МАТЕМАТИКА

Зовнішнє Незалежне Оцінювання

КОМПЛЕКСНЕ ВИДАННЯ

- ☑ Довідковий теоретичний матеріал
- ☑ Розв'язування типових задач
- ☑ Тренувальні тестові завдання
- ☑ Відповіді до всіх завдань

Якісна підготовка до ЗНО

2014

Видавництво «Підручники і посібники»

УВАГА! ГОЛОГРАФІЧНА МАРКА ГАРАНТУЄ ОРИГІНАЛЬНІСТЬ І ЯКІСТЬ ЦЬОГО ВИДАННЯ

МАТЕМАТИКА

Комплексна підготовка
до зовнішнього незалежного оцінювання

За чинною програмою ЗНО

Укладачі
Анатолій Капіносов, Галина Білоусова, Галина Гап'юк, Лариса Кондратьєва,
Олеся Мартинюк, Сергій Мартинюк, Лариса Олійник, Петро Ульшин, Олег Чиж

Тернопіль
Видавництво «Підручники і посібники»
2013

УДК 371.32
ББК 22.1
М 33

Рецензент: *Ярослав Гап'юк* — доцент кафедри математики та методики її викладання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка

Літературне редагування *Людмили Олійник*
Дизайнер обкладинки *Віталій Нехай*

М 33 **Математика** : Комплексна підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання / Уклад. : А. М. Капіносов, Г. І. Білоусова, Г. В. Гап'юк, Л. І. Кондратьєва, О. М. Мартинюк, С. В. Мартинюк, Л. І. Олійник, П. І. Ульшин, О. Й. Чиж. — Тернопіль : Підручники і посібники, 2013. — 528 с.

ISBN 978-966-07-2497-6

Посібник містить теоретичний матеріал, а також тестові завдання різних рівнів складності з усіх тем шкільного курсу математики. Зміст матеріалів відповідає вимогам чинної програми зовнішнього незалежного оцінювання та чинних навчальних програм з математики.

Для абітурієнтів, учнів 11 класу, учителів математики.

УДК 371.32
ББК 22.1

ISBN 978-966-07-2497-6

© Капіносов А. М., Білоусова Г. І., Гап'юк С. Я., Л. І. Кондратьєва, Мартинюк О. М., Мартинюк С. В., Олійник Л. І., Ульшин П. І., Чиж О. Й., 2013

ПЕРЕДМОВА

Посібник призначений для підготовки учнів загальноосвітніх навчальних закладів та абітурієнтів до зовнішнього незалежного оцінювання. Його укладений відповідно до чинної програми зовнішнього незалежного оцінювання та чинних навчальних програм з математики. Метою посібника є надання практичної, методичної та психологічної допомоги учням у підготовці до зовнішнього незалежного оцінювання.

У книзі міститься довідковий теоретичний матеріал, приклади розв'язання задач і вправ і завдання з усіх тем шкільного курсу математики. Завдання кожної теми складаються з чотирьох частин. *Перша* частина містить довідковий теоретичний матеріал і зразки розв'язання вправ. *Друга* частина — тестові завдання із п'ятьма варіантами відповідей, з яких лише один правильний. Усі завдання розміщені в послідовності зростання складності. *Третя* частина містить завдання, які передбачають установлення відповідності між деякими математичними поняттями, позначеними цифрами 1–4, та їхніми властивостями, позначеними буквами А–Д. У *четвертій* частині вміщено тестові завдання відкритої форми — самостійне знаходження відповіді у вигляді десяткового дробу.

АЛГЕБРА ТА ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Тема 1. Обчислення. Арифметичні задачі

Натуральні числа — це числа, які використовують при лічбі: 1, 2, 3, ... Множину натуральних чисел позначають буквою N.

Цілі числа — це натуральні числа, числа протилежні до них та число нуль. Цілими є числа –2, 4, 0 тощо. Множину цілих чисел позначають буквою Z.

Раціональні числа — це числа, які можна подати у вигляді $\frac{m}{n}$, де m — ціле число ($m \in Z$), n — натуральне число ($n \in N$). Кожне раціональне число можна представити у вигляді скінченного або нескінченного періодичного десяткового дробу. Раціональними є числа 4,5; –3; –7,3; $\frac{3}{4}$; $-2\frac{7}{9}$ тощо. Множину раціональних чисел позначають буквою Q.

Ірраціональні числа — це нескінченні десяткові неперіодичні дроби. Наприклад, ірраціональними є числа $\sqrt{5}$, $\cos 7°$, π тощо. Множину ірраціональних чисел позначають буквою I.

Дійсні числа — це раціональні та ірраціональні числа. Кожне дійсне число можна зобразити точкою на числовій осі, а кожній точці числової осі відповідає дійсне число. Множину дійсних чисел позначають буквою R.

Прості та складені числа

Натуральне число називають *простим*, якщо воно має лише два дільники: одиницю і саме число. Найменше просте число — 2. Наприклад, число 19 має два дільники (1 і 19), тому воно є простим.

Натуральне число називають *складеним*, якщо воно має більше, ніж два дільники. Число 6 має чотири дільники (1, 2, 3 і 6), тому воно є складеним.

Число 1 має лише один дільник, тому воно є ні простим, ні складеним.

Розкласти складене число на прості множники означає записати дане число у вигляді добутку простих чисел — дільників даного числа. Наприклад, $12600 = 7 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 2^3$.

Взаємно простими числами називають числа, які не мають спільних дільників, крім одиниці. Наприклад, $65 = 5 \cdot 13$, $306 = 2 \cdot 3^2 \cdot 17$, тому числа 65 і 306 — взаємно прості.

Найбільшим спільним дільником (НСД) кількох натуральних чисел називають найбільше число, на яке дані числа діляться без остачі. НСД даних чисел дорівнює добутку спільних простих множників цих чисел.

Найменшим спільним кратним (НСК) кількох натуральних чисел називають найменше число, яке ділиться без остачі на кожне з даних чисел. НСК даних чисел дорівнює добутку одного з них на прості множники, яких нема у його розкладі, але є у розкладах решти чисел.

Якщо числа a та b — взаємно прості, тобто НСД(a; b) = 1, то НСК(a; b) = $a \cdot b$. Наприклад, оскільки числа 9 і 25 є взаємно простими (НСД(9; 25) = 1), то НСК(9; 25) = $9 \cdot 25 = 225$.

Звичайним дробом називають число виду $\frac{m}{n}$, де m та n — натуральні числа. Риска дробу означає дію ділення: $\frac{m}{n} = m : n$.

Число n — *знаменник* дробу — вказує, на скільки рівних частин поділили число (величину), число m — *чисельник* дробу — скільки таких частин узято.

Дріб, у якому чисельник менший за знаменник, називають *правильним*. Дріб, у якому чисельник більший за знаменник або дорівнює йому, називають *неправильним*. Наприклад, дроби $\frac{7}{12}$, $\frac{16}{23}$, $\frac{8}{44}$ — правильні, а дроби $\frac{20}{13}$, $\frac{99}{33}$, $\frac{15}{15}$ — неправильні.

Число, яке складається з натурального числа і звичайного дробу, називають *мішаним*. Наприклад, $4\frac{8}{11}$, $132\frac{2}{5}$ — мішані числа. Мішане число можна записати у вигляді суми натурального числа і звичайного дробу. Наприклад, $4\frac{8}{11} = 4 + \frac{8}{11}$.

Щоб записати мішане число у вигляді неправильного дробу, досить його цілу частину помножити на знаменник дробової частини, до знайденого добутку додати чисельник і результат записати в чисельнику, а знаменник залишити тим самим. Наприклад, $5\frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{23}{4}$.

З будь-якого неправильного дробу можна виділити цілу частину. Для цього досить поділити з остачею чисельник на знаменник. Частка від ділення буде цілою частиною, остача — чисельником, а дільник — знаменником. Наприклад, $\frac{38}{9} = 4\frac{2}{9}$, бо 38 : 9 = 4 (ост. 2).

Основна властивість дробу. Якщо чисельник і знаменник дробу помножити чи поділити на одне й те саме натуральне число, то отримаємо дріб, який дорівнює даному. Наприклад, $\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{4}{24}$; $\frac{100}{70} = \frac{100:10}{70:10} = \frac{10}{7}$.

Скороченням дробу називають ділення чисельника і знаменника дробу на їх спільний дільник, відмінний від одиниці. Найбільше число, на яке можна скоротити дріб, — найбільший спільний дільник чисельника і знаменника і якщо він дорівнює 1, то дріб називають *нескоротним*. Наприклад, дріб $\frac{100}{70}$ скоротний, бо $\frac{100}{70} = \frac{100:10}{70:10} = \frac{10}{7}$, а дріб $\frac{9}{13}$ — нескоротний.

Заміну дробів з різними знаменниками відповідно рівними їм дробами з однаковими знаменниками називають *зведенням дробів до спільного знаменника*. Найменшим спільним знаменником дробів є найменше спільне кратне їх знаменників.

Щоб звести дріб до найменшого спільного знаменника, досить:

1) знайти найменше спільне кратне знаменників дробів;

2) поділити найменше спільне кратне на кожен знаменник і знайти додаткові множники для кожного дробу;

3) помножити чисельник і знаменник кожного дробу на його додатковий множник.

Наприклад, звести дроби $\frac{7}{8}$ і $\frac{5}{6}$ до найменшого спільного знаменника. 1) Найменше спільне кратне чисел 8 і 6 дорівнює 24; 2) 24 : 8 = 3; 24 : 6 = 4. Отже, числа 3 і 4 є додатковими множниками для дробів $\frac{7}{8}$ і $\frac{5}{6}$ відповідно; 3) $\frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{21}{24}$; $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{20}{24}$.

Дії над звичайними дробами

1. *Додавання і віднімання.* Сумою (різницею) дробів з однаковими знаменниками є дріб, чисельник якого є сумою (різницею) чисельників цих дробів, а знаменник дорівнює їх знаменникам: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ $\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}\right)$. Щоб додати (відняти) дроби з різними знаменниками, треба їх спочатку звести до спільного знаменника.

2. *Множення.* Добутком дробів є дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник — добутку знаменників даних дробів: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

3. *Ділення.* Часткою двох дробів є дріб, який дорівнює добутку дробу-діленого та оберненого числа до дробу-дільника: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$.

Наприклад: 1) $\frac{2}{11}+\frac{3}{11}=\frac{2+3}{11}=\frac{5}{11}$; 2) $\frac{2}{3}^{\backslash 4}+\frac{1}{4}^{\backslash 3}=\frac{4\cdot 2+3\cdot 1}{3\cdot 4}=\frac{8+3}{12}=\frac{11}{12}$;

3) $\frac{1}{6}^{\backslash 3}+\frac{1}{9}^{\backslash 2}=\frac{3\cdot 1+2\cdot 1}{18}=\frac{3+2}{18}=\frac{5}{18}$; 4) $2\frac{1}{10}+7\frac{4}{15}=2+7+\frac{3\cdot 1+2\cdot 4}{30}=9+\frac{11}{30}=9\frac{11}{30}$;

5) $6\frac{4}{5}-2\frac{3}{4}=6-2+\frac{4}{5}-\frac{3}{4}=4\frac{16-15}{20}=4\frac{1}{20}$; 6) $\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2\cdot 3}{7\cdot 5}=\frac{6}{35}$; 7) $2\frac{1}{2}\cdot 3\frac{2}{3}=\frac{5}{2}\cdot\frac{11}{3}=\frac{5\cdot 11}{2\cdot 3}=\frac{55}{6}=9\frac{1}{6}$;

8) $\frac{2}{13}:\frac{3}{8}=\frac{2}{13}\cdot\frac{8}{3}=\frac{2\cdot 8}{13\cdot 3}=\frac{16}{39}$; 9) $5:\frac{4}{17}=\frac{5}{1}\cdot\frac{17}{4}=\frac{5\cdot 17}{1\cdot 4}=\frac{85}{4}=21\frac{1}{4}$;

10) $5\frac{4}{9}\cdot 1\frac{12}{21}=\frac{49}{9}\cdot\frac{33}{21}=\frac{{}^{7}\cancel{49}\cdot\cancel{33}^{11}}{{}_{3}\cancel{9}\cdot\cancel{21}_{3}}=\frac{7\cdot 11}{3\cdot 3}=\frac{77}{9}=8\frac{5}{9}$;

11) $3\frac{5}{11}:5\frac{5}{33}=\frac{38}{11}:\frac{170}{33}=\frac{38}{11}\cdot\frac{33}{170}=\frac{{}^{19}\cancel{38}\cdot\cancel{33}^{3}}{{}_{1}\cancel{11}\cdot\cancel{170}^{85}}=\frac{19\cdot 3}{1\cdot 85}=\frac{57}{85}$.

Числові вирази

Числовий вираз — це запис, який складається зз чисел, об'єднаних знаками арифметичних дій, і дужок. Якщо в числовому виразі виконати зазначені дії, дотримуючись порядку виконання арифметичних дій, то одержимо число, яке називають *значенням числового виразу*.

Порядок дій у числовому виразі

Додавання і віднімання чисел називають *діями першого ступеня*, а множення і ділення — *діями другого ступеня*.

1. Якщо в числовому виразі немає дужок і він містить лише дії одного ступеня, то їх виконують за порядком запису зліва направо.

2. Якщо у виразі є дії першого та другого ступенів, а дужок немає, то спочатку виконують дії другого ступеня, а потім — дії першого ступеня.

3. Якщо у виразі є дужки, то спочатку виконують дії в дужках у порядку, зазначеному в п. 1 і 2.

Наприклад, у числовому виразі $25\cdot 296-17\cdot(300-7\cdot 40)+5\cdot 138$ порядок виконання арифметичних дій є таким:

$$\overset{③}{25}\cdot\overset{⑥}{296}-\overset{④}{17}\cdot(\overset{②}{300}-\overset{①}{7}\cdot 40)+\overset{⑦}{5}\cdot\overset{⑤}{138}.$$

Десятковий дріб — інша форма запису звичайного дробу зі знаменником 10^n, де n — натуральне число. Наприклад, $\frac{4}{10}=0{,}4$; $\frac{53}{1000}=0{,}053$; $\frac{609}{10}=60{,}9$.

Дії над десятковими дробами

1. *Додавання, віднімання.* Щоб додати або відняти десяткові дроби, потрібно їх записати так, щоб однакові розряди були один під одним (або «кома під комою») і виконати дію. Якщо необхідно, то до одного з дробів можна дописати нулі праворуч. Наприклад, знайдемо суму 16,8 + 0,5347:

$$\begin{array}{r} 16{,}8000 \\ +\ 0{,}5347 \\ \hline 17{,}3347 \end{array}$$

2. *Множення.* Множать десяткові дроби, не зважаючи на коми, як натуральні числа, а в добутку відділяють комою праворуч стільки цифр, скільки їх є після коми в обох множниках разом. Наприклад,

$$\begin{array}{r} \times\ 1{,}35 \\ 0{,}006 \\ \hline 0{,}00810 \end{array}$$

3. *Ділення.* Щоб поділити десяткові дроби, спочатку їх домножають на 10^n, де n — кількість цифр після коми в дільнику і перетворюють дільник у натуральне число. Кому в частці ставлять після завершення ділення цілої частини діленого. Наприклад, поділимо 3,12 на 2,6:

$$3{,}12 : 2{,}6 = 31{,}2 : 26$$

$$\begin{array}{r|l} 31{,}2 & 26 \\ \cline{2-2} 26 & 1{,}2 \\ \cline{1-1} 52 & \\ 52 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Кожен звичайний дріб можна подати у вигляді скінченного або нескінченного десяткового дробу. Для цього потрібно чисельник поділити на знаменник. Наприклад, $\frac{14}{11} = 1{,}272727...$, $\frac{7}{12} = 0{,}5833333...$, $\frac{3}{8} = 0{,}375$.

Періодом нескінченного десяткового дробу називають найменшу групу цифр після коми десяткового дробу, яка повторюється. Період записують раз, поміщаючи його в круглі дужки, наприклад, 1,27272727... = 1,(27); 0,583333... = 0,58(3); 0,375 = 0,375000... = 0,375(0).

Кожен нескінченний десятковий періодичний дріб можна подати у вигляді звичайного.

Правило перетворення нескінченного періодичного дробу в звичайний

Щоб перетворити періодичний дріб у звичайний, потрібно від числа, яке стоїть до другого періоду, відняти число, що стоїть до першого періоду, і записати цю різницю чисельником звичайного дробу, а в знаменнику записати цифру 9 стільки разів, скільки цифр у періоді, і дописати стільки нулів, скільки цифр між комою і першим періодом. Наприклад: 1) $0{,}(24) = 0{,}242424... = \frac{24-0}{99} = \frac{24}{99} = \frac{8}{33}$;

2) $2{,}5(3) = 2{,}5333... = \frac{253-25}{90} = \frac{228}{90} = \frac{38}{15}$.

Модуль дійсного числа

Модулем (*абсолютною величиною*) *дійсного числа* a називають самé це число, якщо воно невід'ємне ($a \geq 0$), і протилежне йому число, якщо воно від'ємне ($a < 0$), тобто:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Наприклад, $|13| = 13$; $|-9| = 9$; $|0| = 0$; $\left|\sqrt{5} - 10\right| = -(\sqrt{5} - 10) = 10 - \sqrt{5}$.

Модуль числа a дорівнює відстані на числовій осі від початку відліку до точки, яка позначає число a.

Додавання від'ємних чисел і чисел з різними знаками

1. Щоб *додати* два від'ємні числа, потрібно: 1) додати їхні модулі; 2) поставити перед одержаним результатом знак «–». Наприклад, –6 + (–2) = –8.

2. Щоб додати два числа з різними знаками, потрібно: 1) з'ясувати, модуль якого числа більший; 2) від більшого модуля відняти менший; 3) перед одержаним результатом поставити знак того доданка, модуль якого більший. Наприклад: а) $-5 + 12 = 7$; б) $-23{,}5 + 9{,}1 = -(23{,}5 - 9{,}1) = -14{,}1$.

3. Щоб від одного числа *відняти* інше число, потрібно до зменшуваного додати число, протилежне до від'ємника: $a - b = a + (-b)$. Наприклад: а) $20 - 50 = 20 + (-50) = -30$; б) $-20 - 50 = -20 + (-50) = -70$; в) $-20 - (-50) = -20 + (+50) = -20 + 50 = 30$.

Множення і ділення додатних і від'ємних чисел

Добуток (частка) двох чисел з різними знаками є число від'ємне; модуль добутку (частки) дорівнює добутку (частці) модулів цих чисел. Наприклад: а) $-0{,}25 \cdot 5 = -1{,}25$; б) $0{,}6 : (-3) = -1{,}8$.

Добуток (частка) двох від'ємних чисел є число додатне; модуль добутку (частки) дорівнює добутку (частці) модулів цих чисел. Наприклад: а) $-7 \cdot (-9) = 63$; б) $-24 : (-8) = 3$.

Властивості дій над числами

1. *Властивості додавання*:

$a + b = b + a$ (переставна властивість);

$(a + b) + c = a + (b + c)$ (сполучна властивість);

$a + 0 = a$ (властивість нуля);

$a + (-a) = 0$ (властивість суми протилежних чисел).

2. *Властивості множення*:

$ab = ba$ (переставна властивість);

$(ab) \cdot c = a \cdot (bc)$ (сполучна властивість);

$(a + b) \cdot c = ac + bc$ (розподільна властивість);

$a \cdot 1 = a$ (властивість одиниці);

$a \cdot 0 = 0$ (властивість нуля);

$a \cdot \frac{1}{a} = 1$, якщо $a = \neq 0$ (властивість обернених чисел).

Пропорція

Пропорцією називають рівність двох часток (відношень): $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, або $a : b = c : d$. Числа a та d називають крайніми членами пропорції, b та c — середніми членами пропорції.

Основна властивість пропорції: добуток крайніх членів пропорції дорівнює добутку середніх її членів: $a \cdot d = b \cdot c$.

Прямо пропорційні величини

Дві величини називають *прямо пропорційними*, якщо зі збільшенням значень однієї величини у певну кількість разів значення іншої величини збільшується в таку ж кількість разів: $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = k$ — коефіцієнт пропорційності. Наприклад, якщо швидкість руху автомобіля постійна, то:

Час		*Відстань*		
2 год	↓	120 км	↓	$\frac{2}{8} = \frac{120}{480}$
8 год		480 км		

Обернено пропорційні величини

Дві величини називають *обернено пропорційними*, якщо зі збільшенням значень однієї величини у певну кількість разів значення іншої величини зменшується в таку ж кількість разів: $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_1}{y_2}$. Наприклад, якщо відстань постійна, то:

Швидкість		*Час*		
40 км/ год	↓	4 год	↑	$\frac{40}{80}=\frac{2}{4}$
80 км/год		2 год		

Масштаб.

