - 10xy^2 = x^2 - 10xy^2 + 25y^4 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5y^2 + (5y^2)^2 = (x - 5y^2)^2.$$

Тепер виконати обчислення буде зовсім нескладно. Якщо $x = 44$, $y = -3$, то $(x - 5y^2)^2 = (44 - 5 \cdot (-3)^2)^2 = (44 - 45)^2 = (-1)^2 = 1$.

Приклад 3. Перетворити тричлен $-16a^2 + 8ab - b^2$ на вираз, протилежний квадрату двочлена.

Р о з в' я з а н н я. Винесемо за дужки -1 , а одержаний в дужках вираз згорнемо в повний квадрат:

$$-16a^2 + 8ab - b^2 = -(16a^2 - 8ab + b^2) = -((4a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot b + b^2) = -(4a - b)^2.$$



Наведіть приклад тричлена, що є квадратом суми; квадратом різниці.

462. (Усно) Розкладіть на множники:

$$1) t^2 + 2mn + n^2; \quad 2) p^2 - 2pq + q^2; \quad 3) a^2 + 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2.$$

463. Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена:

$$1) c^2 - 2cd + d^2; \quad 2) x^2 + 2xy + y^2; \quad 3) m^2 - 2 \cdot m \cdot 5 + 5^2.$$

464. Розкладіть тричлен на множники:

$$1) t^2 + 2tp + p^2; \quad 2) a^2 - 2ax + x^2; \quad 3) b^2 + 2 \cdot b \cdot 7 + 7^2.$$

465. Розкладіть на множники:

$$1) a^2 - 6a + 9; \quad 2) 64 + 16b + b^2; \quad 3) 0,01m^2 + 0,2m + 1; \\ 4) \frac{1}{25} - \frac{2}{5}p + p^2; \quad 5) 4m^2 - 12m + 9; \quad 6) 9c^2 + 24cd + 16d^2.$$

466. Подайте вираз у вигляді квадрата двочлена:

1) $a^2 + 4a + 4$;

2) $9m^2 - 6m + 1$;

3) $b^2 - 1,2b + 0,36$;

4) $\frac{1}{49}m^2 - \frac{2}{7}m + 1$;

5) $81a^2 + 18ab + b^2$;

6) $25m^2 - 60mn + 36n^2$.

467. Знайдіть значення виразу, попередньо згорнувши його у повний квадрат:

1) $a^2 - 2a + 1$, якщо $a = 91$; -19 ;

2) $4m^2 + 28m + 49$, якщо $m = -3,5$; 0 ;

3) $16x^2 - 40xy + 25y^2$, якщо $x = 5$, $y = 4$.

468. Знайдіть значення виразу:

1) $a^2 + 10a + 25$, якщо $a = -15$; 95 ;

2) $0,01x^2 + 0,8x + 16$, якщо $x = 10$; -40 ;

3) $4m^2 + 28mn + 49n^2$, якщо $m = -3$, $n = -\frac{1}{7}$.

469. Обчисліть зручним способом:

1) $36^2 + 2 \cdot 36 \cdot 14 + 14^2$;

2) $117^2 - 2 \cdot 117 \cdot 17 + 17^2$.

470. Обчисліть зручним способом:

1) $87^2 + 2 \cdot 87 \cdot 13 + 13^2$;

2) $137^2 - 2 \cdot 137 \cdot 47 + 47^2$.

471. Перетворіть тричлен у квадрат двочлена:

1) $\frac{1}{4}m^2 + 4n^2 + 2mn$;

2) $-10mn + 0,25m^2 + 100n^2$;

3) $9p^2 + pq + \frac{1}{36}q^2$;

4) $m^6 + 4n^2 - 4m^3n$;

5) $25m^{12} + p^6 - 10m^6p^3$;

6) $\frac{9}{64}c^6 - 3dc^5 + 16d^2c^4$.

472. Розкладіть на множники:

1) $\frac{1}{9}a^4 + 9b^2 + 2a^2b$;

2) $-6,4a^2y^4 + 0,16a^4 + 64y^8$;

3) $16m^{20} + n^{12} - 8m^{10}n^6$;

4) $6a^4b^2 + a^6 + 9a^2b^4$.

473. Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена або виразу, протилежного до квадрата двочлена:

1) $-1 + 4x - 4x^2$;

2) $-40a + 25a^2 + 16$;

3) $24xy - 9x^2 - 16y^2$;

4) $-140x^3y + 100x^6 + 49y^2$;

5) $4pq - 25p^2 - 0,16q^2$;

6) $-0,64m^6 - 1,6m^3n^2 - n^4$.

474. Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена або виразу, що є протилежним до квадрата двочлена:

- 1) $-9 - 30x - 25x^2$; 2) $-36b + 81b^2 + 4$;
 3) $42xy - 49x^2 - 9y^2$; 4) $-0,36a^4 - 25b^6 + 6a^2b^3$.

475. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 - 10x + 25 = 0$; 2) $64y^2 + 16y + 1 = 0$;
 3) $9x^2 + 1 = -6x$; 4) $16y^2 = 56y - 49$.

476. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 + 16x + 64 = 0$; 2) $36x^2 - 12x + 1 = 0$;
 3) $4x^2 + 9 = -12x$; 4) $x^2 = 0,4x - 0,04$.

477. Запишіть замість зірочки такий одночлен, щоб одержаний тричлен можна було перетворити на квадрат двочлена:

- 1) $* - 2mn + n^2$; 2) $25a^2 + 20a + *$;
 3) $64m^2 + * + 49b^2$; 4) $* - 12bm^3 + 9b^2$;
 5) $p^2 - 0,8p^7 + *$; 6) $* + a^2b^3 + \frac{1}{4}a^4$.

478. Запишіть замість зірочки такий одночлен, щоб одержаний тричлен можна було подати у вигляді квадрата двочлена:

- 1) $* - 28x + 49$; 2) $64a^2 - 16a + *$;
 3) $25a^2 + * + \frac{1}{25}b^6$; 4) $0,01a^8 + 100b^6 + *$.

479. Розкладіть вираз на множники:

- 1) $(x - 2)^2 + 2(x - 2) + 1$; 2) $(a^2 + 6a + 9) + 2(a + 3) + 1$.

480. Доведіть, що нерівність є правильною при будь-якому значенні x :

- 1) $x^2 + 2 > 0$; 2) $x^2 - 6x + 9 \geq 0$.

481. Порівняйте з нулем значення виразу:

- 1) $x^2 - 4x + 4$; 2) $-x^2 + 2x - 1$.

482. Вставте пропущені знаки \leq або \geq так, щоб при будь-яких значеннях x нерівність була правильною:

- 1) $x^2 + 4x + 4 \dots 0$; 2) $-x^2 + 30x - 225 \dots 0$;
 3) $-x^2 - 8x - 16 \dots 0$; 4) $36 - 12x + x^2 \dots 0$.

483. Доведіть, що при будь-яких значеннях змінної вираз $x^2 + 4x + 5$ набуває лише додатних значень. Якого найменшого значення набуває цей вираз і при якому значенні x ?

484. Доведіть, що при будь-якому значенні змінної вираз $x^2 + 6x + 11$ набуває лише додатних значень. Якого найменшого значення набуває цей вираз і при якому значенні x ?

485. Замініть зірочки одночленами так, щоб одержаний тричлен був повним квадратом (знайдіть три різних розв'язки задачі):

1) $* - 48xy + *$; 2) $* + 20ab + *$.

486. Подайте вираз у вигляді квадрата двочлена, якщо це можливо:

1) $x^2 - 3x + 9$; 2) $49a^2 - 140ab + 100b^2$;

3) $4a^2 - 9b^2 - 12ab$; 4) $16y^2 + 8y - 1$;

5) $\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{40}xy + \frac{1}{25}y^2$; 6) $-xy + \frac{1}{16}y^2 + 4x^2$.



Вправи для повторення

487. При яких значеннях x :

1) квадрат двочлена $x + 2$ на 225 більший за квадрат двочлена $x - 3$;

2) квадрат двочлена $2x - 6$ у 4 рази більший за квадрат двочлена $x + 3$?

488. Спростіть вираз:

1) $(m - 2)(m + 3)(m - 5)$; 2) $(p^2 + 1)(p^8 - p^6 + p^4 - p^2 + 1)$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



489. Маємо пісочні годинники двох видів: одними відміряють 7 хв, а іншими – 11 хв. Як за допомогою цих годинників відміряти рівно 15 хв?

§ 15. МНОЖЕННЯ РІЗНИЦІ ДВОХ ВИРАЗІВ НА ЇХ СУМУ

Помножимо різницю $a - b$ на суму $a + b$:

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

Отже,

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$



Одержали ще одну формулу скороченого множення. Її читають так.



Добуток різниці двох виразів на їх суму дорівнює різниці квадратів цих виразів.

Розглянемо приклади застосування цієї формули.

Приклад 1. Виконати множення: 1) $(2m - 3p)(2m + 3p)$;
2) $(4a^2 + b^3)(b^3 - 4a^2)$.

Розв'язання. 1) $(2m - 3p)(2m + 3p) = (2m)^2 - (3p)^2 = 4m^2 - 9p^2$, або скорочено: $(2m - 3p)(2m + 3p) = 4m^2 - 9p^2$.

2) $(4a^2 + b^3)(b^3 - 4a^2) = (b^3 + 4a^2)(b^3 - 4a^2) = (b^3)^2 - (4a^2)^2 = b^6 - 16a^4$.

Приклад 2. Подати добуток $(-5m - 7a)(5m - 7a)$ у вигляді многочлена.

Розв'язання. 1-й спосіб. Винесемо у виразі $-5m - 7a$ за дужки -1 . Матимемо:

$$(-5m - 7a)(5m - 7a) = -1 \cdot (5m + 7a)(5m - 7a) = -((5m)^2 - (7a)^2) = -(25m^2 - 49a^2) = -25m^2 + 49a^2 = 49a^2 - 25m^2.$$

2-й спосіб. У кожному із множників спочатку поміняємо місцями доданки:

$$(-5m - 7a)(5m - 7a) = (-7a - 5m)(-7a + 5m) = (-7a)^2 - (5m)^2 = 49a^2 - 25m^2.$$

Приклад 3. Обчислити зручним способом $4,3 \cdot 3,7$.

Розв'язання.

$$4,3 \cdot 3,7 = (4 + 0,3)(4 - 0,3) = 4^2 - 0,3^2 = 16 - 0,09 = 15,91.$$



Якому виразу дорівнює добуток різниці двох виразів на їх суму? Запишіть і прочитайте відповідну формулу.

490. (Усно) Які з рівностей є тотожностями:

- 1) $(a - m)(a + m) = a^2 - m^2$; 2) $(c + p)(c - p) = c^2 + p^2$;
3) $(b - x)(b + x) = (b - x)^2$; 4) $(d + n)(d - n) = n^2 - d^2$?

491. Закінчіть запис:

- 1) $(a - 5)(a + 5) = a^2 - 5^2 = \dots$;
2) $(m + 7)(m - 7) = m^2 - 7^2 = \dots$.

492. Знайдіть добуток:

- 1) $(x - y)(x + y)$; 2) $(p + q)(p - q)$.

493. Виконайте множення двочленів:

- 1) $(m + n)(m - n)$; 2) $(c - d)(c + d)$.

494. Виконайте множення:

- 1) $(p - 9)(p + 9)$; 2) $(5 + x)(5 - x)$;
 3) $(3 - c)(3 + c)$; 4) $(7 + y)(y - 7)$.

495. Перетворіть на многочлен:

- 1) $(m - 2)(m + 2)$; 2) $(7 + a)(7 - a)$;
 3) $(4 - x)(4 + x)$; 4) $(11 + b)(b - 11)$.

496. Подайте добуток у вигляді многочлена:

- 1) $(2x - 3)(2x + 3)$; 2) $(3p + 8)(3p - 8)$;
 3) $(4 + 5a)(5a - 4)$; 4) $(3m - 4p)(4p + 3m)$;
 5) $(7a + 10b)(10b - 7a)$; 6) $\left(\frac{1}{4}p - \frac{1}{7}q\right)\left(\frac{1}{7}q + \frac{1}{4}p\right)$.

497. Виконайте множення:

- 1) $(p - 2m)(p + 2m)$; 2) $(2p + 7)(2p - 7)$;
 3) $(2c + 5)(5 - 2c)$; 4) $(8a - 0,3x)(0,3x + 8a)$;
 5) $(0,1p + q)(q - 0,1p)$; 6) $\left(\frac{2}{7}a - \frac{3}{5}b\right)\left(\frac{2}{7}a + \frac{3}{5}b\right)$.

498. Заповніть у зошиті таблицю за зразком:

Вираз I	Вираз II	Добуток різниці виразів I і II на їх суму	Різниця квадратів виразів I і II
$3a$	b	$(3a - b)(3a + b)$	$9a^2 - b^2$
$5m$	$2n$		
$\frac{1}{2}x$	$3y$		
$0,1p$	$0,7q$		
$\frac{1}{7}c$	$\frac{1}{3}d$		

499. Виконайте дії:

- 1) $16 + (3a + 4)(3a - 4)$; 2) $(5m - 3)(5m + 3) - 25m^2$.

500. Спростіть вираз:

- 1) $(8x - 5)(8x + 5) + 25$; 2) $9m^2 + (5 - 3m)(5 + 3m)$;
 3) $(2b - 3)(3 + 2b) - 4b^2$; 4) $(4a + 7)(7 - 4a) - 49$.

501. Розв'яжіть рівняння:


$$1) 3x = (2x - 3)(2x + 3) - 4x^2;$$

$$2) 9x^2 + (8 - 3x)(8 + 3x) = 4x.$$

502. Знайдіть корені рівняння:

$$1) 8x = (5x - 4)(5x + 4) - 25x^2;$$

$$2) (9 - 4x)(9 + 4x) + 16x^2 = 3x.$$

 503. Обчисліть зручним способом:

$$1) (40 - 1)(40 + 1); \quad 2) 81 \cdot 79; \quad 3) 1002 \cdot 998; \quad 4) 1,03 \cdot 0,97.$$

504. Знайдіть значення виразу зручним способом:

$$1) (80 + 2)(80 - 2); \quad 2) 59 \cdot 61; \quad 3) 108 \cdot 92; \quad 4) 12,3 \cdot 11,7.$$

505. Подайте добуток у вигляді многочлена:

$$1) (p^2 + 3q)(3q - p^2); \quad 2) (2a - m^3)(m^3 + 2a);$$

$$3) (5a - b^2)(b^2 + 5a); \quad 4) (0,7m + n^2)(0,7m - n^2);$$

$$5) (4t^2 - p^4)(4t^2 + p^4); \quad 6) (3a^3 - 4b^4)(4b^4 + 3a^3).$$

506. Виконайте множення:

$$1) (1,7a - 1,4p^3)(1,4p^3 + 1,7a);$$

$$2) \left(3a^2 - \frac{1}{4}b^3\right) \left(\frac{1}{4}b^3 + 3a^2\right);$$

$$3) \left(5m^2n + \frac{1}{7}p^3\right) \left(\frac{1}{7}p^3 - 5m^2n\right);$$

$$4) \left(\frac{2}{3}a^7 + 1,2y^8\right) \left(1,2y^8 - \frac{2}{3}a^7\right).$$

507. Виконайте множення:

$$1) (5a + b^2)(b^2 - 5a);$$

$$2) (4a^3 - d^2)(d^2 + 4a^3);$$

$$3) (0,7p - m^7)(m^7 + 0,7p); \quad 4) \left(\frac{1}{5}m^2 + 3b^7\right) \left(3b^7 - \frac{1}{5}m^2\right);$$

$$5) (0,2a^2b - 0,3ab^2)(0,2a^2b + 0,3ab^2);$$

$$6) \left(1,2p^7 - \frac{2}{3}a^8\right) \left(\frac{2}{3}a^8 + 1,2p^7\right).$$

508. Подайте у вигляді многочлена:

$$1) (-a^2 + 7)(7 + a^2);$$

$$2) (-p^2 - q^7)(p^2 - q^7);$$

$$3) (-8m - 5p)(-8m + 5p);$$

$$4) (-2a^3 - 3b)(-3b + 2a^3).$$

509. Спростіть вираз:

- 1) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$; 2) $(2a + x)(4a^2 + x^2)(2a - x)$;
 3) $(c^3 + d^2)(c^3 - d^2)(d^4 + c^6)$;
 4) $(-x - y)(x - y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$.

510. Перетворіть на многочлен:

- 1) $(-a^7 + b^5)(a^7 + b^5)$; 2) $(-0,1m^3 - p^4)(0,1m^3 - p^4)$;
 3) $(3x - 2p)(3x + 2p)(9x^2 + 4p^2)$;
 4) $(-a^2 - 5b^3)(a^2 - 5b^3)(a^4 + 25b^6)$.

511. Замість зірочки запишіть такі одночлени, щоб утворилася тотожність:

- 1) $(2a + *) (2a - *) = 4a^2 - 49b^2$;
 2) $(* - 9p)(* + 9p) = 0,25m^4 - 81p^2$;
 3) $100a^8 - 9b^6 = (* + 10a^4)(10a^4 - *)$;
 4) $(4x - 3y)(* + *) = 16x^2 - 9y^2$.

512. Знайдіть корені рівняння:

- 1) $8x(1 + 2x) - (4x + 1)(4x - 1) = 17$;
 2) $x - 12x(1 - 3x) = 14 - (5 - 6x)(6x + 5)$;
 3) $(4x + 1)(4x - 1) + (2x - 3)^2 = 5x(4x - 11)$.

513. Розв'яжіть рівняння:


- 1) $5x(4x - 1) - (6x - 1)(6x + 1) = (4x + 3)(3 - 4x)$;
 2) $(3x - 4)(3x + 4) - (5x - 2)(5x + 2) = 2x(1 - 8x)$;
 3) $(5x - 4)^2 - 2x(8x - 5) = (3x - 2)(3x + 2)$.

514. Спростіть вираз:

- 1) $(a + 3)^2 - (a + 3)(a - 3)$; 2) $(8x - 3y)(8x + 3y) - (3x - 8y)^2$;
 3) $(b - 3)^2(b + 3)^2$; 4) $(a + 5)^2(5 - a)^2$.

515. Спростіть вираз:

- 1) $(c - 2)^2 - (c - 3)(c + 3)$; 2) $(9x - 2y)(9x + 2y) - (5x - 2y)^2$;
 3) $(a + 6)^2(a - 6)^2$; 4) $(2 - m)^2(m + 2)^2$.

 **516.** Доведіть, що квадрат будь-якого цілого числа завжди перевищує добуток попереднього і наступного чисел на одиницю.

517. Виконайте множення, використавши формули скороченого множення:

- 1) $((x + y) + 1)((x + y) - 1)$; 2) $(a + b + c)(a - (b + c))$;
 3) $(m + n + 2p)(m + n - 2p)$; 4) $(x - y - 2)(x + y + 2)$.



Вправи для повторення

518. Обчисліть: $2,7 \cdot \left(8\frac{7}{12} - 2\frac{17}{36}\right) - 4\frac{1}{3} : 0,65$.

519. Щоб заасфальтувати деяку ділянку дороги за певний час, бригада шляховиків мала асфальтувати по 15 м^2 щогодини. Натомість щогодини вони асфальтували на 3 м^2 більше, тому за 2 год до закінчення терміну їм залишилося заасфальтувати 12 м^2 . Якою була площа ділянки та скільки годин її мали асфальтувати?



Цікаві задачі для учнів неледачих



520. Нехай $a_1; a_2; a_3$ – натуральні числа, $b_1; b_2; b_3$ – ці самі числа, записані в іншому порядку. Доведіть, що добуток $|a_1 - b_1| \cdot |a_2 - b_2| \cdot |a_3 - b_3|$ є парним числом.

§ 16. РОЗКЛАДАННЯ НА МНОЖНИКИ РІЗНИЦІ КВАДРАТІВ ДВОХ ВИРАЗІВ

У тотожності $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ поміняємо місцями ліву і праву частини. Матимемо:



$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Цю тотожність називають *формулою різниці квадратів* двох виразів. Читають її так.



Різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів на їх суму.

Формулу різниці квадратів двох виразів застосовують для розкладання на множники двочлена $a^2 - b^2$. Цю формулу можна використовувати і для розкладання на множники різниці квадратів будь-яких двох виразів.

Приклад 1. Розкласти на множники:

1) $16 - x^2$; 2) $49m^4 - 64p^6$.

Розв'язання. 1) Оскільки $16 = 4^2$, то за формулою різниці квадратів: $16 - x^2 = 4^2 - x^2 = (4 - x)(4 + x)$.

2) Оскільки $49m^4 = (7m^2)^2$, а $64p^6 = (8p^3)^2$, маємо:
 $49m^4 - 64p^6 = (7m^2)^2 - (8p^3)^2 = (7m^2 - 8p^3)(7m^2 + 8p^3)$.

Приклад 2. Обчислити зручним способом: $105^2 - 95^2$.

Розв'язання.

$$105^2 - 95^2 = (105 - 95)(105 + 95) = 10 \cdot 200 = 2000.$$

Відповідь: 2000.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $x^2 - 25 = 0$.

Розв'язання. Оскільки $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$, маємо:

$$x^2 - 25 = 0; \quad (x - 5)(x + 5) = 0;$$

$$x - 5 = 0 \text{ або } x + 5 = 0;$$

$$\text{отже, } x = 5 \text{ або } x = -5.$$

Відповідь: -5; 5.



Запишіть і прочитайте формулу різниці квадратів двох виразів.

521. (Усно) Які з рівностей є тотожностями:

1) $a^2 - b^2 = (a - b)(a - b)$; 2) $m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$;

3) $p^2 + q^2 = (p + q)(p + q)$; 4) $3^2 - x^2 = (3 - x)(3 + x)$?

522. Доберіть замість пропусків такий двочлен, щоб рівність перетворилася на тотожність:

1) $x^2 - 1 = (x - 1)(\dots)$; 2) $4 - p^2 = (\dots)(2 + p)$.

523. Доберіть замість пропусків такий вираз, щоб рівність перетворилася на тотожність:

1) $m^2 - 1 = (\dots)(m + 1)$; 2) $9 - b^2 = (3 - b)(\dots)$.

524. (Усно) Розкладіть на множники:

1) $a^2 - 4$; 2) $36 - b^2$;

3) $4x^2 - 25m^2$; 4) $x^2y^2 - 1$.

525. Подайте многочлен у вигляді добутку різниці і суми:

1) $a^2 - 25$; 2) $16 - p^2$; 3) $d^2 - 1,44$;

4) $0,09 - m^2$; 5) $b^2 - \frac{4}{9}$; 6) $\frac{25}{36} - c^2$.

526. Розкладіть на множники:

1) $36a^2 - b^2$; 2) $-a^2 + b^2$; 3) $49x^2 - 64$;

4) $9m^2 - 16n^2$; 5) $-100m^2 + 121k^2$; 6) $0,25 - a^2b^2$;

7) $16m^2a^2 - 0,01$; 8) $p^2 - c^2d^2$; 9) $81p^2m^2 - n^2$.

527. Подайте многочлен у вигляді добутку різниці й суми:

- 1) $a^2 - 64$; 2) $0,25 - b^2$; 3) $-81 + 36x^2$;
 4) $169p^2 - q^2$; 5) $400a^2 - 25m^2$; 6) $49a^2b^2 - 16$;
 7) $900 - a^2b^2$; 8) $c^2d^2 - 4m^2$; 9) $100a^2b^2 - 0,16m^2$.

528. Обчисліть, застосовуючи формулу різниці квадратів:

- 1) $67^2 - 57^2$; 2) $43^2 - 53^2$; 3) $112^2 - 88^2$;
 4) $21,5^2 - 21,4^2$; 5) $0,725^2 - 0,275^2$; 6) $\left(5\frac{2}{3}\right)^2 - \left(4\frac{1}{3}\right)^2$.

529. Обчисліть зручним способом:

- 1) $43^2 - 33^2$; 2) $27^2 - 37^2$; 3) $0,97^2 - 0,03^2$.

530. Знайдіть значення виразу $x^2 - y^2$, якщо

- 1) $x = 55$; $y = 45$; 2) $x = 2,01$; $y = 1,99$.

531. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $x^2 - 16 = 0$; 2) $\frac{1}{9} - x^2 = 0$; 3) $y^2 - 0,25 = 0$; 4) $4x^2 - 9 = 0$.

532. Знайдіть корені рівняння:

- 1) $x^2 - 36 = 0$; 2) $y^2 - \frac{1}{16} = 0$;
 3) $0,49 - x^2 = 0$; 4) $64y^2 - 49 = 0$.

533. Розкладіть на множники:

- 1) $c^4 - m^6$; 2) $p^8 - a^{10}$; 3) $a^6 - 9m^4$;
 4) $100a^6 - 25x^8$; 5) $0,49 - m^4p^{12}$; 6) $36x^2c^{14} - 0,16d^4$;
 7) $\frac{25}{49}a^8 - \frac{36}{49}b^6c^2$; 8) $-0,01m^2 + 0,81x^6y^8$;
 9) $1\frac{7}{9}t^{20}a^{24} - 1\frac{11}{25}p^{16}q^{18}$.

534. Розкладіть на множники:

- 1) $a^8 - 16m^6$; 2) $36c^6 - 49a^{10}$; 3) $0,25 - m^{12}a^2$;
 4) $-121p^8c^4 + 4a^2$; 5) $-\frac{25}{36}a^2b^4 + \frac{36}{49}c^6$; 6) $2\frac{1}{4}a^2b^8 - 1\frac{9}{16}p^6c^{18}$.

535. Знайдіть значення виразу:

- 1) $\frac{100}{15^2 - 10^2}$; 2) $\frac{29^2 - 21^2}{80}$; 3) $\frac{47^2 - 23^2}{48^2 - 22^2}$.

536. Подайте вираз у вигляді добутку:

- 1) $(x + 2)^2 - 1$; 2) $4 - (y + 3)^2$; 3) $(4m - 5)^2 - 16$;
 4) $6,25 - (a - 3,5)^2$; 5) $(2x - 5)^2 - 49$; 6) $1 - (2x + 1)^2$.

537. Розкладіть на множники:

- 1) $16x^2 - (1 + 3x)^2$; 2) $(3y - 5)^2 - 16y^2$;
 3) $49m^2 - (a + 3m)^2$; 4) $(5a - 2b)^2 - 25a^2$.

538. Розкладіть на множники:

- 1) $(p + 2)^2 - 9$; 2) $16 - (m - 3)^2$; 3) $(3x - 2)^2 - 36$;
 4) $x^2 - (2x - 1)^2$; 5) $(5a - 3b)^2 - 9b^2$; 6) $(3x + 4y)^2 - 100y^2$.

539. Знайдіть корені рівняння:

- 1) $(x - 1)^2 - 25 = 0$; 2) $49 - (2x + 5)^2 = 0$;
 3) $(5x + 3)^2 = 64$; 4) $(0,1x - 0,5)^2 = 0,36$.

540. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(x + 2)^2 - 36 = 0$; 2) $(5x - 4)^2 - 81 = 0$;
 3) $(2x + 7)^2 = 49$; 4) $(0,2x - 0,5)^2 = 0,09$.

541. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n значення виразу $(n + 7)^2 - n^2$ ділиться на 7.

4 **542.** Подайте вираз у вигляді добутку:

- 1) $a^6 - (b - 5a^3)^2$; 2) $(-3m^2 + 4p)^2 - 9m^4$;
 3) $(7x + 2y)^2 - (2x - 7y)^2$; 4) $(a + b + c)^2 - (a + b - c)^2$;
 5) $a^2(a + 1)^2 - c^8$; 6) $(5a - b - 1)^2 - (5a + b - 1)^2$.

543. Розкладіть на множники:

- 1) $(5a^2 - 3b)^2 - 16a^4$; 2) $m^8 - (3c - 2m^4)^2$;
 3) $(2a + 3b)^2 - (4a - 5b)^2$; 4) $(x - y + t)^2 - (x - y - t)^2$.

544. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(3x - 4)^2 - (5x - 8)^2 = 0$; 2) $x^4 - 81 = 0$;
 3) $16x^4 - 1 = 0$; 4) $81x^2 + 4 = 0$.

545. Доведіть, що різниця квадратів двох послідовних цілих чисел дорівнює сумі цих чисел.



Вправи для повторення

3 **546.** Спростіть вираз:

- 1) $(t + 1)(t - 7) - (t - 1)(t + 7)$;
 2) $(a^3 - 2b)(a^2 + 2b) - (a^2 - 2b)(a^3 + 2b)$.

4 **547.** Обчисліть, використовуючи формулу куба двочлена:

- 1) $(100 - 1)^3$; 2) 41^3 ; 3) 29^3 ; 4) $0,99^3$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



548. Господиня має важільні терези і гирьку масою 100 г. Як за допомогою чотирьох зважувань відміряти 1,5 кг крупи?



§17. СУМА І РІЗНИЦЯ КУБІВ

Помножимо $a + b$ на $a^2 - ab + b^2$:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

Маємо тотожність, яку називають *формулою суми кубів*:



$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

У правій частині формули множник $a^2 - ab + b^2$ нагадує повний квадрат $a^2 - 2ab + b^2$, але замість подвоєного добутку $2ab$ містить ab . Тричлен $a^2 - ab + b^2$ називають *неповним квадратом різниці* виразів a і b . Тому формулу суми кубів читають так:



сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів на неповний квадрат їх різниці.

Приклад 1. Розкласти многочлен $x^3 + 64$ на множники.

Розв'язання. Оскільки $64 = 4^3$, то даний многочлен можна подати у вигляді суми кубів двох виразів:

$$x^3 + 64 = x^3 + 4^3.$$

За формулою суми кубів маємо:

$$x^3 + 4^3 = (x + 4)(x^2 - 4x + 4^2) = (x + 4)(x^2 - 4x + 16).$$

Отже, $x^3 + 4^3 = (x + 4)(x^2 - 4x + 16)$.

Тепер помножимо $a - b$ на $a^2 + ab + b^2$:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.$$

Маємо тотожність, яку називають *формулою різниці кубів*:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Тричлен $a^2 + ab + b^2$ називають *неповним квадратом суми* виразів a і b , а формулу різниці кубів читають так:



різниця кубів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів на неповний квадрат їх суми.

Приклад 2. Розкласти многочлен $27a^3 - m^6$ на множники.

Розв'язання. Оскільки $27a^3 = (3a)^3$ і $m^6 = (m^2)^3$, то даний многочлен можна перетворити на різницю кубів:

$$27a^3 - m^6 = (3a)^3 - (m^2)^3.$$

Далі застосуємо формулу різниці кубів:

$$\begin{aligned} (3a)^3 - (m^2)^3 &= (3a - m^2)((3a)^2 + 3am^2 + (m^2)^2) = \\ &= (3a - m^2)(9a^2 + 3am^2 + m^4). \end{aligned}$$

Помінявши місцями ліві і праві частини формул суми і різниці кубів, матимемо:



$$\begin{aligned} (a + b)(a^2 - ab + b^2) &= a^3 + b^3, \\ (a - b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 - b^3. \end{aligned}$$

Ці тотожності є формулами скороченого множення і дають змогу скорочено виконувати множення суми двох виразів на неповний квадрат їх різниці та різниці двох виразів на неповний квадрат їх суми.



Добуток суми двох виразів на неповний квадрат їх різниці дорівнює сумі кубів цих виразів; добуток різниці двох виразів на неповний квадрат їх суми дорівнює різниці кубів цих виразів.

Приклад 3. Перетворити вираз $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$ на многочлен.

Розв'язання. Оскільки вираз $x^2 - 2xy + 4y^2$ є неповним квадратом різниці виразів x і $2y$, можемо застосувати формулу суми кубів:

$$(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = x^3 + (2y)^3 = x^3 + 8y^3.$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$(5x - 1)(25x^2 + 5x + 1) = 125x^3 - 8x.$$

Розв'язання. Застосуємо до лівої частини рівняння формулу різниці кубів, одержимо:

$$(5x)^3 - 1^3 = 125x^3 - 8x;$$

$$125x^3 - 1 = 125x^3 - 8x;$$

$$125x^3 - 125x^3 + 8x = 1;$$

$$8x = 1;$$

$$x = 0,125.$$

Відповідь: 0,125.



Запишіть і прочитайте формулу суми кубів. Запишіть і прочитайте формулу різниці кубів. Якому виразу тотожно дорівнює добуток суми двох виразів на неповний квадрат їх різниці? Якому виразу тотожно дорівнює добуток різниці двох виразів на неповний квадрат їх суми?

549. (Усно) Який з виразів є неповним квадратом різниці виразів x і y , а який – неповним квадратом їх суми:

1) $x^2 + xy + y^2$; 2) $x^2 - 2xy + y^2$; 3) $x^2 - xy - y^2$;

4) $x^2 + 2xy + y^2$; 5) $x^2 - xy + y^2$; 6) $x^2 + 4xy + y^2$?

550. (Усно) Які з рівностей є тотожностями:

1) $m^3 + n^3 = (m^2 + n^2)(m + n)$;

2) $m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$;

3) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$;

4) $c^3 - d^3 = (c - d)(c^2 + 2cd + d^2)$?

551. Серед рівностей виберіть ті, що є тотожностями:

1) $a^3 - b^3 = (a^2 - b^2)(a - b)$; 2) $c^3 + d^3 = (c + d)(c^2 - cd + d^2)$;

3) $p^3 - q^3 = (p - q)(p^2 + pq + q^2)$;

4) $x^3 + m^3 = (x + m)(x^2 - 2xm + m^2)$.

552. Розкладіть на множники:

1) $m^3 - p^3$; 2) $a^3 + d^3$; 3) $8 - a^3$;

4) $q^3 + 27$; 5) $n^3 - 64$; 6) $0,001 + t^3$.

553. Подайте вираз у вигляді суми або різниці кубів і розкладіть його на множники:

1) $8a^3 + 1$; 2) $27 - \frac{1}{27}c^3$; 3) $y^3 + 64x^3$;

4) $0,125b^3 - 64y^3$; 5) $1 + 1000m^3$; 6) $\frac{1}{125}a^3 - \frac{1}{216}b^3$.

554. Розкладіть на множники:

- 1) $\frac{1}{27} + b^3$; 2) $\frac{1}{8}x^3 - 8$; 3) $1 + 125p^3$;
 4) $0,064m^3 - \frac{1}{1000}n^3$; 5) $\frac{27}{8}a^3 + \frac{8}{27}b^3$; 6) $216p^3 - \frac{1}{216}q^3$.

555. Подайте у вигляді многочлена:

- 1) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$; 2) $(a + 3)(a^2 - 3a + 9)$;
 3) $(1 - d + d^2)(1 + d)$; 4) $(m - 2)(m^2 + 2m + 4)$.

556. Перетворіть вираз на многочлен:

- 1) $(m + n)(m^2 - mn + n^2)$; 2) $(m - 1)(m^2 + m + 1)$;
 3) $(b + 4)(b^2 - 4b + 16)$; 4) $(25 + 5q + q^2)(5 - q)$.

557. Знайдіть значення виразу:

- 1) $(4p - 1)(16p^2 + 4p + 1)$, якщо $p = -0,25$;
 2) $(2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2)$, якщо $a = -\frac{1}{2}$; $b = 2$.

558. Знайдіть значення виразу:

- 1) $(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)$, якщо $x = \frac{2}{3}$;
 2) $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$, якщо $x = -2$; $y = 0,5$.

559. Розкладіть многочлен на множники:

- 1) $a^3 - b^6$; 2) $t^{12} + c^9$; 3) $p^{18} + m^{24}$;
 4) $-c^3 + m^{15}$; 5) $-\frac{1}{8} - a^{24}$; 6) $-c^{99} - d^{60}$;
 7) $x^3y^3 + 1$; 8) $27 - a^3b^9$; 9) $x^6y^{12} + m^{27}$;
 10) $64m^6p^{21} - 125x^3$; 11) $\frac{1}{27}c^{24}m^{18} + 27t^9$;
 12) $343a^{18}b^{33} - 0,001c^{36}$.

560. Запишіть вираз у вигляді добутку:

- 1) $x^9 - y^6$; 2) $-p^{12} - 27$; 3) $-a^9b^6 + 1$;
 4) $216p^{15} + 0,008t^{18}$; 5) $64m^{21}c^3 - p^{30}$; 6) $512t^{24}p^{27} - 729a^{33}$.

561. Виконайте множення:

- 1) $(b^3 - d^2)(b^6 + b^3d^2 + d^4)$;
 2) $(c^3 + 2p)(c^6 - 2pc^3 + 4p^2)$;
 3) $(9x^2 + 3xy + y^2)(3x - y)$;
 4) $(4c + 3d)(16c^2 - 12cd + 9d^2)$;

5) $(a^8 - 4a^4 + 16)(a^4 + 4)$;

6) $(5m^2 - 6p^3)(25m^4 + 30m^2p^3 + 36p^6)$.

562. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(a^5 - m^2)(a^{10} + a^5m^2 + m^4)$;

2) $(25a^2 - 5ab + b^2)(5a + b)$;

3) $(2x - 7y^2)(4x^2 - 14xy^2 + 49y^4)$;

4) $(3p^2 + 4c^3)(9p^4 - 12p^2c^3 + 16c^6)$.

563. Виконайте дії:

1) $(a + 2)(a^2 - 2a + 4) - a(a^2 - 5)$;

2) $(b - 3)(b^2 + 3b + 9) - b(b - 3)(b + 3)$;

3) $(x + 4)(x^2 - 4x + 16) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$;

4) $(2b^2 - 1)(4b^4 + 2b^2 + 1) - (2b^3 + 1)^2$.

564. Спростіть вираз:

1) $(a - 4)(a^2 + 4a + 16) - a(a - 2)(a + 2)$;

2) $(x^2 + 3)(x^4 - 3x^2 + 9) - (x^2 - 2)(x^4 + 2x^2 + 4)$;

3) $b(b - 1)^2 - (b - 5)(b^2 + 5b + 25)$;

4) $(a - 1)(a^2 + a + 1)(a + 1)(a^2 - a + 1)$.

565. Знайдіть значення виразу:

1) $(2a + 1)(4a^2 - 2a + 1) - 7a^3$, якщо $a = -2$;

2) $(x^2 + 5xy + 25y^2)(x - 5y) + 25y^3 - x^3$, якщо $x = -2015$,
 $y = 0,1$.

566. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 4)(x^2 + 4x + 16) = x^3 - 8x$;

2) $(x^3 + 1)(x^6 - x^3 + 1) = x^9 - 5x$;

3) $(9x^2 - 6x + 4)(3x + 2) = 3x(3x + 4)(3x - 4) + 32$;

4) $8\left(\frac{1}{2}x - 2\right)\left(\frac{1}{4}x^2 + x + 4\right) - x(x - 3)^2 = 6x^2 - 46$.

567. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 24x + x^3$;

2) $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) = 2x(2x - 3)(2x + 3) + 37$.

568. Розкладіть на множники:

1) $(a + 3)^3 - a^3$;

2) $(x - 4)^3 + 8$;

3) $27p^3 - (p + 1)^3$;

4) $64x^3 + (x - 1)^3$.

569. Розкладіть на множники:

- 1) $(a + 1)^3 + a^3$; 2) $(b - 2)^3 - 8$;
 3) $125b^3 - (b - 1)^3$; 4) $64a^3 + (a + 2)^3$.

570. Доведіть, що дві останні цифри значення виразу $415^3 + 85^3$ є нулями.

571. Чи ділиться число $115^3 - 15^3$ на 100?

572. Обчисліть зручним способом: $\frac{57^3 - 43^3}{14} + 57 \cdot 43$.



Вправи для повторення

573. Доведіть, що різниця натурального трицифрового числа і числа, записаного тими самими цифрами у зворотному порядку, ділиться на 11.

574. В одній упаковці було 90 зошитів, а в другій – 30. Коли з першої взяли вдвічі більше зошитів, ніж з другої, то в першій упаковці залишилося в 5 разів більше зошитів, ніж у другій. По скільки зошитів залишилося в кожній упаковці?



Цікаві задачі для учнів неледачих



575. З українського фольклору. Жінка прийшла на базар курей продавати. Перший покупець придбав у неї половину всіх курей та ще півкурки. Другий – половину з того, що залишилося, та ще півкурки. Третій покупець придбав половину того, що залишилося, та ще півкурки. Після цього виявилось, що всіх курей продано, і задоволена жінка повернулася додому. Скільки курей вона винесла на продаж?



18. ЗАСТОСУВАННЯ КІЛЬКОХ СПОСОБІВ РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ

У попередніх параграфах ми вже розглядали кілька способів розкладання многочленів на множники: винесення спільного множника за дужки, групування, застосування формул скороченого множення.

Іноді, щоб розкласти многочлен на множники, доводиться застосовувати кілька способів. У такому випадку розкладання

на множники доцільно починати з винесення спільного множника за дужки, якщо такий множник існує.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Розкласти на множники многочлен $5m^4 - 20m^2n^2$.

Р о з в' я з а н н я. Спочатку винесемо за дужки спільний множник $5m^2$:

$$5m^4 - 20m^2n^2 = 5m^2(m^2 - 4n^2).$$

Потім до виразу в дужках застосуємо формулу різниці квадратів:

$$5m^2(m^2 - 4n^2) = 5m^2(m - 2n)(m + 2n).$$

Отже, $5m^4 - 20m^2n^2 = 5m^2(m - 2n)(m + 2n)$.

Приклад 2. Розкласти на множники многочлен

$$2x^4 + 12x^3 + 18x^2.$$

Р о з в' я з а н н я. Винесемо за дужки спільний множник $2x^2$, а до виразу в дужках застосуємо формулу квадрата суми:

$$2x^4 + 12x^3 + 18x^2 = 2x^2(x^2 + 6x + 9) = 2x^2(x + 3)^2.$$

Приклад 3. Розкласти на множники многочлен

$$a^3b^2 - 3a^3b + 5a^2b^2 - 15a^2b.$$

Р о з в' я з а н н я. Винесемо за дужки спільний множник a^2b . Одержимо:

$$a^3b^2 - 3a^3b + 5a^2b^2 - 15a^2b = a^2b(ab - 3a + 5b - 15).$$

Многочлен $ab - 3a + 5b - 15$, що утворився в дужках, можна розкласти на множники способом групування:

$$ab - 3a + 5b - 15 = (ab - 3a) + (5b - 15) = a(b - 3) + 5(b - 3) = (b - 3)(a + 5).$$

Остаточо маємо:

$$a^3b^2 - 3a^3b + 5a^2b^2 - 15a^2b = a^2b(b - 3)(a + 5).$$

Універсального правила, за яким можна було б розкладати многочлени на множники, немає. Приклади, які ми розглянули вище, дозволяють лише сформулювати *правило-орієнтир*, якого бажано дотримуватися при розкладанні многочленів на множники.

- 1) Якщо можливо, винести спільний множник за дужки.
- 2) Перевірити, чи не є вираз, одержаний в дужках, квадратом двочлена або різницею квадратів, різницею чи сумою кубів.
- 3) Якщо многочлен, отриманий у дужках, містить чотири або шість доданків, перевірити, чи не розкладається він на множники способом групування.

Окрім запропонованого правила, інколи допомагають штучні прийоми.

Приклад 4. Розкласти на множники многочлен

$$a^2 - 4a + 4 - b^2.$$

Розв'язання. Оскільки перші три доданки є квадратом двочлена, застосуємо штучне групування, розбивши многочлен на дві групи, одна з яких містить цей квадрат двочлена, а друга – четвертий доданок:

$$a^2 - 4a + 4 - b^2 = (a^2 - 4a + 4) - b^2.$$

Першу групу згорнемо у квадрат різниці: $a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2$, після чого даний многочлен перетвориться на різницю квадратів двох виразів: $a^2 - 4a + 4 - b^2 = (a - 2)^2 - b^2$, яку розкладемо на множники за формулою різниці квадратів.

Отже, маємо:

$$a^2 - 4a + 4 - b^2 = (a - 2)^2 - b^2 = (a - 2 - b)(a - 2 + b).$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння $x^2 + 8x - 20 = 0$.

Розв'язання. Знайдемо таке число, яке разом з виразом $x^2 + 8x$ утворює квадрат двочлена. Таким числом є 16. У лівій частині рівняння додамо і віднімемо число 16. Одержимо:

$$x^2 + 8x + 16 - 16 - 20 = 0;$$

$$(x^2 + 8x + 16) - 36 = 0;$$

$$(x + 4)^2 - 6^2 = 0.$$

Далі розкладемо ліву частину рівняння на множники за формулою різниці квадратів і розв'яжемо одержане рівняння:

$$(x + 4 - 6)(x + 4 + 6) = 0;$$

$$(x - 2)(x + 10) = 0;$$

$$x - 2 = 0 \text{ або } x + 10 = 0;$$

$$x = 2 \text{ або } x = -10.$$

Відповідь: $-10; 2$.

Перетворення $x^2 + 8x - 20 = x^2 + 8x + 16 - 16 - 20 = (x + 4)^2 - 36$ називають *виділенням квадрата двочлена*.

Не кожний многочлен другого степеня можна розкласти на множники. Наприклад, на множники не можна розкласти многочлени $x^2 + 4$, $x^2 + y^2 + 1$, $x^2 + x + 2$ тощо. Зокрема, не розкладаються на множники многочлени другого степеня, які є неповними квадратами суми або різниці та не містять спільного множника. Наприклад, $m^2 + m + 1$, $p^2 - 3p + 9$, $4x^2 + 2x + 1$ тощо.



Які способи розкладання многочленів на множники ви знаєте? У чому полягає правило-орієнтир, яке доцільно використовувати при розкладанні многочленів на множники? Чи кожний многочлен можна розкласти на множники? Наведіть приклади многочленів, які не можна розкласти на множники.

576. (Усно) З формул виберіть ті, що є тотожностями:

- 1) $(a + b)^2 = a^2 + ab + b^2$; 2) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
 3) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; 4) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
 5) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + 2ab + b^2)$;
 6) $a^2 - b^2 = (a - b)^2$.

577. Які з формул є тотожностями:

- 1) $(m - n)^2 = m^2 - mn + n^2$;
 2) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - 2xy + y^2)$;
 3) $p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$;
 4) $(c + d)^2 = c^2 + 2cd + d^2$;
 5) $m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$;
 6) $a^2 - b^2 = (a + b)(a + b)$?

578. Закінчіть розкладання на множники:

- 1) $xa^2 - 9x = x(a^2 - 9) = x(a^2 - 3^2) = \dots$
 2) $bm^2 - 2mb + b = b(m^2 - 2m + 1) = \dots$

579. (Усно) Розкладіть на множники:

- 1) $ax^2 - ay^2$; 2) $tp^2 - t$; 3) $b^3 - b$.

