Міністерство освіти і науки України
Департамент освіти і науки
Хмельницької облдержадміністрації
Хмельницьке територіальне відділення МАН України
Славутська районна філія

Відділення: математика
Секція: прикладна математика

ЗОЛОТИЙ ПЕРЕРІЗ
ТА ЧИСЛА ФІБОНАЧЧІ

Роботу виконала:
Фаткіна Софія Андріївна,
учениця 7 класу Клепачівського навчально-виховного комплексу «дошкільний навчальний заклад – школа I-II ступенів Ганнопільської сільської ради Славутського району Хмельницької області

Педагогічний керівник:
Фаткін Максим Андрійович,
вчитель математики Клепачівського навчально-виховного комплексу «дошкільний навчальний заклад – школа I-II ступенів Ганнопільської сільської ради Славутського району Хмельницької області

Клепачі – 2018

Золотий переріз та числа Фібоначчі

Фаткіна Софія Андріївна

Славутська районна філія Малої академії наук України

Клепачівський навчально-виховний комплекс «дошкільний навчальний заклад – школа I-II ступенів» Ганнопільської сільської ради Славутського району Хмельницької області, 7 клас

с. Клепачі

Фаткін Максим Андрійович, вчитель математики Клепачівського навчально-виховного комплексу «дошкільний навчальний заклад – школа I-II ступенів» Ганнопільської сільської ради Славутського району Хмельницької області

Метою роботи є дослідження властивостей золотого перерізу й чисел Фібоначчі, встановлення закономірних зв'язків між ними, а також вивчення застосування в рослинному світі, мистецтві й архітектурі, опис пропорцій людського тіла; вивчити вплив законів геометрії на сприйняття законів краси та гармонії в рослинному світі, розкрити суть поняття «золотого перерізу» та його прояв і застосування в різних сферах діяльності людини.

Людина розрізняє оточуючі її предмети за формою. Інтерес до форми якого-небудь предмета може бути викликаний життєвою необхідністю або красою форми. Форма, в основі побудови якої лежить поєднання симетрії та золотого перерізу, сприяє якнайкращому зоровому сприйняттю і появі відчуття краси й гармонії. Ціле завжди складається з частин, частини різної величини знаходяться в певному відношенні один до одного і до цілого. Принцип золотого перерізу – це найвищий прояв структурної та функціональної досконалості цілого і його частин у мистецтві, науці, техніці та природі. Золотий переріз – це гармонійна пропорція.

Дана робота присвячена розгляду таких питань: що таке золотий переріз та його зв'язок із числами Фібоначчі, його прояви, формування, опис пропорцій людського тіла, використання в архітектурі, мистецтві, музиці та геометрії.

ЗМІСТ

ВСТУП

Великий математик пізнього середньовіччя монах Леонардо відомий як Фібоначчі виявився щасливчиком, який першим помітив цікаву послідовність чисел.

Послідовність Фібоначчі побудована таким чином, що кожен її член, починаючи з третього, є сумою двох попередніх членів. Відношення кожного попереднього числа до наступного наближається до 0,618 при збільшенні порядкового номера. Відношення кожного наступного числа до попереднього наближається до 1,618. Ці числа називають коефіцієнтами Фібоначчі або числом φ (фі), а в математиці використовується фраза «золотий переріз». Це такий пропорційний поділ відрізка на нерівні частини, при якому весь відрізок відноситься до більшої частини як більша частина до меншої ($\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}, a > b$).

Ряд Фібоначчі міг би залишитись лиш математичним казусом, якби не одна обставина: дослідники «золотого перерізу» в рослинному і тваринному світі постійно приходили до цього ряду, як до арифметичного вираження закону «золотого поділу».

Все, що набувало певної форми, створювалося, прагнуло зайняти місце в просторі і зберегти себе. Це прагнення знаходило відображення, в основному в двох варіантах: ріст вверх і розстилання по поверхні землі та закручення по спіралі. Галактики, Сонце, Земля, жива природа і сама людина існують в строгій відповідності з нею. Цікаво, що навіть люди, самі цього не підозрюючи, широко використовують цю формулу: дизайнери, фотографи, інженери чи вчені.

Складається враження, що вся флора і фауна, в тому ж числі і людина, розвиваються за законами, які закладені в цій числовій послідовності.

З тих пір, як Фібоначчі відкрив свою послідовність, були знайдені навіть явища природи, в яких ця послідовність відіграє велику роль. Одне з них – фітолаксис, або розміщення листків: правило, за яким розміщені, наприклад, зернята на квітці соняшника. Вони розташовані в два ряди спіралей, один із яких йде за годинниковою стрілкою, а другий – проти.

Та й взагалі в рослинному та тваринному світі вступає в дію принцип економії біологічної матерії та енергії і в той же час з першого погляду вловляються приємні для нашого погляду пропорції.

Наприклад, якщо придивитися уважно до основного стебла цикорію, то можна помітити, що бокові відростки відходять від нього через різні відстані, поділивши які один на одного знаходимо «золоту пропорцію». Довжина пелюсток також керується подібним принципом. Виявляється, що саме при такому розміщенні листків досягається максимум притоку сонячної енергії до рослини. Практично всі суцвіття і щільно упакованої структури рослини, такі як ананаси, кактуси, кедрові і соснові шишки, також строго відповідають числам Фібоначчі.

Цікаво те, що в більшості квітів кількість листків є числом із послідовності Фібоначчі. Помічено, що в ящірки довжина хвоста так відноситься до довжини решти тіла як 60 : 37. Бездоганна форма бабки, яка також створена за законами «золотої пропорції»: відношення довжин хвоста і корпусу дорівнює відношенню загальної довжини до довжини хвоста. Тут чітко прослідковуються прогресивні процеси: процес росту та розвитку.

Ці співвідношення виявлені і в будівництві пірамід у ацтеків, в різноманітних храмах і в раковинах.

Архімед, використовуючи це співвідношення, побудував спіраль, яка увійшла в історію як «спіраль Архімеда». Найдивовижнішим є те, що за законом «спіралі Архімеда» утворюються вихорі, циклони і, навіть, галактики.

Тяжко повірити, що математик 800 років тому відкрив найважливіше математичне вираження природних явищ із всіх коли-небудь відкритих, що демонструє один із найвеличніших замислів природи. Спосіб життя в безкінечному розширенні та стисканні, статичний закон, що керує динамічним процесом.

Бактерії розмножуються в прогресії, яку можна накреслити у вигляді спіралі Фібоначчі, метеорити, врізаючись в поверхню Землі, формують впадини, які співвідносяться зі спіраллю Фібоначчі. Соснові шишки, морські коники, раковини равликів та молюсків, хвилі океанів, папоротники, роги тварин, спіраль ДНК, хмари вихрової бурі та галактики відкритого космосу скручуються в спіраль Фібоначчі.

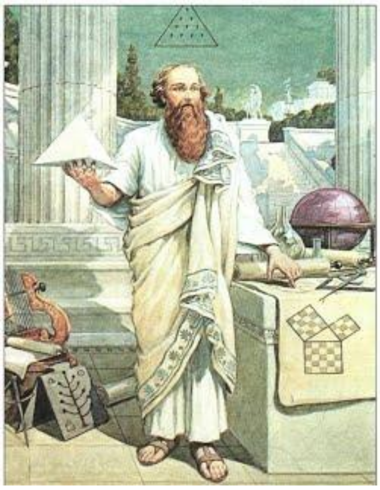
Вічність часу і світові роки космосу розділяють соснову шишку і спіральну галактику, але будова залишається тією ж.