Масштаб — це відношення відстані на карті до відповідної відстані на місцевості. Наприклад, масштаб 1 : 100000 означає, що 1 см на карті відповідає 100000 см = 1000 м = 1 км на місцевості.

Стандартний вигляд числа.

Стандартним виглядом числа m називають його запис у вигляді $a \cdot 10^n$, де $1 \le a < 10$, $n \in Z$. Число n називають порядком числа m. Наприклад: $m = 63000 = 6{,}3 \cdot 10^4$; $k = 0{,}0000014 = 1{,}4 \cdot 10^{-6}$.

Приклад 1. Знайти НСД(120; 220).

■ $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, $220 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11$. Тоді НСД(120; 220) = $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$.

Відповідь. 20. ■

Приклад 2. Знайти НСК(28; 16; 10).

■ $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$; $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; $10 = 2 \cdot 5$. Отже, НСК (28; 16; 10) = $2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 560$.

Відповідь. 560. ■

Приклад 3. Оксана, Сергій і Петро о 16 годині почали розв'язувати задачі. Оксана на виконання кожної вправи витрачала 16 хв, Сергій — 24 хв, а Петро — 18 хв. Через деякий час вони одночасно закінчили виконувати свої завдання. О котрій годині найшвидше це могло статися?

А	Б	В	Г	Д
17 год 12 хв	18 год	18 год 20 хв	18 год 24 хв	19 год

■ Час, за який діти виконали свої завдання, має виражатися числом, яке ділиться на 16, на 24 і на 18, тобто необхідно знайти НСК чисел 16, 24 і 18. $16 = 2^4$; $24 = 2^3 \cdot 3$; $18 = 2 \cdot 3^2$; НСК(16; 24; 18) = $= 2^4 \cdot 3^2 = 144$. Отже, діти закінчать одночасно виконувати вправи через 144 хв = 2 год 24 хв. Це буде об 16 год + 2 год 24 хв = 18 год 24 хв.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 4. Знайти значення числового виразу $15\frac{11}{14}+11\frac{5}{7}:\left(4\frac{1}{2}\cdot 2\frac{2}{9}-3\frac{1}{6}\right)$.

■ 1) $4\frac{1}{2}\cdot 2\frac{2}{9}=\frac{9}{2}\cdot\frac{20}{9}=\frac{9\cdot 20}{2\cdot 9}=\frac{1\cdot 10}{1\cdot 1}=10$;

2) $10-3\frac{1}{6}=9\frac{6}{6}-3\frac{1}{6}=6\frac{5}{6}$;

3) $11\frac{5}{7}:6\frac{5}{6}=\frac{82}{7}:\frac{41}{6}=\frac{82\cdot 6}{7\cdot 41}=\frac{2\cdot 6}{7\cdot 1}=\frac{12}{7}=1\frac{5}{7}$;

4) $15\frac{11}{14}+1\frac{5}{7}=15+1+\frac{11+10}{14}=16+\frac{21}{14}=16+\frac{3}{2}=16+1\frac{1}{2}=17\frac{1}{2}$.

Відповідь. $17\frac{1}{2}$. ■

Приклад 5. Обчислити $\dfrac{3\frac{1}{6}+5{,}2}{\left(4{,}6-\frac{5}{12}\right)\cdot 0{,}4}$.

А	Б	В	Г	Д
1,5	5	3	6	13

■ 1) $3\frac{1}{6}+5{,}2=3\frac{1}{6}+5\frac{2}{10}=(3+5)+\left(\frac{1}{6}^{\backslash 5}+\frac{2}{10}^{\backslash 3}\right)=8+\frac{5+6}{30}=8\frac{11}{30}$;

2) $4{,}6-\frac{5}{12}=4\frac{6}{10}-\frac{5}{12}=4+\left(\frac{6}{10}^{\backslash 6}-\frac{5}{12}^{\backslash 5}\right)=4+\frac{36-25}{60}=4\frac{11}{60}$;

3) $4\frac{11}{60}\cdot 0{,}4=\frac{251}{60}\cdot\frac{4}{10}=\frac{251\cdot \cancel{4}^{1}}{{}_{15}\cancel{60}\cdot 10}=\frac{251}{15\cdot 10}=\frac{251}{150}$;

4) $8\frac{11}{30}:\frac{251}{150}=\frac{\cancel{251}}{30}\cdot\frac{150}{\cancel{251}}=\frac{150}{30}=5$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 6. Установити відповідність між числами (1–4) та множинами (А–Д), до яких вони належать.

1 -8 **А** множина парних чисел
2 23 **Б** множина цілих чисел, які не є натуральними
3 $\sqrt{16}$ **В** множина раціональних чисел, які не є цілими числами
4 1,7 **Г** множина ірраціональних чисел
Д множина простих чисел

Відповідь.

	А	Б	В	Г	Д
1		☒			
2					☒
3	☒				
4			☒		

■

Приклад 7. Турист пройшов $\frac{2}{5}$ шляху за 3 год. За який час він пройде решту шляху, рухаючись із такою ж швидкістю?

А	Б	В	Г	Д
4,5 год	4 год	5 год	3,5 год	1,8 год

■ Дві частини з п'яти турист пройшов за 3 год, отже, одну частину він пройшов за $3:2=1{,}5$ (год). Йому залишилося пройти $5-2=3$ (ч.) з п'яти, тоді цей шлях він пройде за $3\cdot 1{,}5=4{,}5$ (год).

Відповідь. **А.** ■

Приклад 8. Мотоцикліст проїхав деяку відстань за 6 год. Якщо він рухатиметься зі швидкістю 48 км/год) то проїде цю відстань за 5 год. Знайти початкову швидкість руху мотоцикліста.

■ Якщо відстань є постійною величиною, то швидкість і час є обернено пропорційними величинами, тобто якщо x км/год — початкова швидкість руху мотоцикліста, то

Швидкість		*Час*	
x км/ год	↓	6 год	↑
48 км/год		5 год	

Тоді $\frac{x}{48}=\frac{5}{6}$; $x=\frac{48\cdot 5}{6}$; $x=40$ (км/год).

Відповідь. 40 км/год. ■

Приклад 9. Два оператори комп'ютерного набору, працюючи разом, виконали деяку роботу за 12 год. Другий оператор, працюючи самостійно, може виконати цю роботу за 20 год. За скільки годин виконає цю ж роботу перший оператор, працюючи самостійно?

■ Другий оператор, працюючи самостійно, за 1 год виконає $\frac{1}{20}$ усієї роботи. Працюючи разом, за 1 год обидва оператори виконають $\frac{1}{12}$ частину всієї роботи. Отже, перший оператор, працюючи самостійно, за 1 год виконає $\frac{1}{12}^{\backslash 5}-\frac{1}{20}^{\backslash 3}=\frac{5-3}{60}=\frac{2}{60}=\frac{1}{30}$ (ч.) всієї роботи. Тоді на виконання всієї роботи першому оператору знадобиться $1:\frac{1}{30}=30$ (год).

Відповідь. 30 год. ■

Приклад 10. У магазині купили 9 однакових зошитів по 5 грн. за кожен та кілька ручок по 3 грн. за кожну. Яке з наведених значень може дорівнювати вартості покупки?

А	Б	В	Г	Д
55 грн.	56 грн.	57 грн.	58 грн.	59 грн.

■ Суму покупки можна записати у вигляді виразу $5\cdot 9+3\cdot n$, де n — кількість куплених ручок. $5\cdot 9+3\cdot n=3\cdot(5\cdot 3+n)$. Цей вираз містить добуток, у якому один з множників дорівнює 3, тоді вартість покупки має ділитися на 3. Отже, сума цифр числа повинна ділитися на 3. Серед запропонованих чисел це лише число 57 (5 + 7 = 12).

Відповідь. **В.** ■

Приклад 11. Середнє арифметичне п'яти чисел дорівнює 400, а одне з цих чисел — 600. Знайти середнє арифметичне решти чотирьох чисел.

■ Нехай a_1, a_2, a_3, a_4 і a_5 — задані числа, тоді $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}=400$, звідки $a_1+a_2+a_3+a_4+$ $+a_5=2000$. Якщо одне з чисел дорівнює 600, то, наприклад, $a_1+a_2+a_3+a_4+600=2000$; $a_1+a_2+a_3+a_4=1400$. Тоді середнє арифметичне решти чотирьох чисел дорівнює $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}=\frac{1400}{4}=350$.

Відповідь. 350. ■

Приклад 12. Відстань у 2400 км між Києвом і Парижем зображена на карті відрізком завдовжки 48 см. Знайти масштаб карти.

А	Б	В	Г	Д
1 : 5000000	1 : 200000	1 : 2400	1 : 5000	1 : 50

■ 48 см : 2400 км = 48 см : 240000000 см = 1 : 5000000.

Відповідь. **А.** ■

Завдання 1.1–1.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

1.1. Яке з наведених чисел кратне числу 9?

А	Б	В	Г	Д
978999	100009	199999	253647	3333333

1.2. Знайти найбільший спільний дільник чисел 42 і 63.

А	Б	В	Г	Д
126	3	7	9	21

1.3. Знайти найменше спільне кратне чисел 28 і 35.

А	Б	В	Г	Д
7	140	70	175	280

1.4. Обчислити: $1{,}521 : 0{,}3 - 1{,}9 \cdot 0{,}3$.

А	Б	В	Г	Д
0	–0,063	5,13	4,5	–0,63

1.5. Обчислити: $2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{12}{25} : \frac{3}{20}$.

А	Б	В	Г	Д
3,575	3,7	4,7	5,7	4,07

1.6. Обчислити: $4\frac{2}{3} - 6\frac{3}{7} - \left(-1\frac{2}{9}\right) + 5\frac{10}{21}$.

А	Б	В	Г	Д
$11\frac{23}{63}$	$4\frac{29}{63}$	$4\frac{59}{63}$	$-4\frac{29}{63}$	$3\frac{4}{63}$

1.7. Обчислити: $-4{,}8 : (-2{,}6 + 3{,}4) + 0{,}8$.

А	Б	В	Г	Д
–7,2	–6,8	6,8	–5,2	5,2

1.8. Розв'язати рівняння $(5x - 7) : 12 = 2 : 3$.

А	Б	В	Г	Д
3	2	7	4	6

1.9. Вказати найбільше з наведених чисел.

А	Б	В	Г	Д
0,23	0,(23)	0,233	0,2(3)	0,2(31)

1.10. Вказати звичайний дріб, який дорівнює дробу 0,1(3).

А	Б	В	Г	Д
$\frac{13}{100}$	$\frac{13}{99}$	$\frac{13}{90}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{2}{15}$

1.11. $|\pi - 4| = ...$

А	Б	В	Г	Д
$\pi - 4$	$\pi + 4$	-4π	$4 - \pi$	4π

1.12. Не виконуючи ділення, встановити остачу від ділення 33333333341 на 9.

А	Б	В	Г	Д
1	5	14	4	41

1.13. Швидкість равлика дорівнює $\frac{1}{12}$ м/хв. Яку відстань проповзе равлик за $6\frac{1}{4}$ години?

А	Б	В	Г	Д
0,75 м	31,25 м	75 м	$\frac{25}{48}$ м	$52\frac{1}{12}$ м

1.14. Із 68 жовтих і 85 червоних троянд склали букети, розділивши жовті та червоні троянди в усі букети порівну. Скільки найбільше букетів можна одержати?

А	Б	В	Г	Д
9	20	34	17	8

1.15. Яка найменша кількість метрів тканини може бути в рулоні, щоб його можна було продати без залишку по 6 м, по 8 м або по 10 м?

А	Б	В	Г	Д
480	60	120	240	4800

1.16. За три дні зорано 1800 га поля. За перший день зорано $\frac{2}{9}$ поля, а за другий — $\frac{1}{6}$ поля. Скільки гектарів поля було зорано за третій день?

А	Б	В	Г	Д
1100	700	1200	800	900

1.17. За перший день турист пройшов $\frac{4}{9}$ усього шляху, а за другий — решту — $26\frac{2}{3}$ км. Яку відстань пройшов турист за два дні?

А	Б	В	Г	Д
$46\frac{1}{4}$ км	$54\frac{1}{3}$ км	60 км	$56\frac{1}{4}$ км	48 км

1.18. Басейн наповнюється через першу трубу за 4 години, а через другу — за 6 годин. Яку частину басейну залишиться наповнити після спільної роботи обох труб протягом 2 годин?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{10}$

1.19. Басейн заповнюють водою через першу трубу за a годин, через другу — за b годин. Через скільки годин можна заповнити басейн при використанні обох труб разом?

А	Б	В	Г	Д
$a + b$	$a - b$	ab	$\frac{ab}{a+b}$	$\frac{a+b}{ab}$

1.20. Майстер виготовляє одну деталь за 5 хв, а його учень таку ж деталь — за 9 хв. Працюючи разом, вони виготовили 42 деталі. Скільки деталей виготовив майстер?

А	Б	В	Г	Д
28	32	30	27	25

1.21. Добуток двох послідовних парних натуральних чисел дорівнює 728. Знайти суму цих чисел.

А	Б	В	Г	Д
56	66	54	32	28

1.22. В одному місті всі мешканці розмовляють англійською або французькою мовою. Англійською мовою розмовляє 90% усіх мешканців, французькою — 80%. Скільки відсотків мешканців володіє лише однією мовою?

А	Б	В	Г	Д
70%	60%	30%	20%	10%

Завдання 1.23–1.32 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

1.23. Установити відповідність між числами (1–4) та їх остачами від ділення на 9 (А–Д).

1 53229465	**А** 2
2 81720245	**Б** 3
3 33333332	**В** 4
4 33333016	**Г** 5
	Д 0

1.24. Установити відповідність між числами (1–4) та їх записами у стандартному вигляді (А–Д).

1 73,4	**А** $7{,}34 \cdot 10^{-3}$
2 734	**Б** $7{,}34 \cdot 10^{-2}$
3 0,734	**В** $7{,}34 \cdot 10^{-1}$
4 0,00734	**Г** $7{,}34 \cdot 10$
	Д $7{,}34 \cdot 10^{2}$

1.25. Установити відповідність між періодичними десятковими дробами (1–4) та їх записами у вигляді звичайних дробів (А–Д).

1 0,(6)	**А** $\frac{241}{330}$
2 0,2(3)	**Б** $\frac{7}{30}$
3 0,2(6)	**В** $\frac{3}{5}$
4 0,7(30)	**Г** $\frac{2}{3}$
	Д $\frac{1}{6}$

1.26. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\lvert\pi - 4\rvert + \lvert\pi - 3\rvert$	**А** $2\pi - 7$
2 $\lvert 3 - \pi\rvert - \lvert -\pi - 4\rvert$	**Б** 7
3 $-\lvert\pi - 4\rvert - \lvert\pi - 3\rvert$	**В** 1
4 $\lvert\pi - 4\rvert + \lvert -\pi - 3\rvert$	**Г** –1
	Д –7

1.27. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $1000 \cdot 0{,}02 + 100 \cdot 0{,}004 + 10 \cdot 0{,}0003$	**А** 2,0403
2 $1000 \cdot 0{,}02 + 100 \cdot 0{,}04 + 10 \cdot 0{,}0003$	**Б** 2,4003
3 $10000 \cdot 0{,}02 + 1000 \cdot 0{,}004 + 100 \cdot 0{,}0003$	**В** 20,403
4 $100 \cdot 0{,}02 + 100 \cdot 0{,}004 + 10 \cdot 0{,}00003$	**Г** 24,003
	Д 204,03

1.28. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $1{,}824 : 0{,}3 - 1{,}9 \cdot 0{,}2$	**А** 5,048
2 $0{,}2432 : 0{,}04 - 1{,}9 \cdot 0{,}02$	**Б** 5,98
3 $36{,}48 : 6 + 4{,}5 \cdot 0{,}2$	**В** 5,7
4 $4{,}864 : 8 + 0{,}111 \cdot 40$	**Г** 6,042
	Д 6,98

1.29. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $4 \cdot 1\frac{1}{2} + 1\frac{23}{25} : \frac{3}{20}$	**А** $15\frac{1}{3}$
2 $4 : 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3} \cdot 7\frac{1}{7}$	**Б** $16\frac{1}{3}$
3 $8\frac{12}{33} \cdot \left(4\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2}\right)$	**В** $17\frac{1}{3}$
4 $\left(18\frac{1}{4} + 2\frac{1}{6}\right) : 1\frac{1}{4}$	**Г** $18\frac{4}{5}$
	Д $19\frac{1}{3}$

1.30. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $-48 : (-26 + 34) + 80$	**А** –72
2 $-120 : (-26 - 34) + 36 \cdot (-2)$	**Б** –74
3 $68 : (7 - 41) - 18 \cdot 4$	**В** –70
4 $-144 : (42 - 46) - 12 \cdot (-3)$	**Г** 74
	Д 72

1.31. Установити відповідність між степенями (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$	А $\frac{8}{125}$
2 $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$	Б $\frac{8}{27}$
3 $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-3}$	В $1\frac{1}{8}$
4 $\left(2\frac{1}{2}\right)^{-3}$	Г $3\frac{3}{8}$
	Д $15\frac{5}{8}$

1.32. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $5^{-2}\cdot 5^{4}$	А $\frac{1}{125}$
2 $(5^{-2})^{-1}\cdot 5^{-3}$	Б $\frac{1}{25}$
3 $(5^{-1})^{-2}\cdot 5$	В $\frac{1}{5}$
4 $(5^{-1})^{4}\cdot 5^{2}$	Г 25
	Д 125

Розв'яжіть завдання 1.33–1.47. Відповідь запишіть десятковим дробом.

1.33. Обчислити значення виразу $\left(8\frac{7}{12}-2\frac{17}{36}\right)\cdot 2{,}7-4\frac{1}{3}:0{,}65$. У відповідь записати результат, округлений до 0,01.

1.34. Обчислити зручним способом: $\left(74{,}7\cdot\frac{2}{21}+(-105{,}3)\cdot 2\frac{3}{7}-(-105{,}3)\cdot\frac{2}{21}-2\frac{3}{7}\cdot 74{,}7\right):10$.

1.35. Знайти невідомий член пропорції: $\dfrac{1{,}2:0{,}375-0{,}2}{6\frac{4}{25}:15\frac{2}{5}+0{,}8}=\dfrac{(0{,}016:0{,}12+0{,}7)\cdot 3}{x}$.

1.36. Два пароплави заходять у порт після кожного рейсу. Перший робить рейс за 4 дні, а другий — за 6 днів. Якось у неділю вони зустрілись у порту. Через скільки днів вони зустрінуться в порту в неділю наступного разу?

1.37. Для учнів класу приготували однакові подарунки. В усіх подарунках було разом 588 цукерок, 140 яблук і 252 горіхи. Скільки учнів у класі, якщо їх більше, ніж 20?

1.38. Середній вік одинадцяти футболістів команди становить 22 роки. Під час гри однин із гравців залишив поле, після чого середній вік футболістів, які залишилися, дорівнював 21 рік. Скільки років футболістові, який залишив поле?

1.39. Кішка з кошенятами з'їдають куплений господарем корм за 8 днів. Якби кішку годували саму, то їй вистачило б корму на 11 днів. На скільки повних днів вистачило б корму кошенятам?

1.40. Швидкість товарного поїзда дорівнює 60 км/год. Чому дорівнює його довжина у метрах, якщо відомо, що він проходить повз нерухомого спостерігача за 15 секунд?

1.41. Петрик збирає за 21 хвилину 48 яблук, а Сашко за 84 хвилини — 36 яблук. Скільки яблук збере Петрик за час, за який Сашко збере 54 яблука?

1.42. У класі із 40 учнів 30 уміють плавати, 27 — грати у шахи і 5 не вміють ні плавати, ні грати в шахи. Скільки учнів уміють плавати і грати в шахи?

1.43. Знайти x, якщо $\left(3\frac{9}{16}:\left(\frac{2,75}{x:\frac{2}{7}-45}-\frac{7}{24}\right)+6,2\right):12\frac{2}{3}=1,2$.