580. Розкладіть на множники:

- 1) $5a^2 - 5b^2$; 2) $ap^2 - aq^2$; 3) $2xm^2 - 2xn^2$;
 4) $7b^2 - 7$; 5) $16x^2 - 4$; 6) $75 - 27c^2$;
 7) $5mk^2 - 20m$; 8) $63ad^2 - 7a$; 9) $125px^2 - 5py^2$.

581. Подайте у вигляді добутку:

- 1) $m^3 - m$; 2) $p^2 - p^4$; 3) $7a - 7a^3$;
 4) $9b^5 - 9b^3$; 5) $81c^3 - c^5$; 6) $3a^5 - 300a^7$.

582. Розкладіть на множники:

- 1) $ax^2 - ay^2$; 2) $ta^2 - 4mb^2$; 3) $28 - 7m^2$;
 4) $p^5 - p^3$; 5) $b - 4b^3$; 6) $a^5 - a^3c^2$;
 7) $15d - 15d^3$; 8) $625b^3 - b^5$; 9) $500a^5 - 45a^3$.

583. Розв'яжіть рівняння:

1) $3x^2 - 27 = 0$; 2) $5 - 20x^2 = 0$.

584. Знайдіть корені рівняння:

1) $8 - 2x^2 = 0$; 2) $75x^2 - 3 = 0$.

585. Розкладіть на множники:

1) $3a^2 + 6ab + 3b^2$; 2) $-2m^2 + 4mn - 2n^2$;
 3) $-a^2 - 4a - 4$; 4) $6a^2 + 24ab + 24b^2$;
 5) $2am^2 + 4am + 2a$; 6) $8a^4 - 8a^3 + 2a^2$.

586. Подайте многочлен у вигляді добутку:

1) $-4a^2 + 8ab - 4b^2$; 2) $-25by^2 - 10by - b$;
 3) $a^5 + 6a^4m + 9a^3m^2$; 4) $6by^2 + 36by^3 + 54by^4$.

587. Знайдіть значення виразу:

1) $3m^2 - 3n^2$, якщо $m = 41$, $n = 59$;
 2) $2x^2 + 4xy + 2y^2$, якщо $x = 29$, $y = -28$.

588. Знайдіть значення виразу:

1) $5x^2 - 5y^2$, якщо $x = 49$, $y = 51$;
 2) $3a^2 - 6ab + 3b^2$, якщо $a = 102$, $b = 101$.

589. Подайте у вигляді добутку:

1) $3a^3 - 3b^3$; 2) $7x^3 + 7y^3$; 3) $-pm^3 - pn^3$;
 4) $16a^3 - 2$; 5) $125m + m^4$; 6) $a^7 - a^4$.

590. Розкладіть на множники:

1) $bx^3 - by^3$; 2) $-2a^3 - 2b^3$; 3) $8a - a^4$.

591. Розкладіть на множники:

1) $a^4 - 81$; 2) $16 - c^4$; 3) $x^5 - 1$; 4) $a^4 - b^8$.

592. Доведіть тотожність:

$$a^8 - b^8 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4).$$

593. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 - x = 0$; 2) $112y - 7y^3 = 0$;
 3) $64x^3 + x = 0$; 4) $y^3 + 4y^2 + 4y = 0$.

594. Розв'яжіть рівняння:

1) $y - y^3 = 0$; 2) $5x^3 - 180x = 0$;
 3) $16y^3 + y = 0$; 4) $x^3 - 2x^2 + x = 0$.

595. Розкладіть на множники:

- 1) $7ab + 21a - 7b - 21$; 2) $6mn + 60 - 30m - 12n$;
 3) $-abc - 3ac - 4ab - 12a$; 4) $a^3 - ab - a^2b + a^2$.

596. Подайте вираз у вигляді добутку:

- 1) $90 + 3ab - 45a - 6b$; 2) $-3mn - 9m - 18n - 54$;
 3) $a^4x + a^4 + a^3x + a^3$; 4) $p^3a^2 + pa^2 - 3ap^3 - 3ap$.

597. Розкладіть на множники:

- 1) $a^2 + 2ab + b^2 - 16$; 2) $a^2 - x^2 - 2xy - y^2$;
 3) $p^2 - x^2 + 10p + 25$; 4) $p^2 - x^2 + 20x - 100$.

598. Розкладіть на множники:

- 1) $x^2 + 2xy + y^2 - 25$; 2) $m^2 - a^2 + 2ab - b^2$;
 3) $m^2 - a^2 - 8m + 16$; 4) $m^2 - b^2 - 8b - 16$.

599. Подайте вираз у вигляді добутку:

- 1) $a^2 - 81 + a - 9$; 2) $m^2 - a^2 - (a + m)$;
 3) $x^2 - y^2 - x + y$; 4) $x + x^2 - y - y^2$;
 5) $a - 3b + a^2 - 9b^2$; 6) $16m^2 - 25n^2 - 4m - 5n$.

600. Розкладіть на множники:

- 1) $a^2 - b^2 - (a - b)$; 2) $p^2 - b - p - b^2$;
 3) $16x^2 - 25y^2 + 4x - 5y$; 4) $100m^2 - 10m + 9n - 81n^2$.

601. Перетворіть вираз на добуток:

- 1) $p^2(m - 3) - 2p(m - 3) + (m - 3)$;
 2) $1 - a^2 - 4b(1 - a^2) + 4b^2(1 - a^2)$.

602. Доведіть тотожність:

$$c^2(c - 2) - 10c(c - 2) + 25(c - 2) = (c - 2)(c - 5)^2.$$

603. Подайте у вигляді добутку:

- 1) $ab^2 - b^3 - a + b$; 2) $ax^2 - a^3 + 7x^2 - 7a^2$;
 3) $p^3 + p^2q - 4p - 4q$; 4) $a^3 - 5m^2 + 5a^2 - am^2$.

604. Розкладіть на множники:

- 1) $m^3 + n^3 + m + n$; 2) $a - b - (a^3 - b^3)$;
 3) $a^3 + 8 - a^2 - 2a$; 4) $8p^3 - 1 - 12p^2 + 6p$.

605. Подайте у вигляді добутку:

- 1) $m^3 + m^2n - m - n$; 2) $ba^2 - 3a^2 - 4b + 12$;
 3) $a^3 - b^3 + a - b$; 4) $x^3 + 1 - 5x - 5$.

4 606. Розв'яжіть рівняння:

1) $y^3 - 5y^2 - y + 5 = 0$; 2) $x^3 = 2x^2 + 4x - 8$.

607. При якому значенні x :

- 1) значення виразу $x^3 - x^2 - x + 1$ дорівнює нулю;
 2) значення виразів $x^3 - 9x$ і $x^2 - 9$ є між собою рівними?

608. Запишіть у вигляді добутку:

- 1) $9(a + b)^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$;
 2) $25(3y - 2m)^2 - 36(9y^2 + 12my + 4m^2)$.

609. Розкладіть на множники:

1) $a^3 + 8b^3 + a^2 - 2ab + 4b^2$; 2) $m^3 - 8n^3 + m^2 - 4mn + 4n^2$.

610. Перетворіть многочлен на добуток многочленів:

1) $a^3 - b^3 + a^2 - 2ab + b^2$; 2) $c^2 + 2cd + d^2 - x^2 - 2xy - y^2$.

611. Розкладіть тричлен на множники, виділивши попередньо квадрат двочлена:

- 1) $x^2 - 2x - 3$; 2) $x^2 + 8x - 9$;
 3) $x^2 - 3x - 4$; 4) $x^2 + x - 2$.

Р о з в' я з а н н я.

$$4) x^2 + x - 2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} =$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = (x - 1)(x + 2).$$

★ 612. Доведіть, що при будь-якому цілому значенні n значення виразу $\frac{n^3 - n}{6}$ є числом цілим.



Вправи для повторення

613. Спростіть вираз:

- 1) $x(x + 1)(x + 2) - 3(x - 2)(x + 2) + 2(x - 6)$;
 2) $(2x + 3y)(3y - x) - (2x - y)(5x - y) + (2x - 3y)(5x + 2y)$.

614. Розв'яжіть рівняння:

$$x((x - 2)^2 + 4x) = 64 \left(\frac{1}{4}x - 1\right) \left(\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}x + 1\right).$$

615. Супермаркет електроніки до річниці свого відкриття вирішив продати 141 планшет і 95 смартфонів зі знижками. Щогодини продавали по 12 акційних планшетів та по 10 акційних смартфонів. Через скільки годин від початку дії знижок акційних планшетів у супермаркеті залишалося утричі більше, ніж акційних смартфонів?



Цікаві задачі для учнів неледачих



616. Сашко і Марійка живуть в одному під'їзді на одному поверсі і навчаються в одній школі. Сашко пішки витрачає на дорогу до школи 12 хвилин, а Марійка – 18 хв. Через 3 хвилини після виходу Марійки до школи вирушив і Сашко. Через який час після свого виходу він наздожене Марійку?

Домашня самостійна робота № 3

Кожне завдання має по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть варіант правильної відповіді.

1. Якому многочлену тотожно дорівнює вираз $(m - n)^2$?

- А) $m^2 + 2mn + n^2$; Б) $m^2 - n^2$;
В) $m^2 + n^2$; Г) $m^2 - 2mn + n^2$.

2. Знайдіть добуток $(a - x)(a + x)$.

- А) $a^2 + x^2$; Б) $a^2 - x^2$; В) $x^2 - a^2$; Г) $a^2 + 2xa + x^2$.

3. Подайте вираз $x^2 + 2xy + y^2$ у вигляді квадрата двочлена.

- А) $(x - y)^2$; Б) $(y - x)^2$; В) $(2x + y)^2$; Г) $(x + y)^2$.

4. Перетворіть вираз $(5x - 1)^2$ на многочлен.

- А) $5x^2 - 10x + 1$; Б) $25x^2 + 10x + 1$;
В) $25x^2 - 10x + 1$; Г) $25x^2 - 1$.

5. Розкладіть двочлен $-16 + 9a^2$ на множники.

- А) $(3a - 4)(3a - 4)$; Б) $(3a + 4)(4 - 3a)$;
В) $(3a + 4)(3a - 4)$; Г) $(3a - 4)^2$.

6. Подайте вираз $m^3 + 64$ у вигляді добутку.

- А) $(m + 4)(m^2 - 4m + 16)$; Б) $(m + 4)(m^2 - 8m + 16)$;
В) $(m - 4)(m^2 + 4m + 16)$; Г) $(m + 4)(m^2 - 4m - 16)$.

3 7. Розв'яжіть рівняння: $x(x + 2) - (x - 3)^2 = 7$.

А) -2; Б) -1; В) 1; Г) 2.

8. Спростіть вираз $(m^2 + 2p)(m^4 - 2m^2p + 4p^2)$.

А) $m^4 + 8p^3$; Б) $m^6 + 8p^3$; В) $m^6 - 8p^3$; Г) $m^6 + 4p^3$.

9. Розкладіть многочлен $3ab - 3b + 6a - 6$ на множники.

А) $(a - 1)(b + 2)$; Б) $3(a + 1)(b - 2)$;
В) $3(a + 1)(b + 2)$; Г) $3(a - 1)(b + 2)$.

4 10. Якого найменшого значення набуває вираз $x^2 + 4x + 3$?

А) 1; Б) 0; В) -1; Г) -2.

11. Розв'яжіть рівняння $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.

А) -2; -1; 1; Б) -2; 1; В) -2; -1; Г) -1; 1.

12. Розкладіть вираз $(b - 2)^3 - b^3$ на множники.

А) $2(b^2 - 6b + 4)$; Б) $-2(b^2 - 6b + 4)$;
В) $-2(3b^2 - 6b + 4)$; Г) $2(3b^2 - 6b + 4)$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ДО § 13 – § 18

1 1. Перетворіть вираз на многочлен:

1) $(p + a)^2$; 2) $(c - m)(c + m)$.

2. Розкладіть на множники:

1) $t^2 - 2tb + b^2$; 2) $d^2 - n^2$.

3. Які з рівностей є тотожностями:

1) $(p - a)^2 = p^2 - pa + a^2$; 2) $p^3 + q^3 = (p + q)(p^2 - pq + q^2)$;
3) $m^2 - c^2 = (m - c)(m + c)$; 4) $d^3 - t^3 = (d - t)(d^2 + 2dt + t^2)$?

2 4. Перетворіть вираз на многочлен:

1) $(3a - 5)^2$; 2) $(7 + 2b)(2b - 7)$.

5. Розкладіть многочлен на множники:

1) $a^2 + 6a + 9$; 2) $-25 + 36x^2$; 3) $b^3 + 64$; 4) $7c^2 - 7d^2$.

6. Спростіть вираз $(2x + 3)^2 + (7 - 2x)(7 + 2x)$ та знайдіть його значення, якщо $x = -\frac{1}{12}$.

3 7. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^3 - 50x = 0$; 2) $x^3 - 10x^2 + 25x = 0$.

8. Спростіть вираз:

1) $(-4a + 3b)^2 + (-4a + 5b)(5b + 4a) + 24ab$;

2) $(a - 2)(a^2 + 2a + 4) - a(a - 3)(a + 3)$.

4 9. Доведіть, що при будь-якому значенні змінної x вираз $x^2 + 8x + 17$ набуває лише додатних значень. Якого найменшого значення набуває цей вираз і при якому значенні x ?

Додаткові вправи

4 10. Перетворіть вираз на многочлен:

1) $(a + 3)^3$; 2) $(2m - 5)^3$.

11. Знайдіть дві останні цифри числа $293^3 - 93^3$.

12. Розкладіть тричлен $x^2 + 6x - 7$ на множники.

Вправи для повторення розділу 1

До § 1

1 617. Випишіть вирази, які є виразами зі змінними, у дві групи: у першу – цілі раціональні вирази, у другу – дробові раціональні вирази:

1) $m - 7$; 2) $\frac{a^2 - b}{5}$; 3) $\frac{7 + 9 \cdot 2}{3}$; 4) $(3 - 9) + 7 \cdot 8$;

5) $-\frac{1}{6}ab$; 6) $\frac{3}{a + c^3}$; 7) $\frac{1}{x} + \frac{1}{3}$; 8) $a^3 - a^2 + a$.

2 618. На склад привезли a мішків цукру по 50 кг у кожному. Запишіть виразом масу всього завезеного цукру. Знайдіть значення цього виразу, якщо $a = 12$.

3 619. Запишіть у вигляді виразу:

1) двоцифрове число, у якому x десятків і y одиниць;

2) двоцифрове число, у якому 5 десятків і a одиниць.

3) трицифрове число, у якому a сотень, b десятків і c одиниць;

4) трицифрове число, у якому m сотень, n десятків і 6 одиниць.

4 620. Відомо, що $x - y = 2$ і $p = 3$. Знайдіть значення виразу:

1) $x + p - y$; 2) $x - y + 5p$; 3) $(y - x)p$;

4) $\frac{3(y - x)}{-p + 4(x - y)}$; 5) $7x - 7y - p$; 6) $\frac{6}{p} - \frac{4}{5(y - x)}$.

До § 2

1 621. Спростіть вираз:

1) $2 + 3a - 5$; 2) $0,4m + m$; 3) $3p - 2p + 5$; 4) $-(m - 3)$.

2 622. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

1) $7(5x + 8) - 12x$; 2) $9m + 3(15 - 4m)$;
 3) $6(x + 1) - 6x - 9$; 4) $12x - 2(3x - 5)$;
 5) $-(2x + 1) - 3(2x - 5)$; 6) $5(x - 2) - 4(2x - 3)$.

3 623. Доведіть тотожність:

1) $18(a - 2) = 12a - (20 - (6a - 16))$;
 2) $2(x - y + t) - 3(x + y - t) - 5(t - y) = -x$.

4 624. Доведіть, що сума будь-яких трьох послідовних цілих чисел ділиться на 3.

5 625. Чи є тотожністю рівність:

1) $|a + 5| = a + 5$; 2) $|m^2 + 1| = m^2 + 1$;
 3) $|m - n| = |n - m|$; 4) $|a| + |b| = |a + b|$?

До § 3

1 626. а) Подайте добуток у вигляді степеня:

1) $0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3$; 2) $-2 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$;
 3) aa ; 4) $\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y}$.

б) Подайте степінь у вигляді добутку однакових множників:

1) m^3 ; 2) 17^4 ; 3) $(p + 2)^2$; 4) $\left(\frac{a}{9}\right)^5$.

2 627. Обчисліть:

1) 2^6 ; 2) $(0,2)^3$; 3) $\left(-\frac{1}{8}\right)^2$; 4) $\left(-1\frac{1}{6}\right)^3$;
 5) $-(-2)^3$; 6) $-\left(\frac{1}{4}\right)^2$; 7) $-(-0,1)^2$; 8) $-(-1)^{27}$.

3 628. Не виконуючи обчислень, порівняйте значення виразу з нулем:

1) $(-1,7)^{15} \cdot (-2,7)^2$; 2) $(-2,3)^3 : (-5,89)$;
 3) $-3,7^2 \cdot (-2,8)^4$; 4) $-(-2,6)^8 \cdot (-5,7)^5$.

4 629. Знайдіть останню цифру числа:

1) 2015^{13} ; 2) 5011^7 ; 3) 1006^{17} ; 4) $15^9 + 16^8 + 101^{17}$.

★ 630. Чи є число:

- 1) $10^{17} + 5$ кратним числу 3; 2) $10^{29} + 7$ кратним числу 9?

До § 4

1 631. Подайте у вигляді степеня:

- 1) $b^7 b^3$; 2) $a^3 a$; 3) $9^8 \cdot 9^7$; 4) $p^{10} : p^3$;
5) $19^8 : 19^6$; 6) $7^{15} : 7^{14}$; 7) $(a^3)^4$; 8) $(2^5)^3$.

2 632. Обчисліть:

- 1) $3^8 : 3^7$; 2) $2^5 \cdot 2^{12} : 2^{15}$; 3) $\frac{10^4 \cdot 10^9}{10^{10}}$; 4) $\frac{8^5 \cdot 8^{10}}{8^{11} \cdot 8^3}$.

3 633. Знайдіть значення x , при якому рівність є тотожністю:

- 1) $(4^7)^x = 4^{21}$; 2) $(3^2)^6 = 3^{3x}$; 3) $\left(\left(\left(\frac{1}{7} \right)^x \right)^3 \right)^4 = \left(\frac{1}{7} \right)^{24}$.

4 634. Запишіть вираз у вигляді степеня (n – натуральне число):

- 1) $(a^{18} : a^{2n}) \cdot (a^7 : a^n)$, де $n < 7$; 2) $\frac{a^8 \cdot a^{2n}}{a^n \cdot a^5} \cdot a^{4n}$.

★ 635. Знайдіть останню цифру числа (n – натуральне число):

- 1) 8^{4n} ; 2) 7^{4n+1} .

До § 5

1 636. Які з виразів є одночленами? Які з одночленів подано у стандартному вигляді:

- 1) $-a^2 c$; 2) $7a \cdot 2b \cdot 4$; 3) 17; 4) $aaba$;
5) $6 \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{3} y \right)$; 6) $p + 1$; 7) $-p^2$; 8) $c^9 - c$?

2 637. Зведіть одночлен до стандартного вигляду, укажіть його коефіцієнт і степінь:

- 1) $-\frac{1}{2} a^2 b \cdot 2ab^7$; 2) $3m \cdot (-2m^2) \cdot 5m^7$;
3) $-7ap^2 \cdot 0,1a^2 p^9$; 4) $1 \frac{1}{8} m^2 \cdot \frac{8}{9} mc^2$;
5) $-a \cdot (-b) \cdot (-c) \cdot (-5d)$; 6) $p^9 \cdot (-2a^2) \cdot (-5p^7) \cdot a^8$.

3 638. Складіть по два різних одночлени стандартного вигляду зі змінними a і b таких, щоб:

- 1) степінь кожного з них дорівнював 7, а коефіцієнт дорівнював -8 ;
2) степінь кожного з них дорівнював 3, а коефіцієнт дорівнював 17.

До § 6

639. Знайдіть добуток одночленів:

1) $3m \cdot 2n$; 2) $-4p \cdot 2a$; 3) $8m^2 \cdot 3n$; 4) $-2a^3 \cdot (-b^7)$.

640. Подайте вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду:

1) $-2,5m^2 \cdot (-4m^3p)$; 2) $12p^2m \cdot \left(-\frac{5}{6}p^3m^7\right)$;
 3) $0,6m^7a^9 \cdot 10m^2a^7 \cdot \frac{1}{2}m^3$; 4) $(-mn^7)^3$;
 5) $(-2a^5b^7)^2$; 6) $(m^3p^7a^9)^5$.

641. Знайдіть одночлен A , якщо:

1) $A \cdot 14m^2n = 42m^4n^2$; 2) $3p^2q^7 \cdot A = -21p^3q^7$.

642. Виконайте множення одночленів $0,4m \cdot 10nm^2$ та знайдіть значення одержаного добутку, якщо $m = -2$; $n = 0,5$.

643. Чи можна подати вираз у вигляді квадрата одночлена:

1) $49m^8n^{12}$; 2) $-25a^4b^8$;
 3) $-0,2m^4n^2 \cdot (-5m^2n^4)$; 4) $-(-3a^4)^3 \cdot 3a^{12}$?

644. При якому натуральному значенні n рівність $(2,5a^8c)^n \cdot 0,16c^5 = 2,5a^{24}c^8$ є тотожністю?

До § 7

645. З даних одночленів складіть многочлен та вкажіть його степінь:

1) $5a^2$ і $4b$; 2) $-a^2$; ab і m ;
 3) $5c^3$ і -8 ; 4) $3mn^2$; $4mn$; $-5m^2n$ і -7 .

646. Зведіть подібні члени многочлена:

1) $8a^2b - 7ab^2 + 5a^2b + 4b^2a$;
 2) $5mn - 2mn - 8 - 3mn$;
 3) $7m^3 + m^2 - 8 - m^3 + 3m^2$;
 4) $2x^2y - 7xy^2 - 5xy + 3yx^2 + 7y^2x$.

647. Зведіть многочлен

$$-\frac{1}{4}ab \cdot (-8ab^2) + 8a^2 \cdot (-1,5ab) + 20ab \cdot (-0,1ab^2) + a^2ab + 2a \cdot 6a^2b$$

до стандартного вигляду і знайдіть його значення, якщо $a = 5$;
 $b = -\frac{1}{25}$.

- 4** 648. Чи існують такі натуральні значення змінної a , при яких значення многочлена $2a^2 + 6a + 7$ є парним числом?

До § 8

- 2** 649. Спростіть вираз:

- 1) $(3m + 5n) + (9m - 7n) - (-2n + 5m)$;
- 2) $(12ab - b^2) - (5ab + b^2) + (ab + 2b^2)$;
- 3) $(3x^2 + 2x) + (2x^2 - 3x - 4) - (17 - x^2)$;
- 4) $(m - n + p) + (m - p) - (m - n - p)$.

- 3** 650. 1) Подайте многочлен $4x^3 - 4x^2 + 5x - 7$ у вигляді суми двочленів.

- 2) Подайте многочлен $x^3 - 5x + 7x^2 - 9$ у вигляді різниці одночлена і тричлена.

651. Який многочлен у сумі з многочленом $2x^2 - 3x + 7$ дає:

- 1) 0; 2) 5; 3) $-3x + 1$; 4) $x^2 - 5x + 7$?

- 4** 652. Доведіть, що сума двох послідовних непарних цілих чисел ділиться на 4.

653. Спростіть вираз

$$5xy - 8x^2y - \left(3xy - \left(4\frac{1}{4}xy^2 + 8x^2y\right)\right) - 2,75xy^2$$

і знайдіть його значення, якщо $x = -1$; $y = 3$.

До § 9

- 1** 654. Виконайте множення:

- 1) $a(b + 7)$; 2) $c(2 - x)$; 3) $-a(m - 3)$; 4) $-b(a - x + y)$.

- 2** 655. Перетворіть добуток на многочлен:

- 1) $2xa(a^2 - 3ax)$; 2) $-3mp(2m^3 - 5mp)$;
- 3) $4ab^2(a^2 - 2ab - b^2)$; 4) $(4m^3 - 2mn^2 - n^2)mn^2$;
- 5) $(-0,1x^3y + 0,2x^2y - y^3)(-5x^2y)$;
- 6) $-10n^3x(5nx^2 - 2n^2x + x^5)$.

- 3** 656. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

- 1) $2x(x + y) - y(2x - y) - y(y + 1)$, якщо $x = -5$, $y = -10$;
- 2) $m^2(m^2 - 5m + 1) - 2m(m^3 - 4m^2 + m) + m^4 - 3m^3 + 2$, якщо $m = -3$.

657. При якому значенні змінної значення виразу $2x(6x - 5)$ на 5 менше за відповідне значення виразу $3(4x^2 - 5)$?

4 658. Спростіть вираз

$$\frac{1}{8}x^n - \frac{5}{8}x^2(1 + x^{n-2}) + \frac{1}{2}x^3(x^{n-3} + 2),$$

де $n > 3$, n – натуральне число.

659. За перший день з овочесовища продали на 3 ц більше овочів, ніж за другий, а за третій – $\frac{4}{9}$ від того, що було продано за перші два дні разом. По скільки центнерів овочів продавали в кожен із цих днів, якщо за ці три дні разом продали 65 ц овочів?

★ 660. Розв'яжіть рівняння $\frac{1 - \frac{3x}{2}}{4} + \frac{2 - \frac{x}{4}}{3} = x - 2$.

До § 10

1 661. Винесіть за дужки спільний множник:

1) $5x - 5y$; 2) $7m + 7n$; 3) $ap + ac$; 4) $bm - bk$.

2 662. Розкладіть на множники:

1) $7ax - 7bx$; 2) $8a + 24ac$; 3) $18p - 24p^2$;
4) $5m^3 - 10m^2$; 5) $-15a^2 - 20a^3$; 6) $a^7 - a^2 + a^5$.

3 663. Подайте вираз у вигляді добутку:

1) $6xy - 12x^2y + 15xy^2$; 2) $7mn^5 + 28m^2n^3 - 7m^3n^2$;
3) $a(x - 2) + 3b(x - 2) - 2(2 - x)$; 4) $8(m - 1)^2 - n(1 - m)$.

4 664. Розв'яжіть рівняння:

1) $x|x - 3| - 5|x - 3| = 0$; 2) $|x||x - 2| - 7|x - 2| = 0$.

★ 665. При деякому значенні x значення виразу $x^2 - 3x - 13$ дорівнює -1 . Знайдіть при тому самому значенні x значення виразу:

1) $2x^2 - 6x - 26$; 2) $x^2(x^2 - 3x - 13) - 3x(x^2 - 3x - 13)$;
3) $3x^2 - 9x - 8$; 4) $\frac{5}{12}x^2 - \frac{5}{4}x + 3$.

До § 11

1 666. Виконайте множення:

1) $(m - p)(a + x)$; 2) $(2 + t)(a - 3)$;
3) $(a + b)(2 + c)$; 4) $(a - 2)(b - 3)$.

2 667. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(2m - 3p)(3m + 2p)$; 2) $(2a^2 + b)(3b - 5a^2)$;

- 3) $(7x^2 - 2x)(3x + 1)$; 4) $(5a^3 - 4a^2)(9a^2 + 8a)$;
 5) $(3a^2 + 5ba)(3b - 4a)$; 6) $(mn - n^2)(4n^3 + 2n^2m)$.

668. Спростіть вираз:

- 1) $(a - 8)(2a - 2) - (a + 9)(a - 3)$;
 2) $(x - y)(x + 3) - (x + y)(x - 3)$;
 3) $(3a - 5b)(5a + 3b) - (5a - 3b)(3a + 5b)$;
 4) $(a^3 + 4m)(a^2 - 4m) - (a^2 + 4m)(a^3 - 4m)$.

669. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(3x - 1)(2x + 6) - (2x - 2)(3x + 1) = -24$;
 2) $(3x + 9)(x - 5) - (x - 7)(3x - 1) = 12 + 8x$.

670. Доведіть, що значення виразу

$$2(10x - 5)(x + 0,6) + (4x^2 - 1)(2x - 5) - (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$$

не залежить від значення змінної.

671. Доведіть, що $(x + 1)(y + 1) - (x - 1)(y - 1) = 8$, якщо $x + y = 4$.

672. Два акваріуми мають форму прямокутного паралелепіпеда. Довжина першого на 10 см більша за його ширину. Довжина другого акваріума на 20 см більша за довжину першого, а ширина на 10 см більша за ширину першого. Якщо обидва акваріуми наповнити водою на висоту 25 см, то води у другому буде на 37,5 л більше, ніж у першому. Знайдіть довжину і ширину першого акваріума.

До § 12

673. Закінчіть розкладання многочлена на множники:

$$ab - 7b + 3a - 21 = (ab - 7b) + (3a - 21) = \dots$$

674. Розкладіть на множники:

- 1) $m(a - b) + 3a - 3b$; 2) $a(b + c) + b + c$;
 3) $3a - 3c + xa - xc$; 4) $ab - ac - 4b + 4c$.

675. Подайте многочлен у вигляді добутку:

- 1) $12x^2c - 8x^2y - 9cy^3 + 6y^4$;
 2) $1,6mn^2 - 2,4mp^2 - n^3 + 1,5np^2$.

676. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 5x - 6 = 0$, застосувавши розкладання многочлена на множники.

До § 13

677. Піднесіть двочлен до степеня:

- 1) $(x - p)^2$; 2) $(m + a)^2$; 3) $(b - k)^2$; 4) $(y + c)^2$.

2 678. Перетворіть вираз на многочлен:

$$1) (3a - 7)^2; \quad 2) (2b + 5)^2; \quad 3) (10m - 5k)^2;$$

$$4) (4p + 9q)^2; \quad 5) (0,1m - 5p)^2; \quad 6) \left(\frac{1}{6}a + 6b\right)^2.$$

3 679. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

$$1) (a - 1)^2 - (a - 2)^2, \text{ якщо } a = 1\frac{1}{2};$$

$$2) (3b + 2)^2 + (3b - 2)^2, \text{ якщо } b = -\frac{1}{3}.$$

680. Знайдіть число, квадрат якого при збільшенні цього числа на 3 збільшується на 159.

4 681. Чи є рівність $(a - b)^2 = |a - b|^2$ тотожністю?

682. Подайте у вигляді многочлена:

$$1) ((x + y) + a)^2; \quad 2) ((b - c) - d)^2;$$

$$3) (m + n + 2)^2; \quad 4) (a + 3 - c)(a + 3 - c).$$

До § 14

1 683. Подайте у вигляді квадрата двочлена:

$$1) m^2 - 2mp + p^2; \quad 2) b^2 + 2by + y^2; \quad 3) a^2 - 2 \cdot a \cdot 4 + 4^2.$$

2 684. Розкладіть на множники:

$$1) m^2 + 20m + 100; \quad 2) 49 - 14b + b^2;$$

$$3) 0,09x^2 + 0,6x + 1; \quad 4) \frac{1}{36} - \frac{1}{3}p + p^2;$$

$$5) 4x^2 + 20x + 25; \quad 6) 4m^2 - 12mp + 9p^2.$$

3 685. Знайдіть значення виразу:

$$1) -100m^2 + 20m - 1, \text{ якщо } m = 0,1; -0,9;$$

$$2) -4x^2 - 12xy - 9y^2, \text{ якщо } x = 0,03, y = -0,02.$$

4 686. Розв'яжіть рівняння:

$$1) 3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0; \quad 2) 5y^2 + 2y + \frac{1}{5} = 0.$$

687. Змініть один з коефіцієнтів многочлена так, щоб одержаний тричлен можна було подати у вигляді квадрата двочлена (знайдіть три різних розв'язки):

$$1) 100m^2 + 40mn + n^2; \quad 2) 25a^2 - ab + 9b^2.$$

688. Доведіть, що при будь-яких значеннях змінних вираз набуває лише невід'ємних значень:

- 1) $4x(4x - 10) + 25$;
- 2) $(a - 2)((a - 2) + 2m) + m^2$;
- 3) $(a + b)(a + b + 8) + 16$.

До § 15

689. Які з рівностей є тотожностями:

- 1) $(b - x)(b + x) = b^2 + x^2$;
- 2) $(c - d)(c + d) = c^2 - d^2$;
- 3) $(m + n)(m - n) = (m + n)^2$;
- 4) $(p + q)(p - q) = p^2 - q^2$?

690. Виконайте множення:

- 1) $(c + 7)(7 - c)$;
- 2) $(0,5m - 3)(0,5m + 3)$;
- 3) $(3k + 7)(3k - 7)$;
- 4) $(2p - 9q)(9q + 2p)$;
- 5) $(10m + 9n)(9n - 10m)$;
- 6) $\left(\frac{2}{3}c - \frac{4}{5}d\right)\left(\frac{2}{3}c + \frac{4}{5}d\right)$.

691. Подайте у вигляді многочлена:

- 1) $4(a - 1)(a + 1)$;
- 2) $b(b - 2)(b + 2)$;
- 3) $7p(p + 3)(p - 3)$;
- 4) $-3x(x + 4)(x - 4)$.

692. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

- 1) $(1,9x - 3)(3 + 1,9x) + 0,39x^2$, якщо $x = 2$;
- 2) $9,99 - (5y - 0,1)(5y + 0,1)$, якщо $y = \frac{1}{5}$;
- 3) $(2x - 3y)(2x + 3y) + (3x + 2y)(3x - 2y)$,
якщо $x = 1,8$; $y = -1,8$;
- 4) $(ab + 1)(ab - 1)(a^2b^2 + 1)$, якщо $a = 5$; $b = \frac{1}{5}$.

693. Обчисліть: $7^{40} \cdot 3^{40} - (21^{20} - 1)(21^{20} + 1)$.

До § 16

694. Які з рівностей є тотожностями:

- 1) $m^2 - p^2 = (m + p)(m - p)$;
- 2) $a^2 - 7^2 = (a - 7)(a + 7)$;
- 3) $c^2 - d^2 = (c - d)(c + d)$;
- 4) $9^2 - a^2 = (9 - a)^2$?

695. Розкладіть на множники:

- 1) $x^2 - 49$;
- 2) $100 - p^2$;
- 3) $0,04m^2 - n^2$;
- 4) $25x^2 - 36y^2$;
- 5) $16a^2 - b^2c^2$;
- 6) $121m^2a^2 - \frac{1}{9}b^2$.

3 696. Розв'яжіть рівняння, де x – змінна:

- 1) $a^2x^2 - b^2 = 0$, $a \neq 0$;
 2) $x^2 - 0,09a^2 = 0$.

4 697. Чи ділиться:

- 1) $138^2 - 136^2$ на 4; 2) $349^2 - 347^2$ на 6?

698. Розкладіть вираз на множники:

- 1) $9 - (2x - 8)(3x + 2) - 2x(5x + 10)$;
 2) $(3x + 5)(4x - 5) - 2x(2,5 + 1,5x)$.

До § 17

1 699. Який з даних виразів є неповним квадратом суми виразів m і n , а який – неповним квадратом їх різниці:

- 1) $m^2 - 2mn + n^2$; 2) $m^2 + mn + n^2$;
 3) $m^2 + 2mn + n^2$; 4) $m^2 - mn + n^2$?

2 700. Розкладіть на множники:

- 1) $x^3 - y^3$; 2) $p^3 + k^3$; 3) $a^3 - 64$;
 4) $\frac{1}{125} + b^3$; 5) $0,001m^3 - 1$; 6) $8x^3 + 27p^3$.

3 701. Доведіть, що значення виразу $37^3 + 13^3$ ділиться на 50.

4 702. Доведіть тотожність:

$$x^6 - y^6 = (x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2).$$

До § 18

1 703. Закінчіть розкладання на множники:

- 1) $ym^2 - 4y = y(m^2 - 4) = y(m^2 - 2^2) = \dots$
 2) $ca^2 + 2ac + c = c(a^2 + 2a + 1) = \dots$

2 704. Розкладіть на множники многочлен:

- 1) $mp^2 - mq^2$; 2) $20a^2 - 5$; 3) $c - c^3$;
 4) $64a^2 - a^4$; 5) $5x^2 - 10xy + 5y^2$; 6) $2b + 4bn + 2bn^2$.

3 705. Подайте у вигляді добутку:

- 1) $9a^3 - 9b^3$; 2) $2mn - 2bn + 6m - 6b$;
 3) $\frac{1}{81}p^4 - 1$; 4) $m^2 - 4mn + 4n^2 - 25$;
 5) $b^2 - 36 + b - 6$; 6) $m^3 - 4m - m^2n + 4n$.

706. Розкладіть на множники многочлен:

1) $am^4 - m^4 - am^2 + m^2$;

2) $a^3b - a^3 - ab + a$;

3) $b^3 + 1 - b^2 - b$;

4) $x^3 - 27 + x^4 - 9x^2$.

707. Доведіть тотожність:

1) $(a + 1)^3 - 4(a + 1) = (a + 1)(a - 1)(a + 3)$;

2) $(m^2 + 9)^2 - 36m^2 = (m - 3)^2(m + 3)^2$.

Про фундаторів математичних олімпіад в Україні

Трохи раніше ми вже розповідали про історію математичного олімпіадного руху в Україні, тепер детальніше розкажемо про його фундаторів, які більшу частину свого життя присвятили виявленню, вихованню та навчанню математично обдарованої молоді.



«Він жив і горів безмірною любов'ю до України і до Математики і увесь свій короткий вік працював невпинно й творчо на благо Науки, Освіти рідного народу. Його лекції – це і сила, й безмірна глибочинь, і краса математичної думки». Ці слова про Михайла

Пилиповича Кравчука до його 115-річчя написала Ніна Опанасівна Вірченко, український математик, доктор фізико-математичних наук, заслужений працівник освіти України, професор Національного технічного університету України «КПІ».

Народився майбутній вчений 27 вересня 1892 р. у с. Човниця на Волині. Навчався в Луцькій гімназії, яку в 1910 році закінчив із золотою медаллю, і вступив на математичне відділення фізико-математичного факультету Університету святого Володимира (нині Київський національний університет імені Тараса Шевченка). У 1914 році М. Кравчук закінчує університет і його залишають при університеті як професорського стипендіата для підготовки до наукової та викладацької роботи. Успішно склавши магістерські іспити в 1917 році, Михайло Кравчук одержує звання приват-доцента. І відтоді вся наукова, педагогічна та громадська діяльність Кравчука пов'язана з Києвом. Він викладає математичні предмети у вперше створених в столиці українських гімназіях, Українському народному університеті. Був учителем Архипа Люльки, винахідника турбоактивного двигуна, та Сергія Корольова, авіаконструктора зі світовим ім'ям. На лекціях Михайла Пилиповича ніколи не було вільного місця, слухати його лекції приходили і біологи, і хіміки, і філософи, і філологи, і робітники...

У 1919 році Кравчук опублікував перший переклад українською мовою підручника «Елементарна геометрія» А.П. Кисе-

льова, російськомовного підручника, який на початку ХХ ст. отримав схвальну оцінку вчителів математики та проіснував більш як півстоліття аж до перебудови шкільного курсу математики в СРСР. На початку 1920 року Михайла Пилиповича обрано членом комісії математичної термінології при Інституті наукової мови Української академії наук. На кінець того ж року цією комісією під головуванням М. Кравчука було створено тритомний математичний словник. Пильне вивчення праць Михайла Кравчука під мовно-термінологічним кутом зору і нині може прислужитися такій актуальній справі, як подальша розробка та вдосконалення української математичної термінології. Вільно володіючи кількома мовами (французькою, німецькою, італійською, польською, російською), він писав ними свої наукові праці, але найчастіше – рідною мовою, і ця його мова – гідний зразок українського науково-математичного стилю.

У 1924 році Михайло Пилипович Кравчук блискуче захистив докторську дисертацію. Це був перший в Україні захист докторської дисертації. У 1925 році Михайлові Кравчуку було присвоєно звання професора, а в 1929 році його обрано дійсним членом Всеукраїнської академії наук. У віці 37 років він став наймолодшим академіком в Україні. Математичні інтереси Михайла Пилиповича – розмаїті, його наукові праці відзначались оригінальністю ідей, нестандартністю підходів до відомих і нових математичних проблем. Своєрідність та гнучкість мислення, висока продуктивність та працездатність, ерудованість, вимогливість та наукова щедрість, відданість науці М. Кравчука викликали захоплення його учнів та послідовників, коло яких значно з року в рік розширювалось.

Вісім років, з 1929 до 1937, були найпліднішими у творчості та наукових здобутках М. Кравчука. Він одержує низку глибоких результатів у різних розділах математики, зокрема і в теорії множення, видає підручники для вищої школи, ініціює проведення першої в Україні шкільної математичної олімпіади, неперервно працює над удосконаленням математичної термінології. Результати своїх досліджень друкує не тільки в наукових виданнях України, а й за кордоном, в Італії, Франції, Німеччині.

Але трагічно склалася подальша доля Михайла Пилиповича. У СРСР почалися сталінські репресії. У 1938 році тяжка година випробувань настала і для нього. Його заарештовують, інкримінуючи стандартний на той час набір злочинів: український націоналізм, шпигунство, контрреволюційну діяльність, у зв'язку із чим у вересні 1938 р. М. Кравчука було засуджено до 20 років тюремного ув'язнення і п'яти років заслання та відправлено в тюремні табори на Колиму. Три каторжні зими і літа відбув він там, хворий і пригнічений несправедливістю. А 9 березня 1942 року його не стало. Залишився

Михайло Кравчук на віки вічні в колимській мерзлоті поряд з поетом-неокласиком Михайлом Драй-Хмарою, що за кілька літ до нього спочив у тій далекій землі, поряд з тисячами інших закатованих представників інтелігенції. І лише в 1956 році Михайла Пилиповича було реабілітовано.

У 1992 році, після здобуття незалежності, Україна відзначила 100-річчя від дня народження М.П. Кравчука. Його ім'я було занесено в Міжнародний календар ЮНЕСКО визначних наукових діячів. У Національному технічному університеті України «Київський Політехнічний Інститут» (НТУУ «КПІ») періодично проходять Міжнародні наукові конференції, присвячені пам'яті академіка Михайла Кравчука, у яких беруть участь учені з усіх областей України, з Білорусії, Литви, Росії, Австралії, США, Німеччини, Польщі, Китаю, Японії та інших країн.

Пам'ять про Михайла Пилиповича Кравчука увічнено в назві однієї з київських вулиць, на батьківщині вченого відкрито його музей, у НТУУ «КПІ» засновано стипендію його імені, а на території цього вишу відкрито пам'ятник вченому, на постаменті якого викарбовано його життєве кредо: «Моя любов – Україна і математика».

Історія знає вражаючі приклади, коли таємниці науки підкорялися юним дослідникам.

Видатного математика і фізика-теоретика Миколу Миколайовича Боголюбова (1909–1993) було зараховано до аспірантури, коли йому ще не виповнилося і 15 років. У 17 років за досягнення в математиці йому присвоїли ступінь кандидата наук. Ще через два роки його наукові праці було відзначено нагородою Болонської академії наук (Італія), а в 20 років за визначні досягнення в галузі математики за рішенням Всеукраїнської академії наук йому було присуджено науковий ступінь доктора фізико-математичних наук без захисту дисертації.



Народився Микола Боголюбов у Нижньому Новгороді (Росія), але більшу частину свого життя і наукової діяльності провів в Україні. Коли Миколі виповнився рік, його родина переїжджає до Києва. Юний Микола самостійно опрацьовує курси вищої математики та фізики, і тринадцятирічному хлопцю з надзвичайними здібностями дозволяють відвідувати лекції в Київському університеті. З великим захопленням юнак вивчає тут математику, фізику, астрономію, бере участь у роботі наукових семінарів. З 1923 року його заняттями з математики керує відомий учений, математик і механік М.М. Крилов (1879–1955). Понад два десятиліття Микола Миколайович Боголюбов керував проведенням у Києві та Україні учнівських математич-

них олімпіад, був професором Київського і Московського університетів, працював в Академії наук УРСР, у Математичному інституті ім. В.А. Стеклова Академії наук СРСР, Міжнародному науковому центрі ядерно-фізичних досліджень – Об'єднаному інституті ядерних досліджень у м. Дубна (Росія).

З українськими математичними олімпіадами нерозривно пов'язане ім'я ще однієї неперевершеної особистості – Михайла Йосиповича Ядренка (1932–2004), який щороку до останніх своїх днів очолював журі Всеукраїнської учнівської олімпіади.

Надзвичайно плідним є його життєвий шлях. Народився у с. Дрімайлівка Чернігівської області. За словами самого Михайла Йосиповича, його першими підручниками були буквар та «Кобзар» Шевченка. Навчаючись у школі, він твердо вирішив стати математиком. У березні 1950 р. Михайло почув по радіо оголошення, що в Київському університеті має відбутися математична олімпіада, і, маючи бажання взяти в ній участь, написав до університету листа із запитанням про таку можливість для школярів не з Києва. Через деякий час отримав відповідь із запрошенням взяти в ній участь. Тоді Михайло посів у цих змаганнях 2-ге місце з-поміж учнів 10 класу. Того ж року він закінчив школу із золотою медаллю та вступив до Київського університету на механіко-математичний факультет, а після його закінчення – до аспірантури. Захистив кандидатську і докторську дисертації. Ще будучи аспірантом, він бере активну участь в організації Київських математичних олімпіад та підготовці конкурсних задач. А з 1970 року стає головою журі Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики. Понад 40 років свого життя Михайло Йосипович віддав розвитку шкільної математичної освіти, виданню посібників і задачників з математики, титанічній праці з виховання математично здібної молоді. У 2010 році на честь Михайла Йосиповича названо Всеукраїнський турнір юних математиків (ТЮМ), ще одне не менш популярне за олімпіаду математичне змагання всеукраїнського рівня.

Усе своє життя він пропрацював у Київському університеті (нині – Київський національний університет імені Тараса Шевченка), більш ніж 30 років завідував кафедрою теорії ймовірностей та математичної статистики механіко-математичного факультету. Під його керівництвом 45 аспірантів захистили дисертації, 10 стали докторами наук. У 1990 році Михайла Йосиповича було обрано членом-кореспондентом Національної академії наук України.

Його донька Ольга у своїх спогадах про батька зазначала: «Усе своє життя батько присвятив людям, математиці, Україні...».



Розділ 2. ФУНКЦІЇ

У цьому розділі ви:

- **ознайомитесь** з поняттями функції та її графіка, лінійної функції;
- **дізнаєтесь** про способи задання функцій;
- **навчитесь** знаходити область визначення і область значень деяких функцій, будувати графік лінійної функції.



19.

ФУНКЦІЯ. ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ І ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ. СПОСОБИ ЗАДАННЯ ФУНКЦІЙ. ФУНКЦІОНАЛЬНА ЗАЛЕЖНІСТЬ МІЖ ВЕЛИЧИНАМИ ЯК МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РЕАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ

У житті ми часто стикаємося із залежностями між різними величинами. Наприклад, периметр квадрата залежить від довжини його сторони, площа прямокутника – від його вимірів, маса шматка крейди – від його об'єму, відстань, яку долає рухомий об'єкт, – від його швидкості та часу руху тощо.