Коефіцієнт 1,618, можливо, першочерговий закон, який керує активними природними явищами. Послідовність Фібоначчі – абсолютно нормальне явище, до якого ми звикли і навіть не помічаємо.

А що, якби все, що нас оточує складалося із чисел Гауса і з’являлося шляхом випадкових формул? Не є таємницею, що всі ми стали б бридкими, як і все навколо.

Якщо задуматись над тим, як злагоджено працюють числа Фібоначчі, то приходить усвідомлення, що це ідеальна формула для створення і підтримки живого та неживого існування. І якщо це так, то постає запитання: ця формула з’явилася випадково чи її не тільки хтось створив, але й успішно застосував?

ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ «ЗОЛОТОГО ПЕРЕРІЗУ»



Прийнято вважати, що поняття «золотого перерізу» увів Піфагор, давньогрецький філософ і математик (VI ст. до н. е.). Але є припущення, що Піфагор своє знання «золотого перерізу» запозичив у єгиптян та вавилонян.

І дійсно, пропорції піраміди Хеопса, храмів, барельєфів, предметів і прикрас із гробниці Тутанхамона свідчать, що єгипетські майстри користувалися співвідношеннями «золотого перерізу» при їх створенні.

Французький архітектор Ле Корбюзьє показав, що в рельєфі із храму фараона Абідосі і в рельєфі, що зображує фараона Рамзеса, пропорції фігур відповідають величинам «золотого перерізу». Зодчий Хесира, зображений на рельєфі дерев'яної дошки з гробниці його імені, тримає в руках вимірювальні інструменти, в яких зафіксовані пропорції «золотого перерізу.

Відомо, що греки були великими майстрами геометрії. Навіть арифметиці навчали своїх дітей за допомогою геометричних фігур. Квадрат Піфагора і діагональ цього квадрата були підставою для побудови динамічних прямокутних. Платон (427-347 рр. до н. е.) також знав про «золотий переріз». Його діалог «Тімей» присвячений математичним і естетичним поглядам «школи Піфагора» і, зокрема, питанням «золотого перерізу».

Досить цікавою архітектурною пам'яткою є Парфенон. Якщо зробити розподіл храму по «золотому перерізу», то отримаємо ті чи інші виступи фасаду. При його розкопках виявлені циркулі, якими користувалися архітектори і скульптори античного світу. У помпейському циркулі (музей у Неаполі) також закладені пропорції «золотого перерізу».

В античній літературі «золотий переріз» вперше згадується в «Началах» Евкліда. У другій книзі «Начал» дається геометрична побудова «золотого перерізу». Після Евкліда дослідженням «золотого перерізу» займалися Гіпсікл (II ст. до н.е.), Папп (III ст. н. е.) та інші. У середньовічні Європі перші знання про «золотий переріз» здобули в арабських перекладах «Начал» Евкліда. Перекладач Дж. Кампано із Наварри зробив до перекладу коментарі. Секрети «золотого перерізу» старанно оберігалися, зберігалися у суворій таємниці. Вони були відомі тільки посвяченим.

В епоху Відродження посилюється інтерес до «золотого перерізу» серед учених і художників у зв’язку із його застосуванням як у геометрії, так і в мистецтві, особливо в архітектурі. Леонардо да Вінчі, художник і вчений, бачив, що в італійських художників великий емпіричний досвід, але брак знань. Він почав писати книгу з геометрії, але в цей час з’явилася книга ченця Луки Паччолі і Леонардо залишив свій задум. На думку сучасників та істориків, Лука Паччолі був справжнім світилом, найкращим математиком Італії в період між Фібоначчі та Галілеєм. Лука Паччолі прекрасно розумів значення науки для мистецтва.

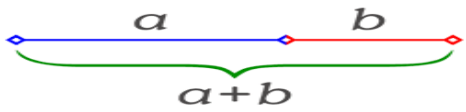
У 1496 році на запрошення герцога Моро він приїжджає в Мілан, де читає лекції з математики. У Мілані при дворі Моро у той час працював і Леонардо да Вінчі. У 1509 році у Венеції біла видана книга Паччолі «Божественна пропорція» з блискуче виконаними ілюстраціями, через що вважають, що їх зробив Леонардо да Вінчі. Серед багатьох переваг «золотої пропорції» чернець Лука Паччолі не забув назвати і її «божественну суть» як вираження божественної триєдності: бог син, бог батько і бог дух святий (малося на увазі, що малий відрізок є уособленням бога сина, більший відрізок – бога батька, а весь відрізок – бога духу святого). Леонардо да Вінчі багато уваги приділяв вивченню «золотого перерізу». Він робив перерізи стереометричного тіла, утвореного правильними п’ятикутниками, і щоразу отримував прямокутники з відношенням сторін у золотому поділі. Тому він дав цьому поділу назву «золотий переріз».

У той же час на півночі Європи, в Німеччині, над тими ж проблемами працював Альбрехт Дюрер. Він робить нариси до першого варіанту трактату про пропорції. Дюрер пише: «Необхідно, щоб той, хто що-небудь уміє, навчив цього інших, які це потребують. Це я і намірився зробити». Альбрехт Дюрер детально розробляв теорію пропорцій людського тіла. Важливе місце у свої системі співвідношень учений відводив «золотому перерізу». Зріст людини ділиться в золотих пропорціях лінією поясу, а також лінією, проведеною через кінчики середніх пальців опущених рук, нижня частина обличчя – устами тощо. Відомий пропорційний циркуль Дюрера.

У наступні століття правило золотої пропорції перетворилося на академічний канон. Та з часом наука дещо занепала, внаслідок чого про «золотий переріз» забули. Знову «відкрито» «золотий переріз» було в середині XIX століття. У 1855 році німецький дослідник «золотого перерізу» Цейзинг опублікував свою працю «Естетичні дослідження». Він оголосив пропорцію «золотого перерізу» універсальною для всіх явищ природи і мистецтва. У Цейзинга були численні послідовники, але й були противники, які оголосили його вчення про пропорції «математичною естетикою». Дослідження «золотого перерізу» продовжуються і в наш час.

МАТЕМАТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ЗОЛОТОГО ПЕРЕРІЗУ

Дві величини утворюють золотий перетин, якщо співвідношення їх суми і більшої величини дорівнює співвідношенню більшої і меншої. Це відношення прийнято позначати грецькою літерою φ.



Золотий перетин вважається співвідношенням найвідповіднішим естетичному сприйняттю зображення, вперше запропонованим грецьким математиком Евклідом. Вживається в мистецтві й архітектурі найчастіше як золотий прямокутник. Золотий прямокутник утворюється при поділі відрізка AB в такій точці O, що площа прямокутника, одною стороною якого є весь відрізок, а іншою – менший з відрізків, дорівнює площі квадрата з більшим відрізком як стороною($|AB| \cdot |OB| = |AO|^2$). Це рівняння має єдиний розв'язок: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887498948 4 \ldots$ Відношення двох відрізків приблизно дорівнює$13{:}\,8$.