1.44. У ліцеї навчається 70 учнів, з них 27 записалося в драмгурток, 32 співають у хорі, 22 захоплюються спортом. Драмгурток відвідує 10 учнів, які також займаються в хорі, у хорі співає 6 спортсменів, у драмгуртку займається 8 спортсменів, 3 спортсмени відвідують і драмгурток, і хор. Скільки дітей не співають у хорі, не захоплюються спортом і не займаються в драмгуртку?

1.45. Катер пройшов за течією річки 60 км за деякий час. За цей же час проти течії він пройшов би 40 км. Яку відстань у кілометрах за цей час пропливе пліт?

1.46. Відстань між містами за течією річки теплохід проходить за 6 год, а проти течії — за 8 год. За скільки годин пропливе цю відстань пліт?

1.47. Автомобіль проїхав першу половину шляху зі швидкістю 60 км/год. Шлях, що залишився, половину часу він їхав зі швидкістю 80 км/год, а другу половину часу — зі швидкістю 100 км/год. Знайти у кілометрах за годину середню швидкість руху автомобіля.

Тема 2. Відсотки

Відсотком (*процентом*) називають число одну соту. Отже, $\frac{1}{100}=1\%$; $100\%=\frac{100}{100}=1$; $50\%=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$; $25\%=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$.

Тоді 100% числа a дорівнюють a, 50% числа a дорівнюють $\frac{1}{2}a$, 25% числа a становлять $\frac{1}{4}a$.

Щоб перетворити десятковий дріб у відсотки, потрібно помножити його на 100.

Щоб перетворити відсотки у десятковий дріб, потрібно число відсотків поділити на 100.

Наприклад: а) $0{,}002 = 0{,}002 \cdot 100\% = 0{,}2\%$; $0{,}07 = 0{,}07 \cdot 100\% = 7\%$; $1{,}34 = 1{,}34 \cdot 100\% = 134\%$; б) $2{,}3\% = 2{,}3\% : 100\% = 0{,}023$; $40\% = 40\% : 100\% = 0{,}4$; $263\% = 263\% : 100\% = 2{,}63$.

Аналогічно поступають і у випадку звичайних дробів. Наприклад: а) $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}\cdot 100\% = \frac{200}{3}\% =$ $= 66\frac{2}{3}\%$; б) $28\frac{4}{7}\% = 28\frac{4}{7}\% : 100\% = \frac{200}{7} : 100 = \frac{200}{7}\cdot\frac{1}{100} = \frac{2}{7}$.

Знаходження відсотків від числа

Приклад 1. Зарплата водія становить 3400 грн. Авансом йому виплатили 40 % зарплати. Яку суму отримав водій?

■ 3400 грн. — 100%;

x грн. — 40%.

Складаємо пропорцію: $\frac{3400}{x}=\frac{100}{40}$. Тоді $x=\frac{3400\cdot 40}{100}$; $x = 1360$.

Отже, водій отримав 1360 грн.

Відповідь. 1360 грн. ■

Розв'язання задачі можна провести і так:

1) записати 40% десятковим дробом: 40% = 0,4;

2) знайти дріб 0,4 від числа 3400: 3400 · 0,4 = 1360 (грн.).

Для того щоб знайти p відсотків від заданого числа a, можна:

1) записати p відсотків десятковим дробом;

2) помножити число a на одержаний десятковий дріб.

Наприклад: знайти 13% від 40. 13% = 0,13; 40 · 0,13 = 5,2.

Знаходження числа за його відсотками

Приклад 2. Робітникові виплатили авансом 1400 грн., що становить 35% його зарплати. Яка заробітна плата у робітника?

■ 1400 грн. — 35%;

x грн. — 100%.

Складаємо пропорцію: $\frac{1400}{x}=\frac{35}{100}$. Тоді $x=\frac{1400\cdot 100}{35}$; $x = 4000$.

Отже, заробітна плата робітника становить 4000 грн.

Відповідь. 4000 грн. ■

Розв'язання задачі можна провести і так:

1) записати 35% десятковим дробом: 35% = 0,35;

2) знайти число за його дробом: 1400 : 0,35 = 4000 (грн.).

Для того щоб знайти число за відомою його частиною т і числом відповідних відсотків р, можна:

1) записати р відсотків десятковим дробом;

2) поділити т на одержаний десятковий дріб.

Наприклад: знайти число, якщо 19% його становлять 57. 19% = 0,19; 57 : 0,19 = 300.

Знаходження відсоткового відношення двох чисел

Приклад 3. Сторожеві із зарплати 1800 грн. виплатили авансом 720 грн. Який відсоток зарплати він отримав?

■ 1800 грн. — 100 %;

720 грн. — x %.

Складаємо пропорцію: $\frac{1800}{720}=\frac{100}{x}$. Тоді $x=\frac{720\cdot 100}{1800}$; $x=40$.

Отже, сторож отримав 40% зарплати.

Відповідь. 40%. ■

Розв'язання задачі можна провести і так:

1) знайти відношення $\frac{720}{1800}=0,4$;

2) помножити одержаний результат на 100%: 0,4 · 100% = 40%.

Для того щоб знайти, скільки відсотків становить число а від числа b, можна:

1) знайти значення дробу $\frac{a}{b}$;

2) помножити його на 100%.

Наприклад: знайти, скільки відсотків становить число 9 від числа 24. $\frac{9}{24}\cdot 100\% = 37,5\%$.

Формули простих і складних відсотків.

Якщо банк виплачує клієнтові щомісячно p% внесеної суми A_0, то на рахунку клієнта через n місяців буде сума:

$$A_n = A_0\left(1+\frac{pn}{100}\right).$$ Це ***формула простих відсотків.***

Якщо клієнт поклав у банк суму A_0 під p% річних, то через n років нагромаджений (накопичений) капітал становитиме:

$$A_n = A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n.$$ Це ***формула складних відсотків.***

Приклад 4. Якою має бути початкова сума, покладена в банк під 20% річних, щоб через два роки прибуток становив 22000 грн.?

■ Нехай початкова сума становить A_0 грн. Тоді через два роки на рахунку буде $A_2 = A_0\cdot(1+0,2)^2 = A_0\cdot 1,44$ (грн.). Прибуток дорівнює різниці нарощеного (A_2) та початкового (A_0) капіталу: $A_2 - A_0 = A_0\cdot 1,44 - A_0 = A_0\cdot 0,44$. Рівняння: $A_0\cdot 0,44 = 22000$; $A_0 = \frac{22000}{0,44} = 50000$ (грн.).

Відповідь. 50000 грн. ■

Приклад 5. Скільки сухої ромашки вийде із 50 кг свіжої, якщо при сушінні вона втрачає 84% своєї маси?

А	Б	В	Г	Д
34 кг	312,5 кг	60 кг	42 кг	8 кг

■ 1) 84% = 0,84;

2) 0,84 · 50 = 42 (кг) — втрачає ромашка при сушінні;

3) 50 – 42 = 8 (кг) — залишиться сухої ромашки.

Відповідь. Д. ■

Приклад 6. Товар був виставлений на продаж за 4000 грн. Після двох знижок на одну й ту ж кількість відсотків він був проданий за 2250 грн. Визначити, на скільки відсотків щоразу знижували ціну.

■ Нехай ціну знижували на $x\% = \frac{x}{100}$. Тоді, застосувавши формулу складних відсотків, де $A_0 = 4000$ грн., $n = 2$, $A_2 = 2250$ грн., $p\% = x\%$, одержимо: $4000\left(1 - \frac{x}{100}\right)^2 = 2250$; $\left(1 - \frac{x}{100}\right)^2 = \frac{225}{400}$; $1 - \frac{x}{100} = \frac{15}{20}$; $\frac{x}{100} = \frac{1}{4}$; $x = 25$.

Відповідь. 25%. ■

Приклад 7. Токареві за перший рік роботи підвищили заробітну плату на 10%, а через рік — ще на 20%. На скільки відсотків підвищили токареві заробітну плату за два роки?

■ Нехай заробітна плата токаря становила a грн. Після першого підвищення вона становила $a + 0{,}1a = 1{,}1a$. Після другого підвищення (за 100% беремо вже $1{,}1a$) заробітна плата становитиме $1{,}1a + 0{,}2 \cdot 1{,}1a = 1{,}32a$. Отже, заробітна плата токаря зросла на $1{,}32a - a = 0{,}32a$, тобто на $0{,}32a : a = 0{,}32 = 32\%$.

Відповідь. На 32%. ■

Приклад 8. Вологість свіжоскошеної трави становить 60%, а вологість сіна — 15%. Скільки сіна можна одержати з 1,7 т свіжоскошеної трави?

■ 1) 1700 · 0,4 = 680 (кг) — маса сухої трав'яної маси;

2) 680 : 0,85 = 800 (кг) — маса сіна.

Відповідь. 800 кг. ■

Приклад 9. Скільки води потрібно додати до 50 г 35%-го розчину, щоб одержати 10%-й розчин?

■ 1) 50 · 0,35 = 17,5 (г) — маса солі в розчині;

2) у новому розчині 17,5 г солі становлять 10%, тоді маса нового розчину дорівнює 17,5 : 0,1 = = 175 (г);

3) 175 – 50 = 125 (г) — води потрібно додати до розчину.

Відповідь. 125 г води. ■

Приклад 10. У зв'язку із впровадженням новітніх технологій на виробництві продуктивність праці зросла на 60%. На скільки відсотків зменшиться час виконання деякого завдання?

■ Продуктивність праці становить p одиниць продукції за 1 год, час її виконання — t год. Тоді вся робота A полягає у виготовленні pt одиниць продукції. Оскільки продуктивність праці зросла на 60%, то вона стала дорівнювати $1{,}6p$ одиниць продукції за 1 год. Кількість виготовлених одиниць продукції не змінилася, тому $pt = 1{,}6p \cdot t_1$, де t_1 — час виконання завдання зі збільшеною продуктивністю, звідки $t_1 = \frac{pt}{1{,}6p} = \frac{t}{1{,}6} = \frac{10t}{16} = \frac{5}{8}t$. Тоді час виконання завдання зменшився на $t - \frac{5}{8}t = \frac{3}{8}t$, що становить $\frac{3}{8}t : t = \frac{3}{8} = 37{,}5\%$.

Відповідь. Час зменшиться на 37,5%. ■

Приклад 11. У яких пропорціях потрібно змішати 70%-й і 50%-й розчини кислоти, щоб одержати 65%-й розчин цієї кислоти?

■ Нехай узяли x г 70%-го розчину кислоти, а 50%-го — y г. Тоді маса 65%-го розчину дорівнює $(x + y)$ (г). Чистої кислоти в 70%-му розчині було $0{,}7x$ г, у 50%-му — $0{,}5y$ г. Чистої кислоти в ново-

утвореному розчині $0{,}65(x+y)$ г. Рівняння: $0{,}7x+0{,}5y=0{,}65(x+y)$; $0{,}7x+0{,}5y=0{,}65x+0{,}65y$; $0{,}05x=0{,}15y$; $x=3y$; $\frac{x}{y}=\frac{3}{1}$. Отже, потрібно взяти 3 частини 70%-го розчину й одну частину 50%-го розчину.

Відповідь. 3 : 1. ■

Завдання 2.1–2.23 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

2.1. Як знайти 52% від числа 960?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{960\cdot 100}{52}$	$\frac{52\cdot 100}{96}$	$\frac{960\cdot 52}{100}$	960 : 52	960 · 52

2.2. Як знайти число, 60 % якого дорівнюють 360?

А	Б	В	Г	Д
360 · 60	$\frac{360}{60}$	$\frac{60\cdot 100}{360}$	$\frac{360\cdot 60}{100}$	$\frac{360\cdot 100}{60}$

2.3. Як встановити, скільки відсотків становить число 9 від 96?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{9\cdot 100}{96}$	$\frac{96\cdot 9}{100}$	$\frac{96\cdot 100}{9}$	$\frac{9}{96}$	$\frac{96}{9}$

2.4. Банк сплачує своїм вкладникам 8% річних. Визначити, скільки грошей потрібно внести на рахунок, щоб через рік отримати 60 грн. прибутку.

А	Б	В	Г	Д
1150 грн.	1050 грн.	950 грн.	850 грн.	750 грн.

2.5. Уміст олова у сплаві становить 40%. Скільки грамів олова у 300 г такого ж сплаву?

А	Б	В	Г	Д
$133\frac{1}{3}$ г	120 г	75 г	$13\frac{1}{3}$ г	240 г

2.6. Сплав містить 50 г олова і 200 г міді. Який відсотковий уміст олова у сплаві?

А	Б	В	Г	Д
24%	40%	20%	25%	50%

2.7. Вкладник вніс до банку 2000 грн., а через рік отримав 2160 грн. Під який відсоток річних були покладені гроші?

А	Б	В	Г	Д
12%	8%	6%	14%	16%

2.8. 10%-й розчин солі містить 180 г води. Яка маса цього розчину?

А	Б	В	Г	Д
198 г	190 г	1800 г	200 г	400 г

2.9. Ціна товару дорівнює 64 грн. Після зниження ціни товар коштував 56 грн. На скільки відсотків було знижено ціну?

А	Б	В	Г	Д
25%	8%	10%	$14\frac{2}{7}\%$	12,5%

2.10. Скільки відсотків від 180 становлять 15% від 300?

А	Б	В	Г	Д
15%	20%	25%	30%	40%

2.11. Сплав, маса якого дорівнює 320 кг, містить 20% олова, 144 кг свинцю і решту — домішки. Визначити відсотковий уміст домішок.

А	Б	В	Г	Д
80%	25%	35%	55%	48,75%

2.12. Скільки відсотків становить НСД(99; 126) від НСК(12; 20)?

А	Б	В	Г	Д
25%	20%	15%	10%	30%

2.13. Ціна товару була підвищена на 25%. На скільки відсотків необхідно зменшити нову ціну товару, щоб одержати початкову?

А	Б	В	Г	Д
25%	15%	35%	20%	10%

2.14. Власник клубу має стабільний прибуток. Щоб збільшити прибуток, він підвищив ціну на квитки на 25%. Кількість відвідувачів значно зменшилася, і він вимушений був повернутися до початкової ціни квитка. На скільки відсотків власник клубу зменшив ціну квитка?

А	Б	В	Г	Д
125%	100%	25%	20%	Інша відповідь

2.15. Деяке додатне число спочатку збільшили на 50%, а потім одержане число зменшили на 50%. Як змінилося початкове число?

А	Б	В	Г	Д
Не змінилося	Зменшилося на 25%	Зменшилося на 20%	Зменшилося на 5%	Збільшилося на 5%

2.16. На скільки відсотків збільшиться об'єм куба, якщо його ребро збільшити на 50%?

А	Б	В	Г	Д
237,5%	125%	150%	50%	337,5%

2.17. Вкладник вніс до банку 1000 грн. під 8% річних. Яку суму він матиме на рахунку через 3 роки?

А	Б	В	Г	Д
$3 \cdot 1000 \cdot 1{,}08$	$3 \cdot 1000 \cdot 0{,}08$	$1000 \cdot 0{,}08^2$	$1000 \cdot 0{,}08^3$	$1000 \cdot 1{,}08^3$

2.18. Число a становить 25% числа b. Скільки відсотків становить число b від числа a?

А	Б	В	Г	Д
400%	200%	250%	750%	500%

2.19. Товар подешевшав на 20%. На скільки відсотків більше можна купити товару за ту ж кількість грошей?

А	Б	В	Г	Д
25%	20%	10%	40%	5%

2.20. Тривалість робочого дня зменшилась з 8 год до 6 год. На скільки відсотків потрібно підвищити продуктивність праці, щоб випуск продукції залишився тим же?

А	Б	В	Г	Д
20%	25%	$33\frac{1}{3}\%$	35%	$24\frac{1}{3}\%$

2.21. Машиніст провів поїзд за 7 год 30 хв замість 9 год за графіком. На скільки відсотків було збільшено середню швидкість?

А	Б	В	Г	Д
20%	$16\frac{2}{3}\%$	25%	15%	30%

2.22. У сплаві міді та цинку мідь становить $\frac{1}{7}$ частину маси цинку. Який відсотковий уміст міді у сплаві?

А	Б	В	Г	Д
$14\frac{2}{7}\%$	12,5%	25%	45%	6,2%

2.23. 2 кг сплаву міді з оловом містить 40% міді. Скільки потрібно додати до цього сплаву олова, щоб отриманий сплав містив 16% міді?

А	Б	В	Г	Д
3 кг	2,5 кг	2 кг	4 кг	3,5 кг

Завдання 2.24–2.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

2.24. Установити відповідність між частинами (1–4) та відсотками (А–Д).

1 $\frac{1}{4}$

2 $\frac{2}{5}$

3 $\frac{1}{8}$

4 $\frac{4}{5}$

А 40%

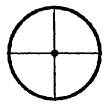
Б 20%

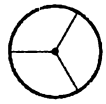
В 80%

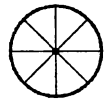
Г 12,5%

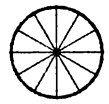
Д 25%

2.25. Установити відповідність між затушованими частинами круга (1–4) та відсотками (А–Д), які вони становлять від круга.

1 

2 

3 

4 

А $62\frac{1}{2}\%$

Б $58\frac{1}{3}\%$

В $83\frac{1}{3}\%$

Г 75%

Д $66\frac{2}{3}\%$

2.26. Установити відповідність між задачами (1–4) та їх розв'язаннями (А–Д).

1 Скільки відсотків становить число 40 від числа 240?

2 Знайти 40% від числа 240.

3 Знайти число, 40% якого дорівнюють 240.

4 Скільки відсотків становить число 240 від числа 40?

А $\frac{240 \cdot 40\%}{100\%}$

Б $\frac{240 \cdot 40\%}{100}$

В $\frac{240 \cdot 100\%}{40}$

Г $\frac{240 \cdot 100\%}{40\%}$

Д $\frac{40 \cdot 100\%}{240}$

2.27. Кількість дівчат у класі становить $\frac{1}{4}$ кількості хлопців. Установити відповідність між задачами (1–4) та відповідями (А–Д) до них.

1 Скільки відсотків хлопців у класі?

2 Скільки відсотків дівчат у класі?

3 Знайти відсоткове відношення кількості дівчат до кількості хлопців.

4 Знайти відсоткове відношення кількості хлопців до кількості дівчат.

А 20%

Б 75%

В 25%

Г 80%

Д 400%

2.28. Установити відповідність між задачами (1–4) та відповідями (А–Д) до них.

1 Вкладник вніс до банку 11000 грн. під 13% річних. Скільки гривень становитиме прибуток через рік?

2 Вкладник вніс до банку 11000 грн. під 12% річних. Скільки гривень буде на його рахунку через рік?

3 Вкладник вніс до банку 4000 грн. під 16% річних. Скільки гривень становитиме прибуток через 2 роки?

4 Вкладник вніс до банку 1000 грн. під 20% річних. Скільки гривень буде на його рахунку через 2 роки?

А 12320

Б 1382,4

В 1340

Г 1430

Д 1440

Розв'яжіть завдання 2.29–2.40. Відповідь запишіть десятковим дробом.

2.29. 2 кг сплаву міді з оловом містить 40% міді. Скільки кілограмів олова потрібно додати до цього сплаву, щоб отриманий сплав містив 25% міді?

2.30. Скільки кілограмів води потрібно випарувати зі 100 кг 10%-го розчину солі, щоб одержати розчин з концентрацією 20%?

2.31. Сплав міді та цинку, маса якого дорівнює 6 кг, містить 45% міді. Скільки кілограмів міді потрібно додати до цього сплаву, щоб він містив 60% міді?

2.32. З молока одержують 21% вершків, а з вершків — 24% масла. Зі скількох тонн молока можна одержати 126 кг масла?

2.33. Змішали 2 л молока, жирність якого дорівнює 6%, і 3 л молока, жирність якого дорівнює 8%. Знайди у відсотках жирність утвореної суміші.

2.34. Щоб одержати 800 г 50%-го розчину азотної кислоти, слід змішати 60%-й розчин цієї кислоти з 20%-м розчином. Скільки грамів 20% розчину використали?

2.35. До 400 г 5%-го розчину солі додали солі й одержали 24%-й розчин. Яка маса утвореного розчину у грамах?

2.36. Порода містить 32% мінералу, в якому є 4,5% золота. Який відсоток золота в породі?

2.37. Вкладник вніс до банку 9000 грн. Частину грошей він поклав під 10% річних, а решту — під 8%. Через рік прибутки від обох вкладів були однаковими. Скільки тисяч гривень було покладено на перший рахунок?

2.38. Скільки тисяч гривень було покладено в банк, якщо через два роки прибуток становив 840 грн. за 10% річних?