Щоб розв'язати задачу практичного змісту, доцільно спочатку створити її *математичну модель*, тобто записати залежність між відомими і невідомими величинами за допомогою математичних понять, відношень, формул, рівнянь тощо.

Розглянемо приклади *залежностей між двома величинами*.

Приклад 1. Нехай сторона квадрата дорівнює a см, а його периметр дорівнює P см. Для кожного значення змінної a можна знайти відповідне значення змінної P . Наприклад,

$$\text{якщо } a = 5, \text{ то } P = 4 \cdot 5 = 20;$$

$$\text{якщо } a = 8, \text{ то } P = 4 \cdot 8 = 32;$$

$$\text{якщо } a = 1,2, \text{ то } P = 4 \cdot 1,2 = 4,8.$$

Тобто периметр квадрата залежить від довжини його сторони. Математичну модель цієї залежності можна записати формулою $P = 4a$.

Оскільки кожному значенню довжини сторони квадрата відповідає певне значення його периметра, то кажуть, що ма-

ємо відповідність між довжиною сторони квадрата і його периметром (або залежність між змінними a і P). При цьому вважають, що значенню $a = 5$ відповідає значення $P = 20$, або значення $P = 20$ є відповідним значенню $a = 5$.

Змінну a , значення якої вибирають довільно, називають *незалежною змінною*, а змінну P , кожне значення якої залежить від вибраного значення a , – *залежною змінною*.

Приклад 2. Нехай автомобіль рухається з постійною швидкістю 80 км/год. Відстань, яку він при цьому подолає, залежить від часу його руху.

Позначимо час руху автомобіля (у годинах) буквою t , а відстань, що він подолав (у кілометрах), – буквою s . Для кожного значення змінної t (де $t \geq 0$) можна знайти відповідне значення s . Наприклад,

$$\text{якщо } t = 1,5, \text{ то } s = 80 \cdot 1,5 = 120;$$

$$\text{якщо } t = 3, \text{ то } s = 80 \cdot 3 = 240;$$

$$\text{якщо } t = 4,5, \text{ то } s = 80 \cdot 4,5 = 360.$$

Залежність змінної s від змінної t можна записати формулою $s = 80t$, де t є незалежною змінною, а s – залежною змінною.

У математиці, як правило, незалежну змінну позначають буквою x , а залежну змінну – буквою y . У прикладах, які ми розглянули, кожному значенню незалежної змінної відповідає лише одне значення залежної змінної.



Якщо кожному значенню незалежної змінної відповідає єдине значення залежної змінної, то таку залежність називають *функціональною залежністю*, або *функцією*.

Незалежну змінну ще називають *аргументом*, а про залежну змінну кажуть, що вона є *функцією* від цього аргументу. У наших прикладах – периметр квадрата P є функцією від довжини його сторони a ; відстань s , яку подолав автомобіль зі сталою швидкістю, є функцією від часу руху t . Значення залежної змінної називають *значенням функції*.



Усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент), утворюють *область визначення функції*; усі значення, яких набуває залежна змінна (функція), утворюють *область значень функції*.

Наприклад, областю визначення функції у прикладі 1 є всі додатні числа a ($a > 0$).

Областю визначення функції у прикладі 2 є всі невід'ємні числа t , тобто $t \geq 0$. Область значень функції у прикладі 1 складається з усіх додатних чисел P , а область значень функції у прикладі 2 – з усіх невід'ємних чисел s , тобто $s \geq 0$.

Приклад 3. Функцію задано формулою $y = \frac{8}{x-2}$. Знайти:

- 1) область визначення функції;
- 2) значення функції, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює -2 ; 6 ; 10 ;
- 3) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює -1 .

Розв'язання. 1) Областю визначення функції є всі такі значення x , при яких дріб $\frac{8}{x-2}$ має зміст. Знаменник дробу дорівнює нулю при $x = 2$. Отже, областю визначення функції є всі числа, крім числа 2.

2) Якщо $x = -2$, то $y = \frac{8}{-2-2} = \frac{8}{-4} = -2$; якщо $x = 6$, то $y = \frac{8}{6-2} = 2$; якщо $x = 10$, то $y = \frac{8}{10-2} = 1$.

3) Щоб знайти x , при якому $y = -1$, треба підставити у формулу функції замість y число -1 . Матимемо рівняння: $-1 = \frac{8}{x-2}$, коренем якого є число -6 . Отже, значення $y = -1$ функція набуває при $x = -6$.

Задавати функцію можна різними способами. У прикладах, які ми розглянули, *функції задано формулами*: $P = 4a$; $s = 80t$; $y = \frac{8}{x-2}$. Такий спосіб задання функції є досить зручним, бо дає змогу для довільного значення аргументу знаходити відповідне значення функції, та компактним, оскільки в більшості випадків формула має короткий запис.

Трапляються й функції, які для різних значень аргументу задаються різними формулами. Розглянемо таку функцію та її запис.

Приклад 4. Нехай дано функцію

$$y = \begin{cases} 2x - 7, & \text{якщо } x \leq -2; \\ x^2 + 1, & \text{якщо } x > -2. \end{cases}$$

Цей запис означає, що для значень аргументу $x \leq -2$ значення функції обчислюються за формулою $y = 2x - 7$, а для значень аргументу $x > -2$ – за формулою $y = x^2 + 1$.

Наприклад,

$$\text{якщо } x = -3, \text{ то } y = 2 \cdot (-3) - 7 = -13;$$

$$\text{якщо } x = -2, \text{ то } y = 2 \cdot (-2) - 7 = -11;$$

$$\text{якщо } x = 0, \text{ то } y = 0^2 + 1 = 1;$$

$$\text{якщо } x = 5, \text{ то } y = 5^2 + 1 = 26.$$

Задавати функцію можна і *таблицею*. Такий спосіб задання функції називають *табличним*. Розглянемо його на прикладі.

Приклад 5. Щогодини, починаючи з восьмої і до тринадцятої, вимірювали атмосферний тиск і одержані дані занесли в таблицю:

Час t , год	8	9	10	11	12	13
Атмосферний тиск p , мм рт. ст.	753	754	756	754	753	752

Таблиця задає відповідність між часом вимірювання t і атмосферним тиском p . Ця відповідність є функцією, бо кожному значенню змінної t відповідає єдине значення змінної p . У цьому прикладі t є незалежною змінною, а p – залежною змінною. Область визначення функції складається із чисел 8; 9; 10; 11; 12; 13 (перший рядок таблиці), а область значень – із чисел 752; 753; 754; 756 (другий рядок таблиці).

Табличний спосіб задання функції зручний тим, що для знаходження значень функції не треба нічого обчислювати. Незручним є те, що таблиця, як правило, займає багато місця і може не містити саме того значення аргументу, яке нас цікавить, наприклад, якщо в першому рядку таблиці такого значення немає. Зокрема, у прикладі 5 неможливо знайти значення функції, що відповідає значенню аргументу, яке дорівнює, наприклад, 8,5 або 14.

Задавати функцію можна також висловленням. Такий спосіб задання функції називають *описовим* або *словесним*.

Приклад 6. Кожному натуральному числу поставимо у відповідність квадрат цього числа. Одержимо функцію, область визначення якої складається з усіх натуральних чисел, а область значень – з квадратів цих чисел.

Функціональні залежності, які ми розглянули у прикладах 2 і 5 є математичними моделями реальних процесів: модель руху автомобіля зі сталою швидкістю, модель вимірювання тиску протягом деякого часу.

У подальшому під час вивчення алгебри ми будемо неодноразово звертатися до математичних моделей реальних процесів.

А ще раніше...

Функція – одне з найважливіших понять сучасної математики. Залежності між різними величинами цікавили й стародавніх математиків. Зокрема, у Вавилоні було складено таблиці квадратів і кубів чисел, таблиці сум і добутків двох чисел, у Греції – знайдено співвідношення між елементами кола. У працях І. Ньютона, Р. Декарта, Г. Лейбніца, П. Ферма розглядалося багато функціональних залежностей, пов'язаних з геометрією та фізикою. Так, французькі математики П'єр Ферма (1601–1665) та Рене Декарт (1596–1650) розглядали функцію як залежність ординати точки кривої від її абсциси. Рене Декарт використовував поняття змінної величини. Термін «функція» (від латинського *functio* – виконання, звершення) для назви залежностей вперше ввів Готфрід Лейбніц (1646–1716). Він пов'язував функцію з графіками. Швейцарські математики Йоганн Бернуллі (1667–1748) та його видатний учень Леонард Ейлер (1707–1783) розглядали функцію як аналітичний вираз, тобто вираз, утворений із змінних і чисел за допомогою тих чи інших аналітичних операцій (дій). Поняття функції як залежності однієї змінної від іншої ввів чеський математик Бернард Больцано (1781–1848), а узагальнив – німецький математик Петер Густав Діріхле (1805–1859).

Найзагальніше сучасне означення функції було запропоновано в середині ХХ ст. Свій внесок у становлення цього поняття за радянських часів зробили математики М. Гюнтер, І. Гельфанд, С. Соболев, Г. Шилов.



Наведіть приклади функціональної залежності однієї змінної від іншої, назвіть у них незалежну змінну і залежну. 🍷 Що називають функцією? 🍷 Що називають областю визначення функції і що – областю значень функції? 🍷 Які є способи задання функції? 🍷 Наведіть приклад функції, заданої формулою. 🍷 Наведіть приклад функціональної залежності між величинами, що є математичною моделлю реальних процесів.

708. (Усно) Чи залежить периметр рівностороннього трикутника від довжини його сторони? Чи є периметр цього трикутника функцією від довжини сторони трикутника? Якщо так, то задайте цю функцію формулою за умови, що сторона трикутника дорівнює a .

709. (Усно) Які з даних записів задають функцію? Укажіть для них незалежну змінну (аргумент) та залежну змінну:

- 1) $a = 5b - 7$; 2) $7 + 2x = 2x - 3$; 3) $y = \frac{1}{5x - 7}$;
 4) $20 : 5 - 4 = 0$; 5) $p = t^2 + t - 5$; 6) $2a - 5 > 3$.

710. Які з даних записів задають функцію? Укажіть для них незалежну змінну (аргумент) та залежну змінну:

- 1) $m = 2n^2 - 5$; 2) $y = x^3 - x^2 + 3$; 3) $30 - 20 > 7$;
 4) $3x - 5 = 12 - 3x$; 5) $d = \frac{m^2 + 1}{m - 1}$; 6) $12 \cdot 2 = 6 \cdot 4$.

711. (Усно) Площу круга знаходять за формулою $S = \pi r^2$, де r – радіус круга. Чи задає ця формула функцію? Якщо так, укажіть її аргумент та область визначення.

712. Площа прямокутника зі сторонами x см і 10 см дорівнює S . Виразіть формулою залежність S від x . Чи задає ця формула функцію?

713. Об'єм куба з ребром a см дорівнює V см³. Виразіть формулою залежність V від a . Чи задає ця формула функцію? Знайдіть за цією формулою значення V , якщо:

- 1) $a = 5$; 2) $a = 7$; 3) $a = \frac{3}{4}$.

714. Периметр прямокутника зі сторонами x дм і 8 дм дорівнює P дм. Запишіть формулу залежності P від x . Для значень аргументу $x = 2; 4; 5; 15$ знайдіть відповідні значення функції P .

715. (Усно) Функцію задано формулою $y = -2x$.

- 1) Яка змінна є незалежною, а яка – залежною?
 2) Знайдіть значення функції, що відповідають значенням аргументу $-3; 0; 8$.

716. Обчисліть значення функції, заданої формулою $y = 5x - 7$ для значень аргументу, що дорівнюють $-2; 0; 5; 10$.

717. Знайдіть значення функції, заданої формулою $y = \frac{20}{x}$, для значень аргументу, що дорівнюють $-40; -10; 4; 5$.

718. Функцію задано формулою $y = -\frac{6}{x}$. У таблиці наведено значення її аргументу. Заповніть таку таблицю в зошиті, обчисливши відповідні значення функції:

x	-12	-6	-5	-3	2	4	8	10
y								

719. Функцію задано формулою $y = 4x + 3$. У таблиці наведено значення її аргументу. Заповніть таку таблицю в зошиті, обчисливши відповідні значення функції:

x	-7	-5	-3	-1	2	4	6	8
y								

720. Складіть таблицю значень функції, заданої формулою $y = x^2 - 3$, для значень аргументу -3; -2; -1; 0; 1; 2.

721. Складіть таблицю значень функції, заданої формулою $y = 5 - x^2$, для значень аргументу -2; -1; 0; 1; 2; 3.

722. Потяг, рухаючись зі швидкістю 65 км/год, проходить за t год відстань s км. Задайте формулою залежність s від t . Обчисліть значення функції, які відповідають значенням аргументу, що дорівнюють 1; 2,4; 3; 5,8.

723. Кожному натуральному значенню n відповідає втричі більше за нього число N . Задайте формулою залежність N від n . Знайдіть значення функції, що відповідають значенням аргументу 2; 7; 13; 20.

724. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = 2x - 7; \quad 2) y = \frac{5x + 7}{8}; \quad 3) y = \frac{10}{x}; \quad 4) y = \frac{5}{x + 3}.$$

725. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = 3x + 8; \quad 2) y = \frac{5x - 3}{9}; \quad 3) y = -\frac{8}{x}; \quad 4) y = \frac{7}{x - 5}.$$

726. Знайдіть значення аргументу, при якому:

- 1) функція $y = -3x$ набуває значення -6; 9; 15;
- 2) функція $y = 5x - 1$ набуває значення -1; 4; 14.

727. Знайдіть значення аргументу, при якому:

- 1) функція $y = 4x$ набуває значення -8; 0; 12;
- 2) функція $y = 3 - 2x$ набуває значення -1; 3; 17.

728. Функцію задано таблицею:

x	-2	-1	0	1	2
y	-5	-3	-1	2	7

Знайдіть:

- 1) значення функції, якщо $x = -2; 0; 1$;

- 2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює -3 ; 2 ; 7 ;
 3) область визначення функції;
 4) область значень функції.

729. Функцію задано таблицею:

x	1	2	3	4	5
y	-2	0	2	5	7

Знайдіть:

- 1) значення функції, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює 1 ; 3 ; 4 ;
 2) значення аргументу, при якому $y = 0$; 5 ; 7 ;
 3) область визначення функції;
 4) область значень функції.

730. Функцію задано формулою $y = \frac{3}{4}x$. Заповніть порожні комірки таблиці:

x	-8		$1,6$		$20,8$		
y		-9		$-\frac{3}{8}$		$1\frac{5}{7}$	$20,7$

731. Функцію задано формулою $y = \frac{3}{5}x$. Заповніть порожні комірки таблиці:

x	-10		0		$8,5$		
y		$-1,2$		$\frac{3}{5}$			$13,5$

732. Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:

- 1) $y = \frac{5}{x^2 - 9}$; 2) $y = \frac{17}{x^2 + 4}$; 3) $y = \frac{9}{x(x - 3)}$;
 4) $y = \frac{7x + 1}{x^2 + x}$; 5) $y = \frac{9}{(x - 1)(x + 4)}$; 6) $y = \frac{15}{x - 2} + \frac{7}{x + 3}$.

733. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $y = \frac{7}{x^2 - 4}$; 2) $y = \frac{13}{x^2 + 1}$; 3) $y = \frac{14}{(x + 2)x}$;
 4) $y = \frac{9}{x^2 - x}$; 5) $y = \frac{7}{(x + 5)(x - 3)}$; 6) $y = \frac{14}{x + 3} + \frac{7}{x - 1}$.

734. На початку нагрівання вода мала температуру 20°C . При нагріванні температура води щохвилини підвищувалася на 5°C .

- 1) Задайте формулою залежність температури води T від часу t її нагрівання.
- 2) Знайдіть значення T , що відповідає значенню аргументу $t = 7; 9; 10$.
- 3) Знайдіть значення t , яким відповідає $T = 45; 60; 70$.
- 4) Знайдіть значення t , при якому вода закипить.

735. Від'їхавши на відстань 10 км від міста, велосипедист зупинився. А через деякий час продовжив рух зі швидкістю 15 км/год.

- 1) Задайте формулою залежність відстані s (у км), яку загальною подолав велосипедист, від часу t (у год), що відраховується після зупинки.
- 2) Знайдіть значення s , що відповідає значенню аргументу $t = 1; t = 2; t = 5$.
- 3) Знайдіть значення t , яким відповідає $s = 34; s = 55; s = 70$.

736. У таблиці подано залежність функції y від аргументу x .

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-3	-2	1	-3	5	1	6	-2	-3

Знайдіть:

- 1) значення y , якщо $x = -4; -1; 0; 3$;
- 2) значення x , яким відповідає $y = -3; -2; 5$;
- 3) значення x , якому відповідає таке саме значення y ;
- 4) область визначення функції;
- 5) область значень функції.

737. У таблиці подано залежність функції y від аргументу x .

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
y	-1	2	4	2	4	7	2	-1	9

Знайдіть:

- 1) значення y , якщо $x = -8; -2; 4; 6$;
- 2) значення x , яким відповідає $y = -1; 4; 7$;
- 3) значення x , якому відповідає протилежне до x значення y ;
- 4) область визначення функції;
- 5) область значень функції.

738. Складіть таблицю значень функції $y = 0,6 - 0,3x$, де $-2 \leq x \leq 5$, з кроком, що дорівнює 1 . Використовуючи цю таблицю, укажіть:

- 1) значення функції, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює 0;
- 2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0.

739. Знайдіть значення функції для $x = -5$; $x = 0$; $x = 3$, якщо:

$$1) y = \begin{cases} 4x - 3, & \text{якщо } x < 0, \\ -2x, & \text{якщо } x \geq 0; \end{cases} \quad 2) y = \begin{cases} 7, & \text{якщо } x \leq 1, \\ x^2, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

740. Знайдіть значення функції для значення аргументу, яке дорівнює -2 ; 0 ; 4 , якщо:

$$1) y = \begin{cases} 7x - 2, & \text{якщо } x \leq 0, \\ -3x, & \text{якщо } x > 0; \end{cases} \quad 2) y = \begin{cases} 3, & \text{якщо } x \leq 2, \\ -x^2, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

741. Знайдіть найменше значення функції $y = x^2 + 2x + 5$.



Вправи для повторення

742. Обчисліть:

$$\frac{8}{15} \cdot 0,5625 - \left(\frac{11}{24} + 1 \frac{13}{36} \right) \cdot 1,44 + 2 \frac{8}{25}.$$

743. Якими одночленами треба заповнити клітинки, щоб рівність перетворилася на тотожність:

- 1) $(3x - 2y)(\square + \square) = 9x^2 - 4y^2$;
- 2) $(5m + \square)(5m - \square) = 25m^2 - 36$;
- 3) $(7c^2 - \square)(\square + 3p) = 49c^4 - 9p^2$;
- 4) $(4m + 9a^2)(\square - \square) = 81a^4 - 16m^2$?

744. Сторона квадрата на 4 см більша за одну сторону прямокутника і на 5 см менша за другу. Знайдіть сторону квадрата, якщо його площа на 10 см^2 більша за площу прямокутника.



Цікаві задачі для учнів неледачих



745. У трьох коробках лежать кульки: у першій – дві білого кольору, у другій – дві чорного кольору, у третій – білого й чорного. На коробках є таблички з написами, що відповідають кольору кульок: ББ, ЧЧ і БЧ, але вміст жодної з коробок не відповідає її табличці. Як, взявши з якоїсь однієї коробки навмання одну кульку, визначити колір кульок, що лежать у кожній з коробок?

§20.

ГРАФІК ФУНКЦІЇ. ГРАФІЧНИЙ СПОСІБ ЗАДАННЯ ФУНКЦІЇ

У 6 класі ми вже розглядали графік залежності між двома величинами. Розглянемо поняття *графіка функції*.

Приклад 1. Нехай дано функцію $y = \frac{6}{x+3}$, де $-2 \leq x \leq 3$.

Знайдемо значення цієї функції для цілих значень аргументу і занесямо результати в таблицю:

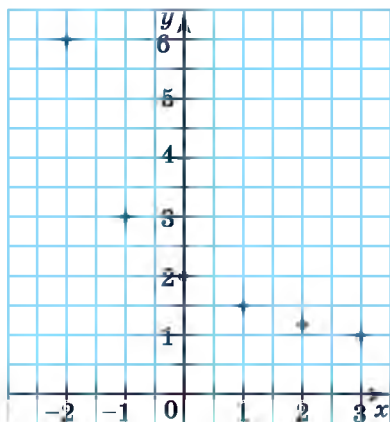
x	-2	-1	0	1	2	3
y	6	3	2	1,5	1,2	1

Позначимо на координатній площині точки $(x; y)$, координати яких подано в таблиці, тобто точки $(-2; 6)$, $(-1; 3)$, $(0; 2)$, $(1; 1,5)$, $(2; 1,2)$, $(3; 1)$ (мал. 6). Якщо взяти інші значення x з проміжку від -2 до 3 і обчислити відповідні їм значення y за формулою $y = \frac{6}{x+3}$, то одержимо інші пари значень x і y . Кож-

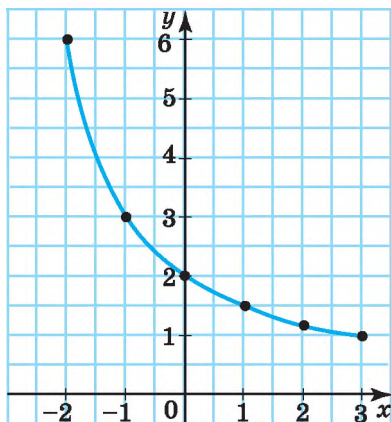
ній із цих пар відповідає певна точка координатної площини. Усі такі точки утворюють фігуру, яку називають *графіком функції* $y = \frac{6}{x+3}$, де $-2 \leq x \leq 3$ (мал. 7).



Графіком функції називають фігуру, яка складається з усіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції.



Мал. 6



Мал. 7

Приклад 2. Побудувати графік функції $y = x^2 - 1$, де $-3 \leq x \leq 2$.

Розв'язання. Складемо таблицю значень функції для цілих значень аргументу:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	8	3	0	-1	0	3

Позначимо точки, координати яких подано в таблиці, на координатній площині і сполучимо їх плавною лінією (мал. 8). Одержимо графік функції $y = x^2 - 1$ для $-3 \leq x \leq 2$.

Зауважимо, що меншим буде крок (відстань) між значеннями аргументу, то щільніше розташуються точки на координатній площині, а отже, точнішим буде побудований графік.

По графіку можна одразу вказати, при яких значеннях аргументу значення функції додатні, при яких – від'ємні, при яких дорівнюють нулю. По графіку також можна побачити область визначення і область значень функції.



Нуль функції – значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю.

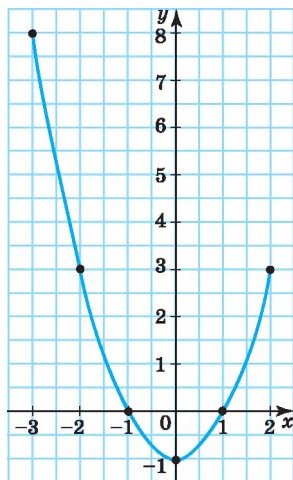
Приклад 3. Використовуючи графік функції $y = x^2 - 1$, де $-3 \leq x \leq 2$, знайти: 1) нулі функції; 2) область значень функції; 3) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень; 4) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.

Розв'язання. Графік функції $y = x^2 - 1$ зображено на малюнку 8.

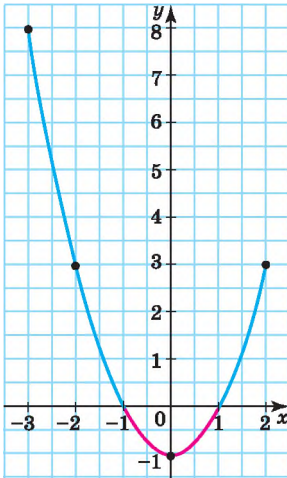
1) Нулі функції – це абсциси точок перетину графіка функції з віссю x . Тому $x = -1$ і $x = 1$ – нулі функції. Зауважимо, що нулі функції можна знайти, і не використовуючи графік даної функції. Наприклад, достатньо розв'язати рівняння $x^2 - 1 = 0$.

2) Функція може набувати будь-яких значень від -1 до 8 . Тому область значень функції є всі такі значення y , що $-1 \leq y \leq 8$.

3) Для значень x таких, що $-3 < x < -1$, точки графіка розташовані вище осі абсцис. Тому функція набуває додатних



Мал. 8



Мал. 9

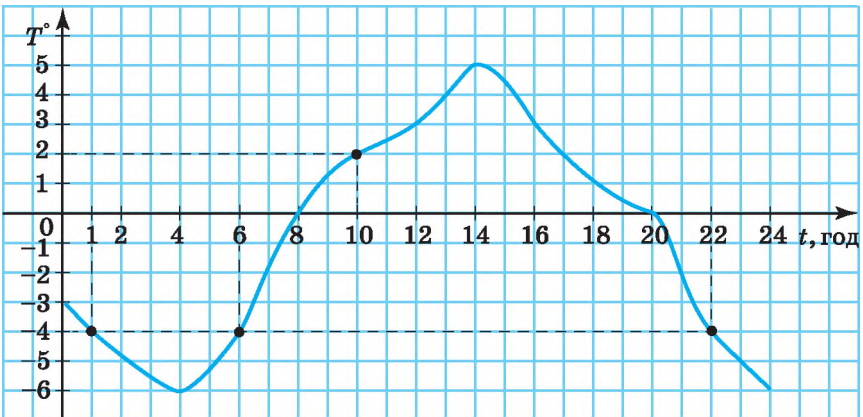
значень при $-3 < x < -1$. На мал. 9 цю частину графіка позначено синім кольором. Так само вище осі абсцис знаходяться точки графіка для $1 < x < 2$. Тому при $1 < x < 2$ функція знову набуває додатних значень (на мал. 9 цю частину графіка також позначено синім кольором). Отже, при $-3 < x < -1$ або $1 < x < 2$ функція набуває додатних значень.

4) Для значень x таких, що $-1 < x < 1$, точки графіка розташовані нижче осі абсцис (на мал. 9 цю частину графіка позначено червоним кольором). Тому при $-1 < x < 1$ функція набуває від'ємних значень.

Використовуючи графік функції, для будь-якого значення аргументу з області визначення можна знайти відповідне йому значення функції. Також за графіком можна скласти таблицю значень функції.

Приходимо до висновку: *графіком можна задати функцію*. Такий спосіб задання функції називають *графічним*. Він є зручним своєю наочністю і часто використовується для відображення явищ, які супроводжують практичну діяльність людини або відбуваються в навколишньому світі.

Приклад 4. На малюнку 10 зображено графік зміни температури повітря протягом доби, одержаний за допомогою спеціального приладу – термографа. Використовуючи цей графік,



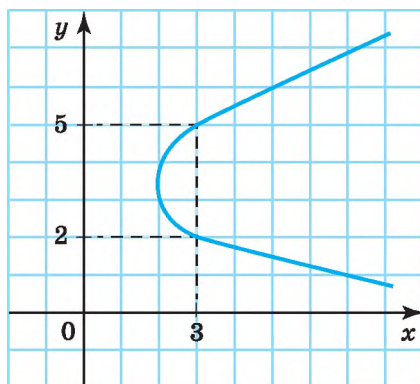
Мал. 10

знайти: 1) якою була температура о 10 год; 2) о котрій годині температура була -4 °С.

Р о з в' я з а н н я. 1) Через точку осі t з координатами $(10; 0)$ проведемо перпендикуляр до цієї осі (мал. 10). Точка перетину цього перпендикуляра з графіком температури має координати $(10; 2)$. Отже, о 10 год температура повітря була 2 °С.

2) Через точку осі T з координатами $(0; -4)$ проведемо перпендикуляр до цієї осі (мал. 10). Цей перпендикуляр перетинає графік у точках $(1; -4)$, $(6; -4)$ і $(22; -4)$. Отже, температура повітря -4 °С була о 1 год, о 6 год і о 22 год.

Зауважимо, що не кожна фігура на координатній площині може бути графіком деякої функції. Наприклад, фігура на малюнку 11 не є графіком жодної з функцій, оскільки існують такі значення x , яким відповідають два значення y . Наприклад, значенню $x = 3$ відповідають значення $y = 2$ і $y = 5$.



Мал. 11

Це означає, що залежність між x і y , графік якої зображено на малюнку 11, не є функціональною через те, що існує хоча б одне значення x , якому відповідає більше, ніж одне значення y . Графічно це означає, що існує хоча б одна пряма, перпендикулярна до осі абсцис, яка перетинає дану фігуру більше, ніж в одній точці. Враховуючи, що при функціональній залежності кожному значенню аргументу ставиться у відповідність єдине значення функції, то кожна пряма, перпендикулярна до осі абсцис, має перетинати графік функції не більше, ніж в одній точці.

Отже, щоб фігура, яку зображено на координатній площині, була графіком деякої функції, необхідно, щоб кожна пряма, перпендикулярна до осі абсцис, перетинала цю фігуру не більше, ніж в одній точці.



Дайте означення графіка функції. Як побудувати графік функції? Покажіть, як за допомогою графіка функції знайти значення функції, що відповідає даному значенню аргументу, та значення аргументу, якому відповідає дане значення функції (на прикладі одного з графіків на мал. 7, 8 і 10). Як з'ясувати, що фігура на координатній площині є графіком функції?

746. На малюнку 12 зображено графік функції. За графіком:
1) заповніть у зошиті таблицю:

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-0,5	0	1	2	3
y									

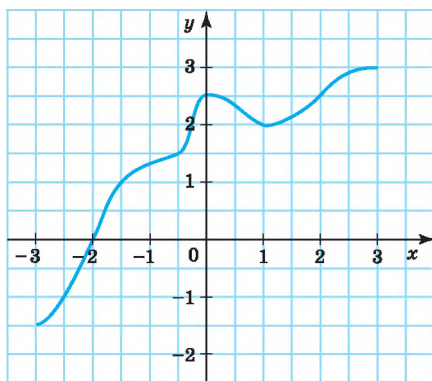
2) знайдіть область визначення і область значень функції.

747. На малюнку 13 зображено графік функції. За графіком:

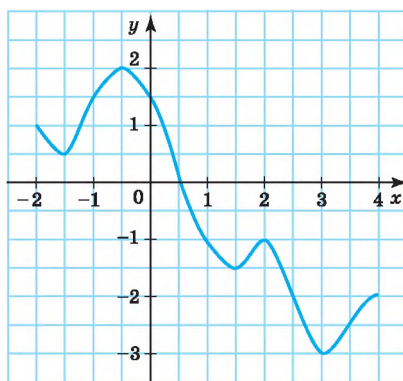
1) заповніть таблицю:

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y													

2) знайдіть область визначення і область значень функції.



Мал. 12



Мал. 13

748. 1) Побудуйте графік функції $y = x - 3$, де $-2 \leq x \leq 5$, склавши таблицю для цілих значень аргументу.

2) Чи належить графіку функції точка $A(3; 0)$; точка $B(-1; 2)$?

3) Знайдіть за графіком значення функції, якщо $x = 2$; $x = 4$.

4) Знайдіть за графіком значення аргументу, якому відповідає значення функції $y = -3$; $y = 2$.

749. 1) Побудуйте графік функції $y = x + 2$, де $-4 \leq x \leq 3$, склавши таблицю для цілих значень аргументу.

2) Чи належить графіку функції точка $C(2; 5)$, точка $D(-2; 0)$?

3) Знайдіть за графіком значення функції, якщо $x = -3$; $x = 1$.

4) Знайдіть за графіком значення аргументу, якому відповідає значення функції $y = 1$; $y = 5$.

750. Не виконуючи побудови графіка, знайдіть нулі функції:

1) $y = 3x$; 2) $y = 2x - 4$; 3) $y = -\frac{x}{8}$; 4) $y = \frac{x-5}{4}$.

751. Не будуючи графіка, знайдіть нулі функції:

1) $y = -2x$; 2) $y = 6 - 2x$; 3) $y = \frac{x}{9}$; 4) $y = \frac{x+2}{7}$.

752. За графіком, зображеним на малюнку 10, знайдіть:

1) якою була температура повітря о 3 год; о 5 год; о 7 год; о 21 год;

2) о котрій годині температура повітря була -5 °С; 0 °С; 5 °С.

753. За графіком, зображеним на малюнку 10, знайдіть:

1) якою була температура повітря в 0 год; о 2 год; о 9 год; о 12 год; о 18 год;

2) о котрій годині температура повітря дорівнювала -6 °С; -2 °С; 1 °С; 3 °С;

3) якою була найнижча температура і о котрій годині;

4) якою була найвища температура і о котрій годині;

5) протягом якого часу температура підвищувалась;

6) протягом якого часу температура знижувалась;

7) протягом якого часу температура повітря була нижчою за 0 °С;

8) протягом якого часу температура повітря була вищою за 0 °С.

754. Не виконуючи побудови, з'ясуйте, чи належить графіку функції $y = x^2 - 3x$ точка:

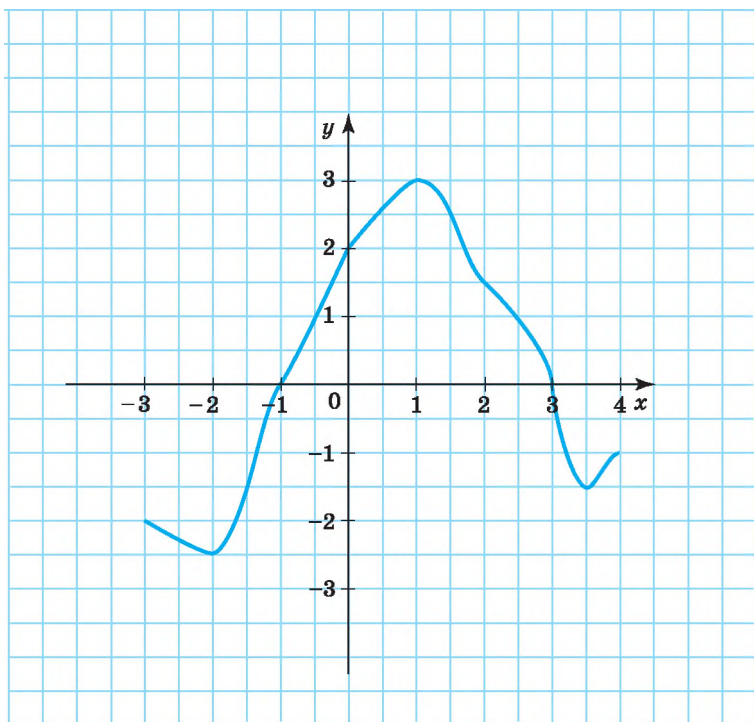
1) $(1; -2)$; 2) $(-2; -2)$; 3) $(0; -3)$; 4) $(-1; 4)$.

755. Не будуючи графіка функції $y = 2x + x^2$, з'ясуйте, чи належить йому точка:

1) $(1; 3)$; 2) $(-1; 3)$; 3) $(0; 0)$; 4) $(-2; 4)$.

756. За графіком, зображеним на малюнку 14, знайдіть:

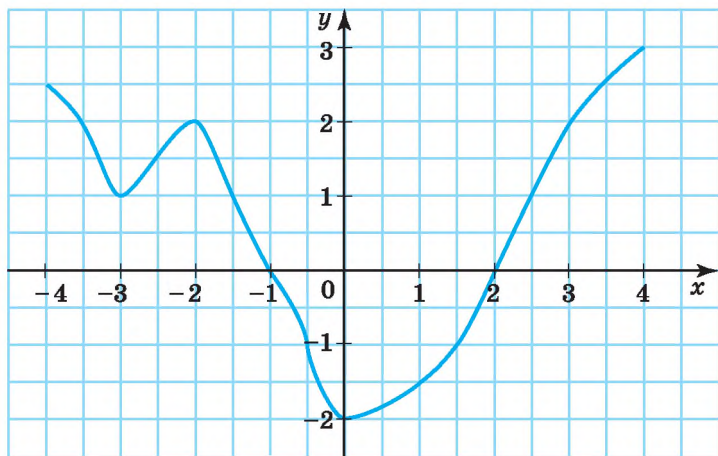
- 1) значення y , якщо $x = -3; -2; -0,5; 1,5; 4$;
- 2) значення x , яким відповідає $y = -2,5; -1,5; 1$;
- 3) нулі функції;
- 4) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень;
- 5) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.



Мал. 14

757. За графіком функції (мал. 15) знайдіть:

- 1) значення y , якщо $x = -3,5; -2; -1,5; 0; 1; 2,5$;
- 2) значення x , яким відповідає $y = -1; 1; 2; 3$;
- 3) нулі функції;
- 4) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень;
- 5) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень.



Мал. 15

758. Ламана ABC – графік деякої функції, причому $A(-3; 2)$, $B(1; 6)$, $C(4; 0)$. Побудуйте графік і знайдіть з його допомогою:

- 1) значення функції, які відповідають значенням $x = -2; 0; 1$;
- 2) значення аргументу, яким відповідає значення $y = 2; 4; 6$.

759. Ламана MNL є графіком деякої функції, причому $M(-2; -1)$, $N(2; 3)$, $L(6; -1)$. Побудуйте графік цієї функції і знайдіть з його допомогою:

- 1) значення функції, які відповідають значенням $x = -2; 0; 2; 5$;
- 2) значення аргументу, яким відповідають значення $y = -1; 1; 3$.

760. Не будуючи графіка, знайдіть нулі функції:

- 1) $y = x^2 - 4x$;
- 2) $y = 16 - x^2$;
- 3) $y = 2x^2 + 10x$.

761. Не будуючи графіка, знайдіть нулі функції:

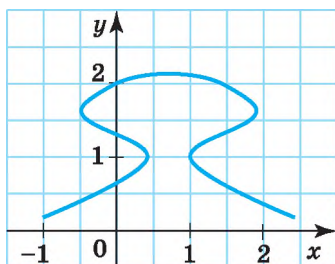
- 1) $y = x^2 + 2x$;
- 2) $y = x^2 - 25$;
- 3) $y = 12x - 3x^2$.

762. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \frac{8-x}{2}$, де $-2 \leq x \leq 10$;
- 2) $y = x(4+x)$, де $-5 \leq x \leq 1$.

763. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \frac{x+3}{2}$, де $-5 \leq x \leq 7$;
- 2) $y = x(4-x)$, де $-1 \leq x \leq 5$.



Мал. 16

764. Чи є фігура на малюнку 16 графіком деякої функції?

765. На малюнку 17 зображено графік залежності маси m (у кг) відра з водою від об'єму V (у л) води в ньому.

Знайдіть за графіком:

- 1) масу порожнього відра;
- 2) масу відра, у якому 4 л води;
- 3) масу 1 л води;
- 4) об'єм води у відрі, якщо маса відра з водою – 8 кг.



Мал. 17



Вправи для повторення

766. Спростіть вираз:

- 1) $(a - 5)(a + 5) - a(a + 7)$;
- 2) $m(m - 4) + (9 - m)(m + 9)$;
- 3) $2a(a - b) - (a - b)^2$;
- 4) $(q + 5p)(5p - q) - (p - 5q)^2 - 10pq$.

767. Доведіть, що різниця між будь-яким трицифровим натуральним числом і сумою його цифр є кратною числу 9.



Цікаві задачі для учнів неледачих



768. Доведіть, що якщо n – натуральне число ($n > 1$), то число $4^n - 3$ не може бути квадратом натурального числа.

§ 21. ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ГРАФІК ТА ВЛАСТИВОСТІ

Приклад 1. Маса одного цвяха 4 г, а маса порожнього ящика – 600 г. Залежність між масою m (у г) ящика із цвяхами і кількістю цвяхів у ньому, що дорівнює x (x – натуральне число), можна задати формулою:

$$m = 4x + 600.$$

Приклад 2. Щомісячна зарплата продавця становить 1500 грн та ще премія в розмірі 1 % від вартості реалізованого товару. Залежність між зарплатою y (у грн) і вартістю x

(у грн) реалізованого товару можна задати формулою:

$$y = 0,01x + 1500, \text{ де } x > 0.$$

В обох прикладах функції задано формулами вигляду $y = kx + l$, де k і l – деякі числа.



Лінійною називають функцію вигляду $y = kx + l$, де x – незалежна змінна, k і l – деякі числа.

Числа k і l називають *коефіцієнтами лінійної функції*.

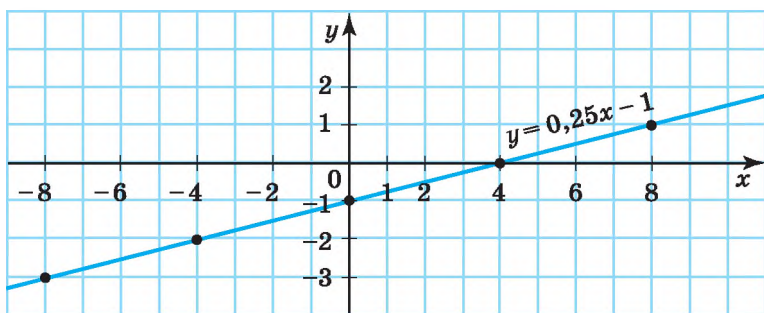
З'ясуємо, як виглядає графік лінійної функції. У формулі $y = kx + l$ незалежній змінній x можна надавати будь-яких значень, тому область визначення лінійної функції складається з усіх чисел.

Приклад 3. Побудувати графік функції $y = 0,25x - 1$.

Р о з в' я з а н н я. Функція є лінійною. Складемо для неї таблицю кількох значень незалежної змінної x та відповідних їй значень функції y :

x	-8	-4	0	4	8
y	-3	-2	-1	0	1

Позначимо на координатній площині точки, координати яких подано в таблиці. За допомогою лінійки можна пересвідчитися, що всі позначені точки лежать на одній прямій. Ця пряма є графіком лінійної функції $y = 0,25x - 1$ (мал. 18).



Мал. 18



Графіком будь-якої лінійної функції є пряма.

Оскільки пряма однозначно задається двома своїми точками, для побудови прямої, яка є графіком лінійної функції, достатньо знайти координати двох точок графіка, позначити ці точки на координатній площині і провести через них пряму.

Приклад 4. Побудувати графік функції $y = -2x + 3$.

Розв'язання. Складемо таблицю для двох довільних значень аргументу.

x	0	4
y	3	-5

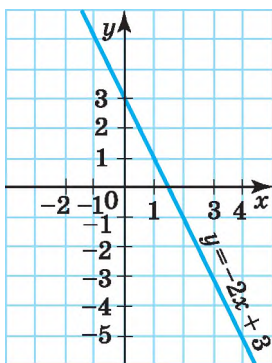
Позначимо на координатній площині одержані точки та проведемо через них пряму.

Маємо графік функції $y = -2x + 3$ (мал. 19).

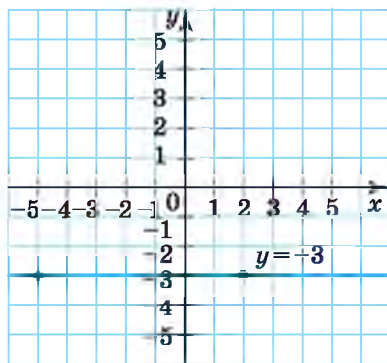
Якщо коефіцієнти лінійної функції є дробовими, то для знаходження двох точок її графіка доцільно підбирати такі цілі значення аргументу, щоб відповідні їм значення функції також виходили цілими.

Наприклад, для функції $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ зручно взяти $x = -1$ та $x = 5$, тоді для побудови її графіка отримаємо точки $(-1; -1)$ та $(5; 1)$.

Якщо $k = 0$, формула $y = kx + l$ матиме вигляд $y = 0x + l$, тобто $y = l$. Лінійна функція, яку задано формулою $y = l$, набуває одних і тих самих значень при будь-яких значеннях x .



Мал. 19



Мал. 20

Приклад 5. Побудувати графік функції $y = -3$.

Розв'язання. Будь-якому значенню x відповідає одне й те саме значення y , що дорівнює -3 . Графіком функції є пряма, яка проходить через точки вигляду $(x; -3)$, де x – будь-яке число. Виберемо будь-які дві з них, наприклад $(-5; -3)$ і $(2; -3)$, та проведемо через них пряму (мал. 20). Ця пряма і є графіком функції $y = -3$. Вона паралельна осі x .



Пряма вигляду $y = l$ є паралельною осі x .

Отже,
щоб побудувати графік функції $y = l$, достатньо позначити на осі y точку з координатами $(0; l)$ та провести через неї пряму, паралельну осі x .

Якщо $l = 0$, $k \neq 0$, формула $y = kx + l$ набуває вигляду $y = kx$.



Функцію вигляду $y = kx$, де x – незалежна змінна, k – число, відмінне від нуля, називають **прямою пропорційністю**.

Оскільки пряма пропорційність є окремим випадком лінійної функції і до того ж при $x = 0$ значення y також дорівнює 0, то



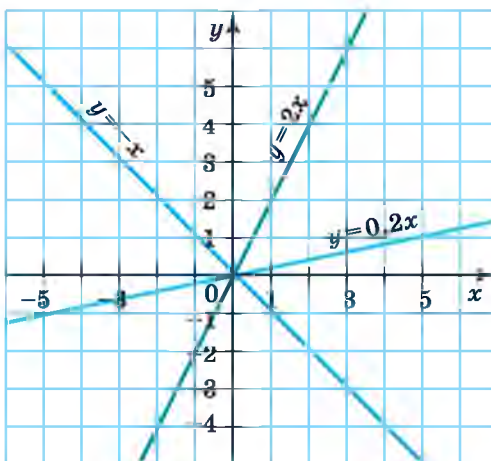
графіком прямої пропорційності є **пряма, яка проходить через початок координат**.

На малюнку 21 зображено графіки функцій $y = -x$; $y = 2x$ та $y = 0,2x$.

Узагальнимо властивості лінійної функції $y = kx + l$.



1. Область визначення функції складається з усіх чисел.
2. Область значень функції при $k \neq 0$ складається з усіх чисел; при $k = 0$ лише з одного значення – числа l .
3. Графіком функції є пряма.



Мал. 21

Однією з важливих властивостей функції є існування *точок перетину її графіка з осями координат*.