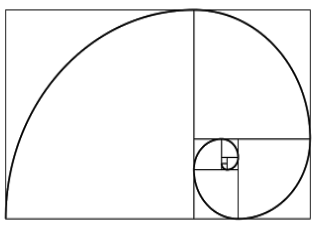
Золотий перетин є границею відношення двох сусідніх членів у послідовності Фібоначчі: $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$. При цьому члени послідовності $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ збігаються до φ поперемінно – один елемент знизу, наступний згори і т. д.

Наприклад: $\frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} = 1{,}6 < \varphi < \frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8} = 1{,}625.$

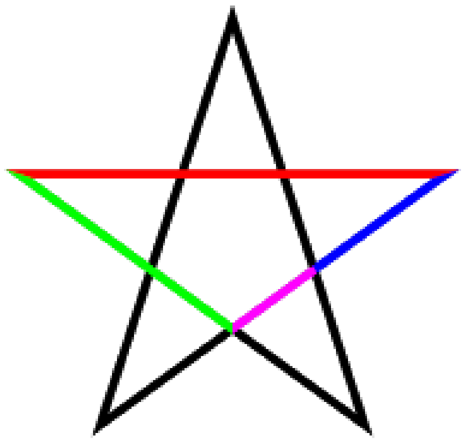
Формула Біне виражає за допомогою φ значення числа Фібоначчі F_n в явному вигляді: $F_n = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\varphi - (-\varphi)^{-1}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \approx \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} (n \geq 1).$

Окрім цього, послідовні степені числа φ задовольняють рекурентне співвідношення ідентичне до чисел Фібоначчі: $\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$.

Спіраль Фібоначчі є наближенням золотої спіралі.



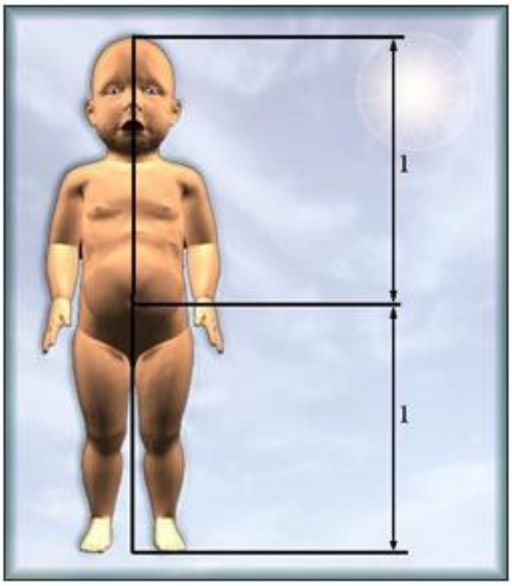
Золотий перетин виступає у правильній пентаграмі, яка вважалася магічним символом у багатьох культурах. Точки перетину сторін ділять їх у золотій пропорції. Більша частина сторони також ділиться у золотій пропорції іншою точкою перетину. Пентаграма містить п’ять гострокутних та п’ять тупокутних золотих трикутників. У кожному з них співвідношення довжини довшої та коротшої сторони утворює золотий перетин (Червоний : Зелений = Зелений : Синій = Синій : Фіолетовий = φ).



ПРОПОРЦІЇ ЛЮДИНИ В УЯВЛЕННІ ЛЮДЕЙ РІЗНИХ ЕПОХ

Альбрехт Дюрер детально розробив теорію пропорцій людського тіла. Важливе місце в своїй системі співвідношень він відводив золотому перерізу. Зріст людини ділиться в золотих пропорціях лінією поясу, а також лінією проведеною через кінчики середніх пальців опущених рук і т.д.

Професор Цейзінг у цьому напрямі також виконав величезну роботу. Він обміряв близько двох тисяч людських тіл і дійшов висновку, що золотий переріз виражає середній статистичний закон. Ділення тіла точкою пупа – найважливіший показник золотого перерізу. Цікаво, що пуп ділить тіло новонародженого на дві рівні частини, і пропорції тіла лише поступово, до часу завершення росту, досягають свого кінцевого розвитку, що відповідає золотої пропорції. Пропорції чоловічого тіла коливаються в межах середнього відношення 13 : 8 =1,625 і ближче підходять до золотого перерізу, ніж пропорції жіночого тіла, для якого середнє значення пропорції виражається співвідношенням 8 : 5 = 1,6. у новонародженого таке відношення становить 1 : 1, до 13 років воно дорівнює 1,6, а до 21 року, залежно від статі.



У різні епохи та в різних народів уявлення про ідеальні пропорції тіла були різними. Найбільш наближеним до золотої пропорції вважався грецький канон. У додатку я показала як розвивалися уявлення про красу людського тіла протягом різних епох.

ПРИКЛАДИ З ПРИРОДИ

У біологічних дослідженнях 1970-90рр. показано, що починаючи з вірусів, рослин і закінчуючи організмом людини, всюди проявляється золота пропорція, яка характеризує співрозмірність і гармонійність їхньої будови. Золотий переріз визнаний універсальним законом живих систем.

Числа Фібоначчі виявляються в морфології різних організмів. Наприклад морські зірки. Число променів у них відповідає ряду чисел Фібоначчі і рівне 5,8,13,21,34,55. У добре знайомого комара - три пари ніг, черевце ділиться на вісім сегментів, на голові п’ять вусиків – антен. Личинка комара членується на 12 сегментів. Число хребців у багатьох домашніх тварин рівне 55.

Придивімося уважно до цикорію. Від основного стебла утворився відросток. Тут же розташувався перший листок.

Відросток робить сильний викид у простір, зупиняється, випускає листок, але вже коротше першого, знову робить викид у простір, але вже меншої сили, випускає листок ще меншого розміру й знову викид. Якщо перший викид прийняти за 100 одиниць, то другий рівний 62 одиницям, третій - 38, четвертий - 24 і т.д. Довжина пелюсток теж підпорядкована золотої пропорції. У зростанні, завоюванні простору рослина зберігала певні пропорції. Імпульси його росту поступово зменшувалися в пропорції золотого перерізу.

У ящірки довжина її хвоста так ставиться до довжини тіла, як $11:7 \approx 1{,}571 \approx$ $\approx 1{,}6$.

І в рослинному, і у тваринному світі наполегливо пробивається формотворна тенденція природи - симетрія щодо напрямку росту й руху. Тут золотий перетин проявляється в пропорціях частин перпендикулярно до напрямку росту.

Ще одним прикладом золотого поділу частин тіла живого організму є радіолярії. Це найпростіші планктонові морські тварини, які переважно живуть у Тихому та Індійському океанах. Будучи за розмірами менше 1 мм, вони мають побудовані з кремнезему або сірчасто-кислого стронцію кістяки, які набувають різноманітних правильних геометричних форм. Установлено, що серед кістяків радіолярій є всі п’ять видів правильних многогранників.

У багатьох метеликів співвідношення грудної та черевної частин тіла відповідає золотій пропорції. Склавши крила нічний метелик утворює правильний рівносторонній трикутник. Але варто йому розвести крила, і ви побачите принцип поділу тіла на 2, 3, 5, 8. Бабка теж створена за золотою пропорцією: відношення довжини корпуса до довжини хвоста дорівнює відношенню довжини хвоста до загальної довжини.