2.39. Встановити, який відсоток річних нараховує банк, якщо через два роки за початкового вкладу 800 грн. на рахунку стає 882 грн.

2.40. Ціна вхідного квитка в кінотеатр становить 36 грн. Після зменшення вхідної плати кількість глядачів збільшилися на 50%, а виручка — на 25%. Скільки гривень став коштувати квиток?

Тема 3. Цілі вирази

Степінь числа a з натуральним показником n (n > 1)

Степенем числа a з натуральним показником n ($n > 1$) називають добуток n множників, кожен з яких дорівнює a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}}.$$

Наприклад: $2^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5 \text{ множників}} = 32$; $(-3)^4 = \underbrace{-3 \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)}_{4 \text{ множники}} = 81$; $(-5)^3 = \underbrace{-5 \cdot (-5) \cdot (-5)}_{3 \text{ множники}} = -125$.

Вважають, що $a^1 = a$. Наприклад, $7^1 = 7$; $(-8)^1 = -8$.

Легко помітити, що $0^n = 0$; $1^n = 1$.

Будь-який степінь додатного числа є додатним числом. Наприклад, $2^{10} = 1024 > 0$; $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} > 0$.

Парний степінь від'ємного числа є додатним числом. Наприклад, $(-8)^2 = 64 > 0$; $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} > 0$.

Непарний степінь від'ємного числа є від'ємним числом. Наприклад, $(-5)^3 = -125 < 0$; $(-0{,}1)^5 = -0{,}00001 < 0$.

Степінь з цілим показником

Якщо $a \neq 0$ і n — натуральне число, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Наприклад, $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$; $(-6)^{-3} = \frac{1}{(-6)^3} = -\frac{1}{216}$; $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}$. Очевидно, що $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

Вважають, що $a^0 = 1$, якщо $a \neq 0$. Наприклад, $3^0 = 1$; $(-2)^0 = 1$.

Основні властивості степенів:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Наприклад, $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$;
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Наприклад, $\frac{3^6}{3^2} = 3^{6-2} = 3^4 = 81$;
3. $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$. Наприклад, $\left(4^2\right)^3 = 4^{2 \cdot 3} = 4^6 = 4096$;
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$. Наприклад, $20^3 = (2 \cdot 10)^3 = 2^3 \cdot 10^3 = 8 \cdot 1000 = 8000$;
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. Наприклад, $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$.

Одночленами називають числа, змінні, їхні степені з натуральними показниками та добутки. Наприклад, 5; x; $\frac{2}{5}a^7$; $5m^2n \cdot (-3)m^4$. Одночлен, який містить єдиний числовий множник, записаний першим (*коефіцієнт*), та степені різних змінних, називають *одночленом стандартного вигляду*. Наприклад, щоб подати одночлен $5m^2n \cdot (-3)m^4$ у стандартному вигляді, слід помножити 5 і –3 та m^2 і m^4: $5m^2n \cdot (-3)m^4 = -15m^6n$. Коефіцієнт цього одночлена — число –15.

Степенем одночлена називають суму показників степенів усіх змінних, які входять до нього. Якщо одночлен містить лише число, то його степінь дорівнює нулю. Наприклад, $-15m^6n$ — одночлен сьомого степеня, $10x$ — одночлен першого степеня, 78 — одночлен нульового степеня.

Многочленом називають суму кількох одночленів. Доданки многочлена, які відрізняються лише коефіцієнтом, називають *подібними членами* (доданками) многочлена. Наприклад, у тричлені $3x^2 - 9x^5 \cdot 2y^2z - x^2$ подібними доданками є $3x^2$ та $-x^2$.

Многочлен, який містить лише одночлени стандартного вигляду, серед яких немає подібних членів, називають *многочленом стандартного вигляду*. Степенем многочлена стандартного вигляду називають найбільший зі степенів одночленів, з яких складається даний многочлен.

Формули скороченого множення

1. $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Наприклад, $(a-3)(a+3)=a^2-3^2=a^2-9$;

2. $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$. Наприклад, $(2a-5)^2=(2a)^2-2\cdot 2a\cdot 5+5^2=4a^2-20a+25$;

3. $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$. Наприклад, $(5+2x)^3=5^3+3\cdot 5^2\cdot 2x+3\cdot 5\cdot (2x)^2+(2x)^3=$
$=125+150x+60x^2+8x^3$;

4. $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$. Наприклад, $(2-x)(4+2x+x^2)=2^3-x^3=8-x^3$;

5. $(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+2a_1a_2+2a_1a_3+\ldots+2a_{n-1}a_n$. Наприклад,
$(m-x+3c)^2=m^2+x^2+9c^2-2mx+6mc-6xc$.

Розкладання многочлена на множники

1. Винесення спільного множника за дужки. Наприклад, $12a^5-30a^3b+6a^3=6a^3\cdot 2a^2+6a^3\cdot(-5b)+6a^3\cdot 1=$
$=6a^3\cdot(2a^2-5b+1)$.

2. Використання формул скороченого множення. Наприклад, $100x^2-y^8=(10x)^2-(y^4)^2=$
$=(10x-y^4)(10x+y^4)$.

3. Групування. Наприклад, $6x^2y^2+8y+3x^2y+4=(6x^2y^2+3x^2y)+(8y+4)=$
$=3x^2y\cdot(2y+1)+4\cdot(2y+1)=(2y+1)(3x^2y+4)$.

Дії над многочленами

Щоб додати (відняти) многочлени, досить розкрити дужки, перед якими стоїть знак «+» або «–», та звести подібні доданки, якщо вони є. Якщо перед дужками стоїть знак «+», то при розкриванні дужок знаки всіх одночленів, які були в дужках, не змінюються; якщо знак «–» — то знаки змінюються на протилежні. Наприклад, $(3+5x)+(7x-4)=3+5x+7x-4=12x-1$; $(-4+3x)-(3-5x)=$
$=-4+3x-3+5x=8x-7$.

Щоб помножити одночлен на многочлен, потрібно одночлен помножити на кожен член многочлена й отримані добутки додати. Наприклад, $3x\cdot(2x+5)=3x\cdot 2x+3x\cdot 5=6x^2+15x$.

Щоб помножити многочлен на многочлен, потрібно кожен член одного многочлена помножити на кожен член іншого многочлена й отримані добутки додати. Наприклад, $(3+5x)(7x-4)=3\cdot 7x+$
$+3\cdot(-4)+5x\cdot 7x+5x\cdot(-4)=21x-12+35x^2-20x=35x^2+x-12$.

Щоб поділити многочлен на одночлен, досить кожен член многочлена розділити на цей одночлен і одержані результати додати. Наприклад, $(15x^4-9x^3+24x^2-6x):(3x)=5x^3-3x^2+8x-2$.

Ділення многочлена на многочлен

Якщо для двох многочленів $A(x)$ і $B(x)$ можна знайти такий многочлен $Q(x)$, що $A(x)=B(x)\cdot Q(x)$, то кажуть, що многочлен $A(x)$ *ділиться на многочлен* $B(x)$. Наприклад, оскільки $x^2-9=(x-3)(x+3)$, то многочлен $A(x)=x^2-9$ ділиться на многочлен $B(x)=x+3$, тоді $Q(x)=x-3$ — частка.

Ділення многочлена на многочлен за правилом кута.

Щоб поділити многочлен на многочлен за правилом кута, потрібно:

1. Упорядкувати члени многочленів за спаданням степенів змінної.
2. Поділити старший член діленого на старший член дільника.
3. Одержаний результат помножити на дільник й одержаний добуток відняти від діленого.
4. З одержаною різницею повторити кроки 1–3 доки не залишиться в остачі нуль або степінь остачі не стане меншим від степеня дільника.

Наприклад:

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2-18x-40 & x+2 \\ \underline{-\,x^3+2x^2} & \hline x^2+x-20 \\ \quad x^2-18x & \\ \quad \underline{-\,x^2+2x} & \\ \quad\quad -20x-40 & \\ \quad\quad \underline{-\,-20x-40} & \\ \quad\quad\quad\ \ 0 & \end{array}$$

Многочлен від однієї змінної можна записати так: $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, де $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — числа, до того ж $a_0 \neq 0$, x — змінна.

Число d називають коренем многочлена, якщо $P(d) = 0$. Наприклад, число 5 — корінь многочлена $P(x) = x^3 - 4x^2 - 4x - 5$, бо $P(5) = 5^3 - 4 \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 - 5 = 125 - 100 - 20 - 5 = 0$.

Схема Горнера ділення многочленів

Виконання ділення многочленів можна виконувати за допомогою схеми Горнера. Нехай потрібно поділити многочлен $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ на двочлен $x - a$. Тоді ділення можна записати за допомогою таблиці:

	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_2
a	a_0	$b_1 = a \cdot a_0 + a_1$	$b_2 = a \cdot b_1 + a_2$	...	$b_{n-1} = a \cdot b_{n-2} + a_{n-1}$	$b_n = a \cdot b_{n-1} + a_n$
	коефіцієнти многочлена $(n-1)$ степеня					остача

Наприклад, $(2x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 21x - 18) : (x - 1)$.

	2	–9	4	21	–18
1	2	–7	–3	18	0

Отже, можна записати: $2x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 21x - 18 = (x - 1)(2x^3 - 7x^2 - 3x + 18)$.

Теорема Безу

Остача від ділення многочлена $P(x)$ на лінійний двочлен $x - d$ дорівнює значенню цього многочлена, якщо $x = d$, тобто $P(d)$.

Наприклад, остача від ділення многочлена $2x^3 - 3x^2 + 4x + 9$ на двочлен $x + 1$ ($x + 1 = x - (-1)$, остача дорівнює -1) дорівнює $P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 9 = -2 - 3 - 4 + 9 = 0$, тобто $P(x)$ ділиться на $x + 1$ націло.

Розклад на множники квадратного тричлена і деяких многочленів

Вираз $ax^2 + bx + c$, де a, b і c — деякі числа ($a \neq 0$), x — змінна, називають *квадратним тричленом*. Його корені x_1 та x_2 можна обчислити за формулою $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, де $D = b^2 - 4ac$ — дискримінант.

Якщо x_1 та x_2 — корені квадратного тричлена, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Наприклад, тричлен $2x^2 + x - 3$ має два корені: $-1{,}5$ і 1, тоді $2x^2 + x - 3 = 2(x - 1)(x + 1{,}5)$.

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$. Наприклад: а) $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$; б) $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$.

Якщо $n \in N$ і $n = 2k + 1$ — непарне число, то $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$. Наприклад, $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$.

Степінь двочлена (біном Ньютона)

$(a + b)^n = a^n + \beta_1a^{n-1}b + \beta_2a^{n-2}b^2 + \ldots + \beta_{n-2}a^2b^{n-2} + \beta_{n-1}ab^{n-1} + b^n$. Коефіцієнти цього розкладу 1; β_1, β_2, ...; β_{n-2}; β_{n-1}; 1 можна взяти з таблиці, яку називають трикутником Паскаля.

степінь	*коефіцієнти розкладу*
$(a+b)^0$	1
$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6$	1 6 15 20 15 6 1
.....	.....

У таблиці в кожному рядку по краях розміщені 1, а кожне з решти чисел дорівнює сумі двох чисел, які містяться над ним ліворуч і праворуч. Наприклад, $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Приклад 1. Спростити вираз $(a^4)^{12} : a^8$.

А	Б	В	Г	Д
a^2	a^6	a^{40}	a^8	a

■ $(a^4)^{12} : a^8 = a^{4\cdot 12} : a^8 = a^{48} : a^8 = a^{48-8} = a^{40}$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 2. Записати в порядку спадання числа 4^{30}; 3^{40}; 2^{50}.

А	Б	В	Г	Д
2^{50}; 4^{30}; 3^{40}	3^{40}; 4^{30}; 2^{50}	2^{50}; 3^{40}; 4^{30}	4^{30}; 3^{40}; 2^{50}	3^{40}; 2^{50}; 4^{30}

■ $4^{30} = 4^{3\cdot 10} = (4^3)^{10} = 64^{10}$; $3^{40} = 3^{4\cdot 10} = (3^4)^{10} = 81^{10}$; $2^{50} = 2^{5\cdot 10} = (2^5)^{10} = 32^{10}$. Оскільки основи степенів більші за 1, то при однаковому показнику степеня більшим є те число, основа якого більша. Отже, числа слід впорядкувати так: 81^{10}; 64^{10}; 32^{10} або 3^{40}; 4^{30}; 2^{50}.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 3. Обчислити: $21^8 \cdot 14^{-7} \cdot 6^9 \cdot 3^{-16}$.

А	Б	В	Г	Д
$4\frac{2}{3}$	42	56	84	$9\frac{1}{3}$

■ $21^8 \cdot 14^{-7} \cdot 6^9 \cdot 3^{-16} = (3\cdot 7)^8 \cdot (2\cdot 7)^{-7} \cdot (3\cdot 2)^9 \cdot 3^{-16} = 3^8 \cdot 7^8 \cdot 2^{-7} \cdot 7^{-7} \cdot 3^9 \cdot 2^9 \cdot 3^{-16} =$

$$= \frac{3^8 \cdot 7^8 \cdot 3^9 \cdot 2^9}{2^7 \cdot 7^7 \cdot 3^{16}} = \frac{3^{8+9} \cdot \cancel{7^8} \cdot \cancel{2^{9}}^{2}}{\cancel{2^7} \cdot \cancel{7^7} \cdot 3^{16}} = \frac{3^{17} \cdot 7 \cdot 2^2}{3^{16}} = 3 \cdot 7 \cdot 4 = 84.$$

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 4. Подати многочлен $3x^2 - 9x^5 \cdot 2y^2z - x^2$ у стандартному вигляді й визначити його степінь.

■ $3x^2 - 9x^5 \cdot 2y^2z - x^2 = 3x^2 - x^2 - 18x^5y^2z = 2x^2 - 18x^5y^2z$. Даний многочлен є многочленом восьмого степеня. ■

Приклад 5. Виконати дії: $3ab^4 \cdot (a^2b - 8a)$.

■ $3ab^4 \cdot (a^2b - 8a) = 3ab^4 \cdot a^2b + 3ab^4 \cdot (-8a) = 3a^3b^5 - 24a^2b^4$. ■

Приклад 6. Спростити вираз $(3b - 2a)(2a + 3b)(9b^2 + 4a^2)$.

А	Б	В	Г	Д
$81b^4 + 16a^4$	$81b^4 - 16a^4$	$-81b^4 + 16a^4$	$9b^4 - 2ab + a^4$	$9b^4 - 2ab - a^4$

■ $(3b-2a)(2a+3b)(9b^2+4a^2)=((3b)^2-(2a)^2)(9b^2+4a^2)=(9b^2-4a^2)(9b^2+4a^2)=(9b)^2+(4a)^2=$ $=81b^4-16a^4$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 7. Знайти суму лінійних множників, на які розкладається многочлен $x^4+5x^3-x^2-17x+12$.

А	Б	В	Г	Д
$4x-5$	$4x+7$	$4x+5$	$4x-3$	$4x+3$

■ Знайдемо корені многочлена $x^4+5x^3-x^2-17x+12$. $x^4+5x^3-x^2-17x+12=0$. Випишемо дільники вільного члена: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12.

Обчислимо, що $P(1)=1+5-1-17+12=0$. За схемою Горнера виконаємо ділення:

	1	5	–1	–17	12
1	1	6	5	–12	0

Отже, можна записати: $x^4+5x^3-x^2-17x+12=(x-1)(x^3+6x^2+5x-12)$.

Виконаємо аналогічні дії з многочленом $x^3+6x^2+5x-12$. Цілі дільники числа –12: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12.

Знайдемо, що $P(1)=1+6+5-12=0$. За схемою Горнера виконаємо ділення:

	1	6	5	–12
1	1	7	12	0

Отже, можна записати: $x^3+6x^2+5x-12=(x-1)(x^2+7x+12)$.

Розкладемо двочлен $x^2+7x+12$ на множники: $x^2+7x+12=0$; $D=7^2-4\cdot1\cdot12=1$; $x_1=\dfrac{-7+1}{2}=-3$; $x_2=\dfrac{-7-1}{2}=-4$. $x^2+7x+12=(x-(-3))(x-(-4))=(x+3)(x+4)$.

Тоді заданий многочлен можна записати у вигляді: $x^4+5x^3-x^2-17x+12=(x-1)^2(x+3)(x+4)$. Сума лінійних множників: $(x-1)+(x-1)+(x+3)+(x+4)=x-1+x-1+x+3+x+4=4x+5$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 8. Виконати дії: $(x^2-7)(3x-5)$.

■ $(x^2-7)(3x-5)=x^2\cdot3x+x^2\cdot(-5)+(-7)\cdot3x+(-7)\cdot(-5)=3x^3-5x^2-21x+35$. ■

Приклад 9. Розкласти на множники многочлен c^3+c^2-4c-4.

А	Б	В	Г	Д
$(c^2+1)(c-4)$	$(c^2+4)(c-1)$	$(c+1)(c-4)(c+4)$	$(c+1)(c-2)(c+2)$	$c(c^2+c-4)$

■ $c^3+c^2-4c-4=(c^3+c^2)-(4c+4)=c^2(c+1)-4(c+1)=(c+1)(c^2-4)=(c+1)(c-2)(c+2)$.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 10. Вказати значення, якого може набувати вираз $a^2+10a+25$, якщо $a\in N$.

А	Б	В	Г	Д
1	49	16	25	48

■ $a^2+10a+25=a^2+2\cdot a\cdot5+5^2=(a+5)^2$. За натуральних значень a вираз $a+5$ теж є натуральним числом. Отже, $(a+5)^2$ — квадрат натурального числа. Із запропонованих чисел квадратом натурального числа, більшого за 5, є лише число 49.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 11. Установити відповідність між виразами (1–4) та тотожно рівними їм виразами (А–Д).

1 $(2a-3)(3a+2)$	**А** $9+12a+4a^2$
2 $(2a-3)^2$	**Б** $6a^2-5a-6$
3 $(3-2a)(3+2a)$	**В** $4a^2-6a+9$
4 $(3+2a)^2$	**Г** $9-12a+4a^2$
	Д $9-4a^2$

1. $(2a-3)(3a+2)=2a\cdot 3a+2a\cdot 2-3\cdot 3a-3\cdot 2=6a^2+4a-9a-6=6a^2-5a-6\to$ **Б**

2. $(2a-3)^2=(2a)^2-2\cdot 2a\cdot 3+3^2=4a^2-12a+9=9-12a+4a^2\to$ **Г**

3. $(3-2a)(3+2a)=3^2-(2a)^2=9-4a^2\to$ **Д**

4. $(3+2a)^2=3^2+2\cdot 3\cdot 2a+(2a)^2=9+12a+4a^2\to$ **А**

Відповідь.

	А	Б	В	Г	Д
1		☒			
2				☒	
3					☒
4	☒				

■

Приклад 12. Знайти значення виразу $x+y$, якщо $|x-y|+|4-x|=0$.

А	Б	В	Г	Д
4	інша відповідь	0	6	8

■ Значення виразів $|x-y|$ і $|4-x|$ — невід'ємні. Сума двох невід'ємних виразів дорівнює нулю лише тоді, коли кожен з них дорівнює нулю. Знайдемо, за яких значень x та y це відбудеться.

$\begin{cases}|4-x|=0,\\|x-y|=0;\end{cases}\ \begin{cases}4-x=0,\\x-y=0;\end{cases}\ \begin{cases}x=4,\\y=x;\end{cases}\ \begin{cases}x=4,\\y=4.\end{cases}$ Якщо $x=4$, $y=4$, то $x+y=4+4=8$.

Відповідь. Д. ■

Завдання 3.1–3.23 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

3.1. Обчислити: $9999\cdot 1001+1001$.

А	Б	В	Г	Д
1010000	10100	101001	101000	10010000

3.2. Обчислити: $(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^{2008}$.

А	Б	В	Г	Д
2008	–2008	0	1	–1

3.3. Обчислити: $\dfrac{9^5\cdot 4^3}{27^4\cdot 2^5}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{9}$	1	2	$\frac{2}{27}$	$\frac{4}{9}$

3.4. Обчислити: $\dfrac{4\cdot 3^{32}+9\cdot 3^{30}}{9^{16}}$.

А	Б	В	Г	Д
$4\cdot 3^{16}$	15	13	$4\cdot 3^{14}$	5

3.5. Знайти значення виразу $\dfrac{5^{3n+2}\cdot 2^{3n+1}}{1000^n}$.