Якщо на координатній площині графік функції вже зображено, то такі точки можна знайти безпосередньо з графіка. Наприклад, на малюнку 18 точкою перетину графіка функції $y = 0,25x - 1$ з віссю абсцис є точка $(4; 0)$, а з віссю ординат – точка $(0; -1)$. У такому випадку кажуть, що точки перетину знайдено графічно. Але графічний спосіб не завжди дає можливість визначити точні значення координат таких точок. Наприклад, на малюнку 19 визначити абсцису точки перетину графіка функції $y = -2x + 3$ з віссю абсцис можна лише наближено, наприклад $x \approx 1,5$.

Отже, за допомогою графіка функції знайти точні значення абсциси точки перетину з віссю абсцис або ординати точки перетину з віссю ординат не завжди можливо.

Для багатьох функцій координати точок перетину графіка з осями координат можливо знайти, не виконуючи побудови графіка, зокрема, якщо функцію задано формулою. У такому випадку кажуть, що координати точок перетину знайдено аналітично, причому їх значення будуть точними, а не наближеними.

Приклад 6. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = 2x - 6$ з осями координат.

Р о з в' я з а н н я. Точка перетину графіка з віссю абсцис належить цій осі, отже, її ордината має дорівнювати нулю. Тому для пошуку точки (або точок) перетину графіка функції з віссю абсцис достатньо у формулу, якою задано функцію, підставити значення $y = 0$ і розв'язати одержане рівняння.

Підставимо 0 замість y в рівняння $y = 2x - 6$. Одержимо рівняння $2x - 6 = 0$. Звідки $x = 3$. Отже, $(3; 0)$ – точка перетину графіка функції з віссю абсцис.

Точка перетину графіка з віссю ординат належить цій осі, отже, абсциса такої точки має дорівнювати нулю. Тому для знаходження точки перетину графіка функції з віссю ординат достатньо у формулу, якою задано функцію, підставити значення $x = 0$ та виконати обчислення.

Підставимо 0 замість x в рівняння $y = 2x - 6$. Одержимо $y = 2 \cdot 0 - 6$, тобто $y = -6$. Отже, $(0; -6)$ – точка перетину графіка функції $y = 2x - 6$ з віссю ординат.

В і д п о в і д ь: $(3; 0)$; $(0; -6)$.

Зауважимо, що існують функції, графіки яких можуть не перетинати осі координат або хоча б одну з них.



Сформулюйте означення лінійної функції. ❁ Що є графіком лінійної функції? Як його побудувати? ❁ Як побудувати графік функції $y = l$, де l – число? ❁ Яку функцію називають прямою пропорційністю? ❁ Які властивості має лінійна функція? ❁ Як знайти координати точок перетину графіка функції з осями координат?

769. (Усно) Чи є лінійною функція:

- 1) $y = 2x - 5$; 2) $y = 2x - 5x^2$; 3) $y = 8$;
 4) $y = \frac{7}{x}$; 5) $y = \frac{x}{7} + 3$; 6) $y = x - 1 - x^5$?

770. Які з даних функцій є лінійними:

- 1) $y = 3x^2 - 4$; 2) $y = 3x - 4$; 3) $y = \frac{5}{x}$;
 4) $y = \frac{x}{5} - 2$; 5) $y = -8$; 6) $y = 5x - x^3$?

771. (Усно) Які з функцій задають пряму пропорційність:

- 1) $y = 5x$; 2) $y = \frac{5}{x}$; 3) $y = x + 5$;
 4) $y = 5$; 5) $y = -\frac{x}{5}$; 6) $y = \frac{x}{5}$?

772. Чи є прямою пропорційністю функція, яку задано формулою:

- 1) $y = -4x$; 2) $y = -4x + 2$; 3) $y = -\frac{4}{x}$;
 4) $y = -4$; 5) $y = \frac{x}{4}$; 6) $y = -\frac{x}{4}$?

773. (Усно) Назвіть коефіцієнти k і l у кожній з даних формул лінійних функцій:

- 1) $y = -0,8x + 7$; 2) $y = 6 - x$; 3) $y = \frac{x}{3}$;
 4) $y = 2,4x$; 5) $y = -15$; 6) $y = 0$.

774. Ширина прямокутника дорівнює x см, а довжина на 3 см більша за ширину. Задайте формулою залежність:

- 1) периметра прямокутника від його ширини;
 2) залежність площі прямокутника від його ширини.
 Яка із цих залежностей є лінійною функцією?

775. Учень купив щоденник за 15 грн і кілька зошитів по 4 грн. Задайте формулою залежність вартості покупки y (у гривнях)

від кількості придбаних зошитів x . Чи є ця залежність лінійною функцією? Якою є область визначення цієї функції?

776. Учень мав 30 грн. За ці кошти він придбав x олівців по 1,5 грн кожен, після чого в нього залишилося y грн. Задайте формулою залежність y від x . Чи є ця залежність лінійною функцією?

777. Лінійну функцію задано формулою $y = 0,5x + 3$. Знайдіть:

- 1) значення y , якщо $x = -12; 0; 18$;
- 2) при якому значенні x значення y дорівнює $-4; 8; 2,5$.

778. Дано лінійну функцію $y = -2x + 3$. Знайдіть значення:

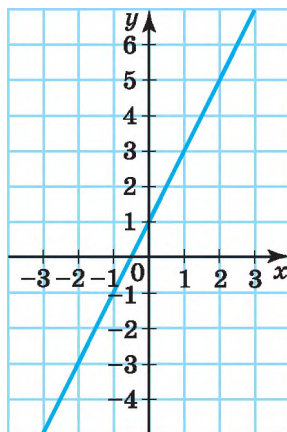
- 1) y , якщо $x = 1,5; -4; -6,5$;
- 2) x , при якому $y = 5; 0; -8$.

779. Використовуючи графік функції на малюнку 22, заповніть таблицю:

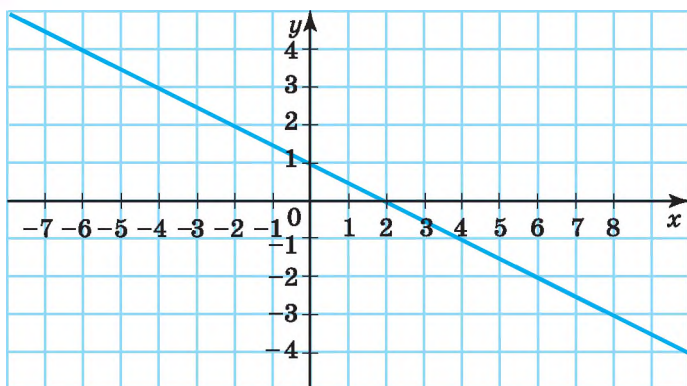
x	-2	0	1	3			
y					-5	-1	5

780. Використовуючи графік функції на малюнку 23, заповніть у зошиті таблицю:

x	-6	-2	2			
y				-3	-1	3



Мал. 22



Мал. 23

781. Запишіть координати будь-яких двох точок, що належать графіку функції $y = 5x - 2$.

782. Заповніть у зошиті таблицю та побудуйте графік лінійної функції:

1) $y = -x + 2$; 2) $y = 2x - 3$.

x	0	4
y		

x		
y		

783. Заповніть таблицю та побудуйте графік лінійної функції:

1) $y = x - 3$; 2) $y = -3x + 1$.

x	0	3
y		

x		
y		

784. Побудуйте графік лінійної функції:

1) $y = x + 2$; 2) $y = -3x + 4$; 3) $y = 0,5x - 3$;

4) $y = \frac{2}{3}x - 1$; 5) $y = -1$; 6) $y = -x + 2,5$.

785. Побудуйте графік лінійної функції:

1) $y = x - 1$; 2) $y = -2x + 5$; 3) $y = -0,5x + 3$;

4) $y = \frac{3}{4}x + 1$; 5) $y = 4$; 6) $y = x - 1,5$.

786. Мотоцикліст рухається зі швидкістю 65 км/год. Задайте формулою залежність відстані s (у кілометрах), яку він подолає, від часу t (у годинах). Чи є ця залежність прямою пропорційністю?

787. Задайте формулою залежність:

1) довжини кола C від його радіуса r ;

2) площі круга S , обмеженого цим колом, від радіуса r .

Яка із цих залежностей є прямою пропорційністю?

788. Запишіть формули двох будь-яких лінійних функцій, графіки яких проходять через точку $P(1; -5)$.

789. Серед даних функцій знайдіть ті, графіки яких проходять через точку $(1; -4)$:

1) $y = 4x$; 2) $y = 2x - 2$; 3) $y = 1$;

4) $y = -4$; 5) $y = -4x$; 6) $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$.

790. Не виконуючи побудови графіка функції $y = 1,8x - 7$, з'ясуйте, чи проходить цей графік через точку:

1) $A(0; 7)$; 2) $B(-5; -16)$; 3) $C(5; -2)$; 4) $D(10; 11)$.

791. Не будуючи графіка функції $y = -3x + 7$, з'ясуйте, чи належить йому точка:

- 1) $A(1; -4)$; 2) $B(0; 7)$; 3) $C(-1; 10)$; 4) $D(10; -37)$.

792. Не виконуючи побудови, знайдіть нулі функції:

- 1) $y = 2x - 6$; 2) $y = -\frac{1}{2}x + 8$;
3) $y = 7x$; 4) $y = -5x$.

793. Не будуючи графіка, знайдіть нулі функції:

- 1) $y = 4x + 12$; 2) $y = -8x$.

794. Побудуйте графік прямої пропорційності:

- 1) $y = x$; 2) $y = -2,5x$; 3) $y = -x$; 4) $y = \frac{1}{2}x$.

795. Побудуйте графік прямої пропорційності:

- 1) $y = 1,5x$; 2) $y = -2x$.

796. Накресліть графік функції $y = 5 - 2,5x$. За графіком знайдіть:

- 1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 0; 2;
- 2) значення аргументу, якщо значення функції дорівнює -5 ; 0; 10;
- 3) нулі функції;
- 4) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень;
- 5) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень;
- 6) точки перетину графіка з осями координат.

797. Побудуйте графік функції $y = 1,5x - 3$. За графіком знайдіть:

- 1) яке значення y відповідає $x = -2$; 0; 4;
- 2) якому значенню x відповідає $y = -3$; 0; 6;
- 3) нулі функції;
- 4) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень;
- 5) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень;
- 6) точки перетину графіка з осями координат.

798. Знайдіть значення k , якщо графік функції $y = kx - 2$ проходить через точку $(6; -11)$.

799. Знайдіть значення l , якщо графік функції $y = -\frac{1}{5}x + l$ проходить через точку $M(10; -5)$.

800. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіка функції з осями координат:

$$1) y = 1,5x - 20; \quad 2) y = 5 - \frac{x}{4}.$$

801. У яких точках перетинає осі координат графік функції:

$$1) y = 0,2x - 40; \quad 2) y = 18 - \frac{1}{3}x?$$

802. Точка $A(0,7; 70)$ належить графіку прямої пропорційності. Задайте формулою цю функцію.

803. Задайте формулою пряму пропорційність, якщо її графік проходить через точку $B(-2; 18)$.

804. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \frac{1}{2}(6 - x); \quad 2) y = \frac{x - 5}{5}.$$

805. Побудуйте графіки функцій в одній системі координат та знайдіть координати точки їх перетину:

$$1) y = -0,5x - 1 \text{ і } y = x - 4; \quad 2) y = -2 \text{ і } y = 3x - 5.$$

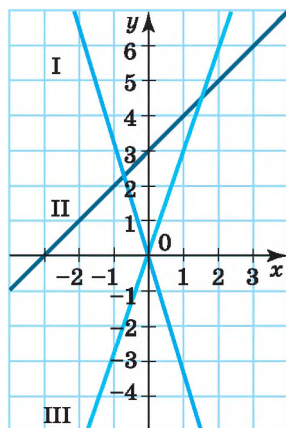
806. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = 1,5x - 4$ і $y = 2$ та знайдіть координати точки їх перетину.

807. Усі точки графіка функції $y = kx + l$ мають одну й ту саму ординату, яка дорівнює 5. Знайдіть k і l .

808. Графік функції $y = kx + l$ паралельний осі абсцис і проходить через точку $M(0; -5)$. Знайдіть k і l .

809. Установіть відповідність між формулами функцій $y = 3x$; $y = -3x$ і $y = x + 3$ та їх графіками I–III, зображеними на малюнку 24.

810. Функцію $y = 2x + 1$ задано для $-3 \leq x \leq 4$. Знайдіть область значень цієї функції.



Мал. 24

811. Не будуючи графіка функції $y = 4x - 6$, знайдіть таку його точку, у якій:

- 1) абсциса дорівнює ординаті;
- 2) абсциса й ордината – протилежні числа;
- 3) абсциса вдвічі менша за ординату.

812. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \begin{cases} x + 1, & \text{якщо } x \leq 0, \\ 1, & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$$

$$2) y = \begin{cases} 2x, & \text{якщо } x < -2, \\ 3x + 2, & \text{якщо } x \geq -2. \end{cases}$$

813. Побудуйте графік функції:

$$y = \begin{cases} 2 - 3x, & \text{якщо } x < 1, \\ 2x - 3, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$$



Вправи для повторення

814. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(2x + 5)^2 - (2x - 3)^2 = 16$;
- 2) $(7x + 1)^2 - (49x - 2)(x - 1) = -66$.

815. Спростіть вираз:

$$1) (5m - 2)(5m + 2) - m(10m - 1) + \left(m - \frac{1}{2}\right)^2;$$

$$2) (a + 4y)^2 - (a - 2y)(a + 2y) - y(4a - 5y).$$

816. На столі лежать 73 зошити, а в коробці – 17 зошитів. Скільки зошитів треба перекласти зі стола в коробку, щоб у коробці їх стало вдвічі менше, ніж на столі?

817. Подайте вираз у вигляді квадрата двочлена, якщо це можливо:

$$1) \frac{1}{9}p^2 + pq + 9p^2;$$

$$2) \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{15}xy + \frac{1}{25}y^2;$$

$$3) 4x^2 - 20xy - 25y^2;$$

$$4) -36ab + 9a^2 + 36b^2.$$



Цікаві задачі для учнів неледачих



818. Стародавня арабська задача. В Аравії помер старий чоловік. Усе своє майно, 17 верблюдів, він заповів своїм сином, причому старший мав одержати половину, середній – третину, а найменший – дев'яту частину цього майна. Після смерті батька сини не знали, що робити, бо 17 не ділилося без остачі ані на 2, ані на 3, ані на 9. Довго сперечалися брати, аж тут на верблюді під'їхав до них мудрець. Довідався про суперечку і дав братам мудру пораду, яка й допомогла розділити майно відповідно до батькового заповіту. Що саме порадив мудрець?

Домашня самотійна робота № 4

Кожне завдання має по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть варіант правильної відповіді.

1. Яка з формул задає функцію?

А) $x^2 + y^2 = xy$; Б) $y = \frac{4}{x-3}$;
 В) $x^2 + x + y = zy$; Г) $y = \frac{x-1}{y+2}$.

2. Яка з функцій є лінійною?

А) $y = x - 2$; Б) $y = \frac{1}{x-2}$;
 В) $y = x^2 - 2$; Г) $y = x^3 - 2$.

3. Яка з функцій задає пряму пропорційність?

А) $y = x - 3$; Б) $y = \frac{2}{x}$;
 В) $y = 2x$; Г) $y = 2 + x$.

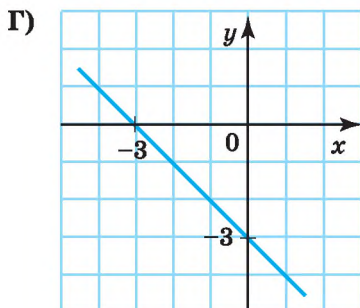
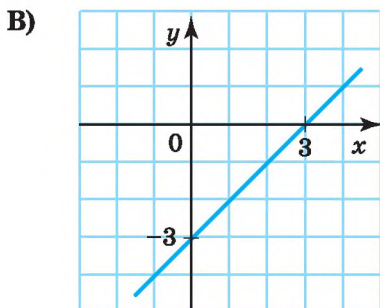
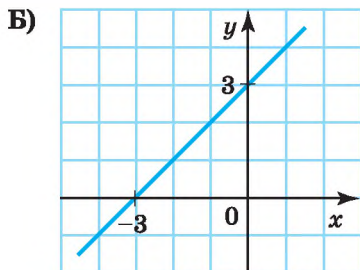
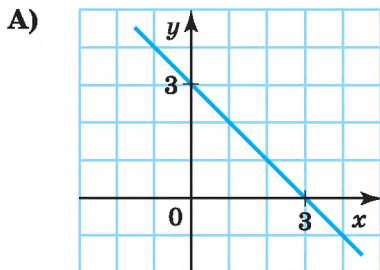
4. Обчисліть значення функції $y = -\frac{20}{x}$ для значення аргументу, що дорівнює -4 .

А) 4; Б) -4 ; В) -5 ; Г) 5.

5. Не виконуючи побудови, знайдіть нуль функції $y = \frac{1}{3}x - 2$.

А) 2; Б) 4; В) 6; Г) -6 .

6. На якому з малюнків зображено графік функції $y = 3 - x$?



3 7. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{3}{x^2 + x}$.

- А) Усі числа; Б) усі числа, крім 0;
В) усі числа, крім 0 і 1; Г) усі числа, крім 0 і -1.

8. Яка з точок належить графіку функції $y = x^2 - 2x$?

- А) (0; -2); Б) (1; -1); В) (-2; 0); Г) (-1; -1).

9. Укажіть точку, у якій графік функції $y = 0,1x + 15$ перетинає вісь абсцис.

- А) (0; 15); Б) (150; 0);
В) (-150; 0); Г) такої точки не існує.

4 10. Знайдіть для $x = 2$ значення функції

$$y = \begin{cases} 7, & \text{якщо } x < 0, \\ x^2, & \text{якщо } 0 \leq x < 3, \\ 5x, & \text{якщо } x \geq 3. \end{cases}$$

- А) 4; Б) 7; В) 10; Г) неможливо знайти.

11. Графік прямої пропорційності проходить через точку $P(2; -4)$. Укажіть точку, через яку також проходить цей графік.

- А) (0; -2); Б) (3; 6); В) (-3; -6); Г) (3; -6).

12. Не будуючи графіка функції $y = 3x - 8$, знайдіть таку його точку, у якій абсциса й ордината є протилежними числами.

- А) $(-2; 2)$; Б) $(2; -2)$; В) $(4; -4)$; Г) $(-4; 4)$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ДО § 19 – § 21

1 1. Які з даних формул задають функцію:

- 1) $y = x^2 + x$; 2) $y = \frac{x-1}{y+2}$;
 3) $y = \frac{1}{x-8}$; 4) $xy = (x-y)^2$?

2. Чи є лінійною функція, яку задано формулою:

- 1) $y = 3x - 7$; 2) $y = x^2 - 5$; 3) $y = 4$; 4) $y = \frac{1}{2x-4}$?

3. Лінійну функцію задано формулою:

- 1) $y = -2x + 6$; 2) $y = 7,4x$.

Для кожної із цих функцій назвіть коефіцієнти k і l .

2 4. Функцію задано формулою $y = -2x + 7$. Знайдіть:

- 1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 5;
 2) значення аргументу, якщо значення функції дорівнює 3.

5. Побудуйте графік функції $y = 2x - 5$. За графіком знайдіть:

- 1) значення функції для $x = 4$;
 2) значення аргументу, при якому $y = -3$.

6. Функцію задано формулою $y = 0,8x - 7,2$. Не виконуючи побудови:

- 1) знайдіть нулі функції;
 2) з'ясуйте, чи проходить графік функції через точку $(10; 1)$.

3 7. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{7}{x^3 - 5x}$.

8. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = -2,5x$ і $y = -5$ та знайдіть координати їх точки перетину.

4 9. Знайдіть найменше значення функції $y = x^2 - 6x + 11$.

Додаткові вправи

4 10. Функцію $y = 3x - 7$ задано для $-2 \leq x \leq 5$. Знайдіть область значень цієї функції.

11. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} 2x + 6, & \text{якщо } x < 0, \\ 6 - x, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$
За графіком знайдіть:

- 1) нулі функції;
- 2) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень;
- 3) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.

Вправи для повторення розділу 2

До § 19

819. Чи залежить площа квадрата від довжини його сторони? Чи є площа квадрата функцією від довжини сторони квадрата? Як можна задати цю функцію, якщо сторона квадрата дорівнює a ?

820. Функції задано формулами $y = \frac{x+2}{x-3}$ і $g = \frac{x-4}{5}$. Заповніть таблицю, обчисливши відповідні значення функції:

x	-4	-2	0	2	4
y					
g					

821. Із села до міста, відстань між якими дорівнює 48 км, вирушив велосипедист зі швидкістю 14 км/год. Задайте формулою залежність змінної s від змінної t , де s – відстань, яку велосипедисту залишилося проїхати до міста (y км), а t – час його руху (y год). За формулою знайдіть:

- 1) s , якщо $t = 1,5$;
- 2) t , якщо $s = 13$.

822. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $y = \frac{12}{9x^2 - 17x}$;
- 2) $y = \frac{x}{|x| - 1}$;
- 3) $y = \frac{2}{|x| + 5}$;
- 4) $y = \frac{9}{3 - |x - 1|}$;
- 5) $y = \frac{15}{|2x - 3| - 5}$;
- 6) $y = \frac{2}{1 - \frac{1}{x}}$.

До § 20

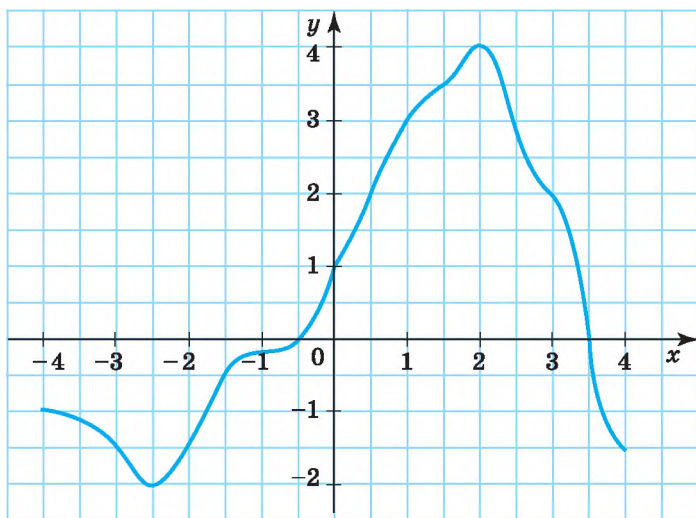
823. Функцію задано формулою $y = 2x - 3$, де $-2 \leq x \leq 3$. Заповніть таблицю і побудуйте графік функції.

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y											

3 824. На малюнку 25 зображено графік функції.

За графіком знайдіть:

- 1) значення y , якщо $x = -3$; $x = -1,5$; $x = 0$; $x = 1,5$; $x = 3$;
- 2) значення x , яким відповідає $y = -1,5$; $y = 2$; $y = 3$;
- 3) область визначення функції;
- 4) область значень функції; 5) нулі функції;
- 6) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень;
- 7) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.



Мал. 25

4 825. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = |x|$, де $-2 \leq x \leq 4$;
- 2) $y = |x + 3|$, де $-5 \leq x \leq 3$.

До § 21

1 826. Які з даних функцій є лінійними? Які з них є прямою пропорційністю:

- 1) $y = -3x$;
- 2) $y = -3x + 4$;
- 3) $y = -3x + 4x^2$;
- 4) $y = -3$;
- 5) $y = -\frac{3}{x}$;
- 6) $y = -\frac{1}{3}x$?

2 827. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = 2x$;
- 2) $y = 1 - x$;
- 3) $y = 2$;
- 4) $y = 4x - 1$;
- 5) $y = -3x$;
- 6) $y = \frac{1}{2}x + 2$.

3 828. Побудуйте графік прямої пропорційності $y = -\frac{3}{4}x$.

Знайдіть за графіком:

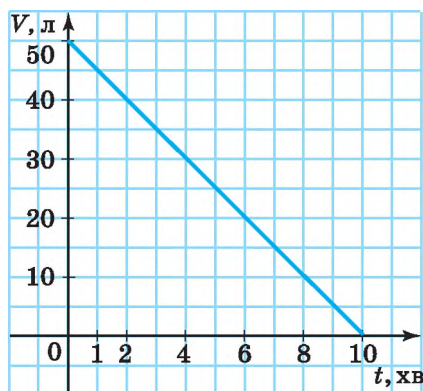
- 1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює -4 ; 0 ; 8 ;
- 2) значення аргументу, для якого значення функції дорівнює -6 ; 3 ; 6 ;
- 3) нулі функції;
- 4) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень;
- 5) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.

829. Графіки функцій $y = kx$ і $y = 2x + l$ перетинаються в точці $A(-2; 6)$. Знайдіть k і l .

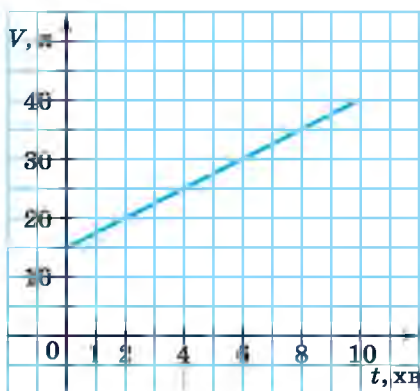
4 830. На малюнках 26 і 27 зображено два графіки. Один з них описує процес наповнення резервуара водою, а другий – процес спорожнення резервуара від води. Який з малюнків відповідає кожному із вказаних процесів? По кожному з графіків знайдіть:

- 1) скільки літрів води було в резервуарі в початковий момент часу;
- 2) скільки літрів води буде в резервуарі через 1 хв; через 6 хв; через 8 хв від початку процесу;
- 3) через скільки хвилин від початку процесу в резервуарі буде 25 л води;
- 4) скільки літрів води надходить (випливає) щохвилини?

Здайте формулою залежність об'єму води V у резервуарі від часу t для кожного із цих двох процесів.



Мал. 26



Мал. 27

Розділ 3.


Лінійні рівняння та їх системи

У цьому розділі ви:


- **пригадаєте** основні властивості рівнянь з однією змінною;
- **ознайомитеся** з лінійними рівняннями з однією та двома змінними, системами двох лінійних рівнянь з двома змінними;
- **навчитися** розв'язувати лінійні рівняння з однією змінною та рівняння, які до них зводяться; системи лінійних рівнянь з двома змінними; текстові задачі за допомогою рівнянь та їх систем; будувати графіки лінійних рівнянь з двома змінними.

22. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО РІВНЯННЯ

Упродовж багатьох століть алгебра розвивалась як наука про рівняння.

 **Рівнянням** називають рівність, що містить змінну.

Основні відомості про рівняння ви вже знаєте з попередніх класів. Нагадаємо, що вираз, записаний в рівнянні ліворуч від знака рівності, називають *лівою частиною рівняння*, а вираз, записаний праворуч, – *правою частиною рівняння*. Якщо в рівняння $4x - 6 = x$ замість змінної x підставити число 2, то одержимо правильну числову рівність $4 \cdot 2 - 6 = 2$, оскільки числові значення обох частин рівняння стануть між собою рівними. У такому разі про число 2 кажуть, що воно *задовольняє рівняння*, тобто є його *коренем*.

 **Число, яке задовольняє рівняння, називають коренем або розв'язком рівняння.**

Рівняння можуть мати різну кількість коренів. Наприклад, рівняння $4x - 6 = x$ має лише один корінь – число 2. Рівняння $x(x - 6) = 0$ має два корені – числа 0 і 6. Будь-яке значення

змінної x задовольнятиме рівняння $x + 0,1 = 0,1 + x$, тому будь-яке число є його розв'язком, отже, це рівняння має безліч коренів. Але не існує жодного значення змінної x , яке б перетворювало рівняння $x + 1 = x$ у правильну числову рівність, оскільки при кожному значенні змінної x значення лівої частини рівняння буде на 1 перевищувати значення правої його частини. Тому рівняння $x + 1 = x$ не має коренів.



Розв'язати рівняння – означає знайти всі його корені або довести, що коренів немає.

Розглянемо рівняння $x + 1 = 5$ і $3x = 12$. Кожне з них має єдиний корінь – число 4. Ці рівняння є *рівносильними*.



Два рівняння називають *рівносильними*, якщо вони мають одні й ті самі корені. Рівносильними вважають і такі рівняння, які коренів не мають.

Приклад 1. З'ясувати, чи є рівносильними рівняння:

- 1) $18 - x = 11$ і $21 : x = 3$; 2) $x + 3 = x$ і $2 - x = 5 - x$;
3) $x + 3 = 4$ і $5x = 10$.

Розв'язання. 1) Коренем рівняння $18 - x = 11$ є число 7. Коренем рівняння $21 : x = 3$ також є число 7. Тому рівняння $18 - x = 11$ і $21 : x = 3$ – рівносильні.

2) Обидва рівняння $x + 2 = x$ і $2 - x = 5 - x$ не мають коренів, тому є рівносильними.

3) Коренем рівняння $x + 3 = 4$ є число 1, а коренем рівняння $5x = 10$ – число 2. Тому рівняння $x + 3 = 4$ і $5x = 10$ не є рівносильними.

Під час розв'язування рівнянь використовують *властивості*, які перетворюють рівняння на рівносильні їм рівняння:



- 1) якщо в будь-якій частині рівняння розкрити дужки або звести подібні доданки, то одержимо рівняння, рівносильне даному;
2) якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в другу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному;
3) якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

Приклад 2. З'ясувати, чи є рівносильними рівняння:

- 1) $2(x - 1) = 5x$ і $2x - 2 = 5x$;
2) $3a + 2 = 5a - a - 7$ і $3a + 2 = 4a - 7$;

3) $5x = 2x + 9$ і $5x - 2x = 9$;

4) $0,5b = 1,5b - 3,5$ і $b = 3b - 7$.

Розв'язання. 1) Рівняння $2(x - 1) = 5x$ і $2x - 2 = 5x$ є рівносильними, оскільки друге рівняння одержуємо з першого розкриттям дужок у його лівій частині.

2) Рівняння $3a + 2 = 5a - a - 7$ і $3a + 2 = 4a - 7$ – рівносильні, оскільки друге рівняння одержуємо з першого зведенням подібних доданків у його правій частині.

3) Рівняння $5x = 2x + 9$ і $5x - 2x = 9$ – рівносильні, оскільки друге рівняння одержуємо з першого перенесенням доданка з правої частини рівняння в ліву із зміною знака цього доданка на протилежний.

4) Рівняння $0,5b = 1,5b - 3,5$ і $b = 3b - 7$ – рівносильні, оскільки друге рівняння одержуємо шляхом множення на 2 обох частин першого рівняння.

А ще раніше...

У IX ст. видатний арабський математик Мухаммед бен Муса аль-Хорезмі у своєму трактаті «Кітаб аль-джебр аль-мукабала» зібрав і систематизував існуючі на той час методи розв'язування рівнянь. Узятий з назви цієї книжки термін «аль-джебр» (у перекладі з арабської означає «відновлення») надалі почав уживатися як «алгебра» і дав назву цілій науці.

У ті часи, коли аль-Хорезмі писав свій трактат, від'ємні числа вважалися хибними, несправжніми. Тому коли від'ємне число перенесли з однієї частини рівняння в іншу, змінюючи його знак, вважали, що воно «відновлюється» (стає додатним), тобто з несправжнього перетворюється на справжнє. Саме таке перетворення рівнянь аль-Хорезмі і назвав «відновленням».

Властивість взаємного знищення однакових доданків рівняння, що містилися в обох його частинах, аль-Хорезмі назвав «протиставленням» (арабською мовою – «аль-мукабал»).

Аль-Хорезмі був перший учений, хто відокремив алгебру від арифметики і розглянув її як окрему математичну науку. Алгебру аль-Хорезмі в латинському перекладі вивчали європейці протягом XII–XVI ст. Подальший розвиток алгебри пов'язаний саме з європейськими вченими, зокрема з італійськими математиками епохи Відродження.

До XIX ст. алгебра розвивалася як наука, що вивчає методи розв'язування рівнянь. Згодом вона значно збагатилася новими змістовими лініями: спрощення виразів, функції, розв'язування нерівностей тощо, і тепер рівняння – це лише одна зі складових частин алгебри.



Мухаммед бен Муса
аль-Хорезмі
(783 – бл. 850)



Що називають рівнянням? **3** Що називають коренем (або розв'язком) рівняння? **3** Що означає розв'язати рівняння? **3** Які рівняння називають рівносильними? **3** Які властивості використовують під час розв'язування рівнянь?

1 831. (Усно) Який із записів є рівнянням (відповідь обґрунтуйте):

- 1) $7x - 21 > 0$; 2) $4x + 5$;
3) $7x - 2 = 10$; 4) $(12 - 10) \cdot 3 = 6?$

832. (Усно) Чи є число 3 коренем рівняння:

- 1) $2x = 6$; 2) $x - 7 = 4$;
3) $2x + 3 = 8$; 4) $27 : x = 9?$

833. Чи є число 2 розв'язком рівняння:

- 1) $x + 7 = 9$; 2) $5x = 12$;
3) $x - 8 = -6$; 4) $x : 4 = 2?$

2 834. Яке із чисел є коренем рівняння $x^2 = 2x + 3$:

- 1) 0; 2) -1; 3) 1; 4) 3?

835. Чи є коренем рівняння $x^2 = 4 - 3x$ число:

- 1) 0; 2) 1; 3) -2; 4) -4?

836. Доведіть, що кожне із чисел 1,3 та -1,3 є коренем рівняння $x^2 = 1,69$.

837. Чи є рівносильними рівняння:

- 1) $x + 2 = 5$ і $x : 3 = 1$; 2) $x - 3 = 7$ і $2x = 18?$

838. Чи є рівносильними рівняння:

- 1) $x - 2 = 3$ і $2x = 10$; 2) $x + 3 = 7$ і $x : 2 = 3?$

3 839. Доведіть, що:

- 1) коренем рівняння $2(x - 3) = 2x - 6$ є будь-яке число;
2) рівняння $y - 7 = y$ не має коренів.

840. Доведіть, що:

- 1) коренем рівняння $3(2 - c) = 6 - 3c$ є будь-яке число;
2) рівняння $x = x + 8$ не має коренів.

841. Складіть рівняння, що має:

- 1) єдиний корінь - число -2;
2) два корені - числа 5 і -5.

842. З'ясуйте, не розв'язуючи рівнянь, чи є вони рівносильними:

1) $4(x - 2) = 19$ і $4x - 8 = 19$;

2) $2x - 3 = 3x + 5$ і $2x - 3x = 5 + 3$;

3) $8(x - 3) = 40$ і $x - 3 = 5$; 4) $\frac{2x}{3} = 11$ і $2x = 33$.

843. Установіть, не розв'язуючи, чи є рівняння рівносильними:

1) $8(x - 1) = 5$ і $8x - 8 = 5$;

2) $3x + 7 = 4x - 8$ і $3x - 4x = -8 - 7$;

3) $9(x + 2) = 18$ і $x + 2 = 2$; 4) $-\frac{3x}{4} = 7$ і $-3x = 28$.

844. Чи має розв'язки рівняння:

1) $x + 2 = 2 - x$;

2) $x + 3 = 3 + x$;

3) $x + 1 = -1 + x$;

4) $0 \cdot x = 0$;

5) $0 \cdot (x - 1) = 3$;

6) $5(x - 1) = 5x - 5$;

7) $0 : x = 0$;

8) $2(x - 3) = 2x - 7$?



Вправи для повторення

845. Знайдіть значення виразу:

1) $4a + 12b + 8a$, якщо $a = -13$; $b = 13$;

2) $(3x - 2x)(5t + 4t)$, якщо $x = 1\frac{8}{9}$; $t = -1\frac{1}{2}$.

846. Спростіть вираз:

1) $64 - (8 - 3m)^2$;

2) $a^2b^2 - (ab + 7)^2$;

3) $t^2 + 25 - (t - 5)^2$;

4) $p^4 - 16 - (p^2 + 4)^2$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



847. Яку остачу при діленні на 1001 дає число

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 + 2000?$$

§ 23. ЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

Ми знаємо, як розв'язувати рівняння $2x = -8$; $-0,01x = 17$;

$\frac{1}{3}x = 5$. Кожне із цих рівнянь має вигляд $ax = b$, де x – змінна, a і b – деякі числа.



Рівняння вигляду $ax = b$, де x – змінна, a і b – деякі числа, називають *лінійним рівнянням з однією змінною*.

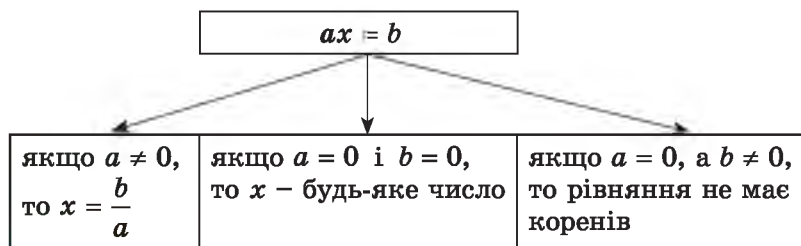
Числа a і b називають *коефіцієнтами* цього рівняння.

Якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ є *рівнянням першого степеня з однією змінною*. Поділивши обидві частини такого рівняння на a , одержимо $x = \frac{b}{a}$, тобто єдиним коренем цього рівняння є число $\frac{b}{a}$.

Якщо $a = 0$ і $b = 0$, то лінійне рівняння має вигляд $0x = 0$. Коренем такого рівняння є будь-яке число, оскільки при будь-якому значенні x значення лівої і правої частин рівняння є рівні і дорівнюють нулю. Тому рівняння $0x = 0$ має безліч коренів.

Якщо $a = 0$, а $b \neq 0$, то лінійне рівняння матиме вигляд $0x = b$. При цьому не існує жодного значення змінної x , яке б перетворювало ліву і праву частини рівняння на одне й те саме число. Адже значення лівої частини рівняння при будь-якому значенні x дорівнюватиме нулю, а значення правої частини – числу b , відмінному від нуля. Тому рівняння $0x = b$ при $b \neq 0$ не має коренів.

Систематизуємо дані про розв'язки лінійного рівняння $ax = b$ у вигляді схеми:



Приклад 1. Розв'язати рівняння:

1) $0,2x = 7$; 2) $-\frac{2}{3}x = 2\frac{2}{3}$; 3) $0x = 7$.

Розв'язання.

1) $0,2x = 7$; $x = 7 : 0,2$; $x = 35$. Відповідь: 35.	2) $-\frac{2}{3}x = 2\frac{2}{3}$; $x = 2\frac{2}{3} : \left(-\frac{2}{3}\right)$; $x = -4$. Відповідь: -4.	3) $0x = 7$; <i>рівняння не має коренів.</i> Відповідь: коренів немає.
--	---	--

Процес розв'язування багатьох рівнянь є зведенням цих рівнянь до лінійних шляхом рівносильних перетворень за властивостями рівнянь.

Приклад 2. Розв'язати рівняння:

$$1) 3(x + 1) - 2x = 6 - 4x; \quad 2) \frac{x+1}{2} + \frac{5-x}{3} = \frac{x+13}{6}.$$

Р о з в' я з а н н я.

1. Позбудемося знаменників (якщо вони є):

$$1) 3(x + 3) - 2x = 6 - 4x. \quad 2) \frac{x+1}{2} + \frac{5-x}{3} = \frac{x+13}{6}.$$

Помножимо обидві частини рівняння на 6 (6 – найменший спільний знаменник дробів). Маємо:

$$\frac{6(x+1)}{2} + \frac{6(5-x)}{3} = \frac{6(x+13)}{6};$$

$$3(x+1) + 2(5-x) = x+13.$$

2. Розкриємо дужки (якщо вони є):

$$3x + 9 - 2x = 6 - 4x; \quad 3x + 3 + 10 - 2x = x + 13.$$

3. Перенесемо доданки, що містять змінну,

у ліву частину, а інші – у праву,

змінивши знаки цих доданків на протилежні:

$$3x - 2x + 4x = 6 - 9; \quad 3x - 2x - x = 13 - 3 - 10.$$

4. Зведемо подібні доданки:

$$5x = -3; \quad 0x = 0.$$

5. Розв'яжемо отримане лінійне рівняння:

$$x = -3 : 5; \quad x - \text{будь-яке число.}$$

$$x = -0,6;$$

В і д п о в і д ь: $-0,6$.

В і д п о в і д ь: будь-яке число.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $5(x+p) = 3x - 7p$ відносно x .

Р о з в' я з а н н я. Розкриємо дужки в лівій частині рівняння: $5x + 5p = 3x - 7p$. Перенесемо доданок $3x$ у ліву частину, а $5p$ – у праву. Маємо: $5x - 3x = -7p - 5p$; $2x = -12p$. Тоді $x = (-12p) : 2$; $x = (-12 : 2)p$; $x = -6p$.

В і д п о в і д ь: $-6p$.

Яке рівняння називають лінійним рівнянням з однією змінною? Наведіть приклади лінійних рівнянь.

У якому випадку рівняння $ax = b$ має єдиний корінь?

У якому випадку коренем рівняння $ax = b$ є будь-яке

число? У якому випадку рівняння $ax = b$ не має коренів?

848. (Усно) Яке з рівнянь є лінійним:

- 1) $17x = 0$; 2) $-5x = -\frac{1}{3}$; 3) $x^2 = 7x$;
 4) $0x = 17$; 5) $x + 7 = x^2$; 6) $0x = 0$?

849. (Усно) Скільки коренів має рівняння:

- 1) $2x = -7$; 2) $0x = 5$; 3) $0x = 0$?

850. З'ясуйте, яке з даних рівнянь має лише один розв'язок, не має розв'язків, має безліч розв'язків:

- 1) $-5x = -3$; 2) $0x = 0$; 3) $0,14x = 0$;
 4) $7 = 0x$; 5) $\frac{3}{7}x = -5$; 6) $0x = -15$.

851. (Усно) Розв'яжіть рівняння:

- 1) $-2x = -12$; 2) $0,5x = -2,5$; 3) $-2,5x = 7,5$;
 4) $\frac{1}{5}x = \frac{3}{10}$; 5) $\frac{4}{7}x = 1$; 6) $-5x = -12$.

852. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $-3x = -21$; 2) $-2x = \frac{2}{9}$; 3) $-\frac{1}{5}x = -5$;
 4) $50x = 5$; 5) $-x = 1\frac{2}{7}$; 6) $-0,01x = 0,17$;
 7) $\frac{2}{9}x = -\frac{4}{27}$; 8) $-1,2x = -4,2$; 9) $\frac{7}{8}x = 0$.

853. Знайдіть корінь рівняння:

- 1) $2x = -8$; 2) $\frac{1}{5}x = 9$; 3) $-3x = \frac{1}{4}$;
 4) $-10x = -5$; 5) $\frac{2}{15}x = 0$; 6) $0,1x = -0,18$.

854. Визначте, що має бути записано праворуч у рівнянні замість пропусків, якщо відомо його корінь:

- 1) $8x = \dots$; 2) $-9x = \dots$; 3) $\frac{3}{4}x = \dots$;
 $x = -9$; $x = 0$; $x = 12$.

855. Знайдіть корінь рівняння:

- 1) $7x + 14 = 0$; 2) $0,3x - 21 = 0,5x - 23$;
 3) $4x + 3 = 6x - 13$; 4) $5x + (3x - 7) = 9$;
 5) $47 = 10 - (9x + 2)$; 6) $(3x + 2) - (8x + 6) = 14$.

856. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $2x - 10 = 0$; 2) $1,4x - 12 = 0,9x + 4$;
 3) $3x + 14 = 5x + 16$; 4) $12 - (5x + 10) = -3$;
 5) $6 - (8x + 11) = -1$; 6) $(3x - 4) - (6 - 4x) = 4$.

857. Яке з рівнянь рівносильне рівнянню $5x = 10$:

- 1) $x + 3 = 5$; 2) $5 - x = 7$; 3) $x + 2 = x + 1$;
 4) $x - 7 = -5$; 5) $x = 8 - 3x$; 6) $4x - 7 = 4x$?

858. Чи є рівняння рівносильними:

- 1) $4x - x = 17$ і $3x = 17$; 2) $5x - 9 = 3x$ і $6x = 21$;
 3) $2x = -12$ і $x + 6 = 0$; 4) $12x = 0$ і $15x = 15$?

859. При якому значенні x значення виразу:

- 1) $3x + 7$ дорівнює -2 ;
 2) $4(x + 1)$ дорівнює значенню виразу $5x - 9$?

860. При якому значенні y :

- 1) значення виразу $5y - 13$ дорівнює -3 ;
 2) значення виразів $3(y - 2)$ і $13y - 8$ рівні між собою?

861. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{x+1}{3} = 5$; 2) $\frac{2x-7}{5} = 1$; 3) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 8$; 4) $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 1$.

862. Знайдіть корінь рівняння:

- 1) $\frac{x-2}{4} = 1$; 2) $\frac{3x+2}{5} = 4$; 3) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 1$; 4) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$.

863. Складіть лінійне рівняння, коренем якого є:

- 1) число -2 ; 2) число $-0,2$.

864. Складіть лінійне рівняння:

- 1) яке не має коренів; 2) коренем якого є будь-яке число.

865. Складіть лінійне рівняння, коренем якого було б:

- 1) число -8 ; 2) будь-яке число.

 **866.** Знайдіть корінь рівняння:

- 1) $(4x - 2) + (5x - 4) = 9 - (5 - 11x)$;
 2) $(7 - 8x) - (9 - 12x) + (5x + 4) = -16$;
 3) $3(4x - 5) - 10(2x - 1) = 33$;
 4) $9(3(x + 1) - 2x) = 7(x + 1)$.

867. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $(9x - 4) + (15x - 5) = 18 - (25 - 22x)$;

2) $(10x + 6) - (9 - 9x) + (8 - 11x) = -19$;

3) $7(x - 1) - 3(2x + 1) = -x - 15$;

4) $5(4(x - 1) - 3x) = 9x$.

868. Розв'яжіть рівняння відносно x :

1) $2x + a = x + a$;

2) $b + x = c - x$;

3) $6x + 2m = x - 8m$;

4) $9a + x = 3b - 2x$.

Розв'язання.

4) $9a + x = 3b - 2x$; $x + 2x = 3b - 9a$; $3x = 3(b - 3a)$. Поділимо обидві частини рівняння на 3. Одержимо: $x = b - 3a$.Відповідь: $b - 3a$.869. Розв'яжіть рівняння відносно x :

1) $7x + m = 2x + m$;

2) $a + x = 2m - x$;

3) $3x + b = 9b - x$;

4) $5p + 2x = 10a - 3x$.

870. Чи є рівносильними рівняння:

1) $2x - 4 = 2$ і $5(x - 3) + 1 = 3x - 8$;

2) $5x + 3 = 8$ і $7(x - 2) + 20 = 4x + 3$;

3) $5x = 0$ і $0 \cdot x = 5$;

4) $7x + 1 = 7x + 2$ і $5(x + 1) = 5x + 5$;

5) $0 : x = 7$ і $0 \cdot x = 7$;

6) $3(x - 2) = 3x - 6$ і $2(x + 7) = 2(x + 1) + 12$?

