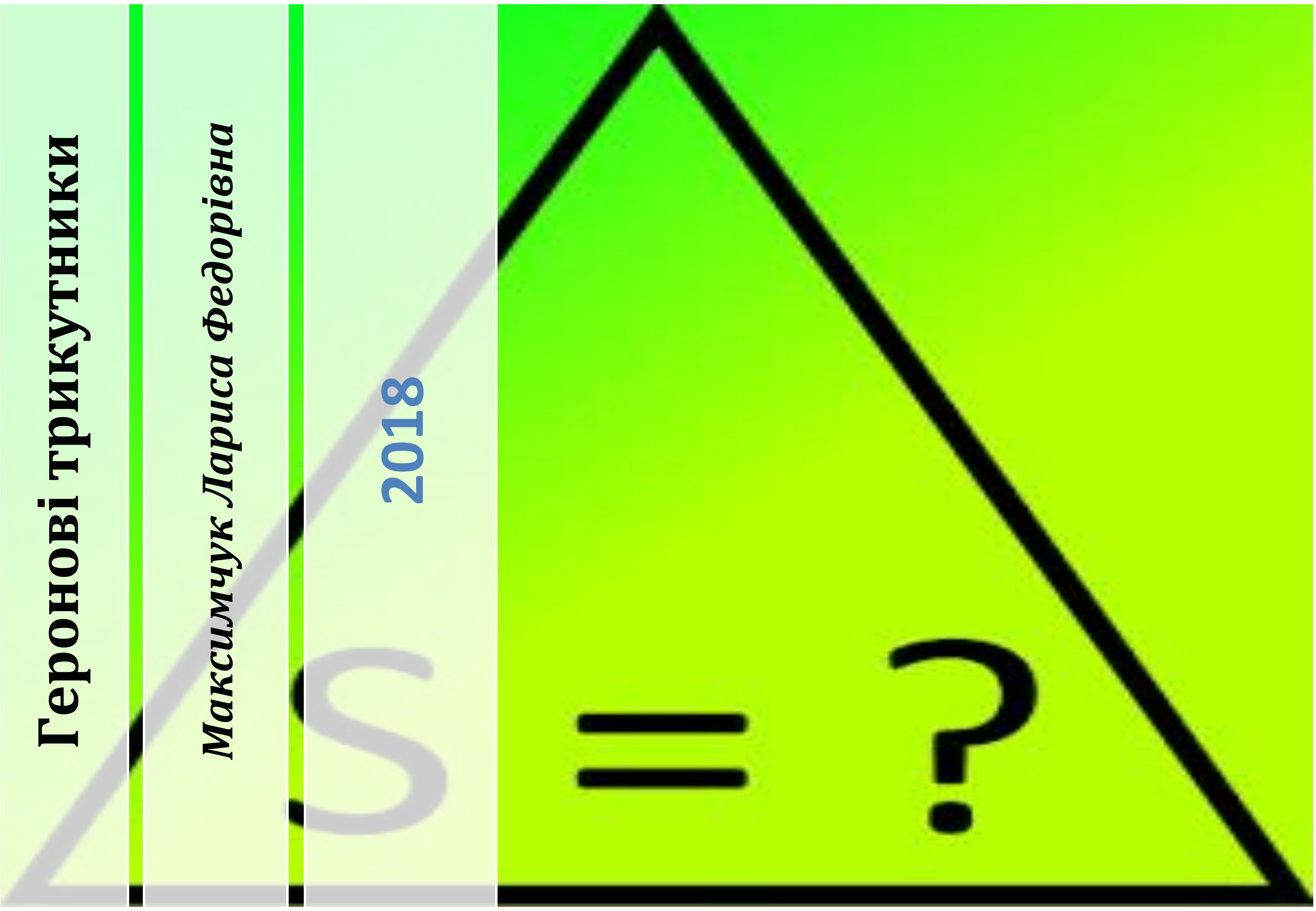


Навчальний посібник для вчителів математики, студентів педагогічних вищих навчальних закладів та учнів

***Максимчук Лариса Федорівна,***
***вчитель математики***
***Ленковецької загальноосвітньої школи  І-ІІІ ступенів***
***Ленковецької сільської ради***
***Шепетівського району***
***Хмельницької області***
***спеціаліст вищої категорії***

**БІБЛІОГРАФІЧНІ ПОКАЗНИКИ**

Автор: ***Максимчук Лариса Федорівна***, *вчитель математики Ленковецької загальноосвітньої школи I-III ступенів Ленковецької сільської ради Шепетівського району Хмельницької області, освіта – вища, вища кваліфікаційна категорія, педагогічний стаж 36 років.*

Навчальний посібник « Геронові трикутники »

Адреса досвіду: *Хмельницька область, Ленковецька ОТГ, село Ленківці, вулиця Шкільна 2-А. тел. 0965572422, e.mail lenkiwtsi@.ukr.net*

Анотація:

При аналізі шкільних задач, науково – популярної літератури, Інтернет – ресурсів можна переконатися у відсутності єдиного ефективного шляху пошуку геронових трикутників, зокрема , рівнобедрених чи прямокутних з певними наперед визначеними параметрами. Задання виведених формул для знаходження геронових трикутників спеціального виду – це економія часу та зменшення зусиль на їх пошук. А створений програмний продукт підштовхне користувача до самостійного пошуку трикутників Герона.