А	Б	В	Г	Д
2	10^n	5	50	10^{n+2}

3.6. На скільки $\dfrac{4^{a+1}-2^{2a-1}}{2^{2a}}$ менше від 9?

А	Б	В	Г	Д
3,5	3	4,5	5,5	7

3.7. Подати у вигляді многочлена вираз $\overline{abc}+\overline{cab}$.

А	Б	В	Г	Д
$110a+11b+101c$	$2a+2b+2c$	$200a+20b+2c$	$200a+2b+20c$	$111a+11b+c$

3.8. Відомо, що $a+b=1$, $b+c=2$, $a+c=3$. Знайти $3(a+b+c)$.

А	Б	В	Г	Д
6	9	12	15	18

3.9. Спростити вираз $(a-1)(a^9+a^8+a^7+\ldots+a^2+a+1)+1$.

А	Б	В	Г	Д
$a^{10}+a^9$	$a^{10}+a$	$a^{10}-1$	a^{10}	a^9

3.10. Спростити вираз $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdot\ldots\cdot(2^{32}+1)+1$.

А	Б	В	Г	Д
2^{34}	2^{64}	$2^{64}+2$	$2^{34}+2$	$2^{34}-2$

3.11. Розкласти на множники вираз $4(x+y)^2-9(x-y)^2$.

А	Б	В	Г	Д
$-(13x-5y)\times$ $\times(13x+5y)$	$(13x-5y)\times$ $\times(13x-5y)$	$-(5x-y)\times$ $\times(5x+y)$	$(5x-y)\times$ $\times(5x+y)$	$(5x-y)\times$ $\times(5y-x)$

3.12. Подати многочлен $0{,}25x^2+y^2-xy-t^2$ у вигляді добутку.

А	Б	В	Г	Д
$(0{,}25x-y-t)\times$ $\times(0{,}25x+y+t)$	$(0{,}25x-y-t)\times$ $\times(0{,}25x-y+t)$	$(0{,}05x-y-t)\times$ $\times(0{,}05x-y+t)$	$(0{,}5x-y-t)\times$ $\times(0{,}5x-y+t)$	$(0{,}5x-y+t)\times$ $\times(0{,}5x+y+t)$

3.13. Розкласти многочлен x^4+x^2+1 на множники і знайти суму вільних членів многочленів розкладу.

А	Б	В	Г	Д
2	4	0	1	–1

3.14. Знайти $(a-b)^2$, якщо $(a+b)^2=36$, $a^2-b^2=24$.

А	Б	В	Г	Д
2	4	8	16	32

3.15. Знайти $(a + b)^4$, якщо $(ab)^3 = 125$, $a^2 + b^2 = 15$.

А	Б	В	Г	Д
25	225	400	500	625

3.16. $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ... + 2007 - 2008 = ...$

А	Б	В	Г	Д
2008	–2008	1004	–1004	0

3.17. $(200 + 1)(200 - 2)(200 + 3)(200 - 4) ... (200 + 2007)(200 - 2008) = ...$

А	Б	В	Г	Д
2008000	–2008000	1004000	–1004000	0

3.18. Знайти x, якщо $222222x = 111111 + 222222 + 333333 + 444444$.

А	Б	В	Г	Д
1	4	5	10	12

3.19. Обчислити: $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + 99^2 - 100^2 + 101^2$.

А	Б	В	Г	Д
–500	4949	$101^2 - 1$	–50	5151

3.20. Спростити вираз: $70 \cdot (71^9 + 71^8 + 71^7 + ... + 71^2 + 71) + 71$.

А	Б	В	Г	Д
70^{10}	$71^{10} - 1$	71^{10}	$71^{10} + 1$	$70^{10} + 1$

3.21. Якою цифрою закінчується значення виразу $11^6 + 14^6 - 13^3$?

А	Б	В	Г	Д
0	2	3	5	7

3.22. Знайти частку від ділення многочленів $x^4 - x^2 + x + 1$ та $x^3 - x^2 + 1$.

А	Б	В	Г	Д
$x^2 - 1$	x	$x - 1$	$x + 1$	$x^2 + 1$

3.23. Знайти остачу від ділення многочлена $x^3 + 5x^2 - x - 4$ на двочлен $x - 1$.

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	–1	–2

Завдання 3.24–3.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

3.24. Установити відповідність між виразами (1–4) та тотожно рівними їм виразами (А–Д).

1 $x^2 - (x - 1)(x + 3)$
2 $x^2 - (x + 1)(x + 3)$
3 $x^2 - (x - 1)(x - 3)$
4 $x^2 - (x + 1)(x - 3)$

А $2x + 3$
Б $4x - 3$
В $-4x - 3$
Г $-4x + 3$
Д $-2x + 3$

3.25. Установити відповідність між виразами (1–4) та тотожно рівними їм виразами (А–Д).

1 $(a-2b)^2-(a-b)(a+b)$	**А** $2ab-5a^2$
2 $(2a+b)(b-2a)-(a-b)^2$	**Б** $2ab-5b^2$
3 $(-2a-b)^2-(a-b)^2$	**В** $-4ab+5b^2$
4 $-(2a-b)^2-(a-b)(a+b)$	**Г** $4ab-5a^2$
	Д $6ab+3a^2$

3.26. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх розкладами на множники (А–Д).

1 $ax-ay-by+bx$	**А** $(a+b)(y-x)$
2 $ax+ay-bx-by$	**Б** $(a+b)(x-y)$
3 $-ax+ay+bx-by$	**В** $(a-b)(x-y)$
4 $ax-ay-bx+by$	**Г** $(a-b)(y-x)$
	Д $(a-b)(x+y)$

3.27. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх розкладами на множники (А–Д).

1 $4(x-y)^2-9y^2$	**А** $(x+3y)(5x-3y)$
2 $4(x-y)^2-9x^2$	**Б** $(x-3y)(5x-3y)$
3 $9(x-y)^2-4y^2$	**В** $(x+2y)(2y-5x)$
4 $9(y-x)^2-4x^2$	**Г** $(2x+y)(2x-5y)$
	Д $(3x-5y)(3x-y)$

3.28. Установити відповідність між сумами (1–4) та їх записами у вигляді многочленів (А–Д).

1 $\overline{abc}+\overline{bac}$	**А** $2a+110b+110c$
2 $\overline{abc}+\overline{cba}$	**Б** $20a+101b+101c$
3 $\overline{abc}+\overline{acb}$	**В** $101a+20b+101c$
4 $\overline{bac}+\overline{cab}$	**Г** $110a+110b+2c$
	Д $200a+11b+11c$

Розв'яжіть завдання 3.29–3.34. Відповідь запишіть десятковим дробом.

3.29. Знайти значення виразу $\dfrac{2^{21}\cdot 27^3+15\cdot 4^{10}\cdot 9^4}{6^9\cdot 2^{10}+12^{10}}$.

3.30. Знайти частку від ділення 16^5+2^{15} на 33 у вигляді степеня числа 2. У відповідь записати показник степеня.

3.31. Виконати ділення многочлена $2x^3-3x^2-11x+6$ на двочлен $x-3$ і знайти значення отриманої частки, якщо $x=-2$.

3.32. Якою цифрою закінчується значення виразу $15^9+26^9+39^9$?

3.33. Якою цифрою закінчується число 99^{99^9} ?

3.34. Знайти, за яких значень a і b многочлен $x^4+6x^3+3x^2+ax+b$ ділиться без остачі на многочлен x^2+4x+3. У відповідь записати суму a_0+b_0 знайдених значень a та b.

Тема 4. Дробово-раціональні вирази

Вирази, які можуть містити додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до натурального степеня чисел та змінних, називають ***раціональними***. Якщо раціональний вираз не містить ділення на вираз зі змінною, то його називають цілим, а інакше — дробовим. Наприклад, вирази $2+a^2$; $\frac{6(a+b)}{7}$ — цілі раціональні, а вирази $\frac{4k+y}{3m-c}$; $x^2+x+\frac{1}{x}$ — дробові раціональні.

Два вирази називають *тотожно рівними*, якщо для всіх допустимих значень змінних їхні відповідні значення рівні. Наприклад, тотожно рівними є вирази $2x^2 - 18$ та $(2x + 6)\cdot(x - 3)$.

Раціональним дробом називають вираз виду $\frac{A}{B}$, де A і B — многочлени.

Допустимими значеннями змінних у виразі називають такі значення змінних, за яких вираз має числове значення. Іншими словами, за допустимих значень змінних можна виконувати всі дії, які містить даний вираз. Наприклад, для виразу $a^3 + b - 2$ всі значення змінних a та b є допустимими, оскільки зазначені дії можна виконати за будь-яких значень a та b. Для виразу $\frac{m-2}{m}$ допустимими є всі значення m, крім $m = 0$ (на 0 ділити не можна).

Множину всіх допустимих значень змінних для даного виразу називають *областю допустимих значень* виразу (ОДЗ). Наприклад, для виразу $x^{-3}+\frac{2}{x-5}$ областю допустимих значень є всі числа, крім $x = 0$ та $x = 5$, бо якщо $x = 0$, то значення виразу $x^{-3}=\frac{1}{x^3}$ не існує, а якщо $x = 5$, то не існує значення виразу $\frac{2}{x-5}$.

Застосування основної властивості дробу

1. ***Скорочення дробу*** — ділення чисельника і знаменника на спільний множник. Щоб скоротити раціональний дріб, слід спочатку чисельник і знаменник розкласти на множники.

Наприклад: скоротити дріб $\frac{12-3x^2}{15x+30}$. Одержимо: $\frac{12-3x^2}{15x+30}=\frac{3\left(4-x^2\right)}{15(x+2)}=\frac{3(2-x)(2+x)}{15(2+x)}=\frac{2-x}{5}$.

2. ***Зміна знаків членів дробу.*** Якщо чисельник і знаменник дробу $\frac{A}{B}$ помножити на –1, то одержимо: $\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}$, тобто значення дробу не зміниться, якщо одночасно змінити знаки чисельника та знаменника. Якщо ж змінити знак тільки чисельника або тільки знаменника, то й дріб змінить свій знак: $\frac{-A}{B}=-\frac{A}{-B}=-\frac{A}{B}$. Також правильно: $\frac{A}{B}=-\frac{-A}{B}=-\frac{A}{-B}$.

3. ***Зведення дробів до спільного знаменника***. Щоб звести дроби до спільного знаменника, потрібно:

1) розкласти на множники знаменники дробів;

2) скласти спільний знаменник, внісши до нього усі різні множники в найвищих степенях, в яких вони входять у розклади знаменників;

3) знайти додатковий множник для кожного дробу (для цього спільний знаменник потрібно поділити на знаменник дробу);

4) помножити чисельник і знаменник кожного дробу на відповідний додатковий множник.

4. ***Додавання і віднімання раціональних дробів***. Щоб додати чи відняти дроби з різними знаменниками, слід спочатку звести їх до спільного знаменника.

Наприклад: знайти різницю дробів $\frac{a^2-2b}{a^2-b^2}-\frac{a}{a+b}$. Одержимо:

$$\frac{a^2-2b}{a^2-b^2}-\frac{a}{a+b}=\frac{a^2-2b}{(a-b)(a+b)}-\frac{a}{a+b}=\frac{a^2-2b}{(a-b)(a+b)}-\frac{a(a-b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{a^2-2b-a^2+ab}{(a-b)(a+b)}=\frac{-2b+ab}{a^2-b^2}.$$

5. ***Множення раціональних дробів.*** Добутком двох раціональних дробів є дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник — добутку знаменників.

Наприклад: знайти добуток дробів $\frac{2a^2}{x}\cdot\frac{y}{6ab}$. Маємо: $\frac{2a^2}{x}\cdot\frac{y}{6ab}=\frac{2a^2\cdot y}{x\cdot 6ab}=\frac{ay}{3xb}$.

6. ***Ділення раціональних дробів:*** $\frac{A_1}{B_1}:\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_1\cdot B_2}{B_1\cdot A_2}$.

Наприклад: знайти частку дробів $\frac{16x^3}{a+7}:\frac{12xy}{a^2-49}$. Тоді:

$$\frac{16x^3}{a+7}:\frac{12xy}{a^2-49}=\frac{16x^3\cdot\left(a^2-49\right)}{(a+7)\cdot 12xy}=\frac{16x^3\cdot(a-7)(a+7)}{(a+7)\cdot 12xy}=\frac{4x^2(a-7)}{3y}.$$

7. ***Піднесення раціонального дробу до степеня з цілим показником:*** $\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}$.

Наприклад: $\left(\frac{5mn^2}{3x^4}\right)^3=\frac{\left(5mn^2\right)^3}{\left(3x^4\right)^3}=\frac{5^3\cdot m^3\cdot n^6}{3^3\cdot x^{12}}=\frac{125m^3n^6}{27x^{12}}$.

Умова рівності дробу нулю

Дріб $\frac{A}{B}$ дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю, тобто $\frac{A}{B}=0\Leftrightarrow\begin{cases}A=0;\\B\neq 0.\end{cases}$

Наприклад: знайти значення змінної, за яких дріб $\frac{x^2-9}{x+3}$ дорівнює нулю. Одержимо:

$\frac{x^2-9}{x+3}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-9=0;\\x+3\neq 0;\end{cases}\begin{cases}(x-3)(x+3)=0;\\x+3\neq 0;\end{cases}\begin{cases}x=3 \text{ або } x=-3;\\x\neq -3.\end{cases}$ Отже, дріб $\frac{x^2-9}{x+3}$ дорівнює нулю, якщо $x=3$.

Приклад 1. Скоротити дріб $\frac{12y^3-8y^2}{28y^2-36y^4}$.

■ $\frac{12y^3-8y^2}{28y^2-36y^4}=\frac{4y^2(3y-2)}{4y^2(7-9y^2)}=\frac{3y-2}{7-9y^2}$. ■

Приклад 2. Вказати допустимі значення змінної у виразі $\frac{3}{x^2+1}+\frac{x-5}{x^2-1}$.

■ Знайдемо значення змінної x, за яких знаменник кожного з дробів дорівнює нулю:

$x^2+1=0$; $x^2=-1$; $x\in\varnothing$;

$x^2-1=0$; $x^2=1$; $x=\pm 1$.

Відповідь. Усі числа, крім ± 1. ■

Приклад 3. Скоротити дріб $\dfrac{a^3+a^2-a-1}{a^2+2a+1}$.

А	Б	В	Г	Д
a^2	$a-1$	$\dfrac{a-1}{a+1}$	$\dfrac{a^3}{2}$	a^2-1

■ $\dfrac{a^3+a^2-a-1}{a^2+2a+1}=\dfrac{a^2(a+1)-(a+1)}{(a+1)^2}=\dfrac{(a+1)(a^2-1)}{(a+1)^2}=\dfrac{(a+1)(a+1)(a-1)}{(a+1)^2}=\dfrac{(a+1)^2(a-1)}{(a+1)^2}=a-1.$

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 4. Записати дробом вираз $\dfrac{x-1}{5-x}+\dfrac{x+3}{2x-10}$.

А	Б	В	Г	Д
$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{2}{3}$

■ $\dfrac{x-1}{5-x}+\dfrac{x+3}{2x-10}=-\dfrac{x-1}{x-5}^{\backslash 2}+\dfrac{x+3}{2(x-5)}=\dfrac{-2(x-1)+(x+3)}{2(x-5)}=\dfrac{-2x+2+x+3}{2(x-5)}=-\dfrac{-x+5}{2(x-5)}=\dfrac{-(x-5)}{2(x-5)}=-\dfrac{1}{2}.$

Відповідь. **А.** ■

Приклад 5. Якому з виразів тотожно рівний вираз $\dfrac{-4x^3\cdot x^2}{5(y-2)}$?

А	Б	В	Г	Д
$-\dfrac{4x^5}{5(2-y)}$	$\dfrac{4x^5}{5(2-y)}$	$\dfrac{4x^6}{5(2-y)}$	$-\dfrac{4}{5(2-y)}$	$\dfrac{4x^5}{5(y-2)}$

■ $\dfrac{-4x^3\cdot x^2}{5(y-2)}=-\dfrac{4x^5}{5(y-2)}=\dfrac{4x^5}{5(2-y)}.$

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 6. Визначити, за яких натуральних значень змінної n вираз $\dfrac{2n+12}{2n}$ набуває цілих значень. У відповідь записати їх добуток.

■ Перетворимо заданий вираз: $\dfrac{2n+12}{2n}=\dfrac{2n}{2n}+\dfrac{12}{2n}=1+\dfrac{6}{n}$. 1 — ціле число, щоб дріб $\dfrac{6}{n}$ був цілим числом, необхідно, щоб n було дільником числа 6, тобто щоб: $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=6$. Добуток цих чисел дорівнює: $1\cdot 2\cdot 3\cdot 6=36$.

Відповідь. 36. ■

Приклад 7. Відомо, що $\dfrac{x}{y}=5$. Знайти значення виразу $\dfrac{2y-x}{x}$.

■ Перетворимо заданий вираз: $\dfrac{2y-x}{x}=\dfrac{2y}{x}-\dfrac{x}{x}=2\cdot\dfrac{y}{x}-1$. Якщо $\dfrac{x}{y}=5$, то $\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{5}$. Отже, одержимо: $2\cdot\dfrac{y}{x}-1=2\cdot\dfrac{1}{5}-1=\dfrac{2}{5}-1=-0{,}6.$

Відповідь. –0,6. ■

Приклад 8. Знайти найбільше значення дробу $\frac{52}{|x|+13}$ і відповідне йому значення змінної. У відповідь записати добуток цих чисел.

■ Дріб, у якому чисельник — число (52), набуде свого найбільшого значення, якщо знаменник, зменшуючись, набуде свого найменшого значення. Відомо, що $|x| \geq 0$, тому найменше значення, якого може набути $|x|$, дорівнює 0. $0 + 13 = 13$; $\frac{52}{13} = 4$. Для всіх інших значень змінної x $|x| > 0$, і тоді $|x| + 13 > 13$, а дріб $\frac{52}{|x|+13} < 4$. Отже, якщо $x = 0$, то найбільше значення дробу $\frac{52}{|x|+13}$ дорівнює 4. Тоді добуток цих значень дорівнює $0 \cdot 4 = 0$.

Відповідь. 0. ■

Приклад 9. Відомо, що $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$. Знайти значення виразу $x - \frac{1}{x}$. Якщо таких значень кілька, то у відповідь записати їх суму.

■ Піднесемо вираз $x - \frac{1}{x}$ до квадрата: $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 =$ $= 3 - 2 = 1$. Отже, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1$, тоді $x - \frac{1}{x} = 1$ або $x - \frac{1}{x} = -1$. Їх сума: $1 + (-1) = 0$.