871. При якому значенні y значення виразу:

1) $5y + 7$ утричі більше за значення виразу $y + 5$;

2) $2y - 4$ на 7,4 більше за значення виразу $3 - 7y$?

872. При якому значенні x значення виразу:

1) $7x + 8$ удвічі більше за значення виразу $x + 7$;

2) $5x - 8$ на 17,2 менше від значення виразу $x + 2$?

873. Складіть рівняння, яке було б рівносильним рівнянню

$7(2x - 8) = 5(7x - 8) - 15x$.

874. При якому значенні a рівняння:

1) $2ax = 16$ має корінь, що дорівнює 4;

2) $3x = a$ має корінь, що дорівнює $\frac{4}{7}$;

3) $5(a + 1)x = 40$ має корінь, що дорівнює -1 ?

875. При якому значенні b коренем рівняння:

1) $3bx = -24$ є число -4 ;

2) $(2b - 5)x = 45$ є число 3?

876. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $4x + 7 = 3(x - 2) + x$;
- 2) $2x + 5 = 2(x - 4) + 13$;
- 3) $2x(1 - 3x) + 5x(3 - x) = 17x - 11x^2$;
- 4) $(7x^3 + 2x^2 - 4x - 5) - (6x^3 - x^2 + 2x) = 3x^2 - (6x - x^3)$.

877. Знайдіть корінь рівняння:

- 1) $3(x - 2) + 4x = 7(x - 1) + 1$;
- 2) $2(x + 1) + 4x = 6(x + 3)$;
- 3) $3x(2 + x) - 4(1 - x^2) = 7x^2 + 6x$;
- 4) $(x^2 + 4x - 8) - (7x - 2x^2 - 5) = 3x^2 - (3x + 3)$.

878. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{3x - 1}{2} + \frac{6x + 3}{11} = 10$;
- 2) $\frac{8x - 3}{7} - \frac{3x + 1}{10} = 2$;
- 3) $\frac{x}{10} + \frac{2x}{5} = \frac{7x}{15} - \frac{1}{6}$;
- 4) $\frac{1 + 2x}{2} - \frac{3x + 2}{3} = \frac{5x + 4}{6}$.

879. Знайдіть корінь рівняння:

- 1) $\frac{2x + 1}{3} + \frac{x + 7}{2} = 5$;
- 2) $\frac{5x - 6}{12} - \frac{x - 5}{8} = 1$;
- 3) $\frac{x}{3} + \frac{2x}{9} = \frac{5x}{6} - \frac{1}{18}$;
- 4) $\frac{3x + 1}{5} - \frac{2 + x}{2} = \frac{x - 8}{10}$.

880. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{2x - 3}{5} - \frac{1 - x}{4} + \frac{5x + 1}{20} = \frac{9x + 3}{10}$;
- 2) $x^2 - 5x + 3 - \frac{6x^2 - 30x + 8}{6} = \frac{5}{3}$.

881. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{3x - 5}{4} - \frac{2 - x}{3} + \frac{2x + 5}{12} = \frac{5x - 6}{4}$;
- 2) $x^2 - 7x + 4 - \frac{4x^2 - 28x + 9}{4} = \frac{7}{10}$.

882. При якому значенні b рівняння мають однакові корені:

- 1) $4x - 3 = 5$ і $3x + b = 17$;
- 2) $x + b = 9$ і $2x - b = x$?

883. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $2(|x| - 3) = |x|$;
- 2) $|2x + 1| = 7$.

884. Розв'яжіть рівняння:

1) $4(|x| - 3) = |x|$;

2) $|2x - 7| = 3$.

885. Знайдіть усі цілі значення m , при яких корінь рівняння $mx = 4$ є цілим числом.

886. Знайдіть усі цілі значення b , при яких корінь рівняння $bx = -6$ є натуральним числом.



Вправи для повторення

887. Тетянка на канікулах розв'язала x задач з математики, а її однокласник Ігор – на 18 задач більше. Виразіть через x кількість задач, які розв'язав Ігор.

888. Подайте вираз у вигляді многочлена:

1) $(7x - 1)^2 - (2x - 1)(3x - 1)$;

2) $(2x - 3)(2x + 3) - (4x - 5)(x + 1)$;

3) $8x(2x - 5) - (4x + 3)^2$;

4) $(4x - 7)(4x + 7) - (2x - 5)(2x + 5)$.

889. Знайдіть нулі функції: 1) $y = 36 - x^2$; 2) $y = \frac{1}{7}x^2 - 3x$.

890. Побудуйте графік функції: $y = \begin{cases} 2x + 3, & \text{якщо } x < -1, \\ -3 - 4x, & \text{якщо } x \geq -1. \end{cases}$



Цікаві задачі для учнів неледачих



891. Відомо, що $x + y = 13$. При яких натуральних значеннях x і y вираз xy набуває найбільшого значення?



§24. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ. РІВНЯННЯ ЯК МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ

Ми вже розглядали приклади функціональних залежностей між величинами як математичні моделі реальних процесів. Тепер розглянемо текстові задачі, математичними моделями яких є лінійні рівняння та рівняння, які зводяться до лінійних.

Розв'язувати задачу за допомогою рівняння слід у такій послідовності:

- 1) позначити змінною одну з невідомих величин;
- 2) інші невідомі величини (якщо вони є) виразити через введenu змінну;
- 3) за умовою задачі встановити співвідношення між невідомими та відомими значеннями величин і скласти рівняння;
- 4) розв'язати одержане рівняння;
- 5) проаналізувати розв'язки рівняння і знайти невідому величину, а за потреби і значення інших невідомих величин;
- 6) записати відповідь до задачі.

Розглянемо декілька задач та розв'яжемо їх за допомогою лінійного рівняння.

Задача 1. На свій день народження сестрички-близнючки Наталя й Олена отримали разом 127 вітальних SMS-повідомлень, причому Наталя отримала на 13 повідомлень більше, ніж Олена. По скільки SMS-повідомлень на свій день народження отримала кожна із сестричок?

Р о з в' я з а н н я. Нехай Олена отримала x повідомлень, тоді Наталя – $(x + 13)$. А обидві разом – $(x + x + 13)$ повідомлень, що за умовою дорівнює 127.

Маємо рівняння: $x + x + 13 = 127$. Звідки $x = 57$.

Отже, Олена отримала 57 повідомлень,
 $57 + 13 = 70$ (повід.) – отримала Наталя.

В і д п о в і д ь: 70 повідомлень; 57 повідомлень.

Задача 2. Максимально можлива сума кредиту обчислюється банком за формулою:

$$S = \frac{C}{3} \cdot n,$$

де S – сума кредиту, C – середньомісячна зарплата позичальника. Для кредиту терміном один рік вважають, що $n = 9$, терміном два роки – $n = 21$, терміном три роки – $n = 33$. Якою має бути найменша середньомісячна зарплата позичальника, щоб банк надав йому кредит у сумі 30 000 грн на:

- 1) 1 рік; 2) 2 роки; 3) 3 роки?

Р о з в' я з а н н я. За умовою $S = 30\,000$ грн. Нехай найменша середньомісячна зарплата позичальника дорівнює x грн.

- 1) Маємо рівняння: $30\,000 = \frac{x}{3} \cdot 9$; звідки $x = 10\,000$.

Отже, середньомісячна зарплата позичальника має бути не меншою за 10 000 грн.

- 2) Маємо рівняння: $30\,000 = \frac{x}{3} \cdot 21$; звідки $x \approx 4285,7$.

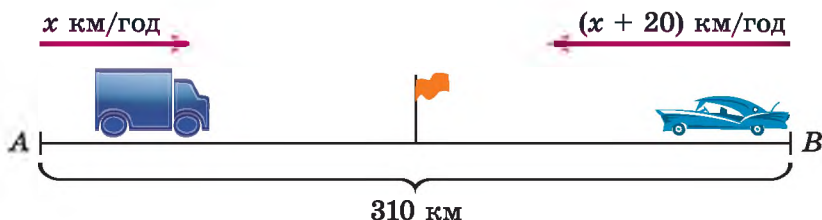
Отже, середньомісячна зарплата має бути не меншою за 4286 грн.

3) Маємо рівняння: $30\,000 = \frac{x}{3} \cdot 33$; звідки $x \approx 2727,3$.

Отже, якщо позичальник хоче отримати кредит на три роки, то його середньомісячна зарплата має бути не меншою за 2728 грн.

В і д п о в і д ь: 1) 10 000 грн; 2) 4286 грн; 3) 2728 грн.

Задача 3. З міста A до міста B , відстань між якими 310 км, виїхала вантажівка. Через 30 хв після цього з міста B до міста A виїхав легковик, швидкість якого на 20 км/год більша за швидкість вантажівки. Вантажівка і легковик зустрілися через 2 год після виїзду легковика. Знайти швидкість кожної із цих автівок.



Р о з в' я з а н н я. Нехай швидкість вантажівки – x км/год. Умову задачі зручно подати у вигляді таблиці:

	v , км/год	t , год	s , км
Вантажівка	x	2,5	$2,5x$
Легковик	$x + 20$	2	$2(x + 20)$

} 310 км

Оскільки автівки виїхали в протилежних напрямках і зустрілися, то разом вони проїхали 310 км.

Маємо рівняння: $2,5x + 2(x + 20) = 310$.

Розв'яжемо його: $2,5x + 2x + 40 = 310$;

$$4,5 = 270;$$

$$x = 60 \text{ (км/год)} - \text{швидкість вантажівки};$$

$$60 + 20 = 80 \text{ (км/год)} - \text{швидкість легковика}.$$

В і д п о в і д ь: 60 км/год; 80 км/год.



Якої послідовності слід дотримуватися, розв'язуючи задачу за допомогою рівняння?

- 1** **892.** (Усно) Одне число на 20 більше за друге. Менше з них позначено через x . Виразіть через x більше із цих чисел.
- 893.** (Усно) Одне додатне число у 5 разів більше за друге. Менше з них позначено через x . Виразіть через x більше із цих чисел.
- 894.** На одній клумбі росте x кущів троянд, а на другій – удвічі більше. Виразіть через x кількість кущів троянд, що росте на другій клумбі.
- 895.** (Усно) Відстань, що дорівнює x км, велосипедист долає за 5 год. Виразіть через x швидкість його руху.
- 896.** (Усно) Перше число позначили через x , а друге складає четвертину від першого. Виразіть друге число через x .
- 897.** Перше число дорівнює x , а друге складає 70 % від першого. Виразіть через x друге число.
- 898.** (Усно) Сума довжин двох відрізків дорівнює 10 см. Довжина одного з них x см. Виразіть через x довжину другого відрізка.
- 899.** (Усно) Власна швидкість човна дорівнює 18 км/год, а швидкість течії – x км/год. Виразіть через x швидкість човна за течією і проти течії.
- 2** **900.** Загадали число. Якщо від нього відняти 7 і одержаний результат поділити на 9, то матимемо 12. Яке число загадали?
- 901.** Знайдіть число, половина якого разом з його третиною дорівнює 40.
- 902.** У двох цистернах разом 58 т пального, причому в першій на 4 т менше, ніж у другій. Скільки тонн пального в кожній цистерні?
- 903.** В автопарку вантажівок у 6 разів більше, ніж легковиків. Скільки легковиків в автопарку, якщо їх разом з вантажівками налічується 91?
- 904.** Одне з двох додатних чисел утричі більше за друге. Знайдіть ці числа, якщо їх різниця дорівнює 28.
- 905.** Бабусі разом з мамою 99 років. Скільки років кожній з них, якщо бабуся старша за маму на 25 років?
- 906.** Сума двох чисел 360, а їх відношення дорівнює $5 : 7$. Знайдіть ці числа.

907. Різниця двох чисел 42, а їх відношення дорівнює $7 : 4$. Знайдіть ці числа.

908. Периметр трикутника дорівнює 20 дм. Дві його сторони рівні між собою і кожна з них на 1 дм більша за третю. Знайдіть сторони трикутника.

909. За два дні було продано 384 кг бананів, причому другого дня продали $\frac{3}{5}$ від того, що продали першого. Скільки кілограмів бананів продали в перший день і скільки – у другий?

910. Туристи за другий день подолали $\frac{7}{8}$ від тієї відстані, яку подолали першого дня. Скільки кілометрів подолали туристи першого дня і скільки другого, якщо за перший день було подолано на 3 км більше, ніж за другий?

911. Бабуся ліпила вареники протягом двох годин. За другу годину вона виліпила на 5 % більше вареників, ніж за першу. Скільки вареників виготовила бабуся за першу годину і скільки за другу, якщо за другу годину вона виліпила на 3 вареники більше, ніж за першу?

912. За пральну машину та її підключення заплатили 5880 грн. Вартість підключення становить 5 % від вартості машини. Скільки коштує пральна машина?

913. За 2 год мотоцикліст долає таку саму відстань, що й велосипедист за 5 год. Швидкість мотоцикліста на 27 км/год більша за швидкість велосипедиста. Знайдіть швидкість кожного з них.

914. Ящик з апельсинами на 3 кг важчий, ніж ящик з лимонами. Яка маса кожного з них, якщо маса чотирьох ящиків з апельсинами така сама, як маса п'яти ящиків з лимонами?

915. З міста до села турист ішов зі швидкістю 4 км/год, а повертався назад зі швидкістю 3 км/год. На весь шлях він витратив 7 год. Знайдіть відстань від міста до села.

916. Периметр прямокутника дорівнює 36 см, причому одна з його сторін на 4 см більша за іншу. Знайдіть сторони прямокутника та його площу.

917. Під час літніх канікул Сергій прочитав удвічі більше оповідань, ніж Костя. Проте протягом вересня Костя встиг прочитати ще 24 оповідання, після чого виявилось, що хлопці про-

читали однакову кількість оповідань. Скільки оповідань прочитав кожен із хлопців до початку навчального року?

918. У Марійки було втричі більше грошей, ніж в Олі. Після того як Марійка витратила 18 грн, грошей у дівчат стало порівну. Скільки грошей мала кожна з дівчат спочатку?

919. Мережа кондитерських до річниці свого відкриття дарувала відвідувачам набори солодоців торгових марок «Добре», «Солодко» та «Смачно». Наприкінці святкування з'ясувалося, що наборів «Солодко» було подаровано на 12 більше, ніж наборів «Добре», а наборів «Смачно» – на 31 більше, ніж «Солодко». По скільки наборів кожної марки було подаровано, якщо відвідувачів було 430 і кожен з них отримав по одному набору?

920. Одна сторона трикутника на 9 см менша за другу і вдвічі менша за третю. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 105 см.

921. Чи можна розкласти 68 банок консервів у три ящики так, щоб у другому було вдвічі більше банок, ніж у першому, а в третьому – на 3 банки менше, ніж у першому?

922. Чи можна 90 книжок розмістити на трьох полицях так, щоб на третій було на 3 книжки більше, ніж на другій, і на 5 книжок менше, ніж на першій?

923. Батькові зараз – 38 років, а його синові – 10. Через скільки років батько буде утричі старший за сина?

924. На одній ділянці кущів агрусу втричі більше, ніж на другій. Якщо з першої ділянки пересадити 12 кущів на другу, то кущів агрусу на обох ділянках стане порівну. По скільки кущів агрусу росте на кожній ділянці?

925. У двох корпусах пансіонату проживала однакова кількість відпочивальників. У зв'язку з проведенням ремонту було вирішено переселити 24 відпочивальники з першого корпусу до другого, після чого кількість відпочивальників у першому корпусі стала в 4 рази меншою, ніж у другому. По скільки відпочивальників проживало в кожному корпусі до початку ремонтних робіт?

926. У двох мішках цукру було порівну. Після того як з першого мішка пересипали 8 кг до другого, у ньому стало вдвічі менше цукру, ніж у другому. По скільки кілограмів цукру було в кожному мішку спочатку?

927. На 44 гривні було придбано 25 зошитів у клітинку і лінійку. Вартість зошита в лінійку – 1 грн 70 коп., а в клітинку – 1 грн 80 коп. По скільки зошитів кожного виду придбали?

928. Для копіювання відеозапису свята останнього дзвоника придбали 12 лазерних дисків двох видів: по 5,5 грн та по 6,25 грн за одиницю, усього на суму 69,75 грн. По скільки дисків кожного виду було придбано?

929. *Старовинна грецька задача.* У Піфагора запитали: «Скільки учнів навчається у твоїй школі?». На що він відповів: «Половина всіх моїх учнів вивчає математику, чверть – музику, сьома частина мовчить, і, окрім того, є ще три жінки». Скільки учнів навчалося в школі Піфагора?

930. Маса бідона з молоком становить 25 кг і ще половину його маси. Яка маса бідона з молоком?

931. $\frac{1}{4}$ від одного числа дорівнює $\frac{2}{3}$ від другого. Знайдіть ці числа, якщо їх сума дорівнює 66.

932. 60 % від одного числа дорівнюють 45 % від другого. Знайдіть ці числа, якщо їх сума дорівнює 210.

933. Човен витратив на шлях за течією 2,5 год, а проти течії – 3,6 год. Відстань, яку проплив човен за течією, виявилася на 7,6 км меншою, ніж відстань, яку він проплив проти течії. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год.

934. Катер за течією річки плыв 1,6 год, а проти течії – 2,5 год. Відстань, яку подолав катер проти течії, виявилася на 6,2 км більшою, ніж відстань, яку подолав катер за течією. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість катера дорівнює 16 км/год.

935. З пункту *A* до пункту *B* зі швидкістю 12 км/год виїхав велосипедист. Через 3 год з пункту *B* до пункту *A* виїхав мотоцикліст зі швидкістю 45 км/год. Скільки годин до зустрічі з мотоциклістом їхав велосипедист, якщо відстань від *A* до *B* становить 235,5 км? На якій відстані від пункту *A* відбулася їх зустріч?

936. З котеджного містечка в напрямку залізничної станції зі швидкістю 14 км/год виїхав велосипедист, а через 2 год після нього звідти ж, але в протилежному напрямку зі швидкістю

4 км/год вийшов пішохід. Через скільки годин після свого виходу пішохід буде на відстані 73 км від велосипедиста? На якій відстані від котеджного містечка в цей час він знаходиться?

937. Один кавун на 5 кг легший за другий і утричі легший за третій. Перший і третій кавуни разом удвічі важчі за другий. Знайдіть масу кожного кавуна.

938. Під час підготовки до олімпіади з математики Іван розв'язав на 3 задачі менше, ніж Оксана, і у 2 рази менше, ніж Сергій. При цьому Іван і Сергій разом розв'язали у 2,1 рази більше задач, ніж Оксана. Яку кількість задач розв'язав кожен з учнів, готуючись до олімпіади?



Вправи для повторення

2 **939.** Обчисліть:

$$1) -3\frac{1}{4} \cdot 3\frac{9}{13}; \quad 2) -3\frac{1}{7} \cdot \left(-1\frac{3}{11}\right); \quad 3) 5\frac{1}{3} \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right);$$

$$4) -2\frac{4}{5} : 1\frac{1}{15}; \quad 5) -2\frac{1}{31} : \left(-31\frac{1}{2}\right); \quad 6) \frac{7}{9} : (-14).$$

940. Скільки відсотків складає:

1) число 7 від числа 28; 2) число 2,7 від числа $3\frac{3}{5}$?

3 **941.** Поясніть, чому не мають розв'язків рівняння:

1) $0 \cdot x = 15$; 2) $x + 8 = x$; 3) $y - 2 = y + 3$;
4) $7 - t = 2 - t$; 5) $0 : x = 13$; 6) $3(x + 1) = 3x$.

4 **942.** Знайдіть усі значення a , при яких рівняння $ax = -8$ має:

1) додатний корінь; 2) від'ємний корінь.



Цікаві задачі для учнів неледачих



943. Чоловік, дружина та двоє їх дітей мають переправитися за допомогою човна на протилежний берег річки. Маса чоловіка – 80 кг, його дружини – 60 кг, дітей – по 40 кг. Як їм скористатися човном, якщо він витримує масу до 80 кг і кожен у цій сім'ї вміє веслувати?

§25. ЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ

У попередніх параграфах ми розглядали рівняння з однією змінною. Проте в алгебрі трапляються рівняння і з декількома змінними. Зокрема, ми розглянемо рівняння з двома змінними.

Приклад 1. Сума одного числа з квадратом другого дорівнює 17. Якщо перше число позначити через x , а друге – через y , то співвідношення між ними можна записати у вигляді рівності $x + y^2 = 17$, яка містить дві змінні x і y . Такі рівності називають *рівняннями з двома змінними* (або *рівняннями з двома невідомими*).

Якщо $x = 1$; $y = 4$, то рівняння $x + y^2 = 17$ перетворюється на правильну числову рівність. У такому випадку кажуть, що пара значень змінних $x = 1$; $y = 4$ є *розв'язком* рівняння $x + y^2 = 17$. Або скорочено: пара чисел (1; 4) є розв'язком рівняння.



Розв'язком рівняння з двома змінними називають пару значень змінних, яка перетворює рівняння в правильну числову рівність.

Розв'язками рівняння $x + y^2 = 17$ є також пари $(-8; 5)$; $(8; 3)$; $(16; -1)$. При такому скороченому запису розв'язків рівняння важливо знати, значення якої із двох змінних стоїть на першому місці, а якої – на другому. Якщо рівняння містить змінні x і y , то на першому місці записують значення змінної x , а на другому – значення змінної y .

Щоб знайти розв'язок рівняння з двома змінними, можна підставити в рівняння довільне значення однієї зі змінних і, розв'язавши одержане рівняння, знайти відповідне їй значення другої змінної.

Знайдемо в такий спосіб ще кілька розв'язків рівняння $x + y^2 = 17$. Нехай $y = -2$, тоді $x + (-2)^2 = 17$, звідки $x = 13$; нехай $y = 6$, тоді $x + 6^2 = 17$, звідки $x = -19$.

Маємо ще два розв'язки рівняння: $(13; -2)$ і $(-19; 6)$.



Лінійним рівнянням з двома змінними називають рівняння вигляду $ax + by = c$, де x і y – змінні. Числа a , b і c називають коефіцієнтами рівняння.

Рівняння з двома змінними, які мають одні й ті самі розв'язки, називають *рівносильними*. Рівняння, які не мають розв'язків, також є рівносильними.



Рівняння з двома змінними мають ті самі властивості, що й рівняння з однією змінною:

- 1) якщо в рівнянні розкрити дужки або звести подібні доданки, то одержимо рівняння, рівносильне даному;
- 2) якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в іншу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному;
- 3) якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

Приклад 2. Розглянемо рівняння $7x + 3y + 2 = 5(y - 1)$. Це рівняння з двома змінними. Якщо в ньому розкрити дужки, потім перенести доданки, що містять змінні, в одну частину рівняння, а ті, що їх не містять, – у другу, далі звести подібні доданки, одержимо рівняння $7x - 2y = -7$, яке буде рівносильним рівнянню $7x + 3y + 2 = 5(y - 1)$.


Використовуючи властивості рівнянь з двома змінними, можна знаходити їх розв'язки й іншим способом.





Приклад 3. Розглянемо рівняння $3x + 5y = 2$. Використовуючи властивості рівносильності рівнянь, виразимо в цьому рівнянні одну змінну через іншу. Наприклад, змінну y через змінну x . Для цього спочатку $3x$ перенесемо у праву частину рівняння: $5y = -3x + 2$, потім обидві частини поділимо на 5 і одержимо $y = -0,6x + 0,4$. Це рівняння рівносильне рівнянню $3x + 5y = 2$. Тепер, маючи формулу $y = -0,6x + 0,4$, можна знайти скільки завгодно розв'язків рівняння $3x + 5y = 2$. Для цього достатньо взяти довільне значення змінної x і обчислити відповідне йому значення змінної y . Пари таких значень змінних x і y занесемо в таблицю:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	3,4	2,8	2,2	1,6	1	0,4	-0,2	-0,8	-1,4	-2	-2,6

Пари чисел, записані у стовпчиках таблиці, є розв'язками рівняння $3x + 5y = 2$. Це рівняння має безліч розв'язків.



Наведіть приклад рівняння з двома змінними.  Що називають розв'язком рівняння з двома змінними?

-  Сформулюйте означення лінійного рівняння з двома змінними.  Наведіть приклад лінійного рівняння з двома змінними.  Які рівняння з двома змінними називають рівносильними?  Які властивості мають рівняння з двома змінними?

944. (Усно) Укажіть рівняння, що є рівняннями з двома змінними:

- 1) $x^2 + 2xy = 7$; 2) $3x^2 - 2x - 7 = 0$;
 3) $7x - 2y = 9$; 4) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;
 5) $2x + 3x^2 = 7y^2 - 5y$; 6) $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 1$.

945. (Усно) Чи є лінійним рівняння з двома змінними:

- 1) $2x - 3y = 7$; 2) $2x^2 - 3y = 7$; 3) $5x + 13y = 0$;
 4) $\frac{x+1}{y-3} = 9$; 5) $0x + 5y = 20$; 6) $7x + 25y^2 = 3?$

946. Укажіть рівняння з двома змінними. Які з них є лінійними:

- 1) $2x - 5y = 19$; 2) $7x^2 - 5y^2 = 9$; 3) $xyz = 3$;
 4) $7x - 0y = 14$; 5) $(x - 2)(y + 3) = 17$; 6) $1\frac{1}{8}x + 1\frac{1}{5}y = 2\frac{3}{7}?$

947. (Усно) Чи є пара чисел розв'язком рівняння $x - y = 0$:

- 1) (5; 5); 2) (-3; 3); 3) (0; 0)?

948. Чи є пара чисел $x = 5$; $y = 2$ розв'язком рівняння $x + y = 7$? Знайдіть ще три розв'язки цього рівняння.

949. Які з пар чисел (10; 1), (1; 10), (7; 2), (7; -2), (9; 0) є розв'язками рівняння $x - y = 9$?

950. Які з пар чисел (2; 1), (2; -1), (0; 5), (1; 3), (-1; 5) є розв'язками рівняння $2x + y = 5$?

951. Розв'язком яких рівнянь є пара чисел (-1; 3):

- 1) $2x - 17y = 53$; 2) $3x^2 + y^2 = 12$;
 3) $(x - 3)(y + 2) = -20$; 4) $0x + 4y = -12$;
 5) $0x + 0y = 0$; 6) $x^2 + 1 = y^2 - 7?$

952. Розв'язком яких рівнянь є пара чисел $x = 2$; $y = -1$:

- 1) $3x + y = 5$; 2) $x^2 + y^2 = 3$; 3) $2x + 0y = 4$;
 4) $x(y + 3) = 14$; 5) $0x + 0y = 7$; 6) $\frac{1}{2}x + y = 0?$

953. Знайдіть три будь-яких розв'язки рівняння:

- 1) $x + y = -3$; 2) $x - 2y = 5$.

954. Знайдіть три будь-яких розв'язки рівняння:

- 1) $x - y = 2$; 2) $x + 3y = 0$.

955. Складіть лінійне рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел $x = 3$; $y = -2$.

956. Складіть лінійне рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел $(-2; 0)$.

957. Виразіть з рівняння $5x + y = 7$ змінну y через змінну x .

958. Виразіть з рівняння $x - 3y = 9$ змінну x через змінну y .

959. З лінійного рівняння $3x - 2y = 12$ виразіть:

- 1) змінну y через змінну x ;
- 2) змінну x через змінну y .

960. Виразивши з рівняння змінну y через змінну x , знайдіть два будь-яких розв'язки рівняння:

- 1) $x + y = 29$;
- 2) $5x + y = 7$;
- 3) $3x - 2y = 15$;
- 4) $6y - x = 5$.

961. Виразивши в рівнянні змінну y через змінну x або змінну x через змінну y , знайдіть три будь-яких розв'язки рівняння:

- 1) $x - 2y = -8$;
- 2) $7x - y = 9$;
- 3) $3x + 2y = 6$;
- 4) $5x - 7y = 12$.

962. Пара чисел $(-5; p)$ є розв'язком рівняння $2x - y = -13$. Знайдіть p .

963. Пара чисел $(n; -1)$ є розв'язком рівняння $3x + 5y = 4$. Знайдіть n .

964. Знайдіть m , якщо пара чисел $(-1; -3)$ є розв'язком рівняння:

- 1) $8x + 9y = m$;
- 2) $mx - 2y = -9$.

965. При якому значенні d пара чисел $(2; -1)$ є розв'язком рівняння:

- 1) $7x - 5y = d$;
- 2) $3x + dy = 8$?

966. Знайдіть два деяких розв'язки рівняння

$$2(x - y) = 3(x + y) + 4.$$

967. Серед розв'язків рівняння $x + 3y = 20$ знайдіть пару рівних між собою чисел.

968. Знайдіть p , якщо:

- 1) пара $(p; p)$ є розв'язком рівняння $4x - 9y = -10$;
- 2) пара $(p; -p)$ є розв'язком рівняння $17x + 12y = 105$.

969. Знайдіть усі пари натуральних чисел, які є розв'язками рівняння:

- 1) $2x + y = -7$; 2) $3x + 2y = 5$;
 3) $x + 7y = 15$; 4) $xy = 7$.



Вправи для повторення

970. Функцію задано формулою $y = \frac{2x+1}{x-6}$. Заповніть у зовнішній таблиці, обчисливши відповідні значення функції:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y								

971. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

- 1) $(x - 10)^2 - x(x + 80)$, якщо $x = -0,83$;
 2) $(5t + 3)^2 - (5t - 3)^2$, якщо $t = -\frac{17}{60}$.

972. Відомо, що $a + b = -1$, $ab = -6$. Знайдіть значення виразів:

- 1) $a^2b + ba^2$; 2) $a^2 + b^2$; 3) $(a - b)^2$; 4) $a^3 + b^3$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



973. Дано два трицифрових числа, сума яких ділиться на 37. Ці числа записали в рядок одне за одним. Доведіть, що одержане в такий спосіб шестицифрове число також ділиться на 37.

§26. ГРАФІК ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ

Кожну пару чисел, що є розв'язком рівняння з двома змінними x і y , можна позначити точкою на координатній площині, абсцисою якої є значення x , а ординатою – значення y . Усі такі точки утворюють *графік рівняння з двома змінними*.



Графіком рівняння з двома змінними x і y називають фігуру, що складається з усіх точок координатної площини, координати яких є розв'язками цього рівняння.

З'ясуємо, як виглядає графік лінійного рівняння з двома змінними.

Приклад 1. Побудувати графік лінійного рівняння з двома змінними $5x + 2y = 8$.

Розв'язання. Виразимо змінну y через змінну x : $2y = -5x + 8$; отже, $y = -2,5x + 4$.

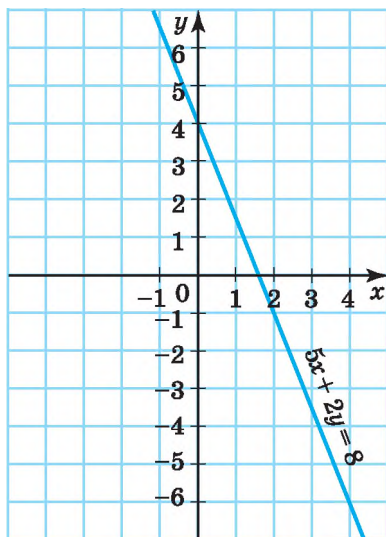
Формула $y = -2,5x + 4$ задає лінійну функцію, графіком якої є пряма. Для побудови графіка складемо таблицю значень x і y для двох його точок:

x	0	4
y	4	-6

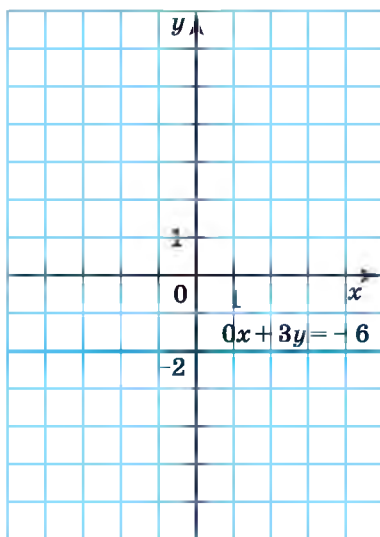
Графік функції $y = -2,5x + 4$ зображено на малюнку 28. Оскільки рівняння $5x + 2y = 8$ та $y = -2,5x + 4$ є рівносильними, то побудована пряма є також і графіком рівняння $5x + 2y = 8$.

Приклад 2. Побудувати графік лінійного рівняння з двома змінними $0x + 3y = -6$.

Розв'язання. Рівняння $0x + 3y = -6$ рівносильне рівнянню $y = -2$. Це лінійна функція, графіком якої є пряма, що паралельна осі x і проходить через точку $(0; -2)$ (мал. 29). Ця пряма є також і графіком рівняння $0x + 3y = -6$.



Мал. 28



Мал. 29

За допомогою аналогічних міркувань можна показати, що графіком будь-якого лінійного рівняння з двома змінними $ax + by = c$, де $b \neq 0$, є пряма.

Розглянемо випадок, коли $b = 0$.

Приклад 3. Побудувати графік рівняння $2x + 0y = 8$.

Розв'язання. Розв'язком даного рівняння є кожна пара чисел вигляду $(4; y)$, де y – будь-яке число, наприклад $(4; -2)$, $(4; 0)$, $(4; 3)$, $(4; 7,5)$. Графік рівняння складається з усіх точок, абсциси яких дорівнюють 4, а ординати – будь-які числа. Такі точки утворюють пряму, яка проходить через точку $(4; 0)$ паралельно осі y (мал. 30).

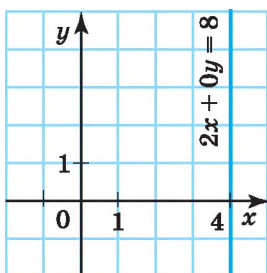
Графіком рівняння $ax + by = c$, у якому хоча б один з коефіцієнтів a або b відмінний від нуля, є пряма.

Приклад 4. На малюнку 31 зображено графік рівняння $0x + 1,7y = 5,1$, тобто $y = 3$, а на малюнку 32 – графік рівняння $\frac{1}{3}x + 0y = -1$, тобто $x = -3$.

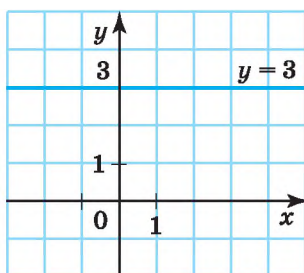
- 1) Щоб побудувати графік рівняння $y = t$, достатньо позначити на осі y точку $(0; t)$ та провести через неї пряму паралельно осі x .
- 2) Щоб побудувати графік рівняння $x = n$, достатньо позначити на осі x точку $(n; 0)$ та провести через неї пряму паралельно осі y .

Розглянемо випадок, коли в лінійному рівнянні $ax + by = c$ обидва коефіцієнти a і b дорівнюють нулю.

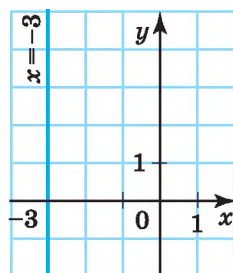
Приклад 5. Нехай $a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$. Тоді маємо рівняння $0x + 0y = c$, наприклад $0x + 0y = 2$. Це рівняння не має розв'язків, отже, його графік не містить жодної точки, а тому не існує.



Мал. 30



Мал. 31



Мал. 32

Приклад 6. Нехай $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. Тоді маємо рівняння $0x + 0y = 0$. Будь-яка пара чисел є розв'язком цього рівняння, а його графіком – усі точки координатної площини.



Що називають графіком рівняння з двома змінними x і y ? Яка фігура є графіком рівняння $ax + by = c$, у якому хоча б один з коефіцієнтів a або b відмінний від нуля? Як побудувати графік рівняння $y = m$, де m – число; графік рівняння $x = n$, де n – число?

1 **974.** (Усно) Чи належить графіку рівняння $x + y = 8$ точка:
1) (7; 1); 2) (5; -3); 3) (2; 7); 4) (8; 0)?

975. Які з точок $A(5; 0)$, $B(1; 4)$, $C(4; -1)$, $D(0; 5)$, $E(3; 2)$ належать графіку рівняння $x - y = 5$?

2 **976.** Чи проходить графік рівняння $7x + 5y = 25$ через точку:
1) (7; -4); 2) (5; -2); 3) (-1,4; 7); 4) (35; -44)?

977. Графіки яких рівнянь проходять через точку $P(-2; 3)$:

- 1) $7x + 9y = 15$; 2) $17y - 4x = 59$; 3) $0x + 5y = 15$;
4) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}y = -1$; 5) $0x + 0y = 5$; 6) $1,7x + 1,2y = 0,2$?

978. Доведіть, що графіки рівнянь $5x - 8y = -66$; $0x + 3y = 21$ та $7y - 4x = 57$ проходять через точку $M(-2; 7)$.

979. Назвіть дві довільні точки, які належать графіку рівняння $2x - 5y = 20$.

980. Знайдіть дві точки, які належать графіку рівняння $3x + 2y = 12$, і дві точки, які йому не належать.

981. Побудуйте графік рівняння:

- 1) $x - y = 5$; 2) $0,5x + y = 3$;
3) $x + 3y = 0$; 4) $0,2x - 0,4y = 2$.

982. Побудуйте графік рівняння:

- 1) $x + y = 6$; 2) $y - 2x = 0$;
3) $x - 0,5y = 4$; 4) $2x + 3y = 5$.

983. Запишіть яке-небудь лінійне рівняння з двома змінними, графік якого проходить через точку $P(1; -3)$.

3 **984.** На графіку рівняння $2x + 3y = 7$ вибрано точку з абсцисою -4 . Знайдіть ординату цієї точки.

985. На графіку рівняння $5x - 7y = 16$ взято точку з ординатою -2 . Якою є абсциса цієї точки?

986. Побудуйте графік рівняння:

- 1) $0x + 2,5y = 12,5$; 2) $7x + 0y = -14$;
3) $1,9x = 5,7$; 4) $3y = -7,5$.

987. Побудуйте графік рівняння:

- 1) $3x + 0y = -12$; 2) $0x - 1,2y = 3,6$;
3) $1,8y = 7,2$; 4) $4x = 6$.

988. (Усно) Запишіть рівняння, графіки яких зображено на малюнках 33–36.

989. При якому значенні m графік рівняння:

- 1) $5x + 7y = m$ проходить через початок координат;
2) $mx + 2y = 14$ проходить через точку $(2; -3)$;
3) $3x - 4y = m + 2$ проходить через точку $(-1; 5)$?

990. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків рівнянь з осями координат:

- 1) $x + 7y = -21$; 2) $5x - 3y = 15$.

991. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків рівнянь з осями координат:

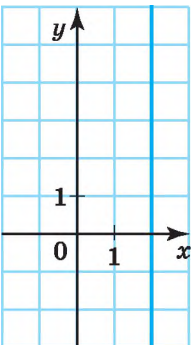
- 1) $3x + y = 18$; 2) $-7x - 2y = 28$.

992. Побудуйте графік рівняння:

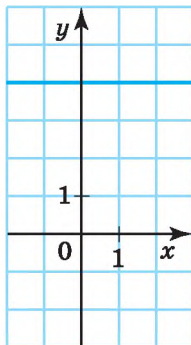
- 1) $2(x + y) - 3y = 1$; 2) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = \frac{1}{6}$.

993. Побудуйте графік рівняння:

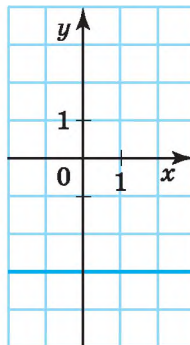
- 1) $5(x - y) - 4(x + y) = -7$; 2) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.



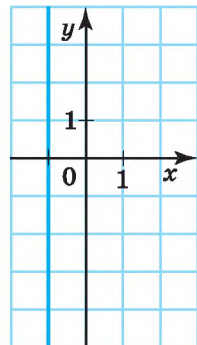
Мал. 33



Мал. 34



Мал. 35



Мал. 36

994. Не виконуючи побудови, визначте, у яких координатних кутах розташовується графік рівняння:

1) $2x - 6y = 0$; 2) $3x + y = 0$; 3) $1,9x = 190$; 4) $-8y = 720$.

995. Побудуйте в одній системі координат графіки рівнянь $2x + 3y = 6$ і $4x + 6y = 8$. Чи перетинаються ці графіки?

996. Побудуйте графік рівняння $\frac{x-3}{5} + \frac{y+4}{3} = \frac{7}{15}$.



Вправи для повторення

997. Пряму пропорційність задано формулою $y = -\frac{1}{4}x$. Знайдіть:

- 1) значення y , якщо $x = -8; 0; 12; 20$;
2) значення x , якщо $y = -2; 3; 10$.

998. Подайте у вигляді многочлена:

- 1) $64a^2 - (8a - 1)^2 + 14a$; 2) $m^2 + 4n^2 - (m + 2n)^2 - 12mn$;
3) $2m(m - 5) - (m - 5)^2$; 4) $(x - 3)(x + 5) - (x + 1)^2$.

999. Автомобіль і автобус одночасно виїхали назустріч один одному з пунктів A і B , відстань між якими 240 км. Швидкість автомобіля на 20 км/год більша за швидкість автобуса. Знайдіть швидкість автобуса і швидкість автомобіля, якщо вони зустрілися через 2 год після виїзду, при цьому автомобіль зробив на шляху півгодинну зупинку.



Цікаві задачі для учнів неледачих



1000. Доведіть, що для будь-якого значення x значення виразу $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$ є числом додатним.

§ 27. СИСТЕМА ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ ТА ЇЇ РОЗВ'ЯЗОК. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ ГРАФІЧНО

Приклад 1. Набір фарб і набір пензлів разом коштують 96 грн, причому набір фарб на 16 грн дорожчий за набір пензлів. Скільки коштує набір фарб і скільки – набір пензлів?

Р о з в' я з а н н я. Цю задачу можна розв'язати арифметичним способом (по діях) або за допомогою рівняння з однією

змінною. А ще її можна розв'язати за допомогою лінійних рівнянь з двома змінними.

Нехай набір фарб коштує x грн, а набір пензлів – y грн. За умовою разом вони коштують 96 грн, отже, маємо рівняння: $x + y = 96$.

Оскільки набір фарб дорожчий за набір пензлів на 16 грн, то маємо ще одне рівняння: $x - y = 16$.

Одержали два рівняння з двома змінними, які є математичною моделлю задачі. Щоб розв'язати задачу, треба знайти такі значення змінних x і y , які б одночасно перетворювали у правильну рівність кожне з одержаних рівнянь, тобто знайти спільний розв'язок цих рівнянь.

Якщо є кілька рівнянь, для яких треба знайти спільний розв'язок рівнянь, то кажуть, що ці рівняння утворюють **систему рівнянь**. Записують систему рівнянь за допомогою фігурної дужки. Складену за умовою даної задачі **систему лінійних рівнянь з двома змінними** записують так:

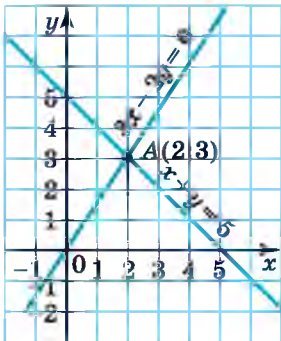
$$\begin{cases} x + y = 96, \\ x - y = 16. \end{cases}$$

Пара значень змінних $x = 56$, $y = 40$ є розв'язком кожного з рівнянь системи. Таку пару чисел називають **розв'язком системи**.



Розв'язком системи рівнянь з двома змінними називають пару значень змінних, яка є розв'язком кожного з рівнянь системи. Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Для розв'язування системи лінійних рівнянь з двома змінними можна використовувати графіки рівнянь. Такий спосіб розв'язування систем рівнянь називають **графічним**.



Мал. 37

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 3x - 2y = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Побудуємо в одній координатній площині графіки обох рівнянь (мал. 37). Координати кожної точки прямої, яка є графіком рівняння $x + y = 5$, задовольняють це рівняння. Аналогічно координати кожної точки прямої $3x - 2y = 0$ задовольняють це

рівняння. Координати точки перетину прямих задовольняють як перше, так і друге рівняння, тобто є розв'язком кожного з рівнянь, отже, і розв'язком даної системи рівнянь. Оскільки графіки перетинаються лише в точці $(2; 3)$, то система має єдиний розв'язок $x = 2; y = 3$. Перевіркою (підстановкою в кожне з рівнянь системи) пересвідчуємося, що знайдена пара чисел дійсно є розв'язком даної системи. Цей розв'язок можна записати ще так: $(2; 3)$, де на першому місці – значення змінної x , а на другому – значення змінної y .

В і д п о в і д ь: $(2; 3)$.

Зауважимо, що графічний спосіб зазвичай дає змогу знаходити розв'язки лише наближено. Але, підставивши значення $x = 2$ і $y = 3$ в кожне з рівнянь даної системи, переконуємося, що ця пара чисел є їх розв'язком, отже, пара $(2; 3)$ виявилася точним розв'язком.

Розглянемо системи двох лінійних рівнянь з двома змінними, у кожному з яких хоча б один з коефіцієнтів при змінних x і y відмінний від нуля. Графіками обох рівнянь системи є прямі. Якщо ці прямі перетинаються, то система має єдиний розв'язок; якщо прямі не перетинаються (паралельні), то система не має розв'язків; якщо прямі збігаються, то система має безліч розв'язків.

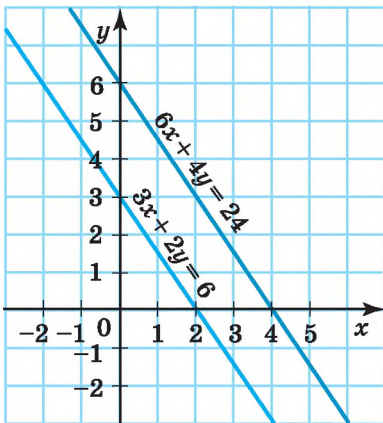
Отже, щоб *розв'язати систему рівнянь графічно*, доцільно дотримуватися такої послідовності дій:

- 1) *побудувати графіки рівнянь системи в одній координатній площині;*
- 2) *знайти координати точки перетину графіків або впевнитися, що графіки рівнянь не перетинаються (є паралельними) або збігаються;*
- 3) *якщо координати точки перетину є цілими числами, то виконати перевірку; якщо ні, то розв'язок системи визначити наближено;*
- 4) *записати розв'язок у відповідь.*

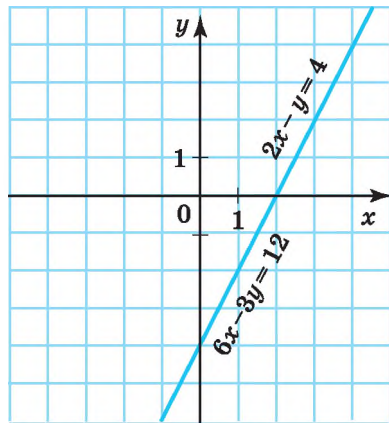
Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь:
$$\begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ 6x + 4y = 24. \end{cases}$$

Р о з в' я з а н н я. *1-й спосіб.* Побудуємо графіки рівнянь в одній координатній площині (мал. 38). Графіки рівнянь є паралельними прямими, отже, не мають спільної точки, тому система розв'язків не має.