Посібником можуть скористатися педагоги-практики, студенти педагогічних ВНЗ, учні.

СХВАЛЕНО

Методичною радою Ленковецької загальноосвітньої школи I-III ступенів
Ленковецької сільської ради Шепетівського району Хмельницької області
Протокол №1 від 14.02.2018р.

# Вступ

Трикутник є основою побудови багатьох геометричних фігур, які є математичними моделями предметів навколишнього середовища. Трикутники, в яких довжини сторін і площа є цілими числами, називають трикутниками Герона.

Тому розробка алгоритму знаходження геронових трикутників спеціального виду, зокрема, прямокутних, рівнобедрених; створення програмного додатку для знаходження сторінгеронових трикутників є метою даного посібника.

При аналізі шкільних задач, науково – популярної літератури, Інтернет – ресурсів можна переконатися у відсутності єдиного ефективного шляху пошуку геронових трикутників, зокрема , рівнобедрених чи прямокутних з певними наперед визначеними параметрами. Задання виведених нами формул для знаходження геронових трикутників спеціального виду – це економія часу та зменшення зусиль на їх пошук. А створений програмний продукт підштовхне користувача до самостійного пошуку трикутників Герона.

На базі розробленого автором алгоритму планується розширення меж пошуку геронових трикутників.

ЗМІСТ

# ВСТУП

Трикутник є основою побудови багатьох геометричних фігур, які є математичними моделями предметів навколишнього середовища. Починаючи, зокрема, від стовпів високовольтних електроліній і завершуючи складними архітектурними спорудами. Трикутники, в яких довжини сторін і площа є цілими числами, називають трикутниками Герона.

Формування трикутників з наперед заданими параметрами у геометрії, як і створення речовин із наперед заданими характеристиками у фізиці, є вимогою сьогодення. Результати даного посібника, можливо, на певних етапах дозволять пришвидшити цей процес.

Викликає зацікавленість перевірка належності до геронових трикутників найбільш відомих «географічних трикутників» та дієвості програми для знаходження площі трикутників за формулою Герона, виявленої на сайті Інтернет – ресурсів (Додаток Б). У посібнику удосконалено алгоритм пошуку прямокутних трикутників з наперед заданою довжиною одного з катетів; вперше виведено формулу для пошуку рівнобедрених геронових трикутників; самостійно складено програму пошуку сторін геронових трикутників ( Додаток В); виведено удосконалені формули для знаходження сторін прямокутних трикутників з наперед заданими параметрами з алгоритму знаходження трикутників з цілочисловими довжинами та площею, що виражається цілим числом.

Було здійснено апробацію складеної програми для пошуку сторін геронових трикутників, яка пройшла успішно і може бути рекомендована для її практичної реалізації.

```
Program (a,b,c);
varx,y,z:integer;
a,b,c:integer;
begin
write(‘x,y,z’);
readln(x,y,z);
a:=x*(y*y+z*z);
b:=y*(x*x+z*z);
```

```
c:=(x-y)*(x*y+z*z);
wrireln (‘a=’,a)
writeln(’b=’,b)
writeln(’c=’,c);
end.
```

## РОЗДІЛ 1
## ДОСЛІДЖЕННЯ МОЖЛИВОСТІ АЛГОРИТМІЗАЦІЇ ПОШУКУ ВСІХ ПРИМІТИВНИХ ТРИКУТНИКІВ ГЕРОНА

### 1.1. Історичні витоки проблеми

Трикутники, в яких довжини сторін і площа – цілі числа, називають трикутниками Герона.Класичними прикладами таких трикутників є трикутники із сторонами 3,4,5 і 5,12,13. Трикутник зі сторонами (*а,в,с*) називають примітивним, якщо числа *а,в,с* є взаємопростими. Тому і надалі числа*а,в,с* називатимемо героновими, а трикутники, довжини сторін яких дорівнюють*а,в,с,*- трикутниками Герона.