Відповідь. 0. ■

Завдання 4.1–4.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

4.1. $\frac{8}{5a-2} + \frac{3}{2-5a} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{11}{2-5a}$	$\frac{11}{5a-2}$	$\frac{5}{2-5a}$	$\frac{5}{5a-2}$	$\frac{24}{5a-2}$

4.2. $\frac{c^2}{c^2-4} - \frac{c}{c-2} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2c}{4-c^2}$	$\frac{2c}{c^2-4}$	$\frac{c^2}{c^2-4}$	$\frac{c^2}{4-c^2}$	$\frac{c^2-c}{c^2-4}$

4.3. $\frac{a^2-14a+49}{a^2} \cdot \frac{a^6}{a^2-49} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$a^4(a-7)$	$\frac{a^3(a-7)}{a+7}$	$\frac{a^4(a-7)}{a+7}$	$-14a^5$	$\frac{a^4(a+7)}{a-7}$

4.4. $(b+20) : \frac{b^2+20b}{3} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{b^2}{3}$	$\frac{b(b+20)^2}{3}$	$\frac{b}{3}$	$\frac{3}{b}$	$\frac{3}{b^2}$

4.5. $\frac{7}{ab}-\frac{3a+6}{a}\cdot\frac{5}{a+2}=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{7-15a}{ab}$	$\frac{7-15b}{ab}$	$\frac{7+15b}{ab}$	$\frac{7+15a}{ab}$	$\frac{7b-15}{ab}$

4.6. $\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a}\right):(2a+1)=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{(2a+1)^2}$	$\frac{a(a+1)}{(2a+1)^2}$	$\frac{(2a+1)^2}{a(a+1)}$	a^2+a	$\frac{1}{a^2+a}$

4.7. $a+\frac{81}{a-9}+9=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{a-9}{a^2}$	$\frac{a^2}{a-9}$	$\frac{a+90}{a-9}$	$\frac{a-9}{a+90}$	$\frac{81}{a^2-81}$

4.8. $\frac{a^3+8}{a^3-4a}\cdot\frac{7a-14}{a^2-2a+4}+\frac{a}{7}=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2a}{7}$	$\frac{7a}{a+7}$	$\frac{a+7}{7a}$	$\frac{a^2+49}{7a}$	$\frac{7a}{a^2+49}$

4.9. $(a^2-b^2):(a^{-1}+b^{-1})=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$ab(a-b)$	$\frac{1}{ab(a-b)}$	$\frac{ab}{a-b}$	$\frac{a-b}{ab}$	$ab(a+b)$

4.10. $\frac{a^6+a^{13}}{a^{-6}+a^{-13}}=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{a^{19}}$	$\frac{1}{a^{78}}$	a^{78}	a^{19}	$\frac{1}{a^7}$

4.11. $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)^{-1}=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{b}{a}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{(ab+1)^2}{ab}$	$\frac{a+b}{ab}$	$\frac{ab}{a+b}$

4.12. Якщо $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$, то $c=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$a-b$	$\frac{ab}{b-a}$	$\frac{a-b}{ab}$	$\frac{ab}{a-b}$	ab

4.13. $\frac{a+b}{b}=4$. Знайти значення виразу $\frac{b}{a}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{4}$	4	3	$\frac{1}{3}$	5

4.14. $a+a^{-1}=b$. Знайти значення виразу a^2+a^{-2}.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{b^2-2}$	$\frac{1}{b^2}$	b^2-2	$2b-1$	b^2+2

4.15. Якщо $y=\frac{x^2}{z}$ $(x\neq 0, z\neq 0)$, то $\frac{1}{x^2}=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{zy}$	$\frac{z}{y}$	$\frac{y}{z}$	yz	$\frac{1}{yz}$

4.16. $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}}=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{a+3}{2}$	$\frac{2a+3}{a+2}$	$\frac{2a+1}{a+2}$	$\frac{a+2}{2a+1}$	$\frac{2a+1}{2a+2}$

4.17. $\frac{a+a^2+\ldots+a^{2007}}{a^{-1}+a^{-2}+\ldots+a^{-2007}}=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
a^{2007}	a^{2008}	$\frac{1}{a^{2008}}$	$\frac{1}{a^{2006}}$	a^{2006}

4.18. $\frac{3}{1-a^3}+\frac{3}{1+a^3}+\frac{6}{1+a^6}+\frac{12}{1+a^{12}}+\frac{24}{1+a^{24}}+\frac{48}{1+a^{48}}=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{96}{1-a^{96}}$	$\frac{1-a^{96}}{96}$	$\frac{96}{1+a^{48}}$	$\frac{96}{1+a^{96}}$	$\frac{48}{1-a^{48}}$

4.19. $\frac{a}{b}=2$. Знайти значення виразу $\frac{4b^2+a^2}{a^2-ab}$.

А	Б	В	Г	Д
–16	8	4	–8	–4

4.20. Обчислити: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{8}$

Завдання 4.21–4.26 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

4.21. Установити відповідність між виразами (1–4) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

1 $\frac{a^2-b^2}{a+b}\cdot(a-b)$

2 $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}-\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

3 $\frac{a^3+b^3}{a+b}+3ab$

4 $4a^2+4a$

А 0

Б $(a+b)^2$

В $4a^3$

Г $(2a+1)^2-1$

Д $a^2-2ab+b^2$

4.22. Установити відповідність між дробовими виразами (1–4) та тотожно рівними їх нескоротними дробами (А–Д).

1 $\frac{ay-ax}{by-bx}$

2 $\frac{ax-bx}{a^2-ab}$

3 $\frac{bx-by}{ay-ax}$

4 $\frac{a^2-ab}{bx-ax}$

А $-\frac{a}{b}$

Б $-\frac{b}{a}$

В $\frac{a}{b}$

Г $\frac{x}{a}$

Д $-\frac{a}{x}$

4.23. Установити відповідність між різницями (1–4) та тотожно рівними їм дробами (А–Д).

1 $\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}$

2 $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}$

3 $\frac{a}{b-a}-\frac{b}{a+b}$

4 $\frac{b}{a-b}-\frac{a}{a+b}$

А $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

Б $\frac{a^2+2ab-b^2}{a^2-b^2}$

В $\frac{b^2+2ab-a^2}{a^2-b^2}$

Г $\frac{b^2-2ab-a^2}{a^2-b^2}$

Д $\frac{a^2-2ab-b^2}{a^2-b^2}$

4.24. Установити відповідність між виразами (1–4) та тотожно рівними їм дробами (А–Д).

1 $a^2-\frac{1}{a}$

2 $1-\frac{1}{a^2}$

3 $\frac{1}{a^2}-1$

4 $\frac{1}{a}-a$

А $\frac{1-a^2}{a}$

Б $\frac{1-a^2}{a^2}$

В $\frac{1-a^3}{a}$

Г $\frac{a^2-1}{a}$

Д $\frac{a^3-1}{a}$

4.25. Установити відповідність між частками (1–4) та тотожно рівними їм дробами (А–Д).

1 $\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}\right):\frac{2}{a-1}$	**А** $a+1$
2 $\left(\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}\right):\frac{2}{a+1}$	**Б** $a-1$
3 $\left(a+\frac{a}{a-1}\right):a^2$	**В** $\frac{1}{a+1}$
4 $\left(a-\frac{a}{a+1}\right):\frac{a^2}{a^2+2a+1}$	**Г** $\frac{1}{a-1}$
	Д $\frac{1}{1-a}$

4.26. Установити відповідність між виразами (1–4) та тотожно рівними їм дробами (А–Д).

1 $\frac{1}{1+\frac{1}{a}}$	**А** $\frac{2a+1}{2(a+1)}$
2 $\frac{1}{1+\frac{1}{2a+1}}$	**Б** $\frac{2a+1}{a+1}$
3 $\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}}$	**В** $\frac{a+1}{2a+1}$
4 $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{a}}}$	**Г** $\frac{a}{a+1}$
	Д $\frac{a+1}{a+2}$

Розв'яжіть завдання 4.27–4.40. Відповідь запишіть десятковим дробом.

4.27. Спростити вираз $\left(\frac{b}{9a-a^3}-\frac{1}{a^2+3a}+\frac{3}{a^2b-9b}\right):\frac{b^2-6b+9}{a^3b-9ab}$ і знайти його значення, якщо $a=3$, $b=2$.

4.28. Спростити вираз $\left(1-\frac{1}{1-a}\right):\left(1-\frac{1-2a^2}{1-a}+a\right)$ і знайти його значення, якщо $a=2$.

4.29. Спростити вираз $\frac{a^2+a-ab-b}{a^2+a+ab+b}:\frac{a^2-a-ab+b}{a^2-a+ab-b}$.

4.30. Спростити вираз $\left(\frac{6}{a^2+5a+4}-\frac{2}{a^2+3a+2}+\frac{a}{a^2+6a+8}\right)^2\cdot\frac{a^2+4a+4}{2}$.

4.31. Спростити вираз $\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}\right):\left(1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^3}\right)$ і знайти його значення, якщо $a=5$.

4.32. Спростити вираз $\frac{\left(ab^{-1}+a^{-1}b+1\right)\left(a^{-1}-b^{-1}\right)^2}{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-\left(ab^{-1}+a^{-1}b\right)}$ і знайти його значення, якщо $a=4$, $b=5$.

4.33. Спростити вираз $\frac{a}{a^2-1}+\frac{a^2+a-1}{a^3-a^2+a-1}+\frac{a^2-a-1}{a^3+a^2+a+1}-\frac{2a^3}{a^4-1}$ і знайти його значення, якщо $a=\frac{3}{2}$.

4.34. Спростити вираз $\left(1-\frac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-n}-b^{-n}}\right)^{-2}$ і знайти його значення, якщо $a=0$, $b=3\frac{7}{9}$.

4.35. Спростити вираз $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}$.

4.36. Спростити вираз $1-\cfrac{a}{1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{a}}}}$ і знайти його значення, якщо $a=8$.

4.37. Спростити вираз $\frac{(a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2+(b+c-a)^2}{a^2+b^2+c^2}$.

4.38. Спростити вираз $\frac{1}{a(a+3)}+\frac{1}{(a+3)(a+6)}+\frac{1}{(a+6)(a+9)}+\frac{1}{(a+9)(a+12)}+\frac{1}{(a+12)(a+15)}$ і знайти його значення, якщо $a=5$.

4.39. Спростити вираз $\frac{x^3y-xy^3+y^3z-yz^3+z^3x-zx^3}{x^2y-xy^2+y^2z-yz^2+z^2x-zx^2}$ і знайти його значення, якщо $x=1$, $y=0{,}1$, $z=0{,}01$.

4.40. Знайти значення виразу $\frac{x^{3333}+x^{333}+x^{33}+x^3+1996}{100\cdot\left(x^2+x\right)}$, якщо $x^2+x+1=0$.

Тема 5. Ірраціональні вирази

Квадратним коренем з числа a називають таке число, квадрат якого дорівнює a. Наприклад, для числа 100 квадратними коренями є числа 10 та –10, бо $10^2 = 100$ і $(-10)^2 = 100$.

Арифметичним квадратним коренем з числа a називають невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a, і позначають $\sqrt{a}$. Вираз $\sqrt{a}$ має зміст, якщо $a \geq 0$. Наприклад, арифметичним квадратним коренем з числа 36 є $\sqrt{36} = 6$. Вираз $\sqrt{-100}$ не існує.

Справедливі рівності:

1. $\sqrt{a} = b$, якщо $b^2 = a$, $b \geq 0$. Наприклад, $\sqrt{25} = 5$, бо $5^2 = 25$ і $25 \geq 0$.

2. $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $a \geq 0$. Наприклад, $\left(\sqrt{36}\right)^2 = 36$.

3. $\sqrt{a^2} = |a|$, $a \in R$. Наприклад, $\sqrt{7^2} = |7| = 7$, $\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$.

Властивості арифметичного квадратного кореня.

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$. Наприклад, $\sqrt{25 \cdot 16} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{16} = 5 \cdot 4 = 20$.

2. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, якщо $a \geq 0$, $b > 0$. Наприклад, $\sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5} = 2{,}4$.

3. $\sqrt{a^{2n}} = |a^n|$. Наприклад, $\sqrt{3^4} = |3^2| = 9$.

4. *Винесення множника з-під знака кореня.* $\sqrt{b^2 a} = |b|\sqrt{a} = \begin{cases} b\sqrt{a}, \text{ якщо } b \geq 0; \\ -b\sqrt{a}, \text{ якщо } b < 0. \end{cases}$ Наприклад,

$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = |3|\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$; $\sqrt{(-5)^2 \cdot 3} = |-5|\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

5. *Внесення множника під знак кореня.* $b\sqrt{a} = \begin{cases} \sqrt{b^2 a}, \text{ якщо } b \geq 0; \\ -\sqrt{b^2 a}, \text{ якщо } b < 0. \end{cases}$ Наприклад,

$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$; $-4\sqrt{2} = -\sqrt{4^2 \cdot 2} = -\sqrt{16 \cdot 2} = -\sqrt{32}$.

Корінь n-го степеня

Коренем n-го степеня, де $n \in N$, $n > 1$ з числа a називають таке число, n-й степінь якого дорівнює a. Корінь другого степеня прийнято називати квадратним коренем, а корінь третього степеня — ***кубічним коренем***. Наприклад, коренями четвертого степеня з числа 625 є числа –5 та 5 (бо $(-5)^4 = 625$ і $5^4 = 625$); кубічним коренем з числа –27 є число –3 (бо $(-3)^3 = -27$). Якщо n — непарне натуральне число ($n > 1$), то існує єдиний корінь n-го степеня з довільного числа a.

$\sqrt[n]{a}$ — корінь, n — показник, a — підкореневий вираз. Наприклад, $\sqrt[5]{32} = 2$, оскільки $2^5 = 32$; $\sqrt[4]{81} = 3$, оскільки $3^4 = 81$; $\sqrt[3]{-125} = -5$, бо $(-5)^3 = -125$.

Арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа a називають таке невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a, і позначають $\sqrt[n]{a}$. Якщо число n непарне, то запис $\sqrt[n]{a}$ використовують і для від'ємних значень a і він означає корінь n-го степеня з числа a (але не арифметичний). Наприклад, $\sqrt[6]{729} = 3$ — арифметичний корінь; $\sqrt[5]{-243} = -3$ — не арифметичний корінь.

Показники коренів виду $n = 2k + 1$ (n — непарне число) використовують для позначення будь-яких коренів. Корені $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, ..., $\sqrt[2k+1]{a}$ існують для будь-яких значень a ($a \in R$). Показники коренів виду $n = 2k$ (n — парне число) використовують для позначення арифметичних коренів. Корені $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a}$, ..., $\sqrt[2k]{a}$ існують лише для $a \geq 0$. Показником кореня може бути будь-яке натуральне число більше за 1.

Властивості арифметичних коренів n-го степеня.

1. $\sqrt[n]{0}=0$. Наприклад, $\sqrt[6]{0}=0$; $\sqrt[26]{0}=0$.

2. $\sqrt[n]{1}=1$. Наприклад, $\sqrt[5]{1}=1$; $\sqrt[8]{1}=1$.

3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$, до того ж, $\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1}=a$ для будь-яких значень a, $\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k}=a$ лише для $a\geq 0$. Наприклад, $\left(\sqrt[4]{3}\right)^4=3$; $\left(\sqrt[5]{-3}\right)^5=-3$.

- $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$. Наприклад, $\sqrt[7]{2^7}=2$; $\sqrt[5]{(-2)^5}=-2$;
- $\sqrt[2k+1]{-a}=-\sqrt[2k+1]{a}$. Наприклад, $\sqrt[3]{-27}=-\sqrt[3]{27}=-3$;
- $\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|=\begin{cases}a, \text{ якщо } a\geq 0;\\ -a, \text{ якщо } a<0.\end{cases}$ Наприклад, $\sqrt[6]{2^6}=|2|=2$; $\sqrt[4]{(-3)^4}=|-3|=3$.

4. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$ для всіх значень a з області визначення виразу $\sqrt[n]{a}$, m — ціле, n — натуральне. Наприклад, $\left(\sqrt[7]{2}\right)^5=\sqrt[7]{2^5}=\sqrt[7]{32}$.

5. Для кореня непарного степеня (a та b — довільні): $\sqrt[2k+1]{ab}=\sqrt[2k+1]{a}\cdot\sqrt[2k+1]{b}$. Наприклад, $\sqrt[3]{8000}=$ $=\sqrt[3]{64\cdot 125}=\sqrt[3]{64}\cdot\sqrt[3]{125}=4\cdot 5=20$. Звідси можна одержати: $\sqrt[2k+1]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[2k+1]{a}}{\sqrt[2k+1]{b}}$, якщо $b\neq 0$. Наприклад, $\sqrt[3]{\frac{-64}{125}}=\frac{\sqrt[3]{-64}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{-4}{5}=-\frac{4}{5}$.

6. Для кореня парного степеня: $\sqrt[2k]{ab}=\sqrt[2k]{|a|}\cdot\sqrt[2k]{|b|}$. Наприклад, $\sqrt[4]{1296}=\sqrt[4]{16\cdot 81}=$ $=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{81}=2\cdot 3=6$; $\sqrt[4]{(-16)\cdot(-81)}=\sqrt[4]{|-16|}\cdot\sqrt[4]{|-81|}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{81}=2\cdot 3=6$; $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)}=$ $=\sqrt{\left|1-\sqrt{2}\right|}\cdot\sqrt{\left|1-\sqrt{5}\right|}=\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-1}$.

7. Винесення множника з-під знака кореня.

- для кореня непарного степеня: $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}b}=a\cdot\sqrt[2k+1]{b}$. Наприклад, $\sqrt[3]{(-5)^3\cdot 2}=-5\cdot\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[5]{\left(1-\sqrt{3}\right)^5\cdot 7}=\left(1-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt[5]{7}$;
- для кореня парного степеня: $\sqrt[2k]{a^{2k}b}=|a|\cdot\sqrt[2k+1]{b}$. Наприклад, $\sqrt[6]{(-2)^6\cdot 5}=|-2|\cdot\sqrt[6]{5}=2\sqrt[6]{5}$; $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{2}\right)^4\cdot 3}=\left|1-\sqrt{2}\right|\cdot\sqrt[4]{3}=\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\sqrt[4]{3}$.

8. Внесення множника під знак кореня:

- для кореня непарного степеня: $a^{2k+1}\sqrt{b}=\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}b}$. Наприклад, $2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=\sqrt[3]{40}$; $\left(1-\sqrt{7}\right)\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{7}\right)^3\cdot 5}$;
- для кореня парного степеня: $a\cdot\sqrt[2k]{b}=\begin{cases}\sqrt[2k]{a^{2k}b}, \text{ якщо } a\geq 0;\\ -\sqrt[2k]{a^{2k}b}, \text{ якщо } a<0,\end{cases}$ де $b\geq 0$. Наприклад, $2\sqrt[4]{5}=\sqrt[4]{2^4\cdot 5}=\sqrt[4]{80}$; $\left(1-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt[6]{7}=-\sqrt[6]{\left(1-\sqrt{5}\right)^6\cdot 7}$.

9. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ для всіх значень a з області визначення виразу $\sqrt[nk]{a}$. Наприклад, $\sqrt{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[6]{5}$.

10. Якщо $a\geq 0$, то $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$.

Степенем додатного числа a з раціональним показником $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне ($n > 1$), називають корінь n-го степеня з числа a^m:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

11. Якщо $a > 0$, то $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Наприклад, $\sqrt[3]{2^5} = 2^{\frac{5}{3}}$.

- $a \geq 0$, $n \in N$, $n \geq 2$: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. Наприклад, $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$; $5^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{5}$; $(-8)^{\frac{1}{3}}$ — не визначений;
- $a > 0$, $n \in N$, $n \geq 2$, $m \in Z$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Наприклад, $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{\left(2^4\right)^3} = \sqrt[4]{\left(2^3\right)^4} = 2^3 = 8$;

  $5^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{5^{-2}} = \sqrt[7]{\frac{1}{25}}$; $(-4)^{\frac{3}{5}}$ — не визначений.

Приклад 1. Спростити вираз $15\sqrt{\frac{2}{5}} - \sqrt{160}$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{10}$	$-\sqrt{10}$	11	$-2\sqrt{5}$	$-37\sqrt{2}$

■ $15\sqrt{\frac{2}{5}} - \sqrt{160} = \sqrt{\frac{15^2 \cdot 2}{5}} - \sqrt{16 \cdot 10} = \sqrt{90} - 4\sqrt{10} = \sqrt{9 \cdot 10} - 4\sqrt{10} = 3\sqrt{10} - 4\sqrt{10} = -\sqrt{10}$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 2. Спростити вираз $\sqrt[3]{18z^4} \cdot \sqrt[3]{12z^5}$.

■ $\sqrt[3]{18z^4} \cdot \sqrt[3]{12z^5} = \sqrt[3]{18z^4 \cdot 12z^5} = \sqrt[3]{216z^9} = \sqrt[3]{\left(6z^3\right)^3} = 6z^3$. ■

Приклад 3. Обчислити значення виразу $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[10]{64}$.

■ $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[10]{64} = \sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt[10]{2^6} = \sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{2^5} = 2$. ■

Приклад 4. Винести множник за знак кореня: **а)** $\sqrt[3]{54}$; **б)** $\sqrt{3a^9}$; **в)** $\sqrt[6]{5x^6y}$, якщо $x < 0$.

■ **а)** $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2 \cdot 27} = 3 \cdot \sqrt[3]{2}$;

б) $\sqrt{3a^9} = \sqrt{3a \cdot \left(a^4\right)^2} = a^4 \cdot \sqrt{3a}$;

в) якщо $x < 0$, то $\sqrt[6]{5x^6y} = |x| \cdot \sqrt[6]{5y} = -x \cdot \sqrt[6]{5y}$. ■

Приклад 5. Звільнитися від ірраціональності у знаменнику дробу: **а)** $\frac{1}{\sqrt{5}}$; **б)** $\frac{6}{\sqrt[3]{2}}$; **в)** $\frac{1}{\sqrt{x}+3}$.