ЗАКОН ФІТОЛАКСИСУ

Розташування листків на стеблах рослин теж має строгий математичний характер. Це явище ботаніки називають фітолаксисом. Суть фітолаксису полягає у гвинтовому розташуванні листків на стеблах рослин, гілок на деревах, листків у суцвіттях. Якщо через якусь із бруньок молодого пагона рослини, який ми вважаємо зрізаним конусом, провести твірну, то вона на деякій відстані від цієї бруньки зустріне бруньку, яка розташована
так само, як і перша. Підрахувавши, скільки бруньок міститься на стеблі між цими бруньками і додавши до здобутого числа одиницю, дістанемо число, яке має назву листкового циклу. Кількість бруньок в одному циклі в молодому пагоні дуба 5, у пагона вишні 8; є рослини цикли яких мають 3,5,8,13,21 бруньку. Бруньки пагона містяться на однаковій відстані одна від одної. Сполучивши тепер послідовно бруньки одного циклу, дістанемо гвинтову лінію, яка між послідовними, однаково розташованими бруньками робить відповідно 1,2,3,5 витків. Якщо спроектувати бруньки гілки на площину, перпендикулярно висоті гілки, отримаємо кут, на який відхиляється кожна пара бруньок. Цей кут називається кутом розходження. Його можна обчислити за формулою:

$\alpha_m = \frac{360^0 \cdot n}{m}$, де n – кількість оборотів, m – кількість точок циклу.

Якщо, наприклад, від одного листка до листка який лежить точно над ним потрібно зробити три оберти навколо стебла і на цій ділянці зустріти 8 проміжків, то розташування листків характеризується дробом $\frac{3}{8}$. Такий дріб характеризує і кут розходження між двома сусідніми листками. Для даного прикладу цей кут становить 135^0. З цього зрозуміло, що дроби $\frac{3}{8}$ і $\frac{5}{8}$ характеризують тотожно рівне для обох випадків розташування листків, так як кут рівний $\frac{3}{8}$ обороту, доповнює до 360^0 кут, рівний $\frac{5}{8}$ обороту. Різні числа утворюються по тій причині, що в першому випадку гвинтова лінія йде справа наліво, у другому випадку зліва направо.

Вивчаючи гвинтову симетрію рослин , ботаніки виявили, що дроби, які характеризують гвинтові осі рослин, утворюють строгу математичну послідовність, яка складається з відношень сусідніх чисел Фібоначчі, а саме: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{5}{13}$; $\frac{13}{34}$. Отже, і листкові цикли, і кількість витків виражаються членами ряду Фібоначчі.

Провівши виміри розташування листків на кімнатних, а також окремих видів квітів, дерев і кущів, я переконалася у виконанні закону фітолаксису, а отже і правил золотої пропорції.

Виявилося, що для злаків, берези, винограду характерна вісь типу $\frac{1}{2}$; осоки, тюльпанів, вільхи – $\frac{1}{3}$; груші, смородини, сливи – $\frac{2}{5}$; капусти, редьки, льону – $\frac{3}{8}$, ялини, жасмину – $\frac{5}{13}$ тощо.

У чому причина таких закономірностей? Невже природа розміщує листки так, щоб милувати наше око? Ні, фітолаксис пояснюється простою доцільністю: саме при такому розташуванні листків рослина отримує найбільшу кількість сонячної енергії. Майже всі суцвіття і щільно упаковані ботанічні структури (соснові та кедрові шишки, ананаси, кактуси, насіння у соняшника) підлягають числам Фібоначчі, а отже, і золотому перерізу.

СПІРАЛІ

Все, що здобувало якусь форму, утворювалося, росло, прагнуло зайняти місце в просторі і зберегти себе. Характерною рисою будови рослин та їх розвитку є спіральність. Спірально закручуються вусики рослин, спірально наростають тканини стовбурів дерев, спіральні рухи (нутації) спостерігаються під час росту коріння та проростання сходів (паростків). Очевидно, в цьому проявляється спадковість організації рослин, а її коріння слід шукати на клітинному і молекулярному рівнях.

Дослідження показали, що рух протоплазми в клітині часто спіральний. Зростання клітин також може бути спіральним, як показав вчений Кастл. У рідкому середовищі клітини зустрічаються спіральні нитки волокон цитонем. І носії інформації, молекули ДНК, також скручені в спіраль. Термін «спіраль» не відбиває точно будова молекул ДНК; більш правильно говорити про гвинтове розташування поліпептидних ланцюгів у цій молекулі. Всі відомості про фізіологію живих істот зберігаються в мікроскопічній молекулі ДНК, будова якої також містить у собі закон золотої пропорції. Вона складається з двох вертикально переплетених між собою спіралей. Довжина кожної з цих спіралей становить 34 ангстрема, ширина 21 ангстрема. Так ось 21 і 34 – це числа , наступні один за одним у послідовності чисел Фібоначчі, тобто співвідношення довжини і ширини спіралі молекули ДНК несе в собі формулу золотого перетину 1 : 1,618.

Квітки і насіння соняшнику, ромашки, луски в плодах ананаса, хвойних шишках і т.д. « упаковані» по подвійних спіралях, що завиваються назустріч один одному. При цьому числа «правих» і «лівих» спіралей завжди відносяться один до одного, як сусідні числа Фібоначчі (13:8, 21:13, 34:21, 55:34). Подивимося на соснову шишку. Лусочки на її поверхні розташовані строго закономірно - по двох спіралях, які перетинаються приблизно під прямим кутом. Число таких спіралей у соснових шишок дорівнює 8 і 13, або 13 і 21.У кошиках соняшнику насіння також розташовані по двом спіралям, їх кількість становить зазвичай 34 і 55, 55 і 89. Тут знову ми бачимо закономірне поєднання чисел Фібоначчі, розташованих поруч 2/3, 3/5,5/8, 13/21 і т.д. Їхнє відношення прямує до φ=0,61803.Приклади подвійних спіралей, що зустрічаються всюди в природі, завжди відповідають цьому правилу.

Павук плете павутину спіралеподібно. Спіраллю закручується ураган. Перелякане стадо північних оленів розбігається по спіралі.

Форма спірально завитої раковини привернула увагу Архімеда. Він вивчав її і вивів рівняння спіралі. Спіраль, накреслена по цьому рівнянню, називається його іменем. Збільшення її кроку завжди рівномірно. В даний час спіраль Архімеда широко застосовується в техніці.

Якщо побудувати прямокутник зі сторонами, співвідношення яких буде рівне пропорції «золотого перетину», і вписати в нього ще один «золотий прямокутник», в той — ще один, і так до нескінченності всередину і назовні, то за кутовими точками прямокутників можна провести спіраль. Цікаво те, що така спіраль співпадатиме, за думкою деяких авторів, зі зрізом раковини Наутилуса, а також іншими спіралями, які поширені в природі.

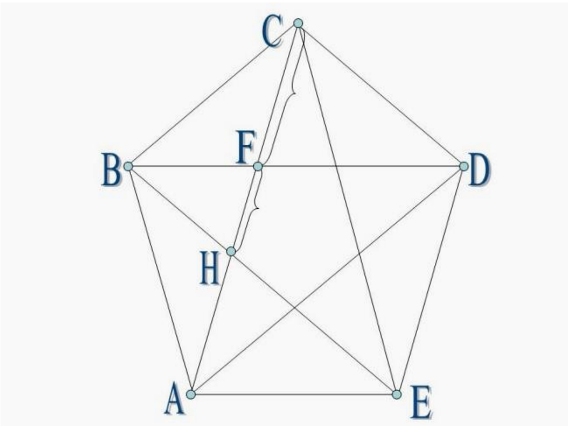
Два самих внутрішніх її вигини фактично рівні. Другий і третій вигини трохи ближче наближаються до φ. Потім, нарешті, виходить ця витончена плавна спіраль. Відношення другого члена до першого, третього до другого, четвертого до третього, і так далі. Буде зрозуміло, що молюск точно відповідає математиці ряду Фібоначчі.