Названі вони так в честь Герона Александрійського (прибл. I ст. н. е.). Герон – відомий давньогрецький учений – енциклопедист і винахідник. Ученого часто називали «Герон - механік», бо його праці мали прикладне спрямування. Він працював для архітекторів, винахідників і інженерів. Його книга «Метрика» (вчення про вимірювання) у трьох частинах стала знаменитою працею з геометрії. Саме у книзі I містяться правила вимірювання площ. І, хоча формула для знаходження площі трикутника через довжини його сторін була відома Архімеду, Герон цю формулу довів геометрично за допомогою вписаного кола. У книзі «Геометрика», подібній за змістом до попередньої, наведено лише застосування правил до розв'язування конкретних задач, при цьому самі твердження не доводяться і навіть не формулюються в загальному випадку. Кожний приклад ілюструється певним числом випадків із різними числовими даними.

Інтерес до праць Герона виник у III ст.. н. е.. Грецькі, а потім і візантійські й арабські вчені вдосконалили і переклали доробки Герона. Крім Архімеда та Герона, багато інших науковців різних років та народів шукали закономірності у відношеннях сторін та площ трикутників, справедливо вважаючи трикутники основою інших фігур.

При появі ЕОМ появилася можливість знаходити геронові трикутники швидше і ефективніше, ніж «вручну». У 1989 році українські науковці

М.Ю.Корнілов та В.В. Плахотник склали програму для пошуку трикутників Герона. Ця програма – генератор знаходить і фіксує в регістрах пам'яті трійку чисел Герона і одночасно обчислює і фіксує в регістрах пам'яті площу відповідного трикутника. Програма дає можливість шукати трійки Герона з дедалі зростаючою величиною кожного з них. Кожна окрема трійка випробовувалась близько 20 секунд. Оскільки від однієї геронової трійки чисел до наступної машина перебирає довгий ряд негеронових чисел, то програма працювала довго. Наприклад, числа (17;25;26) появились через 44 секунди, числа(17;25;28) - через 20 секунд, а числа (17;28;39) – через 10 хвилин.

Програму , яка допомагає обчислити площу будь – якого трикутника за формулою Герона опубліковано в Інтернет - ресурсах 2011 року( Додаток Б).

Сучасні ЕОМ працюють швидше, але потрібні нові, більш ефективні, програми пошуку геронових трикутників. Тому ми створили свою програму пошуку сторін геронових трикутників на основі формул для знаходження довжин сторін трикутника Герона, яка є більш досконалою.

## 1.2. Формули для знаходження довжин сторін трикутника Герона

Теорема 1. Нехай $x,y,z$ – довільні натуральні числа ( $x > y$ ) і виконується співвідношення $a=x(y^2+z^2)$, $в=y(x^2+z^2)$, $c=(x-y)(xy+z^2)$, тоді трикутник, довжини сторін якого дорівнюють $a,в,c$,є героновим.

Доведення. Знайдемо $p=(a+в+c)=(x(y^2+z^2)+y(x^2+z^2)+(x-y)(xy+z^2))=$
$=(xy^2+xz^2+yx^2+yz^2+x^2y+xz^2-xy^2-yz^2)=(2xz^2+2x^2y)=x(xy+z^2)$,тоді $p-a=$
$=xy(x-y)$, $p-в=z^2(x-y)$, $p-c=y(xy+z^2)$. Оскільки знайдені числа додатні, а $p-a=$
$=(в+c-a)$, $p-в=(a+c-в)$, $p-c=(a+в-c)$, то $a+в>c, a+c>в$, $в+c>a$, що є необхідною і достатньою умовою існування трикутника з сторонами $a,в,c$. Обчислимо площу цього трикутника за формулою Герона

$S=$. $S=xyz(x-y)(xy+z^2)$ – ціле число. Отже, трикутник із заданими таким чином довжинами сторін є героновим.

Зауваження: маючи такий трикутник і довільне натуральне число $n$, можна знайти подібний йому трикутник із сторонами ($na,nв,nc$).Доведемо це.

Теорема 2. Для довільного геронового трикутника зі сторонами *а,в,с* існує такий трикутник зі сторонами $a_1$, $в_1$, $c_1$подібний до заданого, що довжини його сторін можна обчислити за формулами $a_1=x(y^2+z^2)$,
$в_1=y(x^2+z^2)$, $c_1=(x-y)(xy+z^2)$, де *x,y,z*–натуральні числа.