■ **а)** $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$;

б) $\frac{6}{\sqrt[3]{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{6 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{6 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{2} = 3 \cdot \sqrt[3]{4}$;

в) $\frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1 \cdot \left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}+3\right) \cdot \left(\sqrt{x}-3\right)} = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$. ■

Приклад 6. Знайти x із пропорції $\sqrt{a\sqrt[6]{a}} : \sqrt[6]{\sqrt{a}} = \left(\sqrt{a^{-3}}\right)^{-1} : x$.

А	Б	В	Г	Д
a^2	a	$\frac{1}{a}$	$\sqrt{a}$	$\sqrt[6]{\sqrt{a}}$

■ $x = \dfrac{\sqrt[6]{\sqrt{a}} \cdot \left(\sqrt{a^{-3}}\right)^{-1}}{\sqrt{a\sqrt[6]{a}}} = \dfrac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \left(\left(a^{-3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}}{\sqrt{\sqrt[6]{a^7}}} = \dfrac{a^{\frac{1}{12}} \cdot a^{\frac{3}{2}}}{\left(a^{\frac{7}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{a^{\frac{1}{12}+\frac{3}{2}}}{a^{\frac{7}{12}}} = a^{\frac{1}{12}+\frac{3}{2}-\frac{7}{12}} = a^{\frac{1+18-7}{12}} = a.$

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 7. Спростити вираз $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}} - \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$.

А	Б	В	Г	Д
$7\sqrt{2}$	$2\sqrt{7}$	$\sqrt{14}$	–2,8	–1,8

■ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}} - \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)-\sqrt{7}\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)} = \dfrac{2+\sqrt{14}-\sqrt{14}+7}{2-7} = \dfrac{9}{-5} = -1{,}8.$

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 8. Знайти значення виразу $\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2} + \sqrt{\left(3-\sqrt{7}\right)^2}$.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{7}-5$	$5-2\sqrt{7}$	$1+2\sqrt{7}$	1	5

■ $\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2} + \sqrt{\left(3-\sqrt{7}\right)^2} = \left|2-\sqrt{7}\right| + \left|3-\sqrt{7}\right| = \sqrt{7}-2+3-\sqrt{7} = 1.$

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 9. Спростити вираз $\left(\dfrac{81x^{-4}y^{-\frac{4}{3}}z^{-\frac{8}{3}}}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{8}{27}x^3yz^2$	$\frac{3}{2}x^3z^2$	$\frac{27}{8}x^3yz^2$	$\frac{3}{2x^3y}$	$\frac{81}{16}xyz^2$

■ $\left(\dfrac{81x^{-4}y^{-\frac{4}{3}}z^{-\frac{8}{3}}}{16}\right)^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{\left(3^4\right)^{-\frac{3}{4}} x^{-4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)} y^{-\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)} z^{-\frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}}{\left(2^4\right)^{-\frac{3}{4}}} = \dfrac{3^{-3}x^3yz^2}{2^{-3}} = \dfrac{2^3x^3yz^2}{3^3} = \dfrac{8}{27}x^3yz^2.$

Відповідь. **А.** ■

Приклад 10. Спростити вираз $\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{5+2\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}+1$

■ $\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}=\sqrt{2+\sqrt{8+1+2\cdot 2\sqrt{2}}}=\sqrt{2+\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 1+1^2}}=\sqrt{2+\sqrt{\left(2\sqrt{2}+1\right)^2}}=$

$=\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot 1+1^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=\sqrt{2}+1.$

Відповідь. **Д.** ■

Приклад 11. Виконати дії: $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a}+3}{\sqrt[4]{a}-3}+\dfrac{\sqrt[4]{a}-3}{\sqrt[4]{a}+3}\right):\dfrac{3\sqrt{a}+27}{9-\sqrt{a}}$.

А	Б	В	Г	Д
$-\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{2\sqrt{a}}{3\sqrt{a}+27}$	$\dfrac{-2\sqrt{a}}{3\sqrt{a}+27}$	$\dfrac{\sqrt{a}}{3\sqrt{a}+27}$

■ $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a}+3}{\sqrt[4]{a}-3}+\dfrac{\sqrt[4]{a}-3}{\sqrt[4]{a}+3}\right):\dfrac{3\sqrt{a}+27}{9-\sqrt{a}}=\dfrac{\left(\sqrt[4]{a}+3\right)^2+\left(\sqrt[4]{a}-3\right)^2}{\left(\sqrt[4]{a}-3\right)\left(\sqrt[4]{a}+3\right)}\cdot\dfrac{9-\sqrt{a}}{3\sqrt{a}+27}=\dfrac{\left(\sqrt[4]{a}\right)^2+2\sqrt[4]{a}\cdot 3+3^2+\left(\sqrt[4]{a}\right)^2-2\sqrt[4]{a}\cdot 3+3^2}{\left(\sqrt[4]{a}\right)^2-3^2}\times$

$\times\dfrac{9-\sqrt{a}}{3\left(\sqrt{a}+9\right)}=\dfrac{2\sqrt{a}+18}{\sqrt{a}-9}\cdot\dfrac{-\left(\sqrt{a}-9\right)}{3\left(\sqrt{a}+9\right)}=\dfrac{2\left(\sqrt{a}+9\right)\cdot(-1)}{3\left(\sqrt{a}+9\right)}=-\dfrac{2}{3}.$

Відповідь. **А.** ■

Приклад 12. Спростити вираз $\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\left(1+\sqrt[16]{a}\right)\left(1+\sqrt[32]{a}\right)\left(1-\sqrt[32]{a}\right)$.

А	Б	В	Г	Д
$1-\sqrt[8]{a}$	інша відповідь	$1+\sqrt[93]{a}$	$1-a$	$1-\sqrt[64]{a}$

■ $\left(1+\sqrt[32]{a}\right)\left(1-\sqrt[32]{a}\right)=1-\sqrt[16]{a}$; $\left(1+\sqrt[16]{a}\right)\left(1-\sqrt[16]{a}\right)=1-\sqrt[8]{a}$; $\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\left(1-\sqrt[8]{a}\right)=1-\sqrt[4]{a}$; $\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1-\sqrt[4]{a}\right)=1-\sqrt{a}$;

$\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1-\sqrt{a}\right)=1-a.$

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 13. Установити відповідність між числами (1–4) та проміжками (А–Д), до яких вони належать.

1 $3\sqrt{5}$ **А** [4; 5]

2 $2\sqrt{8}$ **Б** [7; 8]

3 $5\sqrt{2}$ **В** [5; 6]

4 $2\sqrt{6}$ **Г** [6; 7]

Д [8; 9]

■ 1) $3\sqrt{5}=\sqrt{3^2\cdot 5}=\sqrt{45}$; $\sqrt{36}<\sqrt{45}<\sqrt{49}$; $6<\sqrt{45}<7$; $\sqrt{45}\in[6;7]$. Отже, $1\to$ **Г**;

2) $2\sqrt{8}=\sqrt{2^2\cdot 8}=\sqrt{32}$; $\sqrt{25}<\sqrt{32}<\sqrt{36}$; $5<\sqrt{32}<6$; $\sqrt{32}\in[5;6]$. Отже, 2 → **В**;

3) $5\sqrt{2}=\sqrt{5^2\cdot 2}=\sqrt{50}$; $\sqrt{49}<\sqrt{50}<\sqrt{64}$; $7<\sqrt{50}<8$; $\sqrt{50}\in[7;8]$. Отже, 3 → **Б**;

4) $2\sqrt{6}=\sqrt{2^2\cdot 6}=\sqrt{24}$; $\sqrt{16}<\sqrt{24}<\sqrt{25}$; $4<\sqrt{24}<5$; $\sqrt{24}\in[4;5]$. Отже, 4 → **А**.

Відповідь.

	А	Б	В	Г	Д
1				☒	
2			☒		
3		☒			
4	☒				

■

Завдання 5.1–5.25 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

5.1. Обчислити: $\sqrt{6400}+\sqrt{49}+\sqrt{0{,}04}+\sqrt{0{,}0025}$.

А	Б	В	Г	Д
807,025	870,25	87,0205	87,25	870,025

5.2. Обчислити: $\sqrt{1\frac{1}{36}}\cdot\sqrt{1\frac{12}{37}}+\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$.

А	Б	В	Г	Д
$26\frac{1}{6}$	$26\frac{13}{36}$	$5\frac{1}{6}$	$5\frac{5}{6}$	$6\frac{1}{6}$

5.3. Знайти значення виразу $\sqrt{15^2}+\sqrt{(-13)^2}+\left(\sqrt{3}\right)^2$.

А	Б	В	Г	Д
5	31	37	32	42

5.4. Спростити вираз $10\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{50}$.

А	Б	В	Г	Д
$17\sqrt{2}$	$39\sqrt{2}$	$37\sqrt{2}$	$19\sqrt{2}$	$24\sqrt{2}$

5.5. Знайти значення виразу $\sqrt{\left(\sqrt{7}-3\right)^2}-\sqrt{7}$.

А	Б	В	Г	Д
–3	$3-2\sqrt{7}$	$2-\sqrt{7}$	3	$-3-2\sqrt{7}$

5.6. Обчислити: $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}-\sqrt[4]{16}$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

5.7. Вказати правильну рівність.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{9}=\sqrt[6]{18}$	$\sqrt[5]{\sqrt[3]{11}}=\sqrt[8]{11}$	$\left(\sqrt[3]{10}\right)^5=\sqrt[15]{10}$	$\sqrt[10]{(-2)^{10}}=-2$	$\sqrt[9]{(-3)^9}=-3$

5.8. Обчислити: $16^{\frac{3}{4}} + 25^{\frac{1}{2}}$.

А	Б	В	Г	Д
9	12	13	15	31

5.9. Обчислити: $9^{\frac{3}{2}} + 64^{-\frac{1}{3}}$.

А	Б	В	Г	Д
27,25	31	278	27	$-7\frac{5}{6}$

5.10. Обчислити: $\sqrt[3]{5^6 \cdot 2^9}$.

А	Б	В	Г	Д
200	8000	1600	400	800

5.11. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{3}{\sqrt{7}-1}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\sqrt{7}+1}{2}$	$\frac{\sqrt{7}-2}{2}$	$2\left(\sqrt{7}+1\right)$	$3\left(\sqrt{7}+1\right)$	$\frac{\sqrt{7}-1}{2}$

5.12. Внести множники під знаки коренів: $a\sqrt{-a} + b\sqrt{b}$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}$	$\sqrt{-a^3} + \sqrt{-b^3}$	$-\sqrt{-a^3} - \sqrt{b^3}$	$\sqrt{-a^3} + \sqrt{b^3}$	$-\sqrt{-a^3} + \sqrt{b^3}$

5.13. $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[9]{a^8}$	$\sqrt[8]{a}$	$\sqrt[8]{a^3}$	$\sqrt[3]{a^2}$

5.14. Спростити вираз $\sqrt[3]{\frac{a^4\sqrt[3]{b^9}}{a^{-2}}}$.

А	Б	В	Г	Д
$-a^2b$	$-ab$	a^2b	a^2b^2	ab^2

5.15. Спростити вираз $\sqrt[3]{\frac{x^9y^6z^3}{4\cdot(-2)^4}}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{x^3y^2z}{2}$	$\frac{x^6y^3}{4}$	$\frac{x^3y^2z}{4}$	$\frac{x^6y^3}{2}$	$\frac{x^3y^2}{4z}$

5.16. Знайти x, якщо $\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} = 2^x$.

А	Б	В	Г	Д
–1,125	–0,875	–0,625	–0,375	–0,125

5.17. $\sqrt{\left(-2-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
0	4	–4	$4+2\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$

5.18. Знайти значення виразу $\sqrt[4]{(x-3)^4}+\sqrt[4]{(x-7{,}5)^4}$, якщо $x=\sqrt{10}$.

А	Б	В	Г	Д
–4,5	$2\sqrt{10}-10{,}5$	$2x-10{,}5$	4,5	3,5

5.19. $\sqrt{7+2\sqrt{10}}=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{10}$	$3{,}5+\sqrt{10}$	$\sqrt{3}+2$	$\sqrt{2}+\sqrt{5}$	$1+\sqrt{6}$

5.20. Звільнитись від ірраціональності в знаменнику дробу $\dfrac{2}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{5}\left(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2}\right)$	$\frac{2}{5}\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}\right)$	$\frac{2}{5}\left(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}\right)$	$\frac{2}{5}\left(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}\right)$	$\frac{2}{5}\left(\sqrt[3]{49}+2\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}\right)$

5.21. Обчислити: $\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}-\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
7	$3\sqrt{5}$	$\frac{13+3\sqrt{5}}{4}$	3,5	$-1-1{,}5\sqrt{5}$

5.22. Знайти значення виразу $\sqrt{71-16\sqrt{7}}+\sqrt{11-4\sqrt{7}}$.

А	Б	В	Г	Д
$10-2\sqrt{7}$	–10	–6	10	6

5.23. Обчислити: $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

5.24. Обчислити: $\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{4+\sqrt{9-4\sqrt{2}}}$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	$2\sqrt{2}$

5.25. Обчислити: $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$.

А	Б	В	Г	Д
1	3	5	8	9

Завдання 5.26–5.32 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

5.26. Установити відповідність між заданими виразами (1–4) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

1 $\sqrt{\left(\sqrt{2}-2\right)^2}$	**А** $2+\sqrt{2}$
2 $\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-2\right)^3}$	**Б** $-2-\sqrt{2}$
3 $-\left(\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}\right)^4$	**В** $2-\sqrt{2}$
4 $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$	**Г** $6-4\sqrt{2}$
	Д $\sqrt{2}-2$

5.27. Установити відповідність між заданими виразами (1–4) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

1 $\sqrt[4]{16a^4b^8}$, $a<0$	**А** $2\lvert a\rvert b^2$
2 $\sqrt[3]{16a^3b^6}$	**Б** $2a^2b^2$
3 $\sqrt{4a^4b^4}$	**В** $-2ab^2$
4 $\sqrt{4a^2b^4}$	**Г** $2ab^2$
	Д $2\sqrt[3]{2}ab^2$

5.28. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $(-27)^{\frac{1}{3}}$	**А** $-\frac{1}{3}$
2 $(-27)^{-\frac{1}{3}}$	**Б** $\frac{1}{3}$
3 $27^{-\frac{1}{3}}$	**В** -3
4 $27^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{\frac{1}{3}}$	**Г** 3
	Д 6

5.29. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\sqrt{18}-\sqrt{32}+\sqrt{72}$	**А** $2\sqrt{2}$
2 $\sqrt{72}+\sqrt{50}-\sqrt{162}$	**Б** $3\sqrt{2}$
3 $\sqrt{200}-\sqrt{8}-\sqrt{50}$	**В** $4\sqrt{2}$
4 $\sqrt{128}+\sqrt{18}-\sqrt{98}$	**Г** $5\sqrt{2}$
	Д $6\sqrt{2}$

5.30. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\sqrt{\left(-1-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(4-\sqrt{5}\right)^2}$	**А** 1
2 $\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(-1-\sqrt{5}\right)^2}$	**Б** $\sqrt{5}$
3 $\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^2}$	**В** 4
4 $\sqrt{\left(-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-4\right)^2}$	**Г** $2\sqrt{5}$
	Д 5

5.31. Установити відповідність між виразами (1–4) та тотожно рівними їм степенями (А–Д).

1 $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}$	**А** $a^{\frac{7}{16}}$
2 $\sqrt{a\sqrt[4]{a\sqrt{a}}}$	**Б** $a^{\frac{9}{16}}$
3 $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt[4]{a}}}$	**В** $a^{\frac{11}{16}}$
4 $\sqrt[4]{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$	**Г** $a^{\frac{13}{16}}$
	Д $a^{\frac{15}{16}}$

5.32. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{3}$	**А** –2
2 $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{3}$	**Б** –1
3 $\sqrt{12-6\sqrt{3}}+\sqrt{3}$	**В** 1
4 $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}$	**Г** 2
	Д 3

Розв'яжіть завдання 5.33–5.42. Відповідь запишіть десятковим дробом.

5.33. Обчислити: $\left(\sqrt[6]{27}+\sqrt[4]{64}\right)\left(\sqrt[6]{27}-\sqrt[4]{64}\right)$.

5.34. Обчислити: $\left(\sqrt[6]{49+20\sqrt{6}}+\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}}\right)\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}$.

5.35. Обчислити: $\frac{53}{8-\sqrt{11}}+\frac{2}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}-\frac{9}{\sqrt{13}+2}$.

5.36. Спростити вираз $\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}-x^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}-1}{x^{\frac{1}{2}}+1}-\frac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x^{\frac{1}{2}}-1}\right)$.

5.37. Спростити вираз $\left(\frac{a^{0,5}+2}{a^{0,5}-2}+\frac{a^{0,5}-2}{a^{0,5}+2}-\frac{16}{a-4}\right)^4$.

5.38. Обчислити: $\sqrt{27+2\sqrt{50}}\cdot\left(5-\sqrt{2}\right)$.

5.39. Спростити вираз $\left(\sqrt{a}+\frac{b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\left(\frac{a}{\sqrt{ab}+b}+\frac{b}{\sqrt{ab}-a}-\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\right)$ і знайти його значення, якщо $a=2\frac{1}{4}$, $b=25$.

5.40. Обчислити: $\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

5.41. Обчислити: $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

5.42. Спростити вираз $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}-\sqrt{3}$.

Тема 6. Логарифмічні та показникові вирази

Показникові співвідношення

Показникові тотожності.

1. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$. Наприклад, $3^{x+2} = 3^x \cdot 3^3 = 9 \cdot 3^x$.

2. $a^{x-y} = a^x : a^y$. Наприклад, $2^{5-x} = 2^5 : 2^x = \frac{32}{2^x}$.

3. $a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x$. Наприклад, $7^{2x} = (7^2)^x = 49^x$; $\left(\frac{27}{64}\right)^x = \left(\frac{3^3}{4^3}\right)^x = \left(\left(\frac{3}{4}\right)^3\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^{3x}$.

4. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$. Наприклад, $2^x \cdot 3^x = (2 \cdot 3)^x = 6^x$.

5. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, якщо $b \neq 0$. Наприклад, $\frac{3^x}{5^x} = \left(\frac{3}{5}\right)^x$.

6. $a^0 = 1$, якщо $a \neq 0$. Наприклад, $7^0 = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 0{,}09^0 = 1$.

7. $a^1 = a$. Наприклад, $5^1 = 5$; $\left(\frac{1}{7}\right)^1 = \frac{1}{7}$.

8. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, якщо $a \neq 0$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$. Наприклад, $2^{-x} = \frac{1}{2^x}$; $\left(\frac{4}{9}\right)^{-3} = \left(\frac{9}{4}\right)^3$.

9. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, якщо $a > 0$, $n \in N$. Наприклад, $7^{\frac{x-4}{x}} = \sqrt[x]{7^{x-4}}$.

Логарифм

Логарифмом додатного числа b за основою a ($a > 0$, $a \neq 1$) називають показник степеня, до якого треба піднести основу a, щоб отримати число b. Тобто якщо $a^x = b$ і $a > 0$, $a \neq 1$, то $\log_a b = x$ і, навпаки, якщо $\log_a b = x$, то $a^x = b$. Наприклад, $\log_3 81 = 4$, бо $3^4 = 81$.

Логарифм за основою 10 називають *десятковим*. Записують: $\log_{10} x = \lg x$.

Логарифм за основою $e \approx 2{,}718281828459045...$ називають *натуральним*. Записують: $\log_e x = \ln x$.

Логарифмічні тотожності.

1. Основна логарифмічна тотожність: $a^{\log_a b} = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. Наприклад, $3^{\log_3 5} = 5$; $2^{-\log_2 5} = \frac{1}{2^{\log_2 5}} = \frac{1}{5}$; $4^{\log_2 6} = 2^{2\log_2 6} = \left(2^{\log_2 6}\right)^2 = 6^2 = 36$.

2. $\log_a 1 = 0$, оскільки $a^0 = 1$. Наприклад, $\log_{13} 1 = 0$, бо $13^0 = 1$.

3. $\log_a a = 1$, оскільки $a^1 = a$. Наприклад, $\log_5 5 = 1$, бо $5^1 = 5$.

4. $\log_a xy = \log_a|x| + \log_a|y|$, $xy > 0$. Наприклад, $\log_2 40 = \log_2(8 \cdot 5) = \log_2 8 + \log_2 5 = 3 + \log_2 5$.

5. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|$, $\frac{x}{y} > 0$. Наприклад, $\log_3 \frac{3}{17} = \log_3 3 - \log_3 17 = 1 - \log_3 17$.