Оскільки малюнок не дає необхідної точності, пересвідчитися, що система не має розв'язків, можна й іншим способом.



Мал. 38



Мал. 39

2-й спосіб. Поділивши обидві частини другого рівняння на 2, матимемо:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ 3x + 2y = 12. \end{cases}$$

Очевидно, що не існує таких значень змінних x і y , для яких би одночасно виконувалися рівності $3x + 2y = 6$ і $3x + 2y = 12$. Отже, система рівнянь розв'язків не має.

Відповідь: немає розв'язків.

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 6x - 3y = 12. \end{cases}$$

Розв'язання. 1-й спосіб. Побудуємо графіки рівнянь в одній координатній площині (мал. 39). Графіки рівнянь збігаються, тому дана система має безліч розв'язків. Будь-яка пара чисел, яка задовольняє перше рівняння, задовольняє також і друге. Щоб записати відповідь до системи, виразимо y через x з першого рівняння: $y = 2x - 4$. Таким чином, будь-яка пара чисел вигляду $(x; 2x - 4)$, де x – довільне число, є розв'язком даної системи.

2-й спосіб. Поділивши обидві частини другого рівняння на 3, матимемо:

$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 2x - y = 4. \end{cases}$$

Очевидно, що маємо два однакових рівняння, отже, і графіки їх збігаються. Потім міркуємо так само, як у 1-му способі.

Відповідь: $(x; 2x - 4)$, де x – довільне число.

А ще раніше...

Китайські математики вміли розв'язувати системи лінійних рівнянь дві тисячі років тому. Вони винайшли загальний метод розв'язування таких систем, причому не тільки з двома, а й з більшою кількістю рівнянь і змінних.

А давньогрецький математик Діофант (бл. III ст. до н.е.) розв'язував і деякі системи нелінійних рівнянь з двома змінними.



Що називають розв'язком системи рівнянь з двома змінними? **?** Що означає розв'язати систему рівнянь? **?** Скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь з двома змінними? **?** Як розв'язати систему двох лінійних рівнянь з двома змінними графічно?

1001. (Усно) Яка з даних систем є системою двох лінійних рівнянь з двома змінними:

$$1) \begin{cases} x + y = 5, \\ x - y^2 = 7; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + 3y = -7, \\ 3x - 9y = 13; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 5x - y = 19, \\ xy = -6; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \frac{x}{y} = 5, \\ x - y = -7? \end{cases}$$

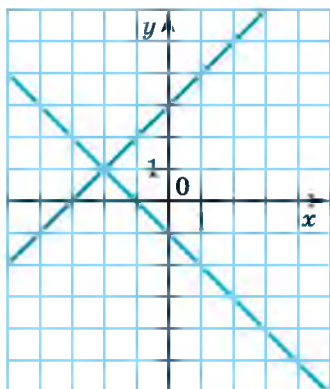
1002. (Усно) Чи є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 1 \end{cases}$ пара чисел:

1) (3; 4); 2) (4; 3); 3) (6; 1)?

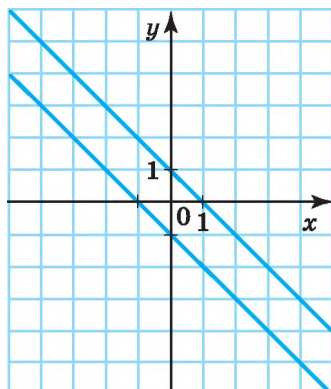
1003. Яка з даних пар чисел є розв'язком системи $\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1 \end{cases}$

1) (5; 0); 2) (2; 3); 3) (3; 2)?

1004. (Усно) Скільки розв'язків має система, графіки рівнянь якої зображено на малюнку 40? На малюнку 41?



Мал. 40



Мал. 41

2 1005. (Усно) Чи є пара чисел $(-2; 1)$ розв'язком системи:

$$1) \begin{cases} x + 2y = 0, \\ 3x - 7y = -13; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x + 7y = -3, \\ 9x - 11y = 29; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x = 5 - 9y, \\ 7y - 12x = 31? \end{cases}$$

1006. Яка з пар $(3; -4)$, $(7; 2)$, $(4; -3)$ є розв'язком системи:

$$1) \begin{cases} 2x - 3y = 17, \\ 5x + 2y = 14; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x - 7y = 0, \\ 3x + 5y = 31? \end{cases}$$

1007. Складіть систему лінійних рівнянь з двома змінними, розв'язком якої є пара чисел: 1) $(1; -3)$; 2) $(4; 5)$.

1008. Знайдіть координати точки перетину прямих, зображених на малюнку 42. Запишіть відповідну систему рівнянь. Перевірте розв'язок, підставивши координати знайденої точки в кожне з рівнянь.

1009. Розв'яжіть систему рівнянь графічно:

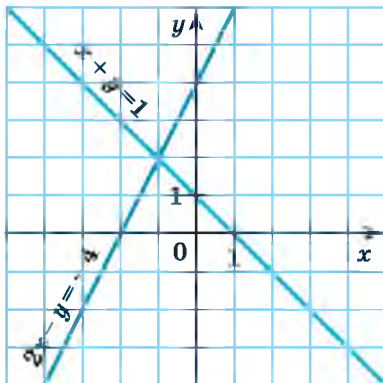
$$1) \begin{cases} y = -x, \\ y = 4 + x; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = 2x, \\ y = 3 + x; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y = 2, \\ x + 2y = -1; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 2x - y = 1, \\ x - y = 4. \end{cases}$$

1010. Розв'яжіть систему рівнянь графічно:

$$1) \begin{cases} y = x, \\ y = 6 - x; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = -2x, \\ y = 4 - x; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x - y = 1, \\ x - 2y = 4; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 3x + y = 7, \\ x + y = 3. \end{cases}$$



Мал. 42

1011. Пара $(2; -5)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} 2x + by = 5, \\ ax - 6y = 13. \end{cases}$
Знайдіть a і b .

1012. Знайдіть a і b , якщо пара $(10; -2)$ є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} ax - 5y = 17, \\ 3x + by = 9. \end{cases}$

1013. Розв'яжіть систему рівнянь графічно:

$$1) \begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ 3x - y = 3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + 7y = 12, \\ 3x - 2y = -7. \end{cases}$$

1014. Розв'яжіть систему рівнянь графічно:

$$1) \begin{cases} 2x - 3y = -10, \\ 6x - y = 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + 5y = -4, \\ 7x - 2y = 25. \end{cases}$$

1015. З'ясуйте, чи має система розв'язки і скільки:

$$1) \begin{cases} 2x - y = 5, \\ 3x + y = 7; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 0,5x - y = 4, \\ -x + 2y = -8; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + 5y = 7, \\ y = -0,2x; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x + 2y = 0, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$$

1016. Чи має система розв'язки і скільки:

$$1) \begin{cases} x + y = 7, \\ 3x - y = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 2y = 5, \\ 2x - 4y = 7; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x = 2y, \\ 1,5x - 3y = 0? \end{cases}$$

1017. Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} 2x + y = -3, \\ x + 5y = 4. \end{cases}$

Перевірте, чи є одержаний розв'язок точним. Чи є розв'язком даної системи пара чисел $\left(-2\frac{1}{9}; 1\frac{2}{9}\right)$?

1018. Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} x + 3y = 7, \\ 3x - y = 4. \end{cases}$

Перевірте, чи є одержаний розв'язок точним. Чи є розв'язком даної системи пара чисел $(1,9; 1,7)$?

1019. Не виконуючи побудови, доведіть, що система рівнянь $\begin{cases} x - 7y = 8, \\ -4x + 28y = -31 \end{cases}$ не має розв'язків.

1020. Не виконуючи побудови, доведіть, що система рівнянь

$$\begin{cases} 2x + 5y = 18, \\ -3x - 7,5y = -27 \end{cases}$$
 має безліч розв'язків.

1021. Знайдіть які-небудь розв'язки системи $\begin{cases} 3x + y = 5, \\ -9x - 3y = -15. \end{cases}$

Скільки всього розв'язків вона має? Розв'яжіть її.

1022. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ -6x + 4y = -10; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 3y = -4, \\ 3x + 9y = 12. \end{cases}$

1023. До рівняння $x + 3y = 5$ доберіть друге рівняння так, щоб одержана система рівнянь мала:

- 1) лише один розв'язок; 2) безліч розв'язків.

1024. До рівняння $2x - y = 7$ доберіть друге рівняння так, щоб одержана система рівнянь не мала розв'язків.



Вправи для повторення

1025. Які з точок $A(4; -2)$; $B(0; 0)$; $C(-1; -5)$; $D(1; 2)$ належать графіку прямої пропорційності:

1) $y = -\frac{1}{2}x$; 2) $y = 5x$?

1026. Спростіть вираз:

- 1) $7m(m - 3) - 3(m - 2)(m + 2)$;
- 2) $(1 - 2x)(2x + 1) - (3x - 1)^2$;
- 3) $(2x + 3y)^2 - (x + 3y)(2x - y)$;
- 4) $(4a - 5b)(5b + 4a) - (2a - 5b)^2$.

1027. Доведіть, що вираз $-x^2 + 8x - 17$ при будь-яких значеннях x набуває лише від'ємних значень. Якого найбільшого значення набуває цей вираз і при якому значенні x ?



Цікаві задачі для учнів неледачих



1028. Припустимо, що вираз $(4 - 3x)^{2015}$ подано у вигляді многочлена. Знайдіть суму коефіцієнтів цього многочлена.

§ 28.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ СПОСОБОМ ПІДСТАНОВКИ

Графічний спосіб розв'язування систем рівнянь є досить громіздким і до того ж не завжди допомагає знайти точні розв'язки. Розглянемо інші (не графічні) способи розв'язування систем лінійних рівнянь з двома змінними, які називають *аналітичними*. Почнемо зі *способу підстановки*.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ -3x + 4y = -10. \end{cases} \quad (1)$$

Р о з в' я з а н н я. З першого рівняння виразимо змінну y через змінну x :

$$y = 3 - 2x.$$

Підставимо вираз $3 - 2x$ у друге рівняння замість y . Одержимо систему:

$$\begin{cases} y = 3 - 2x, \\ -3x + 4(3 - 2x) = -10. \end{cases} \quad (2)$$

Тепер друге рівняння системи (2) містить лише змінну x . Розв'яжемо його:

$$\begin{aligned} -3x + 12 - 8x &= -10; \\ -11x &= -22; \\ x &= 2. \end{aligned}$$

Підставимо число 2 замість x у рівність $y = 3 - 2x$. Одержимо відповідне значення y :

$$\begin{aligned} y &= 3 - 2 \cdot 2; \\ y &= -1. \end{aligned}$$

Пара $(2; -1)$ є розв'язком кожного з рівнянь системи (2), отже, є розв'язком системи (2). Ця пара є розв'язком кожного з рівнянь системи (1) і тому є розв'язком системи (1).

В і д п о в і д ь: $(2; -1)$.

Системи рівнянь з двома змінними, які мають одні й ті самі розв'язки, називають *рівносильними*. Системи, які не мають розв'язків, також вважають рівносильними.

Розв'язуючи систему (1) способом підстановки, ми замінили її рівносильною їй системою (2), друге рівняння якої містило лише одну змінну.

Послідовність дій, якої слід дотримуватися, розв'язуючи систему лінійних рівнянь з двома змінними *способом підстановки*, розглянемо на прикладі системи

$$\begin{cases} 3x - 7y = 1, \\ 4x + 9y = 38. \end{cases}$$

1	Виразимо з якого-небудь рівняння системи одну змінну через другу (наприклад, з першого)	$3x = 1 + 7y,$ $x = \frac{1 + 7y}{3}$
2	Одержаний для цієї змінної вираз підставимо в друге рівняння системи	$4 \cdot \frac{1 + 7y}{3} + 9y = 38$
3	Розв'яжемо одержане рівняння з однією змінною, тобто знайдемо значення цієї змінної	$4(1 + 7y) + 3 \cdot 9y = 3 \cdot 38,$ $4 + 28y + 27y = 114,$ $55y = 110,$ $y = 2$
4	Знайдемо відповідне їй значення другої змінної	$x = \frac{1 + 7 \cdot 2}{3},$ $x = 5$
5	Запишемо відповідь	В і д п о в і д ь: (5; 2)

Спосіб підстановки зручно застосовувати тоді, коли хоча б один з коефіцієнтів при змінних x або y дорівнює 1 або -1 . Саме змінну з таким коефіцієнтом доцільно виражати через іншу.

Способом підстановки можна розв'язати й інші системи.

Приклад 2. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 4(y + 3) - 3(x - 1) = 40, \\ \frac{x + 2}{3} + \frac{y - 4}{2} = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Р о з в' я з а н н я. У першому рівнянні системи розкриємо дужки, а обидві частини другого рівняння помножимо на 6.

Матимемо:
$$\begin{cases} 4y + 12 - 3x + 3 = 40, \\ 2(x + 2) + 3(y - 4) = -2. \end{cases}$$

Спростивши кожне з рівнянь системи, зведемо її до вигляду:

$$\begin{cases} -3x + 4y = 25, \\ 2x + 3y = 6. \end{cases}$$

Далі застосуємо спосіб підстановки. Виразимо з першого рівняння y через x : $y = \frac{25 + 3x}{4}$. Підставивши цей вираз у друге рівняння і розв'язавши його, одержимо, що $x = -3$.

Знайдемо відповідне йому значення y : $y = \frac{25 + 3 \cdot (-3)}{4}$,

тобто $y = 4$.

В і д п о в і д ь: $(-3; 4)$.



Якої послідовності дій слід дотримуватися, розв'язуючи систему двох лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки?

1029. (Усно) У якій з рівностей 1)–3) правильно виконано підстановку для розв'язування системи рівнянь $\begin{cases} x = 7y - 5, \\ 2x + 3y = 9? \end{cases}$

- 1) $2x + 3(7y - 5) = 9$;
- 2) $2 + (7y - 5) + 3y = 9$;
- 3) $2(7y - 5) + 3y = 9$.

1030. Яка з рівностей є правильно застосованою підстановкою для розв'язування системи рівнянь $\begin{cases} y = 4x + 3, \\ 7x + 2y = 9? \end{cases}$

- 1) $7(4x + 3) + 2y = 9$;
- 2) $7x + 2 - (4x + 3) = 9$;
- 3) $7x + 2(4x + 3) = 9$.

1031. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

- 1) $\begin{cases} 7x = 21, \\ 2x - 3y = 3; \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} 6x - y = 17, \\ -2y = 10. \end{cases}$

1032. Розв'яжіть систему рівнянь:

- 1) $\begin{cases} x = y + 2, \\ 4x - 8y = 20; \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} y = x - 3, \\ 5x + 2y = 29. \end{cases}$

1033. Знайдіть розв'язок системи:

- 1) $\begin{cases} -4x = 8, \\ 5x - 2y = 4; \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} y = x + 5, \\ 7x + 3y = -5. \end{cases}$

1034. Знайдіть розв'язок системи:

- 1) $\begin{cases} x + y = 7, \\ 2x + y = 9; \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} x - y = -2, \\ x - 2y = 5; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} y - x = 0, \\ 4x + y = 15; \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} 5x + 2y = 2, \\ x - 2y = 10; \end{cases}$
- 5) $\begin{cases} x - 3y = 7, \\ 2x - 3y = -3; \end{cases}$
- 6) $\begin{cases} 5x - 3y = -19, \\ 2x + y = -1. \end{cases}$

1035. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

$$1) \begin{cases} x + y = 4, \\ 3x + y = 6; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - y = 0, \\ x - 2y = 8; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y - x = -5, \\ 2x + y = 4; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ x + 2y = 2. \end{cases}$$

1036. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь $x + y = 4$ і $2x + 3y = 9$.

1037. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь $x - y = 3$ і $3x + 2y = 14$.

1038. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ 2x - 7y = 29; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 8x - 5y = 41, \\ 4x + 3y = -7; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2a - 5b = 0, \\ -7a + 4b = 27; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 10m - 2n = 39, \\ 9m + 4n = 38. \end{cases}$$

1039. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 4x + 3y = 0, \\ 5x - 7y = -43; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + 9y = -59, \\ 5x - 4y = 38; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3p - 7q = 0, \\ 2p + 9q = 41; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 6a - 7b = 51, \\ 2a + 3b = -15. \end{cases}$$

1040. Знайдіть розв'язок системи:

$$1) \begin{cases} 7(x - 3) + 8 = 4 + 5x, \\ 4(x - y) - 7y = 6, 5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4(x + y) - 3y = 2, \\ 9(x - 2y) - 6x = -11. \end{cases}$$

1041. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 4(x + y) - 8y = -4, \\ 7(y + 1) - (y + 3) = 19; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 8(x + y) - 12y = 6, \\ 6(3x - y) + 18x = 13. \end{cases}$$

1042. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \frac{1}{8}(x - y) = 9, \\ \frac{1}{3}(x + y) = 7; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 0,2(2x + y) = 3, \\ 0,7(x - 4y) = -1,05. \end{cases}$$

1043. Знайдіть розв'язки системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} 0,4(x+y) = 12, \\ 0,6(x-y) = 9; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{1}{7}(2x+y) = 13, \\ \frac{1}{3}(x-3y) = 14. \end{cases}$$

1044. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{5} + \frac{y-1}{3} = 1, \\ \frac{x+2}{6} + \frac{y+2}{3} = 2. \end{cases}$$

1045. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x-4}{2} + \frac{y+11}{4} = 1, \\ \frac{x+7}{3} + \frac{y-4}{7} = 2. \end{cases}$$

1046. Доведіть, що графіки рівнянь $2x - 3y = 4$ і $4x - 6y = 9$ є паралельними прямими.

1047. Графік функції $y = kx + l$ проходить через точки $M(9; 1)$ і $N(-6; -4)$. Знайдіть k і l .

1048. Графіком функції $y = kx + l$ є пряма, що проходить через точки $A(-2; -4)$ і $B(4; 11)$. Задайте цю функцію формулою.

1049. При яких значеннях m система:

$$1) \begin{cases} 2x + y = 8, \\ 4x + my = 10 \end{cases} \text{ не має розв'язків;}$$

$$2) \begin{cases} x - 3y = 5, \\ mx - 12y = 20 \end{cases} \text{ має безліч розв'язків?}$$



Вправи для повторення

1050. Побудуйте графік функції, заданої формулою $y = \frac{2}{3}x$.

За допомогою графіка знайдіть:

- 1) значення y , якщо $x = -6; 0; 3$.
- 2) значення x , для яких $y = -2; 0; 4$.

1051. Розкладіть многочлен на множники:

- 1) $9m^2 + 12m^5 - 18m^3$; 2) $3x^4y^2 - 9x^2y^3 + 12x^3y$;
 3) $a^6 - 6 - 2a^2 + 3a^4$; 4) $pq - 6p + p^2 - 6q$.

1052. Доведіть, що рівняння не має розв'язків:

- 1) $x^2 + 4 = 0$; 2) $x^2 - 6x + 13 = 0$;
 3) $4x^2 - 12x + 16 = 0$; 4) $x^2 + x + 2 = 0$.



Цікаві задачі для учнів неледачих



1053. Доведіть, що якщо добуток чотирьох послідовних натуральних чисел збільшити на 1, то він дорівнюватиме квадрату деякого натурального числа.



§ 29. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ СПОСОБОМ ДОДАВАННЯ

Тепер розглянемо ще один аналітичний спосіб розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними – *спосіб додавання*. Розв'язуючи систему способом додавання, ми переходимо від даної системи до рівносильної їй системи, одне з рівнянь якої містить лише одну змінну.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1, \\ 4x - 5y = -22. \end{cases} \quad (1)$$

Розв'язання. У даній системі коефіцієнти при змінній y є протилежними числами. Додамо ліві частини рівнянь системи і додамо праві їх частини. Сума лівих частин рівнянь буде містити подібні доданки, тому після їх зведення одержимо рівняння з однією змінною:

$$7x = -21.$$

Додавання рівнянь системи, яке ми застосували, називають *почленним додаванням*. Замінімо одне з рівнянь системи (1), наприклад перше, рівнянням $7x = -21$. Матимемо систему:

$$\begin{cases} 7x = -21, \\ 4x - 5y = -22. \end{cases} \quad (2)$$

З першого рівняння системи (2) маємо: $x = -3$. Підставивши це значення в друге рівняння системи (2), одержимо, що $y = 2$.

Отже, пара чисел $(-3; 2)$ є розв'язком системи (2). Переконаємося, що ця пара чисел є не тільки розв'язком системи (2), а й розв'язком системи (1). Для цього в кожне з рівнянь системи (1) підставимо замість x число -3 , а замість y – число 2 . Тоді в лівій частині першого рівняння одержимо $3 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = 1$, отже, значення лівої і правої частин збігаються, тому пара $(-3; 2)$ є розв'язком першого рівняння. У лівій частині другого рівняння одержимо $4 \cdot (-3) - 5 \cdot 2 = -22$, тобто значення лівої частини рівняння дорівнює значенню правої його частини. Отже, пара $(-3; 2)$ є розв'язком і другого рівняння системи. Оскільки пара чисел $(-3; 2)$ є розв'язком кожного з рівнянь системи (1), то вона є розв'язком системи (1).

Отже, системи (1) і (2) мають один і той самий розв'язок, тому є рівносильними.

В і д п о в і д ь: $(-3; 2)$.

Способом додавання зручно розв'язувати системи, у рівняннях яких коефіцієнти при одній і тій самій змінній є протилежними числами.

Будь-яку систему лінійних рівнянь з двома змінними можна звести до вигляду, який буде зручним для застосування способу додавання. Розглянемо це на прикладі.

Приклад 2. Розв'язати систему
$$\begin{cases} 5x + 2y = 10, \\ 7x + 4y = 8. \end{cases}$$

Р о з в' я з а н н я. Рівняння цієї системи не містять протилежних коефіцієнтів при однакових змінних, тобто вигляд системи не є зручним для застосування способу додавання. Але якщо помножити обидві частини першого рівняння на число -2 , то коефіцієнти при змінній y в обох рівняннях стануть протилежними. Після чого можна почленно додати рівняння системи.

Запишемо це розв'язання:

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 5x + 2y = 10, \\ 7x + 4y = 8; \end{array} \right. \quad \cdot (-2) \\ \left\{ \begin{array}{l} -10x - 4y = -20, \\ 7x + 4y = 8; \end{array} \right. \quad + \\ \hline -3x = -12, \\ x = 4. \end{array}$$

Підставимо знайдене значення x у друге рівняння системи, щоб знайти y . Маємо: $7 \cdot 4 + 4y = 8$, звідки $y = -5$.

Остаточного маємо:
$$\begin{cases} x = 4, \\ y = -5. \end{cases}$$
 В і д п о в і д ь: $(4; -5)$.

Послідовність дій, якої слід дотримуватися, розв'язуючи систему лінійних рівнянь з двома змінними *способом додавання*,

розглянемо на прикладі системи
$$\begin{cases} 7x - 4y = 2, \\ 5x + 3y = 19. \end{cases}$$

1	Помножимо за необхідності обидві частини одного чи обох рівнянь системи на такі числа, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами	$\begin{cases} 7x - 4y = 2, & \cdot 3 \\ 5x + 3y = 19; & \cdot 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 21x - 12y = 6, \\ 20x + 12y = 76 \end{cases}$
2	Додамо почленно рівняння системи	$41x = 82$
3	Розв'яжемо одержане рівняння з однією змінною	$x = 2$
4	Підставимо знайдене значення змінної в одне з рівнянь даної системи і знайдемо відповідне їй значення іншої змінної	$7 \cdot 2 - 4y = 2,$ $-4y = -12,$ $y = 3$
5	Запишемо відповідь	В і д п о в і д ь: (2; 3)



Якої послідовності дій слід дотримуватися, розв'язуючи систему двох лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання?

1054. (Усно) Яке рівняння одержимо, якщо почленно додамо рівняння системи:

$$1) \begin{cases} 2x + y = 7, \\ 3x - y = 8; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x + 3y = 9, \\ -4x + y = 1? \end{cases}$$

1055. (Усно) На яке число треба помножити обидві частини першого рівняння системи, щоб у рівняннях коефіцієнти при змінній y стали протилежними:

$$1) \begin{cases} 2x + y = 8, \\ 3x - 2y = 10; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x + 7y = 5, \\ 3x + 21y = 7? \end{cases}$$

1056. На яке число треба помножити обидві частини першого рівняння, щоб у рівняннях коефіцієнти при змінній x стали протилежними:

$$1) \begin{cases} x - 4y = 9, \\ -2x + 7y = 8; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 7y = 19, \\ 12x - 8y = 4? \end{cases}$$

2 1057. (Усно) Назвіть спосіб (підстановки чи додавання), яким зручніше розв'язувати систему:

$$1) \begin{cases} 3x + y = 9, \\ 17x + 19y = 15; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x + 7y = 8, \\ 10x - 7y = 17; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 4x + 15y = 27, \\ 12x + 17y = 49; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x + y = 10, \\ 2015x + 2016y = 2017. \end{cases}$$

1058. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

$$1) \begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 9; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + y = 3, \\ 2x - y = 5; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 4x + 3y = 7, \\ -4x - y = -5; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 2x - 8y = 7, \\ -2x + 7y = 5. \end{cases}$$

1059. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

$$1) \begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + y = 12; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 2y = 8, \\ -3x + 5y = -1. \end{cases}$$

1060. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

$$1) \begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 4x + 3y = 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 7x + 2y = 5, \\ 7x - 3y = 45. \end{cases}$$

1061. Знайдіть розв'язок системи рівнянь способом додавання:

$$1) \begin{cases} 4x + y = 7, \\ 5x + y = -1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 2x - 4y = -9. \end{cases}$$

1062. Знайдіть розв'язок системи рівнянь способом додавання:

$$1) \begin{cases} x + y = 4, \\ 3x - 5y = 20; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x - y = 5, \\ 2x + 7y = 11. \end{cases}$$

1063. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

$$1) \begin{cases} x - y = 3, \\ 2x + 3y = 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 7x + y = 2, \\ 5x - 4y = 25. \end{cases}$$

1064. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 7x + 2y = -3, \\ -14x + 3y = 20; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 5y = 19, \\ 7x - 10y = 1; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 4x + 5y = 7, \\ 2x - 3y = -2; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 2x + 9y = -1, \\ 7x + 36y = -8. \end{cases}$$

1065. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ -9x + 7y = 23; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x + 2y = 2, \\ 5x - 4y = 9; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 5x + 3y = 1, \\ 15x - 7y = 51; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 4m + 5b = 5, \\ 7m + 20b = 11. \end{cases}$$

1066. Знайдіть розв'язок системи способом додавання:

$$1) \begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 3x + 5y = 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2a - 3b = 7, \\ 3a + 4b = 2; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 10m - 6n = 18, \\ 15m + 7n = 59; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 14x - 8y = -6, \\ 21x + 10y = 2. \end{cases}$$

1067. Знайдіть розв'язок системи способом додавання:

$$1) \begin{cases} 3x + 4y = 10, \\ 5x - 7y = 3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 15x - 3y = -15, \\ 20x - 7y = -41. \end{cases}$$

1068. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 5(x - 2) = 2y - 1, \\ 3(x + 3) = 12(y + 3); \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4(a + 2b) - 5a = 0, 4, \\ 7(3a - 4b) + 3b = 5, 9. \end{cases}$$

1069. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 7(x + 3) = 3y + 1, \\ 4(2 - x) = 5(y + 1) + 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4(m - 2n) - 7m = 9, 6, \\ 5(4m + 3n) + 8n = -18, 5. \end{cases}$$

1070. Складіть рівняння прямої, графік якої проходить через точки:

$$1) A(4; -4) \text{ і } B(12; -1); \quad 2) M(-3; 6) \text{ і } N(9; -2).$$

1071. Графік лінійної функції проходить через точки $(-4; 5)$ і $(12; 1)$. Задайте цю функцію формулою.

1072. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \frac{2-x}{6} + \frac{y+4}{3} = 2\frac{5}{6}, \\ \frac{x+4}{12} - \frac{2-y}{6} = \frac{5}{12}; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} (x-1)^2 + y = (x+2)^2 - 23, \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y+7)^2. \end{cases}$$

1073. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \frac{x+3}{4} - \frac{y-4}{8} = 1\frac{3}{4}, \\ \frac{x-4}{6} + \frac{y+2}{9} = -\frac{1}{2}; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} (x-1)(y+2) = x(y-1), \\ x(y+3) = (x+1)(y-2). \end{cases}$$

1074. З'ясуйте, чи має система рівнянь розв'язки і скільки:

$$1) \begin{cases} 3x - y = 2, \\ -6x + 2y = 5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} -4x + 3y = 7, \\ -8x + 6y = 14. \end{cases}$$



Вправи для повторення

2 1075. Чи належать графіку функції $y = -4,5x + 1$ точки: $A(-2; 10)$, $B(0; -1)$, $C(4; 17)$, $D(10; -44)$?

3 1076. Пара чисел $(-2; -3)$ є розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} ax - 2y = 8, \\ bx - ay = 7. \end{cases}$$

Знайдіть a і b .

4 1077. Які одночлени треба записати замість зірочки, щоб утворилася тотожність:

- 1) $(7m - *)^2 = * - * + 25a^8$;
- 2) $(* + *)^2 = 36p^4 + * + 121b^2$;
- 3) $(3p + *)^2 = * + 24p^2m^7 + *$;
- 4) $(* - *)^2 = * - 32mn^2 + 16n^4$?



Цікаві задачі для учнів неледачих



1078. Чи існують такі цілі числа x і y , для яких виконується рівність $x^2 + 2018 = y^2$?

§ 30. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Ми вже розглядали задачі, які можна розв'язати за допомогою рівнянь. Математичною моделлю задачі може бути не тільки рівняння, а й система рівнянь. Зазвичай це має відношення до тих задач, де невідомими є значення двох або більшої кількості величин.

Приклад 1. За 7 шоколадних батончиків і 2 плитки шоколаду заплатили 85 грн. Скільки коштує батончик і скільки плитка шоколаду, якщо відомо, що три батончики дорожчі за одну плитку на 3 грн?

Розв'язання. Нехай батончик коштує x грн, а плитка шоколаду – y грн. Тоді сім батончиків коштують $7x$ грн, а дві

плитки шоколаду – $2y$ грн. Оскільки разом за таку кількість батончиків і плиток шоколаду заплатили 85 грн, маємо рівняння: $7x + 2y = 85$.

Вартість трьох батончиків складає $3x$ грн, і вони дорожчі за плитку шоколаду на 3 грн. Тому одержимо ще одне рівняння: $3x - y = 3$.

Щоб відповісти на запитання задачі, ми маємо знайти такі значення x і y , які б задовольняли обидва рівняння, тобто задовольняли систему рівнянь:

$$\begin{cases} 7x + 2y = 85, \\ 3x - y = 3. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, одержимо, що $x = 7$; $y = 18$. Отже, вартість шоколадного батончика – 7 грн, а вартість плитку шоколаду – 18 грн.

В і д п о в і д ь: 7 грн; 18 грн.

Зауважимо, що цю задачу, як і деякі інші із цього параграфу, можна розв'язати і за допомогою рівняння з однією змінною. Але часто скласти систему рівнянь до задачі простіше, ніж скласти до неї рівняння з однією змінною.

Розв'язуючи задачу за допомогою системи рівнянь, слід дотримуватися такої послідовності дій:

- 1) позначити деякі дві невідомі величини змінними (наприклад, x і y);
- 2) за умовою задачі скласти систему рівнянь;
- 3) розв'язати одержану систему;
- 4) проаналізувати знайдені значення змінних відповідно до умови задачі, дати відповідь на запитання задачі;
- 5) записати відповідь.

Приклад 2. За 2 год проти течії і 5 год за течією моторний човен долає 120 км. За 2 год за течією і 1 год проти течії цей самий човен долає 51 км. Знайти власну швидкість човна і швидкість течії.

Р о з в' я з а н н я. Нехай власна швидкість човна x км/год, а швидкість течії – y км/год. Тоді швидкість човна за течією річки дорівнює $(x + y)$ км/год, а швидкість човна проти течії – $(x - y)$ км/год. За 5 год за течією човен проходить $5(x + y)$ км, за 2 год проти течії – $2(x - y)$ км, а разом це складає 120 км. Маємо рівняння: $5(x + y) + 2(x - y) = 120$.

Міркуючи аналогічно, можна за умовою задачі скласти ще одне рівняння: $2(x + y) + (x - y) = 51$.

Маємо систему рівнянь:
$$\begin{cases} 5(x + y) + 2(x - y) = 120, \\ 2(x + y) + (x - y) = 51. \end{cases}$$

Розв'язавши яку, одержимо:
$$\begin{cases} x = 16,5, \\ y = 1,5. \end{cases}$$

Отже, власна швидкість човна – 16,5 км/год, а швидкість течії – 1,5 км/год.

В і д п о в і д ь: 6,5 км/год; 1,5 км/год.



Якої послідовності дій слід дотримуватися, розв'язуючи задачу за допомогою системи рівнянь?

1079. У легкоатлетичній секції тренуються 32 спортсмени, причому дівчат серед них на 4 більше, ніж хлопців. Скільки дівчат і скільки хлопців тренується в цій секції?

1080. За дві години кухар наліпив 260 пельменів, причому за першу годину – на 20 пельменів менше, ніж за другу. Скільки пельменів наліпив кухар за першу годину і скільки за другу?

1081. За олівець і три зошити заплатили 9,8 грн, а за три олівці і зошит – 10,2 грн. Скільки коштує один олівець і скільки один зошит?

1082. За 2 год пішки і 1 год на велосипеді турист подолав 18 км, а за 1 год пішки і 2 год на велосипеді – 27 км. З якою швидкістю турист рухався пішки і з якою на велосипеді?

1083. У касі крамниці після переобліку залишилося 12 монет по 25 і 50 копійок, усього на суму 4 гривні. Скільки монет по 25 копійок і скільки по 50 копійок залишилося в касі?

1084. Було придбано 16 зошитів у клітинку і лінійку, усього на суму 32 грн 80 коп. Зошит у клітинку коштує 2 грн 20 коп., а в лінійку – 1 грн 80 коп. Скільки зошитів у клітинку і скільки в лінійку було придбано?

1085. За 3 футбольних і 2 волейбольних м'ячі заплатили 544 грн. Скільки коштує футбольний м'яч і скільки волейбольний, якщо два волейбольних м'ячі на 96 грн дорожчі за один футбольний?

1086. 2 акумулятори і 3 батарейки разом коштують 97,5 грн. Скільки коштує один акумулятор і скільки одна батарейка, якщо акумулятор коштує стільки ж, скільки 18 батарейок?

1087. Основа рівнобедреного трикутника на 2 см більша за його бічну сторону. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 26 см.

1088. Довжина прямокутника на 8 м більша за ширину. Знайдіть довжину і ширину прямокутника, якщо його периметр дорівнює 56 м.

3 1089. Човен за 3 год руху за течією і 2 год руху проти течії долає 92 км. За 9 год руху за течією човен долає відстань у 5 разів більшу, ніж за 2 год руху по озеру. Знайдіть власну швидкість човна та швидкість течії.

1090. Човен рухався 2 год за течією і 5 год проти течії, подолавши за цей час 110 км. Швидкість човна проти течії складає 70 % від швидкості човна за течією. Знайдіть власну швидкість човна та швидкість течії.

1091. З пунктів A і B , відстань між якими 168 км, одночасно вирушають велосипедист і мотоцикліст. Якщо вони будуть рухатися назустріч один одному, то зустрінуться через 3 год. А якщо рухатимуться в одному напрямі, то мотоцикліст наздожене велосипедиста через 6 год. Знайдіть швидкість кожного з них.

1092. Сума двох чисел дорівнює 62. Знайдіть кожне із чисел, якщо 70 % від одного і 60 % від другого разом складають 39,6.

1093. 20 % від одного числа на 2,4 більше за 10 % від другого. Знайдіть ці числа, якщо їх сума дорівнює 72.

1094. Матері разом з донькою 42 роки. Через рік мати стане втричі старшою за доньку. Скільки років кожній з них зараз?

1095. Розв'яжіть систему рівнянь. Складіть задачу, яка б розв'язувалася за допомогою цієї системи:

$$1) \begin{cases} x + y = 17, \\ x - y = 5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + 3y = 15, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

1096. Розв'яжіть систему рівнянь. Складіть задачу, яка б розв'язувалася за допомогою цієї системи:

$$1) \begin{cases} x - y = 8, \\ x + y = 12; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + y = 18, \\ 3x - y = 2. \end{cases}$$

1097. У ящику і кошику разом 95 яблук. Якщо кількість яблук у ящику зменшити вдвічі, а кількість яблук у кошику збільшити на 25, то яблук у ящику і кошику стане порівну. Скільки яблук у ящику і скільки в кошику?

1098. Сума двох чисел дорівнює 45. Знайдіть ці числа, якщо 60 % від одного з них дорівнюють 75 % від другого.

1099. Знайдіть два числа, якщо їх сума дорівнює 200 і $\frac{11}{24}$ від одного з них дорівнюють $\frac{3}{8}$ від другого.

1100. Змішали два види цукерок вартістю 45 грн і 54 грн за кілограм, після чого утворилося 25 кг суміші вартістю 48 грн 96 коп. за кілограм. По скільки кілограмів цукерок кожного виду взяли для суміші?

1101. З двох сортів печива вартістю 24 грн і 30 грн за кілограм утворили 40 кг суміші вартістю 26 грн 70 коп. за кілограм. По скільки кілограмів печива кожного виду взяли?

4 1102. У двох бідонах разом було 75 л олії. Після того як половину олії з першого бідона перелили в другий, олії в другому стало в 4 рази більше, ніж у першому. По скільки олії було в кожному бідоні спочатку?

1103. На двох полицях разом 57 книжок. Після того як з першої полиці переставили 5 книжок на другу, книжок на другій полиці стало вдвічі більше, ніж на першій. По скільки книжок було на кожній полиці спочатку?

1104. За 5 світильників і 4 ліхтарики заплатили 896 грн. Після того як світильники подешевшали на 15 %, а ліхтарики подорожчали на 10 %, один світильник і один ліхтарик разом стали коштувати 196 грн. Якою була початкова вартість світильника і якою – ліхтарика?

1105. Два кондитерських цехи за день мали разом виготовити 300 тортів. Коли перший цех виконав 55 % свого завдання, а другий – 60 % свого, виявилось, що перший цех виготовив на 27 тортів більше, ніж другий. По скільки тортів мав виготовити кожен цех?

1106. Якщо чисельник даного дробу збільшити на 7, то дріб дорівнюватиме $\frac{2}{3}$. Якщо ж знаменник даного дробу збільшити на 2, то дріб дорівнюватиме 0,25. Знайдіть цей дріб.

1107. Якщо чисельник дробу зменшити на 2, то дріб дорівнюватиме 0,5. Натомість, якщо знаменник дробу збільшити на 11, то дріб дорівнюватиме $\frac{1}{3}$. Знайдіть цей дріб.

1108. По скільки грамів кожного з 2-відсоткового і 6-відсоткового розчинів солі треба взяти, щоб з них одержати 200 г 5-відсоткового розчину?

1109. В одному сплаві міститься 9 % цинку, а в другому – 24 %. По скільки грамів кожного сплаву треба взяти, щоб одержати зливок масою 260 г, що містить 15 % цинку?

1110. Чотири роки тому батько був у 8 разів старший за сина, а через 20 років батько стане вдвічі старший за сина. Скільки років кожному з них зараз?

1111. Якщо суму цифр двоцифрового числа збільшити в 5 разів, то вона дорівнюватиме самому числу. А якщо його цифри поміняти місцями, то воно збільшиться на 9. Знайдіть дане число.



Вправи для повторення

2 **1112.** Розкладіть на множники многочлен:

- 1) $m^2 + 10m + 25$; 2) $c^2 - 8c + 16$;
3) $p^2 - 0,36$; 4) $-49a^2 + b^2$.

3 **1113.** Спростіть вираз:

- 1) $2x(3x - 4x^3) - (x + 3x^2)^2$;
2) $2p^2(2p^2 - 6pt) - (2p^2 - 3tp)^2$.

4 **1114.** Побудуйте графік функції:

$$y = \begin{cases} -3x, & \text{якщо } x < -1, \\ 3, & \text{якщо } -1 \leq x \leq 1, \\ 2x + 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$



Цікаві задачі для учнів неледачих



1115. *Задача Ньютона.* Трава на галявині росте рівномірно щільно й швидко. Відомо, що 70 корів з'їли її за 24 дні, а 30 корів – за 60 днів. Скільки корів з'їли б усю траву за 96 днів?

Домашня самостійна робота № 5

Кожне завдання має по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть варіант правильної відповіді.

1 1. Яке з рівнянь є лінійним?

А) $4x^2 = 5$; Б) $x + 7 = x^2$; В) $3x + x^2 = 0$; Г) $2x = 0$.

2. Укажіть точку, що належить графіку рівняння $x + y = 6$.

А) (2; 3); Б) (2; 4); В) (3; 4); Г) (-2; -4).

3. Укажіть пару чисел, що є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x - y = 7, \\ x + y = 1. \end{cases}$

А) (4; 3); Б) (-4; 3); В) (-4; -3); Г) (4; -3).

2 4. Яке з рівнянь рівносильне рівнянню $3x - 8 = 10$?

А) $2x = -12$; Б) $x + 7 = 1$; В) $5x = 30$; Г) $x - 9 = 3$.

5. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь $\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 4x + 3y = 11. \end{cases}$

А) (2; 1); Б) (1; 2); В) (3; 1); Г) (1; 3).

6. Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь $\begin{cases} 4x - 7y = 11, \\ 3x + 7y = -4. \end{cases}$

А) (1; 1); Б) (-1; 1); В) (-1; -1); Г) (1; -1).

3 7. Укажіть рівняння, коренем якого є будь-яке число.

А) $12x = -8$; Б) $2(x - 1) = 2x$;
В) $2(x - 1) = 2x - 2$; Г) $2x = 2x - 2$.

8. Знайдіть корінь рівняння $\frac{x+2}{5} + \frac{x-2}{10} = \frac{1}{2}$.

А) 0; Б) 1; В) 2; Г) 5.

9. З пунктів А і В, відстань між якими 60 км, вирушили одночасно пішохід і велосипедист. Якщо вони рухатимуться назустріч один одному, то зустрінуться через 3 год, а якщо вони рухатимуться в одному напрямі, то велосипедист наздожене пішохода через 5 год. Знайдіть швидкість пішохода.

А) 3 км/год; Б) 4 км/год; В) 4,5 км/год; Г) 5 км/год.

4 10. Знайдіть найменше ціле значення a , при якому коренем рівняння $ax = 8$ є ціле число.

А) 4; Б) 1; В) -8; Г) -16.

11. 80 % від одного числа дорівнюють $\frac{2}{7}$ від другого. Знайдіть менше із цих чисел, якщо їх сума дорівнює 76.

- А) 30; Б) 24; В) 22; Г) 20.

12. При якому значенні a система рівнянь $\begin{cases} 2x - 3y = 8, \\ ax - 6y = 16 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

- А) 4; Б) 2; В) 0; Г) -4.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАТЬ ДО § 22 – § 30

1. Чи є число 4 коренем рівняння:

- 1) $x + 7 = 10$; 2) $3x = 12$?

2. Скільки коренів має рівняння:

- 1) $-3x = 5$; 2) $0x = 7$?

3. Чи є розв'язком рівняння $2x + y = 7$ пара чисел:

- 1) (3; -5); 2) (4; -1)?

4. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $-4x = 12$; 2) $0,2x - 1,2 = 0$.

5. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь $\begin{cases} x - 3y = 5, \\ 2x + y = 3. \end{cases}$

6. Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь $\begin{cases} 5x + 3y = 3, \\ 4x - 3y = 24. \end{cases}$

7. Розв'яжіть рівняння:

- 1) $\frac{2x+1}{5} + \frac{3x-2}{4} = 2$; 2) $5x - (x + 5) = 4(x - 2)$.

8. Знайдіть розв'язок системи $\begin{cases} 2(x + 3) = 7y - 5, \\ 6(x - 3) - 5(y + 1) = -24. \end{cases}$

9. Човен за течією плив 3,5 год, а проти течії - 4,2 год. Відстань, яку подолав човен за течією, виявилася на 9,8 км більшою, ніж відстань, яку він подолав проти течії. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год.

Додаткові вправи

4 10. Розв'яжіть рівняння $|3 - 4x| = 5$.

11. Побудуйте графік рівняння $\frac{x+2}{4} + \frac{y-3}{6} = -\frac{1}{12}$.

12. Графік функції $y = kx + l$ проходить через точки $(3; -4)$ і $(-12; -9)$. Знайдіть k і l .

Вправи для повторення розділу 3

До § 22

1 1116. Чи є число -5 коренем рівняння:

1) $x + 3 = 2$; 2) $2 - x = 7$; 3) $x : 5 = 1$; 4) $4x = -20$?

2 1117. Доведіть, що кожне із чисел 2 , -3 і 0 є коренем рівняння $x(x-2)(x+3) = 0$.

3 1118. З'ясуйте, чи є рівносильними рівняння:

1) $|x| = 2$ і $x(x+2) = 0$; 2) $|x| = 4$ і $x^2 = 16$.

4 1119. Чи є правильним твердження: «Якщо кожен корінь одного рівняння є коренем іншого, то ці рівняння рівносильні?»

До § 23

1 1120. Укажіть кількість коренів рівняння:

1) $7x = -12$; 2) $0x = 0$; 3) $-3x = -17$; 4) $0x = -8$.

2 1121. Розв'яжіть рівняння:

1) $-\frac{2}{3}x = 6$; 2) $\frac{4}{7}x = -\frac{16}{21}$; 3) $\frac{x-1}{7} = 3$; 4) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 15$;

5) $4,7x - 2 = 4,5x + 3$; 6) $2x - 3 - (3x - 2) = -8$.

3 1122. Знайдіть корінь рівняння:

1) $10(2x - 7) - 5(4x - 2) = -60$; 2) $3(5x - 4) - (15x - 2) = 9$;

3) $\frac{3x+1}{7} + \frac{2x+1}{5} = 2$; 4) $\frac{2x+1}{3} - \frac{7-x}{6} = \frac{5x-3}{2}$.