Доведення . Нехай задано трикутник із сторонами *а,в,с* і площею *S* . Надамо числам *x, y,z*таких значень: $x=(a+в+c)(в+c-a)$,$y=(a+в-c)(в+c-a)$,
$z=4S$ і знайдемо числа $a_1=x(y^2+z^2)$, $в_1=y(x^2+z^2)$, $c_1=(x-y)(xy+z^2)$. Матимемо:
$=(a+в+c)(в+c-a)^2((a+в-c)^2(в+c-a)^2+16S^2)$,
$=(a+в-c)(в+c-a)((a+в+c)^2(в+c-a)^2+16S^2)$,
$=(в+c-a)((a+в+c)(a+в-c)(в+c-a)^2+16S^2)$. За формулою Герона
$16S^2=(a+в+c)(в+c-a)(a+c-в)(a+в-c)$, звідки
$=(a+в+c)(в+c-a)^2(a+в-c)[(a+в-c)(в+c-a)+(a+в+c)(a-в+c)]=$
$=(a+в+c)(в+c-a)^2(a+в-c)(-a^2+aв+ac-aв+в^2+вc+ac-вc-c^2+a^2-aв+ac+aв-$
$-в^2+вc+ac-вc+c^2)=(a+в+c)(в+c-a)^2(a+в-c)4ac=4c(a+в+c)(в+c-a)^2(a+в-c)a,$
$=(a+в+c)(в+c-a)^2(a+в-c)[(a+в+c)(в+c-a)+(a+в-c)(a-в+c)]=$
$=(a+в+c)(в+c-a)^2(a+в-c)(aв+ac-a^2+в^2+вc-aв+вc+c^2-ac+a^2+aв-ac-aв-$
$-в^2+вc+ac+вc--c^2)=(a+в+c)(в+c-a)^2(a+в-c)4вc=4c(a+в+c)(в+c-a)^2(a+в-c)в,$
$=2c(в+c-a)^2(a+в+c)(a+в-c)[(в+c-a)+(a-в+c)]=2c(в+c-a)^2(a+в+c)(a+в-c)2c=$
$=4c(в+c-a)^2(a+в+c)(a+в-c)c.$

Отже, $a_1=an$, $=вn$, $=cn$, де $n=4c(в+c-a)^2(a+в+c)(a+в-c)$,тобто трикутник із сторонами,,подібний до заданого. Очевидно, що знайдений трикутник є трикутником Герона, бо його площа дорівнює $n^2S$ , що потрібно було довести.

Теорема 3. Якщо *а,в,с,n* – натуральні числа і існує трикутник Герона з сторонами *an,вn,cn*, то трикутник зі сторонами *а,в,с* також буде трикутником Герона.

Доведення. Нехай площа трикутника з довжинами сторін *an,вn,cn* дорівнює S, тоді за формулою Герона дістанемо: $S^2=p(p-a)(p-в)(p-c)$,де $p=(a+в+c)$:2, тому $=1/n^2\cdot$S. З цієї рівності видно, що площа трикутника із сторонами *а,в,с* є раціональним числом $1/n^2\cdot$S, тому щоб довести теорему, досить показати, що число $p(p-a)(p-в)(p-c)$ – ціле. Якщо число $a+в+c$ – парне, тоді числа $a+в-c=(a+в+c)-$
$2c,$

$a - в + c = (a+в+c) - 2в$, $в + c - a = (a+в+c) - 2a$ також парні, тобто всі числа $p$, $p - a$, $p - в$ і $p - c$ – цілі і теорему доведено.

Припустимо, що числа $a+в+c$, $a+в-c$, $a-в+c$, $в+c-a$ – непарні , тоді $\varphi^2=(a+в+c)(a+в-c)(a-в+c)(в+c-a)$ – непарне ціле число, де $\varphi=4/n^2\cdot S$.

$\varphi^2=(a^2+aв-ac+в^2+aв-вc+ac+cв-c^2)(aв+ac-a^2-в^2-вc+aв+вc+c^2-ac)=$

$=(a^2+2aв+в^2-c^2)(-a^2-в^2+2aв+c^2)=2a^2в^2+2a^2c^2+2в^2c^2-a^4-в^4-c^4$. Оскільки $(a+в+c)$ –непарне, то можливі два випадки: 1) одне з чисел $a,в,c$ – непарне, а два інші – парні; 2) всі числа $a,в,c$ – непарні .

Якщо $a$ і $в$ – парні, а $c$ – непарне, то $\varphi^2+$ ділиться на 4, хоча сума квадратів двох непарних чисел не ділиться на 4. У випадку 2 скористаємось тим, що квадрат кожного з непарних чисел $\varphi$, $a^2,в^2,c^2$ при діленні на 4 дає остачу 1, тому число $\varphi^2+a^4+в^4c^4$ділиться на 4, що неможливо, бо тоді числа $a,в,c$ – непарні, а число $a^2в^2+a^2c^2+в^2c^2$ ділиться на 2. Тому наше припущення про непарність $a,в,c$ – невірне. Теорему доведено.