6. $\log_a x^p = p\log_a|x|$, $x^p > 0$. Зокрема: **1)** $\log_a x^{2k} = 2k\log_a|x|$, де $x \neq 0$, $k \in Z$. Наприклад, $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4\log_3 3 = 4 \cdot 1 = 4$; $\lg 32 = \lg 2^5 = 5\lg 2$; **2)** $\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log|x|$.

7. $\log_{a^k} x = \frac{1}{k}\log_a x$. Наприклад, $\log_8 2 = \log_{2^3} 2 = \frac{1}{3}\log_2 2 = \frac{1}{3}$; $\log_{\sqrt{3}} 3 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3 = 2\log_3 3 = 2$. Зокрема, $\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m}\log_a x$. Наприклад, $\log_4 32 = \log_{2^2} 2^5 = \frac{5}{2}\log_2 2 = 2{,}5$.

8. Формула переходу до іншої основи: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, де $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$. Наприклад, $\log_{25}3 = \dfrac{\log_5 3}{\log_5 25} = \dfrac{\log_5 3}{2}$; $\log_7 11 = \dfrac{\lg 11}{\lg 7}$. Зокрема, $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$. Наприклад, $\log_3 10 = \dfrac{1}{\log_{10} 3} = \dfrac{1}{\lg 3}$.

9. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$. Наприклад, $2^{\log_5 x} + 4x^{\log_5 2} = x^{\log_5 2} + 4x^{\log_5 2} = 5x^{\log_5 2}$.

Логарифмування

Обчислення логарифмів заданих чисел або виразів називають *логарифмуванням*. Наприклад, прологарифмувати вираз $x = 7abc^3$ за основою a: $\log_a x = \log_a(7abc^3) = \log_a 7 + \log_a a + \log_a b + \log_a c^3 = \log_a 7 + 1 + \log_a b + 3\log_a c$.

Потенціювання

Знаходження чисел (виразу) за даним його логарифмом називають *потенціюванням*. Наприклад, пропотенціювати вираз $\lg x = \lg 7 + 2\lg a - 3\lg b$ і знайти x: $\lg x = \lg 7 + 2\lg a - 3\lg b = \lg 7 + \lg a^2 - \lg b^3 = \lg(7 \cdot a^2) - \lg b^3 = \lg \dfrac{7a^2}{b^3}$; $\lg x = \lg \dfrac{7a^2}{b^3}$; $x = \dfrac{7a^2}{b^3}$.

Приклад 1. Обчислити: $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{18}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

А	Б	В	Г	Д
3	$\frac{1}{27}$	27	9	$\frac{1}{3}$

■ $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{18}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{9\cdot 2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 2. Обчислити: $2^{\log_4 9 + \log_2 8}$.

А	Б	В	Г	Д
10	24	12	13	6

■ $2^{\log_4 9 + \log_2 8} = 2^{\log_{2^2} 3^2 + \log_2 8} = 2^{\frac{2}{2}\log_2 3} \cdot 2^{\log_2 8} = 3 \cdot 8 = 24$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 3. Знайти значення виразу $\log_{20}5 + \log_{20}4 + 2$.

А	Б	В	Г	Д
11	2	3	22	51

■ $\log_{20}5 + \log_{20}4 + 2 = \log_{20}(5 \cdot 4) + 2 = \log_{20}20 + 2 = 1 + 2 = 3$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 4. Обчислити суму $3^x + 3^{-x}$, якщо $9^x + 9^{-x} = 47$.

А	Б	В	Г	Д
7	49	45	$\sqrt{23}$	$\sqrt{47}$

■ Нехай $3^x + 3^{-x} = t$. Піднесемо обидві частини рівності до квадрата й одержимо: $\left(3^x + 3^{-x}\right)^2 = t^2$; $3^{2x} + 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-x} + 3^{-2x} = t^2$; $\left(3^2\right)^x + 2 \cdot 3^{x+(-x)} + \left(3^2\right)^{-x} = t^2$; $9^x + 2 \cdot 3^0 + 9^{-x} = t^2$; $9^x + 2 \cdot 1 + 9^{-x} = t^2$. Оскільки за умовою $9^x + 9^{-x} = 47$, то $47 + 2 = t^2$; $t^2 = 49$; $t = \pm 7$. Так як $3^x + 3^{-x} > 0$, бо показникова функція набуває тільки додатних значень, то $t = 7$. Отже, $3^x + 3^{-x} = 7$.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 5. Обчислити: $4^{\log_2 9 - \frac{2}{\log_{\sqrt{3}} 2}}$.

■ $4^{\log_2 9 - \frac{2}{\log_{\sqrt{3}} 2}} = 4^{\log_2 9 - 2 \cdot \log_2 \sqrt{3}} = 4^{\log_2 9 - \log_2 \left(\sqrt{3}\right)^2} = 4^{\log_2 9 - \log_2 3} = 4^{\log_2 (9:3)} = 4^{\log_2 3} = \left(2^2\right)^{\log_2 3} = 2^{2 \cdot \log_2 3} = 2^{\log_2 9} = 9$.

Відповідь. 9. ■

Приклад 6. Обчислити: $27^{\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{3}} + 4 \cdot 5^{\log_5^2 2} - 2^{\log_5 2} \cdot \log_2 16$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	$\frac{1}{81}$

■ $27^{\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{3}} + 4 \cdot 5^{\log_5^2 2} - 2^{\log_5 2} \cdot \log_2 16 = 27^{\log_{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{3}}} + 4 \cdot \left(5^{\log_5 2}\right)^{\log_5 2} - 2^{\log_5 2} \cdot \log_2 2^4 = 27^{\frac{1}{3}} +$

$+4 \cdot 2^{\log_5 2} - 2^{\log_5 2} \cdot 4 = \sqrt[3]{27} = 3$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 7. Обчислити: $\frac{1}{\log_{12} 18} + \frac{1}{\log_{27} 18}$.

А	Б	В	Г	Д
27	18	12	2	3

■ $\frac{1}{\log_{12} 18} + \frac{1}{\log_{27} 18} = \log_{18} 12 + \log_{18} 27 = \log_{18} (12 \cdot 27) = \log_{18} 324 = 2$.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 8. Обчислити значення виразу $\log_2 \sin \frac{\pi}{12} + \log_2 \sin \frac{\pi}{6} + \log_2 \sin \frac{5\pi}{12}$.

А	Б	В	Г	Д
2^{-3}	3	–3	$-\frac{2}{3}$	не існує

■ $\log_2 \sin \frac{\pi}{12} + \log_2 \sin \frac{\pi}{6} + \log_2 \sin \frac{5\pi}{12} = \log_2 \left(\sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{5\pi}{12}\right) = \log_2 \left(\sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\right) =$

$= \log_2 \left(\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{6}\right) = \log_2 \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{6}\right) = \log_2 \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{6}\right) =$

$= \log_2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \log_2 \left(2^{-3}\right) = -3$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 9. Спростити $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_7 8$.

А	Б	В	Г	Д
2	3	5	7	8

■ Перейдемо у всіх множниках до основи 2 й одержимо: $\log_2 3 \cdot \dfrac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \dfrac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \ldots \cdot \dfrac{\log_2 8}{\log_2 7} =$

$= \log_2 8 = 3$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 10. Знайти $\log_{30} 8$, якщо $\log_{30} 3 = a$, $\log_{30} 5 = c$.

■ $\log_{30} 8 = \log_{30} 2^3 = 3\log_{30} 2 = 3\log_{30} \dfrac{10}{5} = 3\left(\log_{30} 10 - \log_{30} 5\right) = 3\left(\log_{30} \dfrac{30}{3} - c\right) = 3\left(\log_{30} 30 - \log_{30} 3 - c\right) =$

$= 3(1 - a - c)$.

Відповідь. $3(1 - a - c)$. ■

Приклад 11. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми числовими значеннями (А–Д), якщо $a = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

1 $\log_a 27\sqrt{3}$

2 $\log_{\frac{1}{a}} \sqrt[4]{3}$

3 $\log_{\frac{9}{a}} \dfrac{9}{\sqrt{3}}$

4 $\log_{\frac{a}{9}} 81$

А 0,6

Б –1,6

В –7

Г –10

Д 0,5

1. $\log_a 27\sqrt{3} = \log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} 27\sqrt{3} = \log_{3^{\frac{1}{2}-1}} 3^3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = \log_{3^{-\frac{1}{2}}} 3^{\frac{7}{2}} = \left(\dfrac{7}{2} : \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right) \log_3 3 = -\dfrac{7}{2} \cdot \dfrac{2}{1} = -7 \rightarrow$ **В**

2. $\log_{\frac{1}{a}} \sqrt[4]{3} = \log_{\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}} \sqrt[4]{3} = \log_{\frac{3}{\sqrt{3}}} 3^{\frac{1}{4}} = \log_{3^{1-\frac{1}{2}}} 3^{\frac{1}{4}} = \left(\dfrac{1}{4} : \dfrac{1}{2}\right) \log_3 3 = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{2}{1} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5 \rightarrow$ **Д**

3. $\log_{\frac{9}{a}} \dfrac{9}{\sqrt{3}} = \log_{\frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{3}}} \dfrac{9}{\sqrt{3}} = \log_{9\sqrt{3}} 3^{2-\frac{1}{2}} = \log_{3^{2+\frac{1}{2}}} 3^{1\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{3}{2} : \dfrac{5}{2}\right) \log_3 3 = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6 \rightarrow$ **А**

4. $\log_{\frac{a}{9}} 81 = \log_{\frac{\sqrt{3}}{3 \cdot 9}} 3^4 = \log_{3^{\frac{1}{2}-1-2}} 3^4 = \log_{3^{-\frac{5}{2}}} 3^4 = \left(4 : \left(-\dfrac{5}{2}\right)\right) \log_3 3 = -1{,}6 \rightarrow$ **Б**

Відповідь.

	А	Б	В	Г	Д
1			☒		
2					☒
3	☒				
4		☒			

■

Завдання 6.1–6.23 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

6.1. Вказати неправильну рівність.

А	Б	В	Г	Д
$\log_2 16 = 4$	$\log_2 \frac{1}{16} = -4$	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$	$\log_{\frac{1}{2}} 16 = \frac{1}{4}$	$\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$

6.2. Обчислити: $5^{\log_5 7} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} + \log_7 1$.

А	Б	В	Г	Д
6	7	8	$7\frac{1}{3}$	$12\frac{1}{3}$

6.3. Спростити вираз $\frac{3\lg 2 + 3\lg 5}{\lg 1300 - \lg 0{,}13}$.

А	Б	В	Г	Д
0,6	0,7	0,65	0,75	0,5

6.4. $\frac{\log_9 27 + \log_9 3}{\log_6 8 + \log_6 27} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
6	$\frac{6}{7}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$

6.5. $\frac{\log_8 128 - \log_8 2}{\log_2 36 - \log_2 9} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
1	$\frac{14}{3}$	2	16	3

6.6. Обчислити значення виразу $\log_5 49 + 2\log_5 \frac{5}{7}$.

А	Б	В	Г	Д
2	1	0	4	25

6.7. Знайти значення x, якщо $\log_7 x = 2\log_7 6 - \log_7 12 + \log_7 15$.

А	Б	В	Г	Д
39	7,5	15	$\frac{17}{4}$	45

6.8. Обчислити: $\frac{\log_3 32}{\log_3 2} + \frac{\log_7 27}{\log_7 3}$.

А	Б	В	Г	Д
15	8	25	54	64

6.9. Обчислити: $8^{\log_2 3} + 9^{\log_3 4}$.

А	Б	В	Г	Д
33	7	14	43	60

6.10. Обчислити: $\log_8 16$.

А	Б	В	Г	Д
8	2	$\frac{3}{4}$	12	$\frac{4}{3}$

6.11. Знайти $\log_3 200$, якщо $\log_3 2 = a$, $\log_3 5 = b$.

А	Б	В	Г	Д
$3a + 2b$	$32ab$	$2a + 3b$	$3a + b$	$6(a + b)$

6.12. Обчислити: $\lg \operatorname{tg}1° \lg \operatorname{tg}2° \lg \operatorname{tg}3° \ldots \lg \operatorname{tg}88° \lg \operatorname{tg}89°$.

А	Б	В	Г	Д
89!	0,1	10	1	0

6.13. Обчислити: $\lg \operatorname{tg}1° + \lg \operatorname{tg}2° + \lg \operatorname{tg}3° + \ldots + \lg \operatorname{tg}88° + \lg \operatorname{tg}89°$.

А	Б	В	Г	Д
10	1	0	0,1	89!

6.14. Обчислити: $7^{\log_2 3} - 3^{\log_2 7}$.

А	Б	В	Г	Д
0	$\frac{7}{3}$	1	–1	2

6.15. Обчислити: $\log_5 7 \cdot \log_{49} 125$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{6}$	1	6	$\frac{2}{3}$	1,5

6.16. Серед чисел $\cos 2\pi$; $\sqrt[3]{2}$; $\log_2 0{,}25$; $\left(\frac{1}{3}\right)^5$; 7^{-6} знайти найбільше.

А	Б	В	Г	Д
$\cos 2\pi$	$\sqrt[3]{2}$	$\log_2 0{,}25$	$\left(\frac{1}{3}\right)^5$	7^{-6}

6.17. $7^{1+\log_7 2} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
9	14	49	343	81

6.18. $\log_{7+4\sqrt{3}}\left(7 - 4\sqrt{3}\right) = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
14	2	1	–1	–2

6.19. $\log_7 \sqrt[5]{7 \cdot \sqrt[4]{7}} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	$7^{\frac{1}{20}}$

6.20. Обчислити: $\log_8 7 \cdot \log_7 6 \cdot \log_6 4$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	2	3

6.21. Обчислити: $\left(2^{2+\frac{1}{\log_3 2}} + 25^{\frac{1}{2\log_3 5}} + 1\right)^{\frac{1}{2}}$.

А	Б	В	Г	Д
8	16	3	4	5

6.22. Обчислити: $\left(5^{\log_5(\sqrt{3}+8)} - 3^{\log_9(\sqrt{3}-8)^2}\right)^2$.

А	Б	В	Г	Д
64	12	8	2	$65-16\sqrt{3}$

6.23. Обчислити: $\log_n \log_n \underbrace{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\ldots\sqrt[n]{n}}}}_{2008}$.

А	Б	В	Г	Д
2008	–2008	1004	–1004	1

Завдання 6.24–6.34 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

6.24. Установити відповідність між виразами (1–4) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

1 $2\lg 5 + \lg 4$
2 $\log_3 5 : \log_3 2$
3 $\log_a\left(a^2 + a\right) - \log_a(a+1)$
4 $2^{\log_{\sqrt{2}} \sqrt{5}}$

А 5
Б $\log_5 2$
В 1
Г $\log_2 5$
Д $\log_2 4$

6.25. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $\log_{27} 81$
2 $\log_3 \frac{1}{81}$
3 $\log_{81} 3$
4 $\log_{81} \frac{1}{3}$

А –4
Б $-\frac{1}{4}$
В $\frac{1}{4}$
Г $\frac{3}{4}$
Д $\frac{4}{3}$

6.26. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $\log_8 16$	**А** 0,(6)
2 $\log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{32}$	**Б** 0,75
3 $\log_{25} 125$	**В** 1,25
4 $\log_{27} 9$	**Г** 1,(3)
	Д 1,5

6.27. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $\log_5 \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt[5]{5}}$	**А** 0,3
2 $\log_2 \frac{4}{\sqrt[3]{2}}$	**Б** 0,(3)
3 $\log_5 \frac{5}{\sqrt[3]{25}}$	**В** 1,3
4 $\log_3 3\sqrt[3]{3}$	**Г** 1,(3)
	Д 1,(6)

6.28. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $\frac{\log_8 4 + \log_8 16}{\log_6 16 + \log_6 81}$	**А** $\frac{1}{3}$
2 $\frac{\log_{12} 2 + \log_{12} 72}{\log_5 75 - \log_5 3}$	**Б** $\frac{1}{2}$
3 $\frac{\log_5 75 - \log_5 3}{\log_4 32 + \log_4 128}$	**В** $\frac{2}{3}$
4 $\frac{\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}}{\log_3 54 - \log_3 2}$	**Г** 1
	Д $\frac{4}{3}$

6.29. Установити відповідність між логарифмічними виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $4^{\log_2 5}$	**А** 6
2 $5^{1+\log_5 2}$	**Б** 8
3 $\sqrt{3}^{\log_3 64}$	**В** 10
4 $2^{2\log_4 12 - 1}$	**Г** 12
	Д 25

6.30. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $\frac{\log_3 64}{\log_3 2} + \frac{\log_5 9}{\log_5 3}$	**А** 7
2 $\frac{\log_4 625}{\log_4 5} + \frac{\log_7 128}{\log_7 2}$	**Б** 8
3 $\frac{\log_5 49}{\log_5 7} + \frac{\log_3 \frac{1}{16}}{\log_3 \frac{1}{2}}$	**В** 9
4 $\frac{\lg 125}{\lg 5} + \frac{\log_3 16}{\log_3 2}$	**Г** 6
	Д 11

6.31. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $\log_3 7 \cdot \log_{49} 81$	**А** 1,25
2 $\log_5 8 \cdot \log_{16} 125$	**Б** 1,5
3 $\log_9 1000 \cdot \lg 3$	**В** 1,75
4 $\log_{81} 128 \cdot \log_2 3$	**Г** 2
	Д 2,25

6.32. Установити відповідність між виразами (1–4) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $\log_8 6 \cdot \log_6 5 \cdot \log_5 4$	**А** $\frac{5}{8}$
2 $\log_{14} 8 \cdot \log_{15} 14 \cdot \log_{16} 15$	**Б** $\frac{1}{7}$
3 $\log_7 5 \cdot \log_5 4 \cdot \log_{32} 7$	**В** $\frac{2}{3}$
4 $\lg 2 \cdot \log_{11} 10 \cdot \log_{128} 11$	**Г** $\frac{3}{4}$
	Д $\frac{2}{5}$

6.33. $\log_7 2 = a$, $\log_7 3 = b$. Установити відповідність між логарифмами чисел (1–4) та їх вираженням через a та b (А–Д).

1 $\log_7 1{,}5$	**А** $\frac{1}{a+b}$
2 $\log_7 4{,}5$	**Б** $\frac{2b}{a}$
3 $\log_6 7$	**В** $2b-a$
4 $\log_2 9$	**Г** $\frac{1}{a-b}$
	Д $b-a$

6.34. $\log_a b = 5$. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\log_{ab} a$	**А** 5,5
2 $\log_{ab} b$	**Б** 3
3 $\log_b \sqrt{ab}$	**В** $\frac{5}{6}$
4 $\log_a \sqrt{ab}$	**Г** 0,6
	Д $\frac{1}{6}$

Розв'яжіть завдання 6.35–6.46. Відповідь запишіть десятковим дробом.

6.35. Обчислити: $\left(\left(\frac{1}{81}\right)^{-\log_3 2} + 4^{1+4\log_4 2}\right)^{5^{\frac{1}{\log_2 5}}} : 100$.

6.36. Обчислити: $\left(25^{2-\log_5 75} + 7^{-\log_7 3}\right) \cdot 27$.

6.37. Обчислити: $3^{\frac{\log_3 5}{\log_5 3}} - 5^{\log_3 5} + 7^{\log_7 49}$.

6.38. Обчислити: $0{,}25^{\lg 0{,}5} \cdot 0{,}04^{\lg 0{,}5} + 81^{0{,}5\log_9 7} - 0{,}5 \cdot 27^{\frac{1}{\log_2 3}}$.

6.39. Обчислити: $\log_3 49 \cdot \log_{\sqrt{7}} 5 \cdot \log_{25} 27$.

6.40. Обчислити: $2^{\log_2^2 3} - 3^{\log_2 3} - 9^{\log_3 2}$.

6.41. Обчислити: $\log_{3+\sqrt{8}}\left(3-\sqrt{8}\right) + \log_{3-\sqrt{8}}\left(3+\sqrt{8}\right)$.

6.42. Обчислити: $3 \cdot 7^{2\left(\log_{\sqrt{3}} 7\right)^{-1} + \frac{1}{3}\log_7 8} - 3 \cdot \log_9 \sqrt[4]{9\sqrt[3]{9}} - 10$.

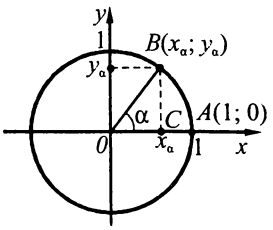
6.43. Обчислити: $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} \cdot \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} \cdot \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{5} \cdot \