Одним із варіантів пояснення таких частих проявів золотого перерізу в природі є асинхронний поділ клітин.

ПЕНТАГРАМА

Пентаграма (пентакль, п'ятикутна зірка) - один з часто використовуваних символів.

У пентаграмі CF:FH=CH:CF=AC:CH=1,618. Дійсні пропорції цього символу



засновані на священній пропорції, званій золотим перетином. Крім того, правильний п'ятикутник в центрі дозволяє стверджувати, що пропорції зберігаються і для нескінченно малих п'ятикутників. Ця *«божественна пропорція»* виявляється в кожному окремому промені пентаграми і допомагає пояснити той трепет, з яким математики у всі часи поглядали на цей символ. Причому, якщо сторона п'ятикутника рівна одиниці, то діагональ рівна 1,618.

Доведу ряд теорем, які доводять застосування золотого поділу у пентаграмі.

Теорема 1.*Сторона правильного вписаного десятикутника дорівнює більшій частині радіуса, поділеного у середньому та крайньому відношенні.*

Доведення. Нехай AB = a_{10}, тоді $\angle$ AOB = 36^0. Проведемо бісектрису AD у трикутнику AOB, тоді $\angle$ OAD= $\angle$ BAD=36^0, $\angle$ ADB =72^0.

За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника маємо: DO : BD = = AO : AB, але AB = AD і AD = DO, тому AB = DO; AO = BO і рівність відношень можна подати так: DO : BD = BO : DO, тобто відрізок BO (радіус) поділено у середньому та крайньому відношенні, причому DO = AB = a_{10}.

Ввівши позначення BO = R, DO = a_{10} (тоді BD = R – a_{10}), дістанемо:

a_{10} : (R – a_{10}) = R : a_{10}, $\frac{a_{10}}{(R-a_{10})} = \frac{R}{a_{10}}$ Звідки $a_{10}^2 + R\cdot a_{10} - R^2 = 0$.

Отже, $a_{10}= \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot R$

Розглянемо зручний спосіб побудови a_{10}, якщо відомий радіус R. Проведемо у колі два взаємно перпендикулярні діаметри. Радіус OB поділимо пополам точкою D.

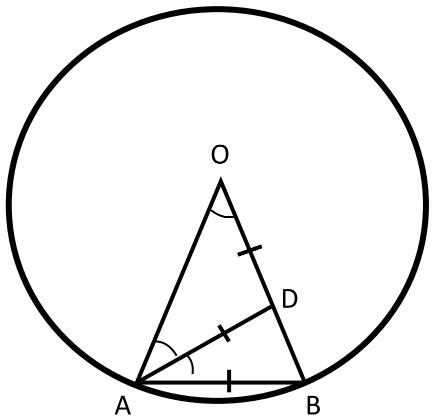
Тоді AD= $\sqrt{R^2+\frac{R^2}{4}}=\frac{R\sqrt{5}}{2}$. Відклавши ДС=ДО, дістанемо:

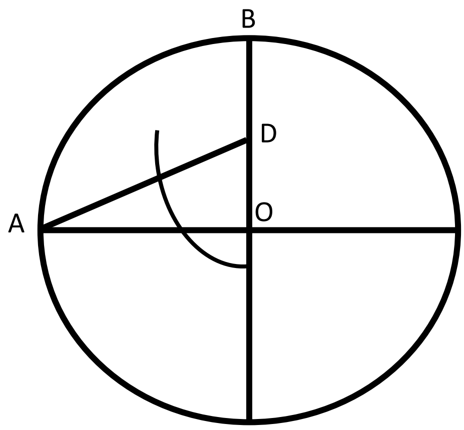
$$AC = \frac{R\sqrt{5}}{2}-\frac{R}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}R \text{ . Отже, } AC = a_{10}$$

Поділивши коло на 10 рівних частин та сполучивши точки поділу через одну, дістанемо правильний п'ятикутник.

Взявши до уваги, що $a_{10}= 2R\sin\frac{180^0}{10}=2R\sin 18^0$ і , $a_{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot R$ знайдемо $\sin 18^0=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

Подамо сторону правильного вписаного п'ятикутника через радіус описаного кола: $a_5 = 2\,\text{R}\sin\frac{180^0}{5} = 2\,\text{R}\sin 36^0 = 4\,\text{R}\sin 18^0\cdot\cos 18^0$





Знаючи, що $\cos 18^0=\sqrt{1-(\sin 18^0)^2}$, дістанемо $a_5 = \text{R}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$

Розглянемо деякі властивості правильного п'ятикутника (додаток І).

Теорема 2 Діагоналі правильного п'ятикутника при взаємному перетині поділяються у середньому та крайньому відношенні.

Теорема 3 Якщо провести усі 5 діагоналей правильного опуклого п'ятикутника, то дістанемо правильний зірчастий п'ятикутник

Теорема 4 Опуклий п'ятикутник, утворений у результаті перетину діагоналей даного правильного п'ятикутника, також правильний

В даний час існує гіпотеза, що пентаграма – первинне поняття, а «золотий перетин» вторинне. Пентаграму ніхто не винаходив, її тільки скопіювали з натури. Вид п'ятикутної зірки мають п'ятипелюсткові квіти плодових дерев і чагарників (квіти шипшини, глоду, гвоздики, груші, черемхи, яблуні, суниці та багатьох інших рослин), морські зірки. Наявність п’яти пальців на руці, на передніх кінцівках тварин («пентадактильність»), є додатковим прикладом п’ятикутних форм і пов’язаного з ними золотого перерізу в живій природі. Ті й інші створіння природи людина спостерігає вже тисячі років. Тому природно припустити, що геометричний образ цих об’єктів – пентаграма – стала відома раніше, ніж золота пропорція.

ВИСНОВКИ

Знайомство з принципами «золотого перерізу», допомогло мені краще побачити гармонію і доцільність оточуючих нас творінь природи і людини.

Я переконалась, що золотий перетин – це один з основоположних принципів природи; людське уявлення про красиве явно сформувалося під впливом того, який порядок і гармонію людина бачить у природі.

У своїй роботі я більше звернула увагу на використанні принципів «золотої пропорції» і подібності у живих організмах: рослинах, тваринах, людях. Експериментальним шляхом довела наявність золотої пропорції (або її наближеного значення) в будові тіла однокласників: хлопців і дівчат. Перевірила виконання закону фітолаксису у кімнатних рослинах (пальмі, традесканції), деревах і кущах (березі, ялині, груші, сливі, смородині) розташування лусочок шишки, насіння в соняшнику.

Надалі планую дослідити використання даної пропорції в інших сферах життя, зокрема в архітектурі, енергетиці.

Принцип золотого перетину – вищий прояв структурної і функціональної досконалості цілого і його частин у мистецтві, науці, техніці, природі. Ми лише відтворюємо з більшою або меншою мірою майстерності подібності досконалості форм життя, що оточують нас повсюдно.

Підсумовуючи досліджений матеріал можна зробити висновок, що головне чого я досягла, працюючи над роботою, це бачення практичного пояснення і застосування теоретичних знань, які я здобуваю на уроках математики, пояснення того, що математичні послідовності, зокрема послідовність Фібоначчі, правило «золотої пропорції» є не лише сухим математичним законом, а зустрічається у природі. І не просто зустрічається, а практично всі предмети живої і неживої природи побудовані за правилом золотої середини, яке дозволяє оптимально використати форму предмета.

Результати дослідницької роботи можуть бути використані як цікаві статті в наукових та природничих журналах, як доповнення до підручника з математики чи як допоміжний матеріал для курсової роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вірченко Н. Про красу математики//Математика – 2005. - №11 –с.1-3
2. Бендукидзе А.Д. Золотое сечение // Квант. – 1973. – №8 – с.22-27
3. Малис І.В. Подібність трикутників. Золотий переріз // Математика. – 2003 - № 34 – с.13-16
4. Попов Є.Д. Алгебраїчні властивості відношення золотого перерізу// У світі математики. – К. : Радянська школа, 1980 – Вип. 11 - с.74-88
5. Попов Є.Д. Геометричні властивості відношення золотого перерізу// У світі математики. – К. : Радянська школа, 1982 – Вип. 13 – с. 31-46
6. Клименченко Д.В. Золотий поділ і пентаграма.// У світі математики. – К. : Радянська школа, 1987 – Вип. 18 – с.164-169
7. Дарія Біда. Що таке золотий переріз? // Колосок. – Львів. – 2010. - № 4 – с.4-9

Додаток 1

ЛЕОНАРДО ФІБОНАЧЧІ

Леонардо Пізанський (близько 1170 р. – близько 1250 р.) – італійський математик XIII століття, автор математичних трактатів, завдяки яким Європа довідалася про вигадану індійцями позиційну систему числення, відому зараз як арабські цифри. Леонардо розглянув також ідею так званих чисел Фібоначчі і вважається одним з найвидатніших західних математиків Середньовіччя.

Леонардо Пізанський найбільше відомий під прізвиськом Фібоначчі. Існують різні версії походження цього псевдоніму. За однією з них, його батько Гільєрмо мав прізвисько Боначчі («Добромисний»), а сам Леонардо прозивався filius Bonacci («син Добромисного»). За іншою, Fibonacci походить від фрази Figlio Buono Nato Ci, що в перекладі з італійської означає «хороший син народився».

Життя і наукова кар'єра Леонардо тісно пов'язана з розвитком європейської науки та культури. Дата його народження достеменно невідома – називають варіанти 1170 або 1180 рік.

Батько Фібоначчі у торгових справах часто бував у Алжирі і Леонардо вивчав там математику в арабських учителів. Пізніше відвідав Єгипет, Сирію, Візантію, Сицилію. Леонардо вивчав праці математиків країн ісламу (таких як аль-Хорезмі та Абу Каміл). Завдяки арабським перекладам він ознайомився також з досягненнями античних та індійських математиків. На основі засвоєних ним знань Фібоначчі написав ряд математичних трактатів, що являють собою одне з видатніших явищ середньовічної європейської науки.

У часи Фібоначчі імператором Священної Римської імперії був Фрідріх II. Вихований у традиціях південної Італії Фрідріх II був внутрішньо глибоко далекий від європейського християнського лицарства. Тому лицарські турніри, які дуже цінував його дід, імператор зовсім не визнавав. Замість цього він культивував менш криваві математичні змагання, на яких супротивники обмінювалися не ударами, а задачами.

На одному з таких турнірів проявився талант Леонардо Фібоначчі. Цьому сприяла чудова освіта, яку отримав син купця Боначчі на Сході у арабських учителів.

Заступництво Фрідріха II сприяло також випуску наукових трактатів Фібоначчі: «Книга абака», «Практика геометрії», «Книга квадратів». За цими книгами, які перевершували за своїм рівнем арабські і середньовічні європейські твори, вивчали математику ледь не до часів Декарта (XVII століття).

Значну частину засвоєних ним знань він виклав у своїй видатній «Книзі абака» (Liberabaci, 1202; до наших днів зберігся тільки доповнений рукопис 1228 року). Ця книга містить всі арифметичні й алгебраїчні відомості того часу, викладені з винятковою повнотою та глибиною. Вона відіграла ключову роль у розвитку математики в Західній Європі протягом кількох наступних століть. Саме за цією книгою європейці познайомилися з арабськими цифрами.

Перші п’ять розділів книги присвячені арифметиці цілих чисел на основі десяткової системи числення. У шостій і сьомій главі Леонардо викладає дії зі звичайними дробами. У VIII – X розділах викладені прийоми розв’язування задач комерційної арифметики з використанням пропорцій. У XI главі розглянуті задачі на змішування. У XII – наводяться задачі на підсумовування рядів – арифметичної та геометричної прогресій, ряду квадратів і, вперше в історії математики, поворотного ряду, що у найпростішому випадку приводить до послідовності так званих чисел Фібоначчі. У XIII розділі викладається правило двох помилкових положень і ряд інших задач, що зводяться до лінійних рівнянь. У XIV главі Леонардо на числових прикладах роз’яснює способи наближеного добування квадратного і кубічного коренів. Нарешті, в XV – зібраний ряд завдань на застосування теореми Піфагора і велика кількість прикладів на квадратні рівняння.

«Практика геометрії» (Practicageometriae, 1220) містить різноманітні теореми, пов’язані з вимірювальним методом. Поряд із класичними результатами Фібоначчі наводить свої власні – наприклад, перше доведення того, що три медіани трикутника перетинаються в одній точці (Архімеду цей факт був відомий, але якщо доведення й існувало, то до нас воно не дійшло).

У трактаті «Квітка» (Flos, 1225) Фібоначчі досліджував задачу, яка в сучасних позначеннях зводиться до знаходження коренів кубічного рівняння $x^3 + 2x^2 + +10x = 20$, запропоновану йому Іоанном Палермським на математичному змаганні при дворі імператора Фрідріха II. Сам Іоанн Палермський майже напевно запозичив це рівняння з трактату Омара Хайяма «Про докази задач алгебри», де воно наводиться як приклад одного з видів у класифікації кубічних рівнянь. Леонардо Пізанський досліджував це рівняння, показавши, що його корінь не може бути раціональним або ж мати вигляд однієї з квадратичних ірраціональностей, що зустрічаються в X книзі Начал Евкліда, а потім знайшов наближене значення кореня в шістдесяткових дробах, не вказуючи, проте, способу свого розв’язку.

«Книга квадратів» (Liberquadratorum, 1225) містить ряд задач на знаходження розвитку невизначених квадратних рівнянь. В одному із завдань, також запропонованому Іоанном Палермським, потрібно було знайти раціональне квадратне число, яке, будучи збільшеним або зменшеним на п’ять, знову дає раціональні квадратні числа.

У Пізі, в монастирі історичного кладовища, є статуя Леонардо з написом: Ampere Leonardo Fibonacci Insigne Matematico Pisano del Secolo XII. Зображення є витвором художньої уяви, оскільки ні портрету Леонардо, ні детального опису його зовнішності, зробленого його сучасниками, не збереглося. Статуя була встановлена з ініціативи двох членів тимчасового уряду колишнього великого герцогства Тоскана, Козімо Рідолфі та Беттіно Рікасолі, які домоглися утвердження указу про фінансування статуї 23 вересня 1859 року. Роботу над статуєю доручили флорентійському скульптору Джованні Пагануччі, і він виконав завдання у 1863 році. Статуя була поміщена в Пізі на Кампо-Санто, де знаходиться могила Леонардо.