Отже, алгоритм відшукання всіх примітивних трикутників Герона випливає саме з теорем 1 – 3. І він такий:

1) беремо будь - яку трійку $(x,y,z)$ таких натуральних чисел при умові, що $x > y$;

2) знаходимо числа $=x(y^2+z^2)$, $=y(x^2+z^2)$, $=(x-y)(xy+z^2)$;

3) знаходимо найбільший спільний дільник $d$ цих чисел;

4) знаходимо $a=:d$, $в=:d$, $c=:d$, тоді $a,в,c$ – довжини сторін примітивного трикутника Герона і будь – який примітивний трикутник Герона можна знайти в такий спосіб.

Справді , з теореми 1 випливає, що трикутник зі сторонами , $в_1$, трикутник Герона, а за теоремою 3 і трикутник зі сторонами $a,в,c$ – трикутник Герона, а $d$ – НСД чисел $a,в$ і $c$, то трикутник зі сторонами $a,в,c$ – примітивний трикутник Герона.

Отже, за допомогою даного алгоритму можна знайти довільний примітивний трикутник, спеціально вибравши початкові числа $x,y,z$, причому їх можна обирати так, щоб вони не мали спільного дільника, крім 1.

За допомогою даного алгоритму ми знайшли геронові трикутники зі сторонами: 21,85,104 при $x$=5, $y$=4,$z$=1; 7,15,20 при $x$=3, $y$=2,$z$=1; інші (див. Додаток А).

За допомогою даного алгоритму складено таблицю елементів трикутників Герона і виявлено закономірності у відношеннях певних елементів.

## 1.3. Порівняльний аналіз елементів геронових трикутників

Таблиця 1.1

Елементи геронових трикутників

| Натуральні числа (x>y) | | | Сторони трикутника | | | *p,* півпериметр | S, Площа | Подібні трикутники | | | | Вид трикутника |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | Коефіцієнтподібності | Сторони трикут - ника | | | |
| *x* | *y* | *z* | *a* | *в* | *c* | | | *k* | $a_1$ | $в_1$ | $c_1$ | |
| 2 | 1 | 1 | 4 | 5 | 3 | 6 | 5 | | | | | Прямокутн. |
| 2 | 1 | 2 | 10 | 8 | 6 | 12 | 24 | 2 | 5 | 4 | 3 | Прямокутн. |
| 3 | 1 | 1 | 6 | 10 | 8 | 12 | 24 | 2 | 3 | 5 | 4 | Прямокутн. |
| 3 | 2 | 1 | 15 | 20 | 7 | 21 | 42 | | | | | |
| 3 | 2 | 2 | 24 | 26 | 10 | 30 | 120 | 2 | 12 | 13 | 5 | Прямокутн. |
| 3 | 2 | 3 | 39 | 36 | 15 | 45 | 270 | 3 | 13 | 12 | 5 | Прямокутн. |
| 4 | 1 | 1 | 8 | 17 | 15 | 20 | 60 | | | | | Прямокутн. |

Продовж. табл. 1.1

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 1 | 20 | 34 | 18 | 36 | 144 | 2 | 10 | 17 | 9 | |
| 4 | 1 | 2 | 20 | 20 | 24 | 32 | 192 | 4 | 5 | 5 | 6 | Рівнобедр. |
| 4 | 2 | 2 | 32 | 40 | 24 | 48 | 384 | 8 | 4 | 5 | 3 | Прямокутн. |
| 4 | 1 | 3 | 40 | 25 | 39 | 52 | 468 | | | | | |
| 4 | 1 | 4 | 68 | 32 | 60 | 80 | 960 | 4 | 17 | 8 | 15 | Прямокутн. |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 3 | 52 | 50 | 34 | 68 | 816 | 2 | 26 | 25 | 17 | |
| 4 | 2 | 4 | 80 | 64 | 48 | 96 | 1536 | 16 | 5 | 4 | 3 | Прямокутн. |
| 4 | 3 | 1 | 40 | 51 | 13 | 52 | 156 | | | | | |
| 4 | 3 | 2 | 52 | 60 | 16 | 64 | 384 | 4 | 13 | 15 | 4 | |
| 4 | 3 | 3 | 72 | 75 | 21 | 84 | 756 | 3 | 24 | 25 | 7 | Прямокутн. |
| 4 | 3 | 4 | 100 | 96 | 28 | 112 | 1344 | 4 | 25 | 24 | 7 | Прямокутн. |
| 4 | 1 | 5 | 104 | 41 | 87 | 116 | 1740 | | | | | |
| 4 | 2 | 5 | 116 | 82 | 66 | 132 | 2640 | 2 | 58 | 41 | 33 | |
| 8 | 2 | 4 | 160 | 160 | 192 | 256 | 12288 | 32 | 5 | 5 | 6 | Рівнобедр. |
| 4 | 3 | 5 | 136 | 123 | 37 | 148 | 2220 | | | | | |
| 5 | 4 | 1 | 85 | 104 | 21 | 105 | 420 | | | | | |
| 5 | 1 | 1 | 10 | 26 | 24 | 30 | 120 | 2 | 5 | 13 | 12 | Прямокутн. |
| 5 | 1 | 5 | 130 | 50 | 120 | 150 | 3000 | 10 | 13 | 5 | 12 | Прямокутн. |

Отже, порівняльний аналіз елементів таблиці 1.1 дає змогу виявити певні закономірності:

1. Якщо $x$=z або $y$=z, то отримуємо прямокутний трикутник.

