

Тригонометричні рівняння і нерівності

Тригонометричні рівняння, які зводяться до алгебраїчних



Приклад

Розв'язати рівняння $2 \sin^2 x - 7 \sin x + 3 = 0$.

$$\sin x = t, t \in [-1; 1]; \quad 2t^2 - 7t + 3 = 0; \quad t_1 = 3, t_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\sin x = \frac{1}{2}. \quad x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$



Приклад

Розв'язати рівняння $\sin x - 3 \cos 2x = 2$.

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x.$$

$$\sin x - 3(1 - 2 \sin^2 x) - 2 = 0; \quad 6 \sin^2 x + \sin x - 5 = 0;$$

$$\sin x = t, t \in [-1; 1]; \quad 6t^2 + t - 5 = 0; \quad t_1 = -1, t_2 = \frac{5}{6}.$$

$$\begin{cases} \sin x = -1, \\ \sin x = \frac{5}{6}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^n \arcsin \frac{5}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$



Приклад

Розв'язати рівняння $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x + 4 = 0$.

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = t. \quad \operatorname{tg}^2 x + 2 + \operatorname{ctg}^2 x = t^2;$$

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = t^2 - 2.$$

$$t^2 - 2 + 3t + 4 = 0; \quad t^2 + 3t + 2 = 0; \quad t_1 = -1, t_2 = -2.$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -1, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2; \end{cases} \quad \operatorname{tg} x = -1; \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$



Однорідні рівняння

Рівняння виду $a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + \dots + a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0$, де $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ - дійсні числа, які одночасно не дорівнюють нулю, $n \in \mathbb{N}$, називають *однорідним тригонометричним рівнянням n - го степеня* відносно $\sin x$ і $\cos x$.

$$2 \sin x - 3 \cos x = 0,$$

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0,$$

$$2 \cos^2 x - \sin^2 x = 0.$$



Приклад

Розв'язати рівняння $\cos 3x + \sin 3x = 0$.

$$\cos 3x = 0 \Rightarrow \sin 3x \neq 0 \Rightarrow \cos 3x + \sin 3x \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z} - \text{не корінь.}$$

$$\sin 3x = -\cos 3x;$$

$$3x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} 3x = -1;$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$



Приклад

Розв'язати рівняння $7 \sin^2 x - 8 \sin x \cos x - 15 \cos^2 x = 0$.

$\cos x = 0 \Rightarrow \sin x \neq 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ - не корінь.

$$\frac{7 \sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{8 \sin x \cos x}{\cos^2 x} - \frac{15 \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0.$$

$$7 \operatorname{tg}^2 x - 8 \operatorname{tg} x - 15 = 0;$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = -1, \\ \operatorname{tg} x = \frac{15}{7}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \operatorname{arctg} \frac{15}{7} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$



Приклад

Розв'язати рівняння $3 \sin^2 x + \sin 2x = 2$.

$$3 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 2(\cos^2 x + \sin^2 x),$$

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 2 = 0,$$

$$x = \operatorname{arctg}(-1 \pm \sqrt{3}) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$



Приклад

Розв'язати рівняння $2 \sin x - 3 \cos x = 2$.

$$4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 3 \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 2 \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right),$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} + 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 5 \cos^2 \frac{x}{2} = 0;$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Rightarrow t^2 + 4t - 5 = 0;$$

$$t_1 = 1, t_2 = -5;$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$x = -2 \operatorname{arctg} 5 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$





Алгебра

Задачі:

1. Розв'язати рівняння $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.
2. Розв'язати рівняння $\sin x - \cos x = 0$.
3. Розв'язати рівняння $2 \cos^2 x + \sin 2x - 2 = 0$.
4. Розв'язати рівняння $3 \sin x - 8 \cos x = 3$.



Відповіді:

1. $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

2. $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

3. $\pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

4. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, -2 \operatorname{arctg} \frac{11}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