У 1926 році, коли при владі в Італії перебували фашисти, влада вирішила перенести пам’ятник Леонардо та дві статуї інших відомих громадян міста Пізи з безлюдних місць на кладовищі й поставити в громадських місцях, де їх було б добре видно. Статуя Леонардо була розміщена в південній частині Понтеді Меццо. Під час Другої світової війни, у 1944 році, місто було зруйноване у битві за Пізу, а статуя потрапила на склад. У 1950 році вона була відновлена і тимчасово розміщена у парку Джардіно Скотто біля східного входу до старого міста. Тільки в 1990-х роках адміністрація Пізи прийняла рішення відновити статую і розмістити її на своєму колишньому місці в Кампо-Санто.

Іменем Фібоначчі названо астероїд 6765 Фібоначчі.

Принцип, закладений у процедурі отримання послідовності Фібоначчі, широко використовується в математиці й програмуванні.

У математиці відома тотожність Брамагупти – Фібоначчі, яку отримав індійський математик Брамагупта і описав у «Книзі квадратів» Леонардо Пізанський.

Фібоначчі познайомив Європу із позиційною системою числення, однак існує система числення Фібоначчі, в основі якої лежить послідовність Фібоначчі.

Додаток 2

НАЙВІДОМІШІ ЗАДАЧІ ЛЕОНАРДО ФІБОНАЧЧІ

Залишаючись прихильником математичних турнірів, основну роль у свої книгах Фібоначчі надає задачам, їх розв'язкам та коментарям. Задачі на турніри складали як сам Леонардо, так і його суперник, придворний філософ Фрідріха II Іоанн Палермський. Задачі Фібоначчі або їх аналоги у подальшому використовувались у різних підручниках з математики протягом декількох століть. Їх можна зустріти в «Сума арифметики, геометрії, дробів, пропорцій і пропорційності» Л. Пачіолі (1494), в «Приємних і цікавих задачах» Клода Гаспара Баше де Мезір'яка (1612), в «Арифметиці» Леонтія Магніцького (1703), в «Алгебрі» Леонарда Ейлера (1768).

Ось приклади таких задач.

Задачі про гирі. Завдання про вибір найкращої системи гир для зважування на важільних терезах вперше була сформульована саме Фібоначчі. Леонардо Пізанський пропонує два варіанти завдання:

1. Простий варіант: потрібно знайти п'ять гир, за допомогою яких можна знайти вагу меншу ніж 30, при цьому гирі можна класти лише на одну чашу терезів. (Відповідь: 1, 2, 4, 8, 16). Розв'язок будується в двійковій системі числення.

2. Складний варіант: потрібно знайти найменше число гир, за допомогою якого можна зважити вагу меншу від заданої. (Відповідь: 1, 3, 9, 27, 81, …). Розв'язок будується в системі числення з основою три, і в загальному випадку є послідовність A009244 з Енциклопедії послідовностей цілих чисел.

Задача про птахів і вежі. Дві пташки одночасно злітають з вершин двох веж, що знаходяться на відстані 50 м. висота однієї вежі становить 30 м, а другої – 40 м. При польоті з однаковою швидкістю пташки долітають одночасно до фонтану, що розташований на лінії, проведеній через дві вежі (на рівні поверхні ґрунту). На якій відстані від основ веж знаходиться фонтан?

Задача про купця з Пізи. Пізанський купець під час торговельної подорожі до Венеції подвоїв там свій стартовий капітал, а за тим витратив 12 динарів. Потім подався до Флоренції, де знову подвоїв число своїх динарів і потратив 12. Після повернення до Пізи черговий раз подвоїв свій статок, витратив 12 динарів і … залишився без копійки. Скільки динарів він мав на початку?

Задача про трьох чоловіків і знайдений гаманець. Три чоловіки знайшли гаманець із 23 динарами. Перший каже другому: «Якщо я додам ці гроші до своїх, то буду мати суму, що буде у два рази більшою від тієї, що є у тебе». Другий аналогічно звернувся до третього: «Якщо я зараз візьму ці гроші собі, буду мати суму у три рази більшу від твоєї». На кінець третій каже до першого: «Якщо я додам ці гроші до своїх, то буду мати суму у чотири рази більшу ніж у тебе». Скільки динарів мав кожен з них?

Загадка пана з Палермо. Три придворних слуги мали свою частку в сумі грошей у касі: доля першого становила половину, другого – третину, а третього – шосту частину. Кожен з них взяв зі спільної каси гроші не зовсім чесно так, що каса залишилась порожньою. Далі перший з них повернув половину того, що взяв, другий – третину, а третій – шосту частину. Отриману суму було розділено на три однакові частини і роздано кожному з трьох слуг. Виявилось, що кожен з них мав точно стільки, скільки йому належало. Скільки грошей було у касі спочатку і яку суму взяв кожен зі слуг?

Задача про спадщину. Чоловік, що помирав, покликав своїх синів і сказав найстаршому: «Візьми одного динара з моїх статків і сьому частину від того, що залишиться». Другому сину каже: «Візьми собі два динари і сьому частину того, що залишиться». До третього: «візьми три динари і сьому частину того, що залишиться». І так далі – кожному наступному синові записував на один динар більше від попереднього і сьому частину залишку. Після поділу статків виявилося, що всі сини отримали порівну. Скільки було синів і яким був спадок?

Задачі з теорії чисел:

1. Знайти число, яке ділиться на 7 і дає в залишку 1 при діленні 2, 3, 4, 5 і 6.

2. Знайти число, добуток якого на 7 дає залишки 1, 2, 3, 4 і 5 при діленні на 2, 3, 4, 5 і 6 відповідно.

3. Знайти квадратне число, яке при збільшенні або зменшенні на 5 давало б квадратне число.

Додаток 3

ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ ЧИСЕЛ ФІБОНАЧЧІ

У XIII столітті Леонардо Пізанський розв'язав таку задачу: «Фермер годує кроликів. Кожен кролик народжує одного кролика, коли йому стає два місяці, а потім дає потомство в один кролик кожен місяць. Скільки кроликів буде у фермера через n місяців, якщо спочатку в нього був лише один (вважаємо, що кролики не гинуть і кожен народжений дає потомство за вище описаною схемою)?

Очевидно, що першого та другого місяця у фермера залишається один кролик, оскільки потомства ще немає. На третій місяць буде два кролики, оскільки перший через два місяці народить другого кролика. На четвертий місяць перший кролик дасть ще одного, а другий кролик потомства не дасть, оскільки йому ще тільки один місяць. Отож на четвертий місяць буде три кролики.

Можна помітити, що кількість кроликів після n-ого місяця дорівнює кількості кроликів які були у $n-1$ місяці, плюс кількість народжених кроликів. Останніх буде стільки, скільки є кроликів, що дають потомство, або дорівнює кількості кроликів, яким вже виповнилося два місяці (тобто, кількості кроликів після $n-2$ місяця).

Якщо через F_n позначити кількість кроликів після n-ого місяця, то має місце таке рекурентне співвідношення: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_1 = F_2 = 1$.

Покладемо $F_0 = 0$, при цьому співвідношення при $n = 2$, залишиться істинним. Таким чином утворюється послідовність $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...$.