2. Якщо *x, y,z* – попарно взаємно прості числа, то отримуємо примітивні геронові трикутники.

3. Якщо $x:y:z$ = 4:1:2, то отримуємо рівнобедрені геронові трикутники.

# РОЗДІЛ 2
# ЗВ'ЯЗОК ТРИКУТНИКІВ ГЕРОНА З ТРИКУТНИКАМИ РІЗНИХ ВИДІВ

## 2.1. Зв'язок трикутників Герона з прямокутними трикутниками

Теорема 4. Якщо у формулах для знаходження сторін геронових трикутників виконується умова $x=z$ або $y$=z, то отримуємо прямокутний трикутник. Тобто трикутниками Герона будуть усі прямокутні трикутники, в яких довжини сторін є цілими числами.

Доведення. Підставимо у формули $a=x(y^2+z^2)$, $в=y(x^2+z^2)$, $c=(x-y)(xy+z^2)$ замість $z$число $x$. Отримаємо: $a=x(y^2+y^2)=2xy^2$; $в=y(x^2+y^2)$;$c=(x-y)(xy+y^2)=$

$=(x-y)(x+y)y=y(x^2-y^2)$. Оскільки довжини сторін пропорційні $y$, то матимемо $a=2xy$, $в=x^2+y^2$,$c=x^2-y^2$. Аналогічно замінимо $z$ на $x$, отримаємо:

$a=x(y^2+x^2)$; $в=y(x^2+x^2)=2yx^2$;$c=(x-y)(xy+x^2)=(x-y)(x+y)x=x(x^2-y^2)$, звідки

$в=2xy$, $a=x^2+y^2$,$c=x^2-y^2$.

Візьмемо будь – які натуральні числа $x$ і $y$ і обчислимо $c=x^2-y^2$, $в=2xy$,

$a=x^2+y^2$. Маємо $c^2+в^2=(x^2-y^2)^2+(2xy)^2=-2x^2y^2++4x^2y^2=$

$=+2x^2y^2+=(x^2+y^2)^2=a^2$, тобто $c^2+в^2=a^2$. Звідси випливає, що при виконанні умови $x>y$ дістанемо прямокутний трикутник із сторонами $a,в,c$.

Отже, за формулами $c=x^2-y^2$, $в=2xy$, $a=x^2+y^2$ при натуральних $x$ і $y$, $x>y$ можна знайти безліч трикутників Герона, які будуть прямокутними ($c$ та $в$ – катети, $a$ – гіпотенуза).

2.2. Трикутники Герона спеціального виду

Недоліком загального алгоритму відшукання трикутників Герона є те, що він не дає можливості вибирати трикутники певного виду , зокрема, ті, в яких одна з сторін має певну фіксовану довжину. До речі, за даним алгоритмом знайшли найменшу довжину сторони трикутника – це число 3 при $x=2$, $y=1$,$z=1$.Зазначимо також, що і з формул $c=x^2-y^2$, $в=2xy$,

$a=x^2+y^2$ знайти трикутники деякого спеціального виду, зокрема ті, в яких різниця катетів дорівнює 1, неможливо.

Ми знайшли умови, які дають можливість моделювати прямокутні трикутники з заданою довжиною катета $c$ та різницею у довжинах гіпотенузи $a$ і другого катета $в$, що дорівнює одиниці.

Наслідок 1. Якщо у формулах $c= x^2 - y^2$, $в=2xy$, $a=x^2 + y^2$ $x$ та $y$ – два послідовні натуральні числа ($x>y$), то $c=x+y$, $a – в=1$.

Доведення. Нехай $x=n+1$, а $y=n$. Тоді $c= x^2 - y^2=(n+1)^2-n^2=n^2+2n+1-$

$-n^2=2n+1=x+y$, $в=2n(n+1)=2n^2+2n$, $a=n^2+n^2+2n+1=2n^2+2n+1=в+1$, тобто

$a – в =1$, що й потрібно було довести.