4 1123. При якому значенні a :

1) рівняння $ax = 8$ не має коренів;

2) коренем рівняння $(a+3)x = a+3$ є будь-яке число?

★ 1124. Розв'яжіть рівняння $(a-1)x = 8$ відносно змінної x .

До § 24

1125. На станції техобслуговування за 3 дні відремонтували x автівок. Виразіть через x кількість відремонтованих автівок на день, якщо щодня ремонтували однакову кількість автівок.

1126. Периметр прямокутника дорівнює 36 см, причому його довжина вдвічі більша за ширину. Знайдіть сторони прямокутника та його площу.

1127. За 7 олівців і 3 ручки заплатили 50 грн 85 коп. Скільки коштує один олівець, якщо він дешевший за ручку на 4 грн 95 коп.?

1128. У кошику було в 4 рази менше винограду, ніж в ящику. Після того як з ящика до кошика переклали 1,5 кг винограду, у кошику стало втричі менше винограду, ніж в ящику. Скільки кілограмів винограду було в кошику і скільки в ящику спочатку?

1129. За 4,5 год човен за течією річки долає таку саму відстань, як за 6 год проти течії. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість човна дорівнює 14 км/год.

1130. На проміжній станції потяг було затримано на 0,5 год. Збільшивши швидкість на 15 км/год, він через 2 год прибув на кінцеву станцію чітко за розкладом. Якою була швидкість потяга до затримки?

1131. На двох тарілках було по 60 вареників. Після того як з першої тарілки з'їли утричі більше вареників, ніж з другої, на ній залишилося вдвічі менше вареників, ніж на другій. По скільки вареників залишилося на кожній тарілці?

1132. Для преміювання працівників офісу нарахували певну суму коштів. Якщо кожен отримає по 1100 грн, то 200 грн ще залишаться, а для того щоб кожен отримав по 1200 грн, не вистачить 600 грн. Скільки працівників в офісі та яку суму коштів нарахували для преміювання?

1133. В одній овочевій ятці запланували продати 95 кг лимонів, а в другій – 60 кг. Перша щодня продавала по 7 кг, а друга – по 6 кг. Через скільки днів лимонів у першій ятці залишиться вдвічі більше, ніж у другій?

1134. Змішали 15-відсотковий розчин добрива з 5-відсотковим і одержали 180 г 7,5-відсоткового розчину. По скільки грамів кожного розчину взяли?

До § 25

1 1135. Чи є пара чисел $(7; 1)$ розв'язком рівняння $x - y = 6$? Знайдіть ще чотири розв'язки цього рівняння.

2 1136. Знайдіть два будь-яких розв'язки рівняння:

1) $2x + y = 4$; 2) $x - 3y = 7$.

3 1137. Виразіть:

- 1) змінну y через змінну x з рівняння $7x - y = 18$;
- 2) змінну x через змінну y з рівняння $3x + 9y = 0$;
- 3) змінну y через змінну x з рівняння $13x - 2y = 6$;
- 4) змінну x через змінну y з рівняння $8x + 15y = 24$.

1138. Замініть зірочку числами так, щоб кожна з пар $(*; 3)$; $(6; *)$; $(*; -3)$; $(15; *)$ була розв'язком рівняння $x - 3y = 9$.

4 1139. Доведіть, що рівняння з двома змінними не має розв'язків:

- 1) $x^2 + y^2 = -4$; 2) $|x| + y^2 + 1 = 0$;
- 3) $-|x| - |y| = 5$; 4) $2x^4 + 3|y| = -2$.

1140. Знайдіть усі пари цілих чисел, які є розв'язками рівняння $|x| + |y| = 2$.

До § 26

2 1141. Побудуйте графік рівняння:

1) $x - y = 1$; 2) $1,5x + y = 7$; 3) $x - 4y = 5$; 4) $0,1x + 0,2y = 0,8$.

3 1142. Побудуйте в одній координатній площині графіки рівнянь $x + y = 5$ і $7x - 4y = 2$. Знайдіть координати точки їх перетину. Переконайтеся, що знайдена пара є розв'язком кожного з рівнянь.

1143. Ордината деякої точки прямої, що є графіком рівняння $-9x + 5y = 27$, дорівнює нулю. Знайдіть абсцису цієї точки.

4 1144. Побудуйте графік рівняння:

1) $|x| + y = 0$; 2) $|x| + x - y = 0$.

1145. Побудуйте ту частину графіка рівняння $2x + y = 6$, яка розташована в першій координатній чверті.

До § 27

1 1146. Чи є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x - y = 0, \\ x + y = 8 \end{cases}$ пара чисел:

- 1) $x = 5; y = 5$; 2) $x = 4; y = 4$?

2 1147. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} y = -4x, \\ 2x - y = -6; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x + y = 3, \\ x + 2y = -3. \end{cases}$$

3 1148. Розв'яжіть систему рівнянь графічно:

$$1) \begin{cases} 0x + 3y = 6, \\ 3x - 2y = 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 7, 1x = -14, 2, \\ 2x + 7y = 17. \end{cases}$$

4 1149. При якому значенні a система рівнянь:

$$1) \begin{cases} 2x + y = 5, \\ 6x + ay = 15 \end{cases} \text{ має безліч розв'язків;} \\ 2) \begin{cases} 3x - 2y = 7, \\ -6x + 4y = a \end{cases} \text{ не має розв'язків?}$$

До § 28

2 1150. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

$$1) \begin{cases} x = y - 7, \\ 2x - y = -6; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + y = 1, \\ 3x - 5y = 21; \end{cases} \\ 3) \begin{cases} 3x - 4y = -19, \\ x + 7y = 27; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 5x + 7y = -3, \\ 8x - y = -17. \end{cases}$$

3 1151. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь:

$$1) 2x + 3y = 0 \text{ і } 4x - 5y = -22; \\ 2) 4x - 7y = 34 \text{ і } 2x + 7y = -4.$$

1152. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 3(y - x) - 4 = -7y, \\ 5(x + y) + 9 = 8x; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{x}{2} + y = 5, \\ x - \frac{y}{3} = 3. \end{cases}$$

4 1153. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{2x-1}{3} + \frac{y+7}{2} = 5, \\ \frac{3x-1}{5} + \frac{2y+1}{3} = \frac{6x+8y}{15}. \end{cases}$$

1154. Розв'яжіть рівняння з двома змінними:

$$1) |x - y| + (x + 2y - 1)^2 = 0; \\ 2) |x + y - 6| + x^2 - 4xy + 4y^2 = 0.$$

До § 29

2 1155. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

$$1) \begin{cases} 2x + y = 3, \\ 3x - y = 7; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x + y = 6, \\ 5x + 9y = 14; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + 9y = -7, \\ 3x - 7y = 13; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 4x - 5y = 2, \\ 7x + 15y = 51. \end{cases}$$

3 1156. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

$$1) \begin{cases} 7x + 2y = 3, \\ 4x + 3y = -2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 7x + 12y = 53, \\ 5x - 18y = -2; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 4x + 7y = -5, \\ 6x + 9y = -6; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 5(a - 3b) + 6a = 7, \\ 0,5(a + 6b) - 1,5b = 2,5. \end{cases}$$

4 1157. З'ясуйте кількість розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 4x + ay = 6 \end{cases} \quad \text{залежно від коефіцієнта } a.$$

До § 27–29

2 1158. Розв'яжіть систему рівнянь трьома способами (графічним, підстановки, додавання):

$$1) \begin{cases} x - 2y = 5, \\ x + y = -1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x + y = 7, \\ -x + 3y = 0. \end{cases}$$

3 1159. Знайдіть розв'язок системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} 2 - 5x = 3(1 - y), \\ 2(x + y) = 0,5x + 5,5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4(x + 7) - 9(y - 13) = 139, \\ 5(x - 1) + 4(3 - y) = -15. \end{cases}$$

1160. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \frac{2x}{3} - \frac{4y}{5} = 2\frac{4}{15}, \\ \frac{3x}{7} + \frac{2y}{5} = -\frac{13}{35}; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{2x}{5} - \frac{y}{4} = \frac{23}{40}, \\ \frac{4x}{15} - \frac{3y}{5} = 1\frac{1}{30}. \end{cases}$$

4 1161. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} \frac{x+2}{3} + \frac{y-5}{3} = 2, \\ \frac{x+2}{2} - \frac{y-5}{6} = \frac{5}{3}; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{2x+1}{7} + \frac{2y+2}{5} = \frac{1}{5}, \\ \frac{3x-2}{2} + \frac{y+4}{4} = 4. \end{cases}$$

1162. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 2x + y = -2, \\ -6x - 3y = 6; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - 3y = 5, \\ 2x - 6y = 7. \end{cases}$$

1163. Чи має розв'язок система рівнянь:

$$1) \begin{cases} 4x + 3y = 1, \\ 7x + 5y = 2, \\ 3x + 2y = 4; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x - 4y = 10, \\ 4x + 7y = 1, \\ 5x + 6y = 4? \end{cases}$$

1164. Графік прямої $y = kx + l$ перетинає вісь x у точці з абсцисою 4, а вісь y – у точці з ординатою -5 .

1) Задайте функцію формулою.

2) З'ясуйте, чи проходить її графік через точку $(-80; -105)$.

1165. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} 3(x - 2y) + x(7 - 2y) = 2y(1 - x), \\ 4(x - y - 1) + 5(x + y - 1) = 32; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = (x + 3)^2 + (y + 1)^2, \\ (y - 2)^2 - (y + 2)^2 = (x + 6)^2 - (x - 1)^2. \end{cases}$$

1166. При якому значенні a система рівнянь $\begin{cases} 5x + 4y = 2, \\ 10x + 8y = a \end{cases}$

1) має безліч розв'язків;

2) не має розв'язків?

3) Чи існує таке значення a , при якому система має єдиний розв'язок?

1167. При якому значенні b система рівнянь $\begin{cases} 12x - 9y = 15, \\ 4x + by = 5 \end{cases}$

1) має безліч розв'язків;

2) має єдиний розв'язок? Знайдіть цей розв'язок.

До § 30

1168. За 3 год автобусом і 5 год потягом турист подолав 450 км. Знайдіть швидкість автобуса і швидкість потяга, якщо швидкість потяга на 10 км/год більша за швидкість автобуса.

1169. За 7 порцій млинців і 2 салати заплатили 156 грн. Скільки коштує одна порція млинців і скільки – один салат, якщо дві порції млинців на 9 грн дешевші за три салати?

3 1170. Теплохід за 3 год за течією і 2 год проти течії долає 142 км. Цей самий теплохід за 4 год проти течії долає на 14 км більше, ніж за 3 год за течією. Знайдіть власну швидкість теплохода і швидкість течії.

1171. Майстер і його учень повинні були виготовити 114 деталей. Після того як учень пропрацював 2 год, до роботи приєднався майстер, і вони разом закінчили виготовлення деталей за 3 год. Скільки деталей за годину виготовляв майстер і скільки учень, якщо майстер за 2 год виготовляє стільки ж деталей, скільки учень за 3 год?

4 1172. Два ящики наповнено грушами. Якщо з другого ящика перекласти в перший 10 груш, то в обох ящиках груш стане порівну. Якщо ж з першого ящика перекласти в другий 44 груші, то груш у першому ящику залишиться в 4 рази менше, ніж у другому. Скільки груш у кожному ящику?

1173. Різниця між половиною одного числа і 0,75 другого дорівнює 8. Якщо перше число зменшити на свою сьому частину, а друге збільшити на свою дев'яту частину, то їх сума становитиме 100. Знайдіть дані числа.

1174. Сума трьох чисел, з яких друге в 5 разів більше за перше, дорівнює 140. Якщо друге число збільшити на 15 %, третє зменшити на 10 %, а перше не змінювати, то сума цих чисел становитиме 139,5. Знайдіть дані числа.

1175. Периметр прямокутника на 154 см більший за одну з його сторін і на 140 см більший за другу. Знайдіть площу прямокутника.

1176. Сума цифр деякого двоцифрового числа дорівнює 8. Якщо його цифри поміняти місцями, то одержимо число, що на 18 більше за дане. Знайдіть дане число.

5 1177. У двох бідонах ємністю 20 л і 15 л вже є певна кількість молока. Якщо більший бідон долити до краю молоком з меншого, то в меншому залишиться половина початкової кількості. Якщо ж долити менший бідон до краю молоком з більшого, то в більшому залишиться $\frac{2}{3}$ від початкової кількості.

По скільки літрів молока в кожному бідоні?

Завдання для перевірки знань за курс алгебри 7 класу

- 1** 1. Перевірте, чи є число 7 коренем рівняння:
1) $x - 2 = 5$; 2) $56 : x = 6$.
2. Виконайте дії:
1) $p^4 p^3$; 2) $t^9 : t^5$.
3. Чи проходить графік рівняння $x - y = 5$ через точку:
1) $M(6; 2)$; 2) $N(4; -1)$?
- 2** 4. Спростіть вираз:
1) $(x - 3)(x + 3) - x(x - 5)$; 2) $(a + 2)^2 + (a - 7)(a + 3)$.
5. Розкладіть на множники:
1) $14p^3 - 21p^2m$; 2) $3a^2 - 12b^2$.
6. Розв'яжіть рівняння $5(x - 3) - 3(x + 2) = 3 - x$.
- 3** 7. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = 3x - 4$ і $y = 5$ та знайдіть координати точки їх перетину.
8. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ -4x + 3y = 16. \end{cases}$$

- 4** 9. З пункту A до пункту B вирушив пішохід. Через 1 год назустріч йому з пункту B виїхав велосипедист. Відстань між пунктами A і B дорівнює 58 км, а швидкість велосипедиста на 10 км/год більша за швидкість пішохода. Знайдіть швидкість велосипедиста і швидкість пішохода, якщо вони зустрілися через 4 год після виходу пішохода.



Задачі підвищеної складності



Цілі вирази

1178. Рівність $(I + V + A + H)^4 = \text{ІВАН}$ є правильною. Знайдіть число ІВАН, якщо різним буквам відповідають різні цифри.

1179. На скільки відсотків збільшиться площа прямокутника, якщо його довжину збільшити на 15 %, а ширину – на 20 %?

1180. Що більше: $\frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1}$ чи $\frac{10^{16} + 1}{10^{17} + 1}$?

1181. Доведіть, що число $2017 \cdot 2019 + 1$ є квадратом деякого натурального числа. Якого саме?

1182. Доведіть, що значення виразу $8n^3 - 8n$ при будь-якому натуральному значенні n кратне числу 24.

1183. Подайте вираз $2m^2 + 2n^2$ у вигляді суми двох квадратів.

1184. Який многочлен треба записати замість зірочки, щоб одержати тотожність:

$$1) (x + 1) \cdot * = x^2 - 4x - 5;$$

$$2) (x^2 - x + 1) \cdot * = x^3 + 2x^2 - 2x + 3?$$

1185. Розкладіть на множники:

$$1) a^2b^2 - 2ab^2 + b^2 + a^4 - 2a^2 + 1;$$

$$2) 1 - 3t + 3t^2 - t^3;$$

$$3) x^6 - 3x^4 + 6x^2 - 4;$$

$$4) 2(m + 3n) + (m - n)(m + n) - 8;$$

$$5) a^3 + a^2 - b^3 - b^2;$$

$$6) 8x^3 + 4x^2 - 2.$$

1186. Чи може сума квадратів п'яти послідовних натуральних чисел бути квадратом натурального числа?

1187. Спростіть вираз:

$$(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)(2^{64} + 1).$$

1188. Число b є середнім арифметичним чисел a і c . Доведіть, що $a^2 + ac + c^2$ є середнім арифметичним чисел $a^2 + ab + b^2$ і $b^2 + bc + c^2$.

1189. Задача Лагранжа. Доведіть тотожність

$$(x^2 + y^2 + z^2)(m^2 + n^2 + p^2) - (xm + yn + zp)^2 = \\ = (xn - ym)^2 + (xp - zm)^2 + (yp - zn)^2.$$

1190. Доведіть, що число \overline{abcabc} є кратним числам 7, 11 і 13.

1191. Доведіть, що значення виразу $555^{777} + 777^{555}$ є кратним числу 37.

1192. Яке трицифрове число є і квадратом двоцифрового числа, і кубом одноцифрового числа?

1193. Доведіть, що значення виразу $191^6 + 734^6 - 593^3$ ділиться на 10.

1194. Доведіть, що значення виразу $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ при будь-якому натуральному значенні n є кратним числу 10.

1195. Подайте вираз $2x(x^2 + 3y^2)$ у вигляді суми кубів двох многочленів.

1196. Доведіть тотожність:

1) $(x - 2)(x - 1)x(x + 1) + 1 = (x^2 - x - 1)^2$;

2) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$.

1197. Використовуючи результат попередньої задачі, доведіть, що число $2017 \cdot 2018 \cdot 2019 \cdot 2020 + 1$ є квадратом деякого натурального числа y . Знайдіть y .

1198. Доведіть, що різниця кубів двох послідовних натуральних парних чисел при діленні на 48 дає в остачі 8.

1199. Розкладіть на множники:

1) $y^5 + y + 1$;

2) $m^4 + m^2 + 1$;

3) $x^4 + 5x^2 + 9$;

4) $n^4 + 4$;

5) $x^4 + 2a^2x^2 - 4a^2b^2 - 4b^4$;

6) $m^3 - 2m - 1$;

7) $m^3 - 5m - 2$;

8) $x^4 - 2x^3y - 6x^2y^2 - 4xy^3 - y^4$.

1200. Порівняйте 5^{15} і 3^{23} .

Функції

1201. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2|x| + x$;

2) $y = |x| - 3x$;

3) $y = |2x| + 2x - 1$;

4) $y = 2x - |3x| + 3$.

1202. Точка $A(a; b)$, де $a \neq 0$, $b \neq 0$, належить графіку функції $y = x^2$. Чи належить цьому графіку точка:

1) $B(-a; b)$;

2) $C(a; -b)$;

3) $D(-a; -b)$?

1203. Точка $M(m; n)$, де $m \neq 0$, $n \neq 0$, належить графіку функції $y = x^3$. Чи належить цьому графіку точка:

1) $N(-m; n)$;

2) $K(m; -n)$;

3) $P(-m; -n)$?

1204. Знайдіть точки перетину графіків функцій

$$y = -4|x| + 3 \text{ та } y = \begin{cases} 2x + 1, & \text{якщо } x \leq 0, \\ -3x + 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Лінійні рівняння та їх системи

1205. Знайдіть усі цілі значення a , при яких корінь рівняння $(a + 2)x = 8$ є натуральним числом.

1206. Перша цифра чотирицифрового числа дорівнює 7. Якщо цю цифру переставити на останнє місце, то одержимо число, менше від початкового на 1746. Знайдіть початкове число.

1207. Не розв'язуючи рівняння $5(2017x + 2018) = 13$, доведіть, що його корінь не є цілим числом.

1208. Розв'яжіть рівняння:

$$1) |x| + |x - 2| = 0; \quad 2) |x - 3| + |6 - 2x| = 0.$$

1209. Скільки розв'язків залежно від числа a (кажуть: *параметра* a) має рівняння:

$$1) ax = 2; \quad 2) ax = 0?$$

1210. Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння відносно змінної x :

$$1) 2x - a = 15; \quad 2) 7x - a = 2x + 4a - 9;$$

$$3) (a - 3)x = 7; \quad 4) ax = a;$$

$$5) ax + 1 = x + a; \quad 6) a(x - 2) = x(a + 3).$$

Р о з в' я з а н н я. 4) Якщо $a = 0$, то маємо рівняння $0 \cdot x = 0$, тоді x – будь-яке число. Якщо $a \neq 0$, то, поділивши ліву і праву частини рівняння на a , одержимо $x = 1$.

В і д п о в і д ь: якщо $a = 0$, то x – будь-яке число; якщо $a \neq 0$, то $x = 1$.

1211. При якому значенні параметра a є рівносильними рівняння:

$$1) 7x + a = 5(x - a) \text{ і } 7(x + a) = 4(10 - a);$$

$$2) (a + 7)x = 18 \text{ і } |x| = -1?$$

1212. Потяг проїжджає повз нерухомого пасажира за 7 с, а уздовж платформи завдовжки 378 м – за 25 с. Знайдіть швидкість і довжину потяга.

1213. Потяг проїжджає по мосту, довжина якого 171 м, за 27 с, а повз пішохода, який рухається зі швидкістю 1 м/с назустріч потягу, – за 9 с. Знайдіть швидкість і довжину потяга.

1214. Через першу трубу басейн заповнюється водою за половину того часу, що потрібний другій трубі для заповнення $\frac{2}{3}$ цього басейну. Через другу трубу окремо басейн заповнюється на

4 год довше, ніж через першу трубу. За який час заповнює басейн кожна труба окремо?

1215. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них складає 25 % від другого.

1216. Для ремонту двох кімнат придбали шпалери. На ремонт першої кімнати використали на 2 рулони більше, ніж половинна придбаного, а на ремонт другої кімнати – $\frac{2}{3}$ від кількості рулонів, що була використана на ремонт першої кімнати. Скільки рулонів шпалер було придбано, якщо після ремонту обох кімнат залишився невикористаним один рулон?

1217. Сплав міді й цинку містить на 320 г більше міді, ніж цинку. Після того як від сплаву відокремили $\frac{6}{7}$ тієї маси міді й 60 % тієї маси цинку, що в ньому містилися, маса сплаву стала дорівнювати 100 г. Якою була початкова маса сплаву?

Р о з в' я з а н н я. Подамо умову у вигляді таблиці:

Речовина	Маса, що була, г	Відокремили	Залишилося	Маса, що залишилася, г
Мідь	$x + 320$	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}(x + 320)$
Цинк	x	60 %	40 %	$0,4x$

Маємо рівняння: $\frac{1}{7}(x + 320) + 0,4x = 100$.

Звідки $x = 100$ (г) – цинку в початковій масі.

Тоді початкова маса сплаву $x + 320 + x = 2x + 320 = 520$ (г).

В і д п о в і д ь: 520 г.

1218. Василь може придбати без решти 7 рогаликів і 3 вертути або 3 рогалики і 4 вертути. Який відсоток складає ціна рогалика від ціни вертути?

1219. Чи має розв'язки рівняння з двома змінними:

- 1) $x^2 + y^4 = -1$; 2) $|y| + x^2 = 0$;
3) $x^2 - |y| = 5$; 4) $5x^2 + y^8 + |x| = 0$?

1220. У рівнянні $ax + by = 43$ коефіцієнти a і b – цілі числа. Чи може розв'язком цього рівняння бути пара чисел (5; 10)?

1221. Скільки розв'язків має рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) (x + 1)^2 + y^2 = 0; & 2) x^2 + y^2 + (y - 2)^2 = 0; \\ 3) |x| + (y + 1)^2 = 0; & 4) x((x - 3)^2 + (y + 4)^2) = 0? \end{array}$$

1222. Сергій придбав кілька зошитів по 2 грн і кілька ручок по 2 грн 50 коп., заплативши за всю покупку 30 грн. Скільки зошитів придбав Сергій?

1223. Побудуйте графік рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) (x + 1)(x - 2y) = 0; & 2) x^2 - xy = 0; \\ 3) (x^2 - 4)(y^2 + 4) = 0; & 4) (|x| + 1)(|y| - 3) = 0; \\ 5) |x| + x = y; & 6) x = y|x|. \end{array}$$

1224. Доведіть, що рівняння $x^2 - y^2 = 26$ не має розв'язків у цілих числах (тобто розв'язками рівняння не можуть бути цілі числа).

1225. Чи перетинає графік рівняння $y + x^2 = 4$ вісь x ; вісь y ? Якщо так, то вкажіть координати точок перетину.

1226. Знайдіть усі пари натуральних чисел, що задовольняють рівняння $11x + 8y = 104$.

1227. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіка рівняння $(x - 3)(y + 5) = 0$:

$$1) \text{ з віссю } x; \quad 2) \text{ з віссю } y.$$

1228. Учень загадав два двоцифрових числа, кожне з яких починається цифрою 6, причому інші цифри кожного із чисел відмінні від числа 6. Якщо переставити місцями цифри в кожному із загаданих чисел, то значення їх добутку не зміниться. Які числа загадав учень?

1229. Олесь народився у XX столітті. У 2009 році йому було стільки років, якою є сума цифр його року народження. У якому році народився Олесь?

1230. При якому значенні a прями $3x + 4y = 5$ і $2x + 8y = a$ перетинаються в точці, що лежить на осі y ?

1231. Доберіть, якщо це можливо, таке значення m , при якому система рівнянь має єдиний розв'язок; не має розв'язків; має безліч розв'язків:

$$1) \begin{cases} 2x - y = 7, \\ mx - y = 5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ 1,5x + y = m; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} mx - 2y = 1, \\ 4x - 8y = 4. \end{cases}$$

1232. При якому значенні a система рівнянь $\begin{cases} 4x - 3y = 10, \\ 2x + 5y = -8, \\ a(x + y) = 7 \end{cases}$ має розв'язок?

1233. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} x - y = 2, \\ y - z = 3, \\ z + x = 5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y = 7, \\ y + z = 5, \\ z + x = -4. \end{cases}$$

1234. При множенні многочлена $4x^3 - 2x^2 + 3x - 8$ на многочлен $ax^2 + bx + 1$ одержали многочлен, який не містить ані x^4 , ані x^3 . Знайдіть коефіцієнти a і b та многочлен, який одержали в добутку.

1235. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$1) \begin{cases} (x-1)(y-4x) = 0, \\ x + y = 3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} (x-y)(x+1) = 0, \\ (y-2)(x+y-6) = 0; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ 3x - y = 4; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0, \\ 3x - y = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. 4) Перше рівняння системи перепишемо так: $x^2 + 2xy + y^2 = 1$, тобто $(x + y)^2 = 1$. Звідки $x + y = 1$ або $x + y = -1$. Отже, розв'язування початкової системи рівнянь звелось до розв'язування двох систем:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 3x - y = 3 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x + y = -1, \\ 3x - y = 3. \end{cases}$$

Звідки $x = 1$; $y = 0$ та $x = 0,5$; $y = -1,5$.

В і д п о в і д ь: (1; 0); (0,5; -1,5).

1236. Розв'яжіть рівняння з двома змінними:

- 1) $(x - 2)^2 + (3x - y)^2 = 0$;
- 2) $(2x - y)^2 + x^2 + 8x + 16 = 0$;
- 3) $(7x + y - 3)^2 + x^2 + 2xy + y^2 = 0$;
- 4) $|x - y + 5| + x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$;
- 5) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$;
- 6) $x^2 - 2xy + 2y^2 + 6y + 9 = 0$.

1237. Число b на 10 % більше за число a і на 30 % більше за число c . Знайдіть числа a , b і c , якщо a на 8 більше за c .

1238. Через 4 роки відношення віку брата до віку сестри дорівнюватиме 7 : 5. Скільки років нині кожному з них, якщо 2 роки тому брат був удвічі старший за сестру?

1239. Загадали деяке двоцифрове число. Якщо це число поділити на суму його цифр, одержимо неповну частку, що дорівнює 4, та 6 в остачі. Якщо ж від цього числа відняти потроєну суму його цифр, то одержимо 16. Яке число загадали?

1240. Кількість десятків деякого трицифрового числа вдвічі більша за кількість одиниць. Сума цифр цього числа дорівнює 13. Якщо поміняти місцями цифри сотень і одиниць, то одержимо число, яке на 495 менше від даного. Знайдіть дане число.

1241. Якщо перше з двох даних чисел збільшити на 10 %, а друге – на 15 %, то їх сума збільшиться на 13 %. Якщо перше з даних чисел зменшити на 5 %, а друге – на 10 %, то сума чисел зменшиться на 48. Знайдіть дані числа.

1242. Для проведення ремонту придбали пісок і цемент. Першого дня використали $\frac{1}{5}$ від маси придбаного піску і $\frac{1}{4}$ від маси придбаного цементу, що разом склало 205 кг. Другого дня використали чверть тієї маси піску, яка залишилася, що на 37 кг більше за масу п'ятої частини цементу, яка залишилася після першого дня. Скільки піску і скільки цементу було придбано для ремонту?

1243. Одна сторона трикутника утричі більша за другу. Периметр трикутника на 22 см більший за їх півсуму і на 27 см більший за їх піврізницю. Знайдіть сторони трикутника.

1244. Якщо довжину прямокутника збільшити на 3 см, а ширину – на 2 см, то його площа збільшиться на 37 см². Якщо ж кожную сторону прямокутника зменшити на 1 см, то його площа зменшиться на 12 см². Знайдіть периметр даного прямокутника.

1245. Зливok складається з двох металів, маси яких відносяться як 3 : 4. Інший зливok містить ті самі метали, але у відношенні 1 : 2. По скільки кілограмів від кожного зливуку треба взяти, щоб одержати зливok масою 10 кг, у якому маси тих самих металів відносяться як 2 : 3?

1246. Дорога від села до міста спочатку пролягає горизонтально, а потім угору. Турист проїхав на велосипеді горизонтальну її частину зі швидкістю 10 км/год, а вгору йшов пішки зі

швидкістю 3 км/год і прибув до міста через 1 год 40 хв після виїзду із села. У зворотному напрямку шлях униз турист проїхав зі швидкістю 15 км/год, а горизонтальну ділянку – зі швидкістю 12 км/год і прибув до села через 58 хв після виїзду з міста. Знайдіть відстань між містом і селом.

1247. В одному резервуарі 490 л води, а в іншому 560 л. Якщо долити перший резервуар до країв водою з другого, то другий резервуар виявиться заповненим тільки наполовину. Якщо другий резервуар до країв долити водою з першого, то перший буде заповнений водою тільки на третину. Визначте ємність кожного з резервуарів.

1248. Автобус і маршрутне таксі, які за розкладом вирушають назустріч один одному о 8 год з пунктів A і B , зазвичай зустрічаються о 8 год 12 хв. Але одного разу маршрутне таксі вирушило в рейс о 8 год 8 хв і зустрілося з автобусом о 8 год 17 хв. Знайдіть швидкість автобуса і швидкість маршрутного таксі, якщо відстань між A і B дорівнює 24 км.

1249. З пункту M до пункту N о 7 год і о 7 год 30 хв виїхали два автобуси з однією і тією самою швидкістю. О 7 год 10 хв з пункту N до пункту M виїхав велосипедист. Він зустрів перший автобус о 7 год 40 хв, а другий – о 8 год 01 хв. Знайдіть швидкості велосипедиста та кожного з автобусів, якщо відстань між пунктами M і N дорівнює 37 км.

1250. З міста в село, відстань між якими 24 км, вирушив турист. Через 1 год 20 хв услід за ним виїхав велосипедист, який через півгодини наздогнав туриста. Після прибуття в село велосипедист, не зупиняючись, повернув назад і зустрівся з туристом через півтори години після першої зустрічі. Знайдіть швидкість туриста і швидкість велосипедиста.

1251. З міста A в місто B о 9 год виїхали два автобуси. У той самий час з міста B в місто A виїхав велосипедист. Один автобус трапився на його шляху о 10 год 20 хв, а другий – об 11 год. Знайдіть швидкості велосипедиста та кожного з автобусів, якщо швидкість одного автобуса становить $\frac{7}{12}$ від швидкості другого, а відстань між містами – 120 км.

1252. По колу, довжина якого 500 м, рухаються дві точки. Вони зустрічаються через кожні 10 с, якщо рухаються у протилежних напрямках, і через кожні 50 с, якщо в одному. Знайдіть швидкість кожної з точок.

ВІДОМОСТІ З КУРСУ МАТЕМАТИКИ 5–6 КЛАСІВ

Натуральні числа

Числа 1, 2, 3, 4, 5, ... , які використовують для лічби предметів, називають *натуральними числами*. Найменше натуральне число дорівнює 1, найбільше – не існує.

При *округленні натурального числа* до певного розряду всі наступні за цим розрядом цифри замінюють нулями. Якщо перша наступна за цим розрядом цифра 5, 6, 7, 8 або 9, то останню цифру, що залишилася, збільшують на одиницю. Якщо перша наступна за цим розрядом цифра 0, 1, 2, 3 або 4, то останню цифру, яка залишилася, не змінюють.

Наприклад, при округленні до сотень:

$$4520 \approx 4500, 17\ 287 \approx 17\ 300, 12\ 950 \approx 13\ 000.$$

Подільність натуральних чисел

Якщо кажуть, що одне натуральне число *ділиться* на інше, то мають на увазі ділення без остачі.

Якщо натуральне число a ділиться на натуральне число b , то a називають *кратним b* , а b – *дільником a* . Наприклад, число 20 кратне числу 5; число 7 є дільником числа 28.

Ознаки подільності:

- 1) на 10 діляться всі натуральні числа, запис яких закінчується цифрою 0;
- 2) на 5 діляться всі натуральні числа, запис яких закінчується цифрою 0 або цифрою 5;
- 3) на 2 діляться всі натуральні числа, запис яких закінчується парною цифрою;
- 4) на 3 діляться всі натуральні числа, сума цифр яких ділиться на 3;
- 5) на 9 діляться всі натуральні числа, сума цифр яких ділиться на 9.

Натуральне число називають *простим*, якщо воно має тільки два дільники: одиницю і саме це число. Натуральне число називають *складеним*, якщо воно має більше двох дільників.

Наприклад, числа 2, 3, 5, 7, 11 – прості, а числа 4, 6, 15, 108 – складені. Число 1 не є ані простим, ані складеним.

Будь-яке складене число можна *розкласти на прості множники*. Наприклад:

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3; 120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5; 693 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11.$$

Найбільше натуральне число, на яке діляться числа a і b , називають *найбільшим спільним дільником (НСД)* цих чисел.

Щоб знайти НСД двох (або більшої кількості) чисел, треба розкласти ці числа на прості множники і знайти добуток спільних простих множників:

180	2	450	2
90	2	225	3
45	3	75	3
15	3	25	5
5	5	5	5
1		1	

Наприклад, $\text{НСД}(180; 450) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90$. Якщо $\text{НСД}(a; b) = 1$, то числа a і b називають *взаємно простими*.

Найменше натуральне число, яке ділиться на числа a і b , називають *найменшим спільним кратним* (НСК) цих чисел. Щоб знайти НСК двох (або більшої кількості) чисел, треба розкласти ці числа на прості множники і доповнити розклад одного з них тими множниками інших чисел, яких не вистачає в його розкладі, після чого знайти добуток отриманих множників.

$$\text{Наприклад, } \text{НСК}(180; 450) = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5}{180} = 900.$$

Якщо під час ділення натурального числа a на натуральне число b одержали неповну частку q і остачу r , то $a = bq + r$, де $r < b$.

Наприклад:

$$\begin{array}{r|l} 108 & 13 \\ -104 & 8 \\ \hline 4 & \end{array}$$

Отже, $108 = 13 \cdot 8 + 4$.

Десяткові дроби

З двох десяткових дробів *більшим* є той, що має більшу цілу частину. Якщо цілі частини дробів рівні, то більший той, у якого більше десятих, і т. д.

Наприклад: $18,7 > 16,92$; $12,37 < 12,41$; $5,32 > 5,319$.

При *округленні десяткового дробу* до певного розряду всі наступні за цим розрядом цифри замінюють нулями або відкидають (якщо вони стоять після коми). Якщо першою наступною за цим розрядом цифрою є 5, 6, 7, 8 або 9, то останню цифру, що залишилася, збільшують на одиницю. Якщо першою наступною за цим розрядом цифрою є 0, 1, 2, 3 або 4, то останню цифру, що залишилася, не змінюють.

Наприклад, при округленні до сотих маємо:

$$4,783 \approx 4,78; \quad 5,925 \approx 5,93; \quad 4,798 \approx 4,80.$$

Додавання і віднімання десяткових дробів виконують порозрядно, записуючи їх один під одним так, щоб кома розташовувалася під комою. Наприклад:

$$\begin{array}{r} 4,52 \\ + 3,8 \\ \hline 8,32 \end{array} \quad \begin{array}{r} 13,29 \\ - 4,273 \\ \hline 9,017 \end{array}$$

Щоб помножити два десяткових дробу, треба виконати множення, не звертаючи уваги на коми, а потім у добутку відокремити комою праворуч стільки цифр, скільки їх стоїть після коми в обох множниках разом.

Наприклад:

$$\begin{array}{r} 4,07 \\ \times 2,9 \\ \hline 3663 \\ + 814 \\ \hline 11,803 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0,017 \\ \times 0,9 \\ \hline 0,0153 \end{array}$$

Щоб помножити десятковий дріб на 10^n , де n – натуральне число, треба в цьому дробі перенести кому на n цифр праворуч.

Наприклад: $4,17 \cdot 10 = 41,7$; $0,29 \cdot 100 = 29$; $4,8 \cdot 1000 = 4800$.

Щоб помножити десятковий дріб на $0,1$; $0,01$; $0,001$; ... , треба в цьому дробі перенести кому ліворуч на стільки знаків, скільки їх у другому множнику після коми. Наприклад: $7,2 \cdot 0,1 = 1,72$; $293 \cdot 0,01 = 2,93$; $1,45 \cdot 0,001 = 0,00145$.

Щоб поділити десятковий дріб на натуральне число, треба виконати ділення, не звертаючи уваги на кому, але після закінчення ділення цілої частини дробу позначити кому в частці. Наприклад:

$$\begin{array}{r|l} 42,84 & 12 \\ \hline 36 & 3,57 \\ \hline -68 & \\ \hline 60 & \\ \hline -84 & \\ \hline 84 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Щоб поділити десятковий дріб на 10^n , треба в цьому дробі перенести кому на n цифр ліворуч.

Наприклад: $14,5 : 10 = 1,45$; $2,37 : 100 = 0,0237$.

Щоб поділити десятковий дріб на десятковий, треба в діленому і дільнику перенести коми на стільки цифр праворуч,

скільки їх стоїть після коми в дільнику, а потім виконати ділення на натуральне число.

$$\text{Наприклад: } 12,1088 : 2,56 = 1210,88 : 256 = 4,73.$$

Щоб поділити десятковий дріб на 0,1; 0,01; 0,001, ..., треба в цьому дробі перенести кому праворуч на стільки знаків, скільки їх стоїть у діленому після коми.

$$\text{Наприклад: } 4,73 : 0,1 = 47,3; \quad 2,5 : 0,01 = 250; \\ 0,0427 : 0,001 = 42,7.$$

Звичайні дроби

Частку від ділення числа a на число b можна записати у вигляді звичайного дроби $\frac{a}{b}$, де a – чисельник дроби, b – його знаменник.

Правильним дробом називають дріб, чисельник якого менший від знаменника.

Неправильним дробом називають дріб, чисельник якого більший від знаменника або дорівнює йому.

Значення правильного дроби є меншим за 1, а неправильного – не меншим від 1.

З неправильного дроби можна виділити цілу і дробову частину, тобто перетворити його на *мішане число*.

$$\text{Наприклад: } \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}; \quad \frac{175}{4} = 43\frac{3}{4}.$$

Мішане число можна подати у вигляді неправильного дроби. Наприклад: $4\frac{1}{3} = \frac{4 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{13}{3}$.

Основна властивість дроби: значення дроби не зміниться, якщо чисельник і знаменник дроби помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число.

$$\text{Наприклад: } \frac{15}{20} = \frac{15 : 5}{20 : 5} = \frac{3}{4} \quad (\text{скоротили дріб } \frac{15}{20} \text{ на } 5), \\ \frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{6}{14} \quad (\text{звели дріб } \frac{3}{7} \text{ до знаменника } 14).$$

Дроби з однаковими знаменниками додають і віднімають за правилами: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ і $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$.

$$\text{Наприклад: } \frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}; \quad \frac{13}{19} - \frac{2}{19} = \frac{11}{19}.$$

Щоб додати або відняти дроби з різними знаменниками, їх спочатку зводять до спільного знаменника, а потім виконують дію за правилом додавання або віднімання дробів з однаковими знаменниками.

$$\text{Наприклад: } \frac{5/1}{6} + \frac{3/3}{10} = \frac{5+9}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15};$$

$$\frac{3/7}{8} - \frac{2/5}{12} = \frac{21-10}{24} = \frac{11}{24}.$$

Як виконують додавання і віднімання мішаних чисел, показано на прикладах:

$$5\frac{4/1}{3} + 2\frac{3/3}{4} = 7\frac{4+9}{12} = 7\frac{13}{12} = 8\frac{1}{12};$$

$$7\frac{4/4}{5} - 6\frac{5/3}{4} = 1\frac{16-15}{20} = 1\frac{1}{20};$$

$$5\frac{2/4}{9} - 2\frac{3/5}{6} = 3\frac{8}{18} - \frac{15}{18} = 2\frac{26-15}{18} = 2\frac{11}{18}.$$

Добутком двох дробів є дріб, чисельником якого є добуток чисельників цих дробів, а знаменником – добуток знаменників цих дробів:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

$$\begin{aligned} \text{Наприклад: } \frac{5}{8} \cdot \frac{14}{15} &= \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{14}^7}{\cancel{8} \cdot \cancel{15}_3} = \frac{7}{12}; \quad 7 \cdot \frac{3}{5} = \frac{7 \cdot 3}{1 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 3}{1 \cdot 5} = \frac{21}{5} = \\ &= 4\frac{1}{5}; \quad 2\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{7 \cdot 2}{3 \cdot 7} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{2}^2}{\cancel{3} \cdot \cancel{7}_1} = \frac{10}{1} = 10. \end{aligned}$$

Два дроби називають *взаємно оберненими*, якщо їх добуток дорівнює одиниці.

Щоб поділити один дріб на другий, треба ділене помножити на дріб, обернений до дільника:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

$$\begin{aligned} \text{Наприклад: } \frac{2}{5} : \frac{3}{7} &= \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{14}{15}; \quad 2\frac{1}{2} : 1\frac{3}{4} = \frac{5}{2} : \frac{7}{4} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 7} = \\ &= \frac{5 \cdot \cancel{4}^2}{\cancel{2} \cdot 7} = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}. \end{aligned}$$

Відношення і пропорції

Частку двох чисел називають *відношенням цих чисел*.

Приклади відношень: $2 : 7$; $0,3 : \frac{1}{5}$ тощо.

Рівність двох відношень називають *пропорцією*.

Наприклад: $8 : 2 = 10 : 2,5$ – пропорція.

Середні члени пропорції

$$a : b = c : d.$$

Крайні члени пропорції

Основна властивість пропорції: добуток крайніх членів пропорції дорівнює добутку її середніх членів, тобто якщо

$$a : b = c : d \left(\text{або } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \right), \text{ то } ad = bc.$$

Дві змінні величини, відношення відповідних значень яких є сталим, називають *прямо пропорційними*. Якщо дві величини прямо пропорційні, то зі збільшенням (зменшенням) значення однієї з них у кілька разів значення другої величини збільшується (зменшується) у стільки ж разів.

Додатні і від'ємні числа

Два числа, що різняться лише знаком, називають *протилежними числами*.

Наприклад: числа 5 і -5 – протилежні.

Модулем числа називають відстань від початку відліку до точки, якою зображено це число на координатній прямій.

Модулем додатного числа і числа нуль є саме це число, а модулем від'ємного числа – протилежне йому число:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

Будь-яке від'ємне число є меншим за нуль і меншим за будь-яке додатне число. З двох від'ємних чисел більшим є те, модуль якого менший, і меншим є те, модуль якого більший.

Наприклад: $2 > -10$; $-5 < 0$; $-3 < -1$; $-4 > -15$.

Щоб додати два від'ємних числа, треба додати їх модулі і перед одержаним результатом записати знак «-».

Наприклад: $-2 + (-7) = -9$.

Щоб додати два числа з різними знаками, треба від більшого з модулів доданків відняти менший модуль і перед результатом записати знак того доданка, модуль якого є більшим.

Наприклад: $-7 + 7 = 0$; $5 + (-3) = 2$; $-8 + 1 = -7$.

Щоб від одного числа відняти інше, треба до зменшуваного додати число, протилежне від'ємнику:

$$a - b = a + (-b).$$

Наприклад: $5 - 9 = 5 + (-9) = -4$; $-2 - 5 = -2 + (-5) = -7$;
 $-3 - (-7) = -3 + 7 = 4$.

Добуток двох чисел з однаковими знаками дорівнює добутку їх модулів. Добуток двох чисел з різними знаками дорівнює добутку їх модулів, записаному зі знаком «-».

Наприклад: $-4 \cdot (-3) = 12$; $2 \cdot (-5) = -10$.

Частка двох чисел з однаковими знаками дорівнює частці їх модулів. Частка двох чисел з різними знаками дорівнює частці їх модулів, записаній зі знаком «-».

Наприклад: $-8 : (-2) = 4$; $6 : (-3) = -2$; $-18 : 6 = -3$.

Усі цілі числа, усі дробові числа та число 0 називають *раціональними числами*.

Будь-які раціональні числа мають такі *властивості*:

$a + b = b + a$ – переставна властивість додавання;

$(a + b) + c = a + (b + c)$ – сполучна властивість додавання;

$ab = ba$ – переставна властивість множення;

$(ab)c = a(bc)$ – сполучна властивість множення;

$(a + b)c = ac + bc$ – розподільна властивість множення.

Перетворення виразів

Щоб *звести подібні доданки*, треба додати їх коефіцієнти і знайдений результат помножити на спільну буквену частину.

Наприклад: $5x + 2x = 7x$; $9a - a = 8a$; $4b + 7b - 2b = 9b$.

Щоб *розкрити дужки, перед якими стоїть знак «+»*, треба не писати дужки і знак «+», що стоїть перед ними, та записати всі доданки зі своїми знаками.

Наприклад: $4x + (2t - 5p) = 4x + 2t - 5p$.

Щоб *розкрити дужки, перед якими стоїть знак «-»*, треба не писати дужки і знак «-», що стоїть перед ними, та записати всі доданки з протилежними знаками.

Наприклад: $7x - (5a - 2b) = 7x - 5a + 2b$.

Вправи на повторення курсу математики 5–6 класів

1. Знайдіть найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел:

1) 7 і 25; 2) 36 і 48; 3) 126 і 330; 4) 15; 20 і 25.

2. Скоротіть дріб:

1) $\frac{15}{20}$; 2) $\frac{60}{140}$; 3) $\frac{126}{693}$; 4) $\frac{187}{221}$.

3. Виконайте дію:

1) $3\frac{7}{11} + 2\frac{4}{11}$;

2) $9\frac{4}{13} - 2\frac{7}{13}$;

3) $3\frac{4}{5} + 7\frac{9}{10}$;

4) $8\frac{5}{26} + 11\frac{7}{39}$;

5) $4\frac{11}{15} - \frac{3}{20}$;

6) $5\frac{7}{12} - 2\frac{13}{18}$.

4. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{7}{16} \cdot \frac{8}{35}$;

2) $2\frac{1}{7} \cdot 4\frac{1}{5}$;

3) $\left(3\frac{1}{2}\right)^2$;

4) $\frac{8}{17} : \frac{16}{51}$;

5) $4\frac{2}{3} : 2$;

6) $2\frac{1}{8} : 1\frac{8}{9}$.

5. Зібрані гриби розклали у три кошики. У перший поклали 36 грибів. У другий — $\frac{7}{9}$ від кількості грибів у першому кошику і 70 % від кількості грибів у третьому. Скільки всього зібрали грибів?

6. Перевірте, чи можна з даних відношень скласти пропорцію:

1) $0,4 : 0,8$ і $18 : 30$;

2) $2\frac{1}{7} : 3\frac{1}{8}$ і $\frac{8}{25} : \frac{7}{15}$.

7. Периметр трикутника дорівнює 30 см, а довжини його сторін відносяться як 6 : 5 : 4. Знайдіть найбільшу сторону цього трикутника.

8. Обчисліть:

1) $-2 + (-3,1)$;

2) $-8,5 + 9$;

3) $14 + (-17,1)$;

4) $4\frac{1}{2} + (-4,5)$;

5) $-5 - 7$;

6) $4 - (-8)$;

7) $-2 - (-1)$;

8) $4 - 11 + 3$;

9) $-5 \cdot (-11)$;

10) $\left|-\frac{1}{3}\right| \cdot (-18)$;

11) $\left|\frac{4}{5}\right| : (-16)$;

12) $-2\frac{1}{3} : \left(-1\frac{1}{6}\right)$.

9. Розв'яжіть рівняння:

1) $1,8x - 2,7 = 6,3 - 1,2x$;

2) $2(x - 3) + 5 = 4(x + 2)$.

10. Кілограм бананів дорожчий за кілограм апельсинів на 5 грн. За 5 кг бананів заплатили стільки ж, скільки за 6 кг апельсинів. Скільки коштує кілограм бананів?

11. Позначте на координатній площині точки $A(-2; 1)$; $B(0; -2)$; $C(4; -6)$; $D(5; 0)$; $E(3; 5)$; $F(-3; -4)$.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

Розділ I

21. -1. 22. 2,2. 24. 1) 9; 2) -2,25; 3) $-\frac{4}{9}$; 4) $-\frac{3}{4}$. 25. 1) 4;
2) $-\frac{4}{7}$; 3) $-1\frac{3}{4}$; 4) $-1\frac{1}{4}$. 26. 1) $x^2 - y^2$; 2) $ab - mn$; 3) $d^2 - (d - a) \times$
 $\times (d - b)$ або $ad + b(d - a)$ або $bd + a(d - b)$. 29. 84 км. 30. 1) Так;
2) Ні. 50. 1) $2x - 3$; 2) $6m - 4n$; 3) $2p - 1$; 4) $2x - y$; 5) $3\frac{1}{4}a + 5\frac{3}{4}b$;
6) $2n - m$. 51. 1) $3a - 1$; 2) $13m - 13a$; 3) $1 - 2y$; 4) $-0,6b$.
59. 1) 5 %; 2) 0,25 %. 60. 16 км/год. 89. 1) 1; 2) 3; 3) -5. 90. 1) 2;
2) 1; 3) 5. 92. 1) $5\frac{2}{15}$; 2) $-2\frac{11}{25}$. 93. Так. 130. 1) 1000; 2) 25; 3) 1;
4) 128; 5) 2; 6) $\frac{4}{9}$. 131. 1) 1; 2) 32; 3) $\frac{8}{9}$; 4) $\frac{4}{9}$. 132. 1) 27; 2) 32;
3) 243; 4) 25. 133. 1) 7; 2) 12; 3) 324; 4) $\frac{3}{16}$. 134. 1) 7; 2) 12; 3) 20;
4) $\frac{81}{256}$. 135. 1) $6^{10} = 36^5$; 2) $10^{20} > 20^{10}$; 3) $5^{14} < 26^7$; 4) $2^{3000} < 3^{2000}$.
137. 1) 68 грн; 2) 74,8 грн; 3) зменшилася на 5,2 грн; 4) змен-
шилася на 6,5 %. 138. 1) 7; 2) 9; 3) -1,5; 4) -26. 139. $3,54a - 8,6b$;
103,7. 140. Лише одним способом. 151. 1), 3), 4) Ні; 2) Так.
152. $18x^3$ см³. 153. $3b^2$ дм². 156. 666 сторінок. 169. 1) $2m^3$ або
 $-2m^3$; 2) $0,6p^4q^5$ або $-0,6p^4q^5$; 3) $-2c^3$; 4) $10c^2m^4$; 5) $2ab^2$ або
 $-2ab^2$; 6) c^3p^9 . 170. 1) $3m^5n^{11}$; 2) $\frac{1}{5}ab^6$; 3) $-12mp$; 4) $-\frac{1}{9}a$; 5) -1;
6) $-\frac{1}{64}n^7$. 171. 1) $5mn^5$; 2) $-3x^6$; 3) $-\frac{1}{3}a^3b$; 4) $-\frac{1}{24}$. 172. 1) $240m^8$;
2) $-8m^{17}$; 3) $-a^{13}b^{19}$; 4) $-5\frac{1}{3}a^8c^{13}$. 173. 1) $24a^{13}$; 2) $-100a^{25}$;
3) $-2a^{31}b^9$; 4) $-12\frac{4}{5}m^7n^{13}$. 175. 1) $8a^{11}b^9$; 2) $6\frac{3}{4}m^{20}n^{24}$;
3) $-49m^{14}n^{14}$; 4) $-32x^{20}c^{50}$. 176. 1) $2700m^7n^8$; 2) $-2a^{13}b^9$;
3) $-27a^{26}m^{10}$; 4) $x^{28}y^{28}$. 179. 1) $-0,1a^{2n+3}b^{2n+5}$; 2) $72a^{6n+6}b^{15+6n}$;
3) $a^{8n+10}b^{18n+3}$; 4) $x^{13n-5}y^{12n+5}$. 180. 1) $2\frac{1}{3}$; 2) $11\frac{2}{3}$; 3) -49; 4) 343.
181. 1) $1\frac{4}{5}$; 2) $12\frac{3}{5}$; 3) -81; 4) 729. 183. 1) b^4 ; 2) $-m^8$; 3) a^7 ; 4) $-n^8$.
184. 98. 204. 1) $-5a^2b^4 - 12a^2b + 2a^2b^2$, шостого степеня;
2) $7x^4y^3 - 10x^4y^2 + 21x^2y^4$, сьомого степеня. 205. 1) $4a^2b^3 - a^4$,
п'ятого степеня; 2) $2xy^3 + 15x^3y - 7xy^2$, четвертого степеня.

206. $2xy^3 - 2x^3y$; $-\frac{3}{4}$. 212. 1), 6) додатні; 3), 4) від'ємні.
216. Так, наприклад, $x = 66$; $y = 33$. Вказівка. Слід врахувати, що $33^6 = 33 \cdot 33^5 = 32 \cdot 33^5 + 1 \cdot 33^5 = 2^5 \cdot 33^5 + 33^5 = 66^5 + 33^5$. 229. 1) 3; 2) 3. 230. 1) 0; 2) 3. 233. 1) 1,2; 2) -7 . 234. 1) 6; 2) 2,25. 246. 1) -9 ; 2) 101. 247. 1) -11 ; 2) 4. 249. 1) $2m^2 + 7ml$; 2) $12m^2 + 3ml - 2n^2$. 250. Вказівка. Після спрощення різниці многочленів одержимо вираз $0,2x^4 + 0,5x^2 + 4$. Найменше значення цього виразу дорівнює 4, якщо $x = 0$. 253. 1) $100x + 10y + z$; 2) $100z + 10y + x$; 3) $100x + 11y + 11z$; 4) $90y + 9x + z$. 256. 1) 4^{30} ; 2) 8^{20} ; 3) 16^{15} ; 4) 32^{12} . 257. Вказівка. Натуральне число є кратним числу 36 тоді і тільки тоді, коли воно є кратним числам 4 і 9. Далі використати ознаки подільності на 4 (задача № 94) та на 9. 280. 1) $2a$; -7 ; 2) $11 - 27x$; 12; 3) $3a^2 - 3b^2$; 0; 4) $2xy^3$; -2 . 281. 1) $13a^2$; $\frac{1}{13}$; 2) $8x^2 - 8y^2$; 0. 283. 1) 2; 2) -27 ; 3) -1 ; 4) 0,25. 284. 1) $-0,75$; 2) -32 ; 3) $-0,25$; 4) 0,75. 285. 1) $\frac{5}{3}$; 2) $-1,5$. 286. 16 г. 287. 1 грн 25 коп.; 3 грн; 4 грн 50 коп. 288. 18 котушок; 12 котушок. 289. 18 км/год.
292. 1) $-x^{n+4}$; 2) $-y^{2n}$; 3) $-3z^n$. 294. 1) $\frac{1}{3}a^7b^{12}$; 2) $-10m^8n^{23}$.
295. 1) 8; 2) 87,5. 296. Вказівка. Розгляньте суму $(6a + b) + (6b + a)$ та доведіть, що при натуральних a і b вона є кратною числу 7. 319. 1) 74 300; 2) 1 103 000. 320. 1) $-5,23$; 2) 0; 3) 4; 4) -27 . 321. 1) 10,11; 2) $1\frac{1}{5}$. 325. 1) 0; $\frac{1}{4}$; 2) 0; -4 ; 3) 0; -9 ; 4) 0; 1,5. 326. 1) 0; $-\frac{1}{12}$; 2) 0; 10; 3) 0; 14; 4) 0; $-\frac{1}{2}$.
327. 1) $-\frac{2}{3}$; 5; 2) $-2,5$; 2. 328. 1) $-1,25$; 7; 2) 3; $-3,5$.
331. 1) $25(m - 2)^2$; 2) $81(2a + 3b)^2$. 332. 1) 3; 7; 2) -2 ; 5. 333. 1) 2; 4; 2) $-2\frac{1}{3}$; 4. 337. 24 см і 8 см. 338. Так, наприклад, $a = -2$; $b = 0$; $c = 1$. 354. 1) -6 ; 2) 0. 355. 1) 2; 2) 0. 358. 1) $27m^3 + 8n^3$; 2) $8x^3 - 125y^3$; 3) $-x^3 + x^2a + 5xa^2 - 2a^3$; 4) $-3m^3 + 16m^2x - 2mx^2 - x^3$. 359. 1) $27x^3 - y^3$; 2) $27a^3 + 12a^2b - 7ab^2 - 2b^3$.
360. 1) $14 - 15m$; 2) $-18y^2 - 4$; 3) $4a + 4$; 4) $b + 15$. 361. 1) $-x^2 - 15$; 2) $11a + 10$; 3) $12 - 17x$; 4) 16. 370. 1) $x^2 - 5x^3$; 44; 2) a^3 ; 27. 371. 1) $-24x$; -27 ; 2) $27b^3$; 1. 372. 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$. 373. 1) -2 ; 2) -1 .

376. 14; 15; 16. 377. На 2. 378. На 3. 381. 18; 19; 20; 21. 382. 24; 25; 26; 27. 385. 18 см; 12 см. 386. 350 км. 387. 1) 4; 2) $\frac{1}{5}$.
390. 27 $\frac{1}{125}$. Вказівка. Позначте $a = \frac{1}{125}$; $b = \frac{2}{129}$; тоді одержите вираз $(3 - a)(4 + b) + (3 + a)(5 + b) - 6b$, який потім необхідно спростити. 404. 1) 0; 2) $-\frac{5}{9}$. 405. 1) 0; 2) -0,1.
406. 1) $3x^2y(3xy^2 - 1)(5y - x^2)$; 2) $(0,7m - 0,9n)(3n^2 - 4p^2)$. 407. 1) $2(m^2 - 2x^3)(4c - 3x)$; 2) $xy(3y + 4x^2)(0,4y - 0,5x^4)$. 408. 1) 5; 8; 2) -0,4. 409. 1) -7; 1; 2) $-\frac{1}{7}$. 410. 1) $(t^2 - p)(a + t - b)$; 2) $(a - m)(x^2 + y^2 - 1)$; 3) $(m - 7)(b - 1 + m^2)$; 4) $(a - b)(6x + 3y - z)$.
411. 1) $(ab + 1)(a + b + 9)$; 2) $(4x + 5m)(2a + b - 1)$. 412. 1) $(x + 1) \times (x + 4)$; 2) $(x - 1)(x - 4)$; 3) $(x - 2)(x + 3)$; 4) $(a + b)(a + 3b)$. 413. 1) $(x - 1)(x - 5)$; 2) $(x - 3)(x + 2)$; 3) $(x - 3)(x + 5)$; 4) $(a + 2b) \times (a + 3b)$. 415. 1) -2; 2) -10. 416. 37; 38. 451. 1) 1; 2) 0. 452. 1) -2; 2) -16. 454. $a^{16} + b^{16}$. 456. 1) $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$; 2) $8b^3 - 12b^2 + 6b - 1$. 457. 1) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$; 2) $8m^3 + 12m^2 + 6m + 1$.
458. $17\frac{5}{7}$. 459. 24; 26; 28. 461. Вказівка. $(n^2 + n)(n + 2) = n(n + 1)(n + 2)$ - добуток трьох послідовних натуральних чисел. 475. 1) 5; 2) $-\frac{1}{8}$; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) 1,75. 476. 1) -8; 2) $\frac{1}{6}$; 3) -1,5; 4) 0,2. 479. 1) $(x - 1)^2$; 2) $(a + 4)^2$. 481. 1) $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0$; 2) $-x^2 + 2x - 1 = -(x - 1)^2 \leq 0$. 483. Вказівка. $x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x + 2)^2 + 1$. 484. Вказівка. $x^2 + 6x + 11 = x^2 + 6x + 9 + 2 = (x + 3)^2 + 2$. 487. 1) 23; 2) 0. 488. 1) $m^3 - 4m^2 - 11m + 30$; 2) $p^{10} + 1$. 501. 1) -3; 2) 16. 502. 1) -2; 2) 27.
512. 1) 2; 2) 1; 3) $-\frac{8}{43}$. 513. 1) -1,6; 2) -6; 3) $\frac{2}{3}$. 514. 1) $6a + 18$; 2) $55x^2 + 48xy - 73y^2$; 3) $b^4 - 18b^2 + 81$; 4) $625 - 50a^2 + a^4$.
515. 1) $13 - 4c$; 2) $56x^2 + 20xy - 8y^2$; 3) $a^4 - 72a^2 + 1296$; 4) $16 - 8m^2 + m^4$. 517. 1) $x^2 + 2xy + y^2 - 1$; 2) $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$; 3) $m^2 + 2mn + n^2 - 4p^2$; 4) $x^2 - y^2 - 4y - 4$. 518. $9\frac{5}{6}$. 519. 120 м²; 8 год. 539. 1) -4; 6; 2) -6; 1; 3) -2,2; 1; 4) -1; 11. 540. 1) -8; 4; 2) -1; 2,6; 3) -7; 0; 4) 1; 4. 542. 1) $(6a^3 - b)(b - 4a^3)$; 2) $8p(2p - 3m^2)$; 3) $(5x + 9y)(9x - 5y)$; 4) $4c(a + b)$; 5) $(a^2 + a - c^4)(a^2 + a + c^4)$;

- 6) $4b(1 - 5a)$. 543. 1) $3(a^2 - 3b)(3a^2 - b)$; 2) $3(m^4 - c)(3c - m^4)$;
 3) $4(4b - a)(3a - b)$; 4) $4t(x - y)$. 544. 1) 2; 1,5; 2) -3; 3; 3) $-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$;
 4) немає коренів. 548. Вказівка. Використати зважену крупу як гирьку. 563. 1) $5a + 8$; 2) $9b - 27$; 3) 65; 4) $4b^6 - 4b^3 - 2$.
 564. 1) $4a - 64$; 2) 35; 3) $125 + b - 2b^2$; 4) $a^6 - 1$. 565. 1) -7;
 2) -0,1. 566. 1) 8; 2) -0,2; 3) 0,5; 4) -2. 567. 1) $-\frac{1}{3}$; 2) 2.
 568. 1) $9(a^2 + 3a + 3)$; 2) $(x - 2)(x^2 - 10x + 28)$; 3) $(2p - 1) \times$
 $\times (13p^2 + 5p + 1)$; 4) $(5x - 1)(13x^2 + 2x + 1)$. 569. 1) $(2a + 1) \times$
 $\times (a^2 + a + 1)$; 2) $(b - 4)(b^2 - 2b + 4)$; 3) $(4b + 1)(31b^2 - 7b + 1)$;
 4) $(5a + 2)(13a^2 - 4a + 4)$. 571. Так. 574. 50 зошитів і 10 зошитів.
 575. 7 курей. 591. 1) $(a - 3)(a + 3)(a^2 + 9)$; 2) $(2 - c) \times$
 $\times (2 + c)(4 + c^2)$; 3) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$; 4) $(a - b^2)(a +$
 $+ b^2)(a^2 + b^4)$. 593. 1) 0; -1; 1; 2) 0; -4; 4; 3) 0; 4) 0; -2. 594. 1) 0;
 -1; 1; 2) 0; -6; 6; 3) 0; 4) 0; 1. 595. 1) $7(a - 1)(b + 3)$; 2) $6(m - 2) \times$
 $\times (n - 5)$; 3) $-a(b + 3)(c + 4)$; 4) $a(a + 1)(a - b)$. 596. 1) $3(15 - b) \times$
 $\times (2 - a)$; 2) $-3(n + 3)(m + 6)$; 3) $a^3(a + 1)(x + 1)$; 4) $ap(p^2 + 1)(a - 3)$.
 597. 1) $(a + b - 4)(a + b + 4)$; 2) $(a - x - y)(a + x + y)$; 3) $(p +$
 $+ 5 - x)(p + 5 - x)$; 4) $(p - x + 10)(p + x - 10)$. 598. 1) $(x + y - 5) \times$
 $\times (x + y + 5)$; 2) $(m - a + b)(m + a - b)$; 3) $(m - 4 - a)(m - 4 + a)$;
 4) $(m - b - 4)(m + b + 4)$. 599. 1) $(a - 9)(a + 10)$; 2) $(a + m) \times$
 $\times (m - a - 1)$; 3) $(x - y)(x + y - 1)$; 4) $(x - y)(x + y + 1)$; 5) $(a -$
 $- 3b)(1 + a + 3b)$; 6) $(4m + 5n)(4m - 5n - 1)$. 600. 1) $(a - b)(a + b - 1)$;
 2) $(p + b)(p - b - 1)$; 3) $(4x - 5y)(4x + 5y + 1)$; 4) $(10m - 9n) \times$
 $\times (10m + 9n - 1)$. 601. 1) $(m - 3)(p - 1)^2$; 2) $(1 - a)(1 + a)(1 - 2b)^2$.
 603. 1) $(a - b)(b - 1)(b + 1)$; 2) $(x - a)(x + a)(a + 7)$; 3) $(p + q) \times$
 $\times (p - 2)(p + 2)$; 4) $(a + 5)(a - m)(a + m)$. 604. 1) $(m + n)(m^2 -$
 $- mn + n^2 + 1)$; 2) $(a - b)(1 - a^2 - ab - b^2)$; 3) $(a + 2)(a^2 - 3a + 4)$;
 4) $(2p - 1)^3$. 605. 1) $(m + n)(m - 1)(m + 1)$; 2) $(b - 3)(a - 2)(a + 2)$;
 3) $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + 1)$; 4) $(x + 1)(x^2 - x - 4)$. 606. 1) 5; 1; -1;
 2) 2; -2. 607. 1) 1; -1; 2) 1; 3; -3. 608. 1) $4(2a + b)(a + 2b)$;
 2) $-(3y + 22m)(33y + 2m)$. 609. 1) $(a^2 - 2ab + 4b^2)(a + 2b + 1)$;
 2) $(m - 2n)(m^2 + 2mn + 4n^2 + m - 2n)$. 610. 1) $(a - b)(a^2 + ab +$
 $+ b^2 + a - b)$; 2) $(c + d - x - y)(c + d + x + y)$. 611. 1) $(x + 1) \times$
 $\times (x - 3)$; 2) $(x - 1)(x + 9)$; 3) $(x + 1)(x - 4)$. 614. -16. 615. 8 год.
 616. Через 6 хв. 620. 1) 5; 2) 17; 3) -6; 4) -1,2; 5) 11; 6) 2,4.
 625. 1), 4) Ні; 2), 3) Так. 629. 1) 5; 2) 1; 3) 6; 4) 2. 630. 1) Так;
 2) Ні. 634. 1) a^{25-3n} ; 2) a^{5n+3} . 635. 1) 6; 2) 7. 641. 1) $3m^2n$;
 2) $-7p$. 643. 1), 3), 4) Так; 2) Ні. 644. 3. 647. a^3b ; -5. 648. Ні.

653. $2xy + 7xy^2$; -69. 657. $x = 2$. 658. $x^3 - \frac{5}{8}x^2$. 659. 24 ц; 21 ц; 20 ц. 660. 2. 664. 1) 5; 3; 2) 2; 7; -7. 665. 1) -2; 2) -12; 3) 28; 4) 8. 669. 1) -1; 2) 8. 672. 50 см; 40 см. 675. 1) $(3c - 2y)(4x^2 - 3y^3)$; 2) $(0,8m - 0,5n)(2n^2 - 3p^2)$. 676. 1; -6. 680. 25. 681. Так. 682. 1) $x^2 + 2xy + y^2 + 2xa + 2ya + a^2$; 2) $b^2 - 2bc + c^2 - 2bd + 2cd + d^2$; 3) $m^2 + 2mn + n^2 + 4m + 4n + 4$; 4) $a^2 + 6a + 9 - 2ac - 6c + c^2$. 686. 1) $\frac{1}{3}$. Вказівка. Помножити обидві частини рівняння на 3; 2) $-\frac{1}{5}$. 688. 2) Вказівка. Вираз тотожно дорівнює виразу $(a - 2 + m)^2$. 3) Вказівка. Вираз тотожно дорівнює виразу $(a + b + 4)^2$. 693. 1. 696. 1) $-\frac{b}{a}; \frac{b}{a}$; 2) $0,3a; -0,3a$; 697. 1) Так; 2) Так. 698. 1) $(5 - 4x)(5 + 4x)$; 2) $(3x - 5)(3x + 5)$. Вказівка. Спочатку спростіть вирази. 705. 1) $9(a - b)(a^2 + ab + b^2)$; 2) $2(n + 3)(m - b)$; 3) $\left(\frac{1}{3}p - 1\right)\left(\frac{1}{3}p + 1\right)\left(\frac{1}{9}p^2 + 1\right)$; 4) $(m - 2n - 5) \times (m - 2n + 5)$; 5) $(b - 6)(b + 7)$; 6) $(m - n)(m - 2)(m + 2)$. 706. 1) $m^2(a - 1)(m - 1)(m + 1)$; 2) $a(b - 1)(a - 1)(a + 1)$; 3) $(b + 1) \times (b - 1)^2$; 4) $(x - 3)(x^3 + 4x^2 + 3x + 9)$.

Розділ II

738. 1) 0,6; 2) 2. 739. 1) Якщо $x = -5$, то $y = -23$; якщо $x = 0$, то $y = 0$; якщо $x = 3$, то $y = -6$; 2) якщо $x = -5$ або $x = 0$, то $y = 7$; якщо $x = 3$, то $y = 9$. 740. 1) Якщо $x = -2$, то $y = -16$; якщо $x = 0$, то $y = -2$; якщо $x = 4$, то $y = -12$; 2) якщо $x = -2$ або $x = 0$, то $y = 3$; якщо $x = 4$, то $y = -16$. 741. 4. 742. 0. 744. 10 см. 750. 1) 0; 2) 2; 3) 0; 4) 5. 751. 1) 0; 2) 3; 3) 0; 4) -2. 754. 1), 4) Так; 2), 3) Ні. 755. 1), 3) Так; 2), 4) Ні. 760. 1) 0; 4; 2) -4; 4; 3) -5; 0. 761. 1) 0; -2; 2) -5; 5; 3) 0; 4. 764. Ні. 765. 1) 2 кг; 2) 6 кг; 3) 1 кг; 4) 6 л. 798. $k = -1,5$. 799. $l = -3$. 800. 1) $(0; -20); \left(13\frac{1}{3}; 0\right)$; 2) $(0; 5); (20; 0)$. 801. 1) $(0; -40)(200; 0)$; 2) $(0; 18)(54; 0)$. 802. $y = 100x$. 803. $y = -9x$. 807. $k = 0$; $l = 5$. 808. $k = 0$; $l = -5$. 809. I: $y = -3x$; II: $y = x + 3$; III: $y = 3x$. 810. $-5 \leq y \leq 9$. 811. 1) (2; 2); 2) (1,2; -1,2); 3) (3; 6). 814. 1) 0; 2) -1. 815. 1) $16m^2 - 3\frac{3}{4}$; 2) $25y^2 + 4ay$. 816. 13 зошитів. 829. $k = -3$; $l = 10$.

Розділ III

844. 1), 2), 4), 6), 7) Так. 3), 5), 8) Ні. 847. 999. 866. 1) -5; 2) -2; 3) -4,75; 4) -10. 867. 1) 1; 2) -3; 3) -2,5; 4) -5. 868. 1) 0; 2) $\frac{c-b}{2}$; 3) $-2m$. 869. 1) 0; 2) $\frac{2m-a}{2}$; 3) $2b$; 4) $2a-p$. 870. 1), 5), 6) Так; 2), 3), 4) Ні. 871. 1) 4; 2) 1,6. 872. 1) 1,2; 2) -1,8. 874. 1) 2; 2) $1\frac{5}{7}$; 3) -9. 875. 1) 2; 2) 10. 876. 1), 4) Немає розв'язків; 2), 3) x - будь-яке число; 877. 1), 4) x - будь-яке число; 2), 3) немає розв'язків. 878. 1) 5; 2) 3; 3) -5; 4) -1. 879. 1) 1; 2) 3; 3) $\frac{1}{5}$; 4) x - будь-яке число. 880. 1) Немає розв'язків; 2) x - будь-яке число. 881. 1) x - будь-яке число; 2) немає розв'язків. 882. 1) $b = 11$; 2) $b = 4,5$. 883. 1) 6; -6; 2) 3; -4. 884. 1) -4; 4; 2) 2; 5. 885. 1) -4; -2; -1; 1; 2; 4. 886. -6; -3; -2; -1. 889. 1) -6; 6; 2) 0; 21. 891. $x = 6$; $y = 7$ або $x = 7$; $y = 6$. 901. 48. 911. 60 вареників; 63 вареники. 912. 5600 грн. 913. 45 км/год; 18 км/год. 914. 15 кг; 12 кг. 915. 12 км. 916. 7 см; 11 см; 77 см²; 917. 48 оповід.; 24 оповід. 918. 27 грн.; 9 грн. 919. 125; 137; 168 наборів. 920. 24 см; 33 см; 48 см. 921. Ні. 922. Ні. 923. Через 4 роки. 924. 36 куштів; 12 куштів. 925. По 40 відпочивальників. 926. 24 кг. 927. 15 зошитів; 10 зошитів. 928. 7 дисків; 5 дисків. 929. 28 учнів. 930. 50 кг. 931. 48 і 18. 932. 90 і 120. 933. 18 км/год. 934. 2 км/год. 935. 6,5 год; 78 км. 936. 2,5 год; 10 км. 937. 5 кг; 10 кг; 15 кг. 938. 7 задач; 10 задач; 11 задач. 942. 1) $a < 0$; 2) $a > 0$. 962. $p = 3$. 963. $n = 3$. 964. 1) $m = -35$; 2) $m = 15$. 965. 1) $d = 19$; 2) $d = -2$. 967. (5; 5). 968. 1) $p = 2$; 2) $p = 21$. 969. 1) Таких пар натуральних чисел немає; 2) (1; 1); 3) (8; 1), (1; 2); 4) (1; 7), (7; 1). 972. 1) 6; 2) 13. Вказівка. $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$; 3) 25; 4) -19. 989. 1) $m = 0$; 2) $m = 10$; 3) $m = -25$. 990. 1) (0; -3), (-21; 0); 2) (0; -5), (3; 0). 991. 1) (0; 18), (6; 0); 2) (0; -14); (-4; 0). 995. Графіки не перетинаються. 999. 80 км/год; 60 км/год. 1000. Вказівка. Розгляньте три випадки: 1) $x \leq 0$; 2) $0 < x < 1$; $x \geq 1$. 1011. $a = -8,5$; $b = -0,2$. 1012. $a = 0,7$; $b = 10,5$. 1013. 1) (2; 3); 2) (-1; 2); 1014. 1) (1; 4); 2) (3; -2). 1022. (x ; $1,5x - 2,5$), де x - будь-яке число; 2) немає розв'язків. 1027. Вказівка. Виділити повний квадрат. 1028. 1. 1036. (3; 1). 1037. (4; 1). 1038. 1) (4; -3); 2) (2; -5); 3) $a = -5$; $b = -2$; 4) $m = 4$; $n = 0,5$. 1039. 1) (-3; 4); 2) (2; -7); 3) $p = 7$; $q = 3$; 4) $a = 1,5$; $b = -6$. 1040. 1) (8,5; 2,5); 2) $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. 1041. 1) (1,5; 2,5);

- 2) $\left(\frac{1}{6}; -1\frac{1}{6}\right)$. 1042. 1) (46,5; -25,5); 2) (6,5; 2). 1043. 1) (22,5; 7,5); 2) (45; 1). 1044. (4; 1). 1045. (2; -3). 1047. $k = \frac{1}{3}$; $l = -2$. 1048. $y = 2,5x + 1$. 1049. 1) $m = 2$; 2) $m = 4$. 1066. 1) (-1; 1); 2) $a = 2$; $b = -1$; 3) $m = 3$; $n = 2$; 4) $\left(-\frac{1}{7}; \frac{1}{2}\right)$. 1067. 1) (2; 1); 2) (0,4; 7). 1068. 1) (1; -2); 2) $a = 0,4$; $b = 0,1$. 1069. 1) (-2; 2); 2) $m = 0,8$; $n = -1,5$. 1070. 1) $y = \frac{3}{8}x - 5,5$; 2) $y = -\frac{2}{3}x + 4$. 1071. $y = -0,25x + 4$. 1072. 1) (-1; 3); 2) (3; -2). 1073. (1; -2); 2) (-2; -8). 1074. 1) Система не має розв'язків; 2) система має безліч розв'язків. 1078. Ні, оскільки при цілих числах x і y значення виразу $y^2 - x^2$ є непарним числом або числом кратним 4. 1084. 10 зошитів; 6 зошитів. 1085. 112 грн, 104 грн. 1086. 45 грн, 2,5 грн. 1087. 10 см, 8 см, 8 см. 1088. 18 м; 10 м. 1089. 18 км/год; 2 км/год. 1090. 17 км/год; 3 км/год. 1091. 42 км/год; 14 км/год. 1092. 24 і 38. 1093. 32 і 40. 1094. 32 роки; 10 років. 1097. 80 яблук; 15 яблук. 1098. 25; 20. 1099. 90; 110. 1100. 14 кг; 11 кг. 1101. 22 кг; 18 кг. 1102. 30 л; 45 л. 1103. 24 книжки; 33 книжки. 1104. 96 грн, 104 грн. 1105. 180 тортів; 120 тортів. 1106. $\frac{5}{18}$. 1107. $\frac{7}{10}$. 1108. 50 г; 150 г. 1109. 156 г; 104 г. 1110. 36 років; 8 років. 1111. 45. 1115. 20 корів. 1119. Ні. 1122. 1) x - будь-яке число; 2) не має розв'язків; 3) 2; 4) 0,4. 1123. 1) 0; 2) -3. 1124. Якщо $a = 1$, то розв'язків немає; якщо $a \neq 1$, то $x = \frac{8}{a-1}$. 1127. 3 грн 60 коп. 1128. 6 кг; 24 кг. 1129. 2 км/год. 1130. 60 км/год. 1131. 24 вареники; 48 вареників. 1132. 8 робітників; 9000 грн. 1133. 5 днів. 1134. 45 г; 135 г. 1140. (-2; 0); (-1; 1); (-1; -1); (0; 2); (0; -2); (1; 1); (1; -1); (2; 0); 1149. 1) $a = 3$; 2) $a \neq -14$. 1151. 1) (-3; 2); 2) (5; -2). 1152. 1) $\left(7\frac{1}{3}; 2\frac{3}{5}\right)$; 2) (4; 3). 1153. (-28; 41). 1154. 1) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$; 2) (4; 2). 1157. Якщо $a = 2$, то безліч розв'язків; якщо $a \neq 2$, то єдиний розв'язок. 1159. 1) (1; 2); 2) (-6; -2); 1160. 1) (1; -2); 2) (0,5; -1,5). 1161. 1) (2; 7); 2) $\left(3\frac{7}{37}; -3\frac{5}{37}\right)$. 1162. 1) (x ; $-2 - 2x$), де x - будь-яке число; 2) система не має розв'язків. 1163. 1) Ні; 2) Так; (2; -1) - розв'язок системи.

1164. 1) $y = 1,25x - 5$. 1165. 1) (4; 5); 2) (-2,5; 0). 1166. 1) $a = 4$; 2) $a \neq 4$, 3) не існує. 1167. 1) $b = -3$; 2) якщо $b \neq -3$, то $x = 1,25$; $y = 0$. 1168. 50 км/год.; 60 км/год. 1169. Порція млинців – 18 грн, салат – 15 грн. 1170. 28 км/год; 2 км/год. 1171. 18 деталей за годину виготовляє майстер і 12 – учень. 1172. 80 груп; 100 груп. 1173. 70 і 36. 1174. 10; 50 і 80. 1175. 2352 см². 1176. 35. 1177. 15 л і 10 л. Вказівка. Позначити x л – у першо-

му бідоні, y л – у другому. Тоді маємо систему
$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 20 \\ y + \frac{1}{3}x = 15. \end{cases}$$

Задачі підвищеної складності

1178. 2401. 1179. На 38 %. 1180. $\frac{10^{15} + 1}{10^{16} + 1}$. 1181. 2018².

1183. $(m + n)^2 + (m - n)^2$. 1184. 1) $x - 5$; 2) $x + 3$. 1185. 1) $(a - 1)^2(b^2 + a^2 + 2a + 1)$; 2) $(1 - t)^3$; 3) $(x - 1)(x + 1)(x^4 - 2x^2 + 4)$. В к а з і в к а. $x^6 - 3x^4 + 6x^2 - 4 = (x^6 + 8) - 3(x^4 - 2x^2 + 4)$; 4) $(m - n + 4)(m + n - 2)$. В к а з і в к а. $2(m + 3n) + (m - n) \times (m + n) - 8 = (m^2 + 2m + 1) - (n^2 - 6n + 9)$; 5) $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + a + b)$; 6) $2(2x - 1)(2x^2 + 2x + 1)$. 6) В к а з і в к а. $8x^3 + 4x^2 - 2 = (8x^3 - 1) + (4x^2 - 1)$. 1186. Ні. 1187. $2^{128} - 1$. 1188. В к а з і в к а. Розглянути вираз $\frac{(a^2 + ab + b^2) + (b^2 + bc + c^2)}{2}$

та використати, що $b = \frac{a + c}{2}$. 1190. В к а з і в к а. $\overline{abcabc} = 100\ 000a + 10\ 000b + 1000c + 100a + 10b + c = 100\ 100a + 10\ 010b + 1001c = 1001(100a + 10b + c) = 1001abc$. 1192. 729. 1194. В к а з і в к а. Довести, що $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 10(3^n - 2^{n-1})$. 1195. $(x + y)^3 + (x - y)^3$. 1197. $y = 4\ 074\ 341$. 1198. В к а з і в к а. $(2n + 2)^3 - (2n)^3 = 24n(n + 1) + 8$. 1199. 1) $(y^2 + y + 1)(y^3 - y^2 + 1)$. В к а з і в к а. $y^5 + y + 1 = y^5 - y^2 + y^2 + y + 1 = y^2(y^3 - 1) + y^2 + y + 1$; 2) $(m^2 + m + 1) \times (m^2 - m + 1)$. В к а з і в к а. $m^4 + m^2 + 1 = m^4 - m + m^2 + m + 1$; 3) $(x^2 - x + 3)(x^2 + x + 3)$. Вказівка. $x^4 + 5x^2 + 9 = (x^4 + 6x^2 + 9) - x^2$; 4) $(n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$. В к а з і в к а. $n^4 + 4 = (n^4 + 4n^2 + 4) - 4n^2$; 5) $(x^2 - 2b^2)(x^2 + 2a^2 + 2b^2)$. В к а з і в к а. $x^4 + 2a^2x^2 - 4a^2b^2 - 4b^4 = (x^4 + 2a^2x^2 + a^4) - (a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4)$; 6) $(m + 1)(m^2 - m - 1)$. В к а з і в к а. $m^3 - 2m - 1 = (m^3 + m^2) - (m^2 + 2m + 1)$; 7) $(m + 2)(m^2 - 2m - 1)$. В к а з і в к а. $m^3 - 5m - 2 = (m^3 + 8) - (5m + 10)$ або $m^3 - 5m -$

$-2 = (m^3 - 4m) - (m + 2)$; 8) $(x + y)(x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3)$.
 В к а з і в к а. $x^4 - 2x^3y - 6x^2y^2 - 4xy^3 - y^4 = (x^4 - y^4) - (2x^3y + 2x^2y^2) - (4x^2y^2 + 4xy^3)$. 1200. $5^{15} < 3^{23}$. В к а з і в к а. $5^{15} = 5 \cdot (5^2)^7$, $3^{23} = 9 \cdot (3^3)^7$. 1202. 1) Так; 2), 3) Ні. 1203. 1), 2) Ні; 3) Так. 1204. (-1; 1) і (2; -5). 1205. -1; 0; 2; 6. 1206. 7583.
 В к а з і в к а. Позначити шукане число $\overline{7abc}$, після чого $\overline{abc} = x$. 1208. 1) Рівняння не має розв'язків; 2) $x = 3$. 1209. 1) Якщо $a = 0$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 0$, то рівняння має єдиний розв'язок; 2) якщо $a = 0$, то рівняння має безліч розв'язків; якщо $a \neq 0$, то рівняння має єдиний розв'язок.
 1210. 1) Для всіх a : $x = \frac{15+a}{5}$; 2) для всіх a : $x = \frac{5a-9}{5}$; 3) якщо $a = 3$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 3$, то $x = \frac{7}{a-3}$; 5) якщо $a = 1$, то x - будь-яке число; якщо $a \neq 1$, то $x = 1$; 6) для всіх значень a : $x = -\frac{2a}{3}$. 1211. 1) $a = -4$; 2) $a = -7$.
 1212. 21 м/с; 147 м. В к а з і в к а. Позначивши x м/с - швидкість поїзда, матимемо рівняння $25x = 378 + 7x$. 1213. 10 м/с; 99 м. В к а з і в к а. Нехай x м/с - швидкість поїзда, тоді його довжина $9x + 9$. Одержимо рівняння $27x = (9x + 9) + 171$. 1214. 2 год; 6 год. 1215. 30° , 30° і 120° або 20° , 80° і 80° . 1216. 26 рулонів. 1218. 25 %. 1219. 1) Ні; 2), 3), 4) Так. 1220. Ні. 1221. 1) Один; 2) жодного; 3) один; 4) безліч. 1222. 5 або 10. 1223. 1) Прямі $x = -1$ і $x - 2y = 0$; 2) прямі $x = 0$ і $y = x$; 3) прямі $x = 2$ і $x = -2$; 4) прямі $y = 3$ і $y = -3$;
 5) $y = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ 2x, & \text{якщо } x \geq 0; \end{cases}$ 6) пряма $x = 0$ та промені $y = 1$ для $x \geq 0$ і $y = -1$ для $x \leq 0$. 1225. 1) Так, (2; 0), (-2; 0); 2) Так; (0; 4). 1226. (8; 2). 1227. 1) (3; 0); 2) (0; -5). 1228. 69 і 64. В к а з і в к а. $\overline{6x} \cdot \overline{6y} = \overline{x6} \cdot \overline{y6}$, звідки $xy = 36$. 1229. У 1990 р. В к а з і в к а. Нехай Сергій народився в $\overline{19xy}$ році. Тоді в 2009 р. йому буде 2009 - $\overline{19xy}$, що за умовою дорівнює $(1 + 9 + x + y)$. 1230. $a = 10$. 1231. 1) $m = 2$ - немає розв'язків; $m \neq 2$ - єдиний розв'язок; 2) $m = 3$ - безліч розв'язків; $m \neq 3$ - немає розв'язків; 3) $m = 1$ - безліч розв'язків; $m \neq 1$ - єдиний розв'язок. 1232. $a = -7$. 1233. 1) $x = 5$, $y = 3$, $z = 0$. В к а з і в к а. Додати почленно всі рівняння системи; 2) $x = -1$, $y = 8$, $z = -3$. 1234. $a = -2$; $b = -1$; $-8x^5 + 11x^2 + 11x - 8$. 1235. 1) (1; 2), (0,6; 2,4); 2) (2; 2), (3; 3), (-1; 2), (-1; 7); 3) (2; 2), (1; -1). 1236. 1) (2; 6); 2) (-4; -8); 3) $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$; 4) (-10; -5); 5) (2; -1);

6) $(-3; -3)$. 1237. $a = 52; b = 57,2; c = 44$. 1238. Брату зараз 10 років, сестрі – 6 років. 1239. 46. 1240. 742. 1241. 240 і 360. 1242. 500 кг піску; 420 кг цементу. 1243. 5 см; 15 см; 12 см. 1244. 26 см. 1245. 7 кг першого зливку, 3 кг другого зливку. 1246. 12 км. 1247. 630 л; 840 л. 1248. Швидкість автобуса 45 км/год, таксі – 75 км/год. 1249. Швидкість кожного з автобусів 42 км/год, велосипедиста – 18 км/год. 1250. 4,5 км/год; 16,5 км/год. В к а з і в к а. Якщо x км/год – швидкість туриста, а y км/год – швидкість велосипедиста, то маємо систему

$$\begin{cases} 1 \frac{5}{6} x = \frac{1}{2} y, \\ 3 \frac{1}{3} x + 2y = 48. \end{cases} \quad 1251. 18 \text{ км/год; } 42 \text{ км/год; } 72 \text{ км/год. Вка-}$$

зівка. Якщо позначити швидкість велосипедиста x км/год, швидкість першого автобуса – y км/год, тоді швидкість другого –

$$\frac{7}{12} y \text{ км/год. Матимемо систему } \begin{cases} 1 \frac{1}{3} (x + y) = 120, \\ 2 \left(x + \frac{7}{12} y \right) = 120. \end{cases}$$

1252. 30 м/с і 20 м/с.

Відповіді до завдань «Домашня самостійна робота»

Завдання \ Робота	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	В	Г	А	Б	В	Б	В	Г	В	А	Б	В
2	А	Г	Б	Б	В	А	В	Б	Б	А	В	Г
3	Г	Б	Г	В	В	А	Г	Б	Г	В	А	В
4	Б	А	В	Г	В	А	Г	Б	В	А	Г	Б
5	Г	Б	Г	В	А	Г	В	Б	Б	В	Г	А

Відповіді до «Вправ на повторення курсу математики 5–6 класів»

1. 1) 1; 175; 2) 12; 144; 3) 6; 6930; 4) 5; 300. 2. 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{3}{7}$; 3) $\frac{2}{11}$; 4) $\frac{11}{13}$. 3. 1) 6; 2) $6\frac{10}{13}$; 3) $11\frac{7}{10}$; 4) $19\frac{29}{78}$; 5) $4\frac{7}{12}$; 6) $2\frac{31}{36}$. 4. 1) $\frac{1}{10}$; 2) 9; 3) $12\frac{1}{4}$; 4) $1\frac{1}{2}$; 5) $2\frac{1}{3}$; 6) $1\frac{1}{8}$. 5. 104 гриби. 7. 12 см. 8. 9) 55; 10) -6; 11) $-\frac{1}{20}$; 12) 2. 9. 1) 3; 2) -4,5. 10. 30 грн.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Аргумент 131

Винесення спільного множника за дужки 64

Вирази зі змінними 6

Властивості рівняння з двома змінними 185

– з однією змінною 166

– степеня з натуральним показником 24–26

Графік лінійної функції 149

– рівняння $ax + by = c$ 190

– з двома змінними 188

– функції 140

Графічний спосіб задання функції 142

– розв'язування систем 194

Двочлен 46

Доведення тотожностей 13

Дробовий раціональний вираз 6

Залежна змінна 131

Зведення подібних членів многочлена 46

Значення функції 131

– числового виразу 5

Квадрат різниці 83

– суми 82

– числа 17

Коефіцієнт лінійної функції 149

– лінійного рівняння 170, 184

– одночлена 32

Корінь рівняння 165

Куб числа 17

Лінійна функція 149

Лінійне рівняння з двома змінними 184

– з однією змінною 169

Математична модель задачі 130

Многочлен 46

– стандартного вигляду 46

Множення многочлена на многочлен 70

– одночлена на многочлен 58

– одночленів 35

Незалежна змінна 131

Неповний квадрат різниці 102

– суми 103

Нуль функції 141

Область визначення функції 131

– значень функції 131

Одночлен 31

– стандартного вигляду 32

Основа степеня 17

Основна властивість степеня 24

Піднесення до степеня 17

– одночлена до степеня 35

Подібні члени многочлена 46

Показник степеня 17

Почленне додавання 206

Правило ділення степенів 24

– множення степенів 24

– піднесення до степеня добутку 26

– степеня до степеня 25

Пряма пропорційність 151

Раціональний вираз 6

Рівносильні рівняння з двома змінними 184

– з однією змінною 166

– системи рівнянь з двома змінними 201

Рівняння 165

– з двома змінними 184

– з однією змінною першого степеня 170

Різниця квадратів 98

– кубів 103

– многочленів 52

Розв'язання рівняння 166

Розв'язок рівняння 165

– з двома змінними 184

– системи рівнянь з двома змінними 194

Розкладання многочлена на множники 64

Система рівнянь 194

– лінійних рівнянь з двома змінними 194

Спосіб групування 76

– додавання 206

– підстановки 201

Спрощення виразу 12

Стандартний вигляд многочлена 46

– одночлена 32

Степінь з натуральним показником 17

– многочлена 47

– одночлена 32

Сума кубів 102

– многочленів 52

Табличний спосіб задання функції 133

Тотожні вирази 11

– перетворення виразів 12

Тотожність 12

Тричлен 46

Формули скороченого множення 82, 83, 94, 103

Функція 131

Цілий раціональний вираз 6

Числове значення виразу 5

Числові вирази 5

Члени многочлена 46