В послідовності, яка отримала назву від імені Леонардо Фібоначчі, можна помітити такі властивості:

1. Найбільший спільний дільник двох чисел Фібоначчі дорівнює числу Фібоначчі з індексом, який дорівнює найбільшому спільному дільнику індексів, тобто $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$.

2. F_m ділиться на F_n тоді й тільки тоді, коли m ділиться на n (за винятком $n = 2$).

3. Кожне третє число Фібоначчі парне ($F_3 = 2, F_6 = 8, F_9 = 34$).

4. Кожне четверте ділиться на три ($F_4 = 3, F_8 = 21, F_{12} = 144$).

5. Кожне п'ятнадцяте закінчується нулем ($F_{15} = 610$).

6. Два сусідніх числа Фібоначчі взаємно прості.

7. F_m може бути простим тільки для простих m (за єдиним винятком $m = 4$, що пов'язано з тим, що $F_2 = 1$). Зворотне твердження невірне: $F_{19} = 4181 = 37 \times \times 113$, хоча 19 – просте число. Тепер невідомо, чи існує нескінченно багато простих чисел Фібоначчі.

8. Використовуючи рекурентне співвідношення у вигляді $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$ можна поширити визначення чисел Фібоначчі і на від'ємні індекси:

$$F_0 = 0, F_{-1} = 1, F_{-2} = -1, F_{-3} = 2, F_{-3} = -3, F_{-4} = 5, \ldots$$

Неважко переконатися, що $F_{-n} = (-1)^{n+1} \cdot F_n$, тобто одержуємо таку саму послідовність із знаками, що чергуються.

Додаток 4

МАГІЯ ЧИСЕЛ ФІБОНАЧЧІ

Для чого ми вивчаємо математику? По суті є три причини: розрахунки, застосування і останнє, на жаль, найменш важливе з точки зору часу, який ми їй приділяємо, це натхнення. Математика – це наука про моделі і ми вивчаємо її, щоб навчитися мислити логічно, критично та творчо. Було б чудово, якби ми хоч інколи займалися математикою тому, що це весело і красиво або тому, що вона хвилює розум. Як, наприклад, послідовність Фібоначчі.

Ці числа можуть бути пояснені різними способами. З точки зору обчислень їх також легко зрозуміти. Так, 1+1=2, 1+2=3, 2+3=5, 3+5=8 і т. д.:

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 …

Насправді, людина, яку ми називаємо Фібоначчі мав ім’я Леонардо із Пізи. Ці числа з’являються в його книзі LiberAbaci, яка навчила західний схід методам арифметичних операцій, які використовуються сьогодні.

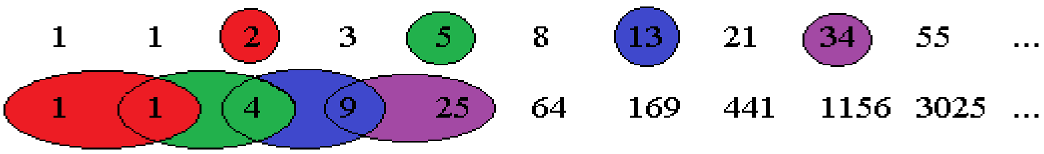
З точки зору застосування числа Фібоначчі з’являються в природі на диво часто. Кількість пелюсток на квітці це типове число Фібоначчі, кількість спіралей на соняшнику чи ананасі також тяжіють до чисел Фібоначчі.

Насправді, є набагато більше застосувань чисел Фібоначчі. Але найдивовижнішими, на мою думку, є прекрасні числові зразки, які вони демонструють.

Наприклад, піднесемо до квадрату ці числа:

1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	…
1	1	4	9	25	64	169	441	1156	3025	…

Відомо, що при додаванні послідовних чисел Фібоначчі ми отримуємо наступне число Фібоначчі. Але ми не очікуємо нічого цікавого при додаванні чисел Фібоначчі. Але давайте придивимося детальніше: 1+1=2, 1+4=5, 4+9=13, 9+25=34 і так, шаблон повторюється.



Практично, тут є ще один шаблон. Проаналізуємо суми квадратів деяких чисел Фібоначчі:

$$1+1+4=6;$$

$$1+1+4+9=15;$$

$$1+1+4+9+25=40;$$

$$1+1+4+9+25+64=104.$$

Тепер поглянемо на ці числа. Вони не є числами Фібоначчі, але якщо придивитися до них уважніше, то можна побачити, що числа Фібоначчі приховані в середині них. Що ми бачимо:

$$1+1+4=6=2\times3;$$

$$1+1+4+9=15=3\times5;$$

$$1+1+4+9+25=40=5\times8;$$

$$1+1+4+9+25+64=104=8\times13.$$

Усі множники є числами Фібоначчі.

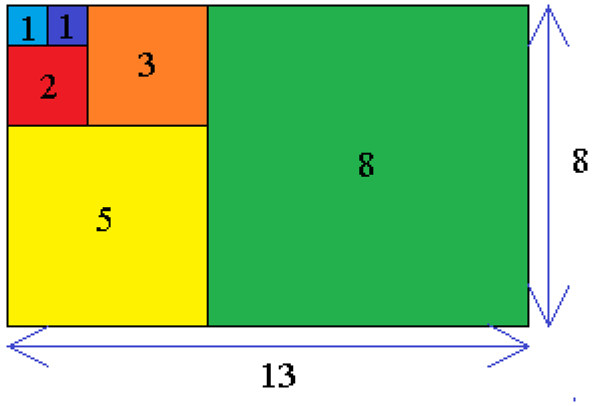
Побачити ці шаблони було цікаво, але ще більше задоволення зрозуміти, чому вони є справжніми. Давайте поглянемо на останню рівність:

$$1+1+4+9+25+64=104=8x13.$$

Чому квадрати чисел 1, 1, 2, 3, 4 і 8 дорівнюють добутку чисел 8 і 13:

$$1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2=8\times13?$$

Це можна пояснити, намалювавши просту картину. Почнемо з квадрату одиниці і поряд із ним ще один квадрат одиниці. Разом вони утворюють прямокутник 1×2. Нижче поставимо квадрат 2×2. Потім – квадрат 3×3. Під ним – квадрат 5×5. Потім квадрат 8×8. Отримуємо один великий прямокутник. Обчислимо площу даного прямокутника: з одного боку, це сума площ квадратів в середині нього, з іншого – оскільки це прямокутник, то його площа дорівнює добутку його сусідніх сторін. Його ширина дорівнює 8, а довжина – 5+8=13, а це наступне число Фібоначчі, тобто $S=8\times13$. Так як ми обчислювали одну і ту ж площу двома різними способами, то й результати повинні бути рівними. Ось чому квадрати чисел 1, 1, 2, 3, 5 і 8 складаються в добуток 8×13. Якщо ми продовжимо цей процес, то створимо прямокутники 13×21, 21×34 і т. д.



$$S = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 = 8 \times (5 + 8) = 8 \times 13 = 104.$$

Тепер поглянемо на це:

8×13

13×21

21×34

34×55

55×89

13:8=1,625

21:13=1,615…

34:21=1,619…

55:34=1,6176…

89:55=1,61818…

Як видно, усі ці частки стають все ближче й ближче до числа 1,618033…, яке відоме багатьом людям, як «золотий переріз» - число, яке вражало математиків, вчених та художників на протязі багатьох століть.