Недоліком практичного застосування даного наслідку є неможливість отримати прямокутний трикутник з наперед заданою довжиною катета, що дорівнює парному числу. У цьому випадку пропонуємо скористатися формулами $в=2x$, $c=x^2 -1$, $a=x^2 +1$

2.3. Виведення формули для знаходження прямокутних трикутниківз наперед заданою довжиною катета, що дорівнює парному числу

Підставляючи у формули $a=x(y^2 +z^2)$, $в=y(x^2+z^2)$, $c=(x-y)(xy+z^2)$ трійки чисел виду $(x;1;1)$, ми отримали прямокутні трикутники. Наприклад, при $x=2$ маємо $a=2^2\cdot(1+1)=4$; $в=1\cdot(2^2+1^2)=5$; $c=(2 – 1)(2\cdot1+1^2)=3$. При $x=3$ $a=6$; $в=10$; $c=8$; при $x=10$ $a=20$; $в=101$; $c=99$.

Теорема 5. Нехай $x$– довільне натуральне число ( $x > 1$) і виконується співвідношення $в=2x$, $c=x^2 -1$, $a=x^2 +1$, тоді трикутник, довжини сторін якого дорівнюють $a,в,c$ є прямокутним.

Доведення. Підставляючи у формули $в=x(y^2 +z^2)$, $a=y(x^2+z^2)$,

$c=(x-y)(xy+z^2)$ трійки чисел виду $(x;1;1)$, ми отримаємо$в=2x$, $c=x^2 -1$,

$a=x^2 +1$. Знайдемо $в^2+c^2=(2x)^2+(x^2 -1)^2=4x^2+-2x^2+1=+2x^2+1=(x^2 +1)^2=a^2$, тобто трикутник є прямокутним, що і потрібно було довести.

Чисто алгебраїчне доведення цього твердження запропонував доцент

М. А. Телепнєв (м. Могильов) на початку 80 – тих, розв'язавши рівняння

$в^2+c^2=a^2$ у раціональних числах. З рівняння $в^2+c^2=a^2$ маємо $в^2=(1-()^2)a^2$. Нехай $=x$, тоді $в^2=(1-x^2)a^2=(1-x)(1+x)a^2=(1-x)^2k^2a^2$, де $a^2=(1+x):(1-x)$, звідки $x=(k^2-1):(k^2+1)$. Повернувшись до підстановки $=x$, отримаємо

$в=(2ka):(k^2+1)$, $c=((k^2-1)a):(k^2+1)$, де $k$ – раціональне число, тобто отримуємо ті ж формули у раціональних числах: $в=2k$; $c=k^2-1$; $a=k^2+1$.

Отже, наші формули співпали, тобто формула отримана на основі дослідження геронових трикутників є правильною. Вона дає змогу знайти безліч прямокутних трикутників із наперед заданою довжиною одного із катетів. Але цей катет матиме довжину, що виражається парним числом, бо $a=2k$. Наприклад, (6;8;10), (10;24;26), (14;48;50) і т. д. .

Шукаючи трикутники Піфагора, ми виділили трикутники, у яких сторони пропорційні сторонам єгипетського трикутника (3;4;5).

Таблиця 2.3

Закономірності у трикутнику із сторонами ($3n$; $4n$; $5n$)

| | $n$ – будь – яке натуральне число | $n$ – парне натуральне число |
|---|---|---|
| Півпериметр,$p$ | $p=6n$; | $p$ утворюють геометричну прогресію з $в_1=6$ і $q=2$ |
| Площа,S | $S=6n^2$. | S утворюють геометричну прогресію з $в_1=6$ і $q=4$ |

Продовження табл.2.3

| | $n$ – будь – яке натуральне число | $n$ – парне натуральне число |
|---|---|---|
| Сторони трикутника | | Утворюють арифметичну прогресію з $a_1$=3, $d$ =$n$; Добуток довжин сторін трикутника Піфагора ділиться на 60. |

2.4. Знаходження рівнобедрених трикутників Герона

Теорема 6. Якщо у формули $a=x(y^2+z^2)$, $в=y(x^2+z^2)$, $c=(x-y)(xy+z^2)$ підставити трійки чисел $x$, $y$ та $z$такі, що $x:y:z$ = 4:1:2, то отримуємо рівнобедрені геронові трикутники.

Доведення. Нехай $x=4m, y=m, z=2m$. Маємо $a=4m(m^2+(2m)^2)=20m^3$, $в=m(16m^2+4m^2)=20m^3$, $c=24m^3$. Отже, $a = в$, що й потрібно було довести.

Із доведення видно, що $a:в:c=20:20:24 = 5:5:6$.

Наслідок. Трикутник, сторони якого дорівнюють $(5n;5n;6n)$, де $n$ – будь – яке натуральне число, є рівнобедреним героновим трикутником.

Доведення. Знайдемо $p=8n, S==12n^2$, тобто довжини і площа трикутника є цілими числами.

Отже, рівнобедрені геронові трикутники можна знайти, як подібні трикутнику, сторони якого дорівнюють $(5n;5n;6n)$, де $n$ – будь – яке натуральне число, або використавши теорему 6.

## ВИСНОВКИ

У запропонованому посібнику проаналізували ефективність шляхів знаходження трикутників Герона. Перебір всіх можливих трикутників з цілими довжинами сторін і дослідження тих, площа яких є також цілим числом, є неефективним, бо, з огляду на існування безлічі трикутників з цілими довжинами, таку роботу можна виконати лише частково. Застосування формул, які дають змогу виявити всі геронові трикутники,є ефективнішим, але вимагає тривалого часу.

Найефективніший шлях – це пошук за розробленою нами програмою.

Проаналізувавши найбільш відомі трикутники земної поверхні, зокрема, трикутники Північний полюс – о.Кайлас – єгипетські піраміди, мексиканські піраміди – Стоунхендж – Бермудський трикутник і т. п., зробили висновок, що жодний із « зловісних» трикутників не є Героновим.

Отже, програма може бути рекомендована для її практичної реалізації.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Глобін О.І.Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики: 9-ий кл/О.І.Глобін- К.: Центр навч.-метод. л-ри, 2013 . – 168 с.

2. Каплун О. І. Алгебра + геометрія. 9 клас: навчально – методичний посібник/О.І Каплун. – Харків: ФОП Співак В. Л., 2010. -368 с.

3. Конфорович А. Г. Визначніматематичнізадачі:збірник задач /

А.Г. Конфорович. – К.: Рад.школа, 1981. – 189с.:

4. Генкін С.А.Ленінградські математичні гуртки: збірник задач/

С.А.Генкін, І.В.Ітенберг, Д.В.Фомін. – К. : ТВіМС,1997. – 267с.

5. Нестеренко Ю. В. Старинные занимательные задачи:сборник задач/

Ю.В.Нестеренко,С. Н. Олехник ,М. К. Потапов . – 2-е изд., испр.- М. :

Наука . Главная редакция физико – математической литературы ,

1988. – 260 с.

6. Пойя Д. Как решать задачу.Изд. 2-е, испр./ Д.Пойя. – М., Наука,

1976. – 145 с.

7. Рыбников К. А. История математики: у 3 т./ К.А. Рыбников. – М.,

1960. – Т .1 – 548с.

8. У світі математики. Збірникнауково – популярних статей: навч. посіб./

[укл.,ред. і передмов.М. Й. Ядренко]. - К.: Рад.школа, 1975-1981.

10. Сайт київських та всеукраїнськихолімпіад та турнірів з математики

[ Електронний ресурс] . Режим доступу: www.matholymp.org.ua.

ДОДАТОК А

ДОВЖИНИ СТОРІН ГЕРОНОВИХ ТРИКУТНИКІВ

3;4;5     3;25;26     3;865;866

4;13;15   4;51;53

5;5;6    5;5;8   5;12;13    5;29;30  5;51;52  5;122;123

6;25;29    6;481;485

7;15;20   7;24;25   7; 65;68   7;169;174   7;339;340

8;15;17   8;29;35   8;123;125

9;10;17    9;40;41   9;65;70  9;73;80

10;17;21   10;35;39

11;13;20    11;25;30    11;60;61

12;17;25   12;35;37

13;13;24   20;99;101    25425;48   25;33;52 25;34;39

Додаток Б

## Знайти площу трикутника за формулою Герона

опубліковано 24 січ. 2011 р., 20:11 Александр Жмуд **[ оновлено 25 січ. 2011 р., 23:02 ]**

S=√p(p-a)(p-b)(p-c), (де p=(a+ b +c)/2 - півпериметр).

```
 PROGRAM N2;
Var
  a,b,c: real; {сторони трикутника}
  p: real; {допоміжна змінна}
  s: real; {площа}
BEGIN
  Write('Введіть сторони трикутника a, b, c: ');
  Readln(a,b,c);
  p:=(a+b+c)/2;
  s:=sqrt(p*(p-a)*(p-b)*(p-c));
  writeln('Площа трикунтника=', s:7:3);
END.
```

Результат роботи програми.

Введіть сторони трикутника a, b, c: 2 3 4

Площа трикунтника=2.905

Якщо в цій програмі Ви введете сторони неіснуючого трикутника (сума двох сторін менша за третю), то ЕОМ видасть помилку, аварійно завершивши програму.

Додаток В

Програма для пошуку сторін геронових трикутників

```
Program (a,b,c);

var x,y,z:integer;

a,b,c:integer;

begin

write(‘x,y,z’);

readln(x,y,z);

a:=x*(y*y+z*z);

b:=y*(x*x+z*z);

c:=(x-y)*(x*y+z*z);

wrireln (‘a=’,a);

writeln(’b=’,b);

writeln(’c=’,c);

end.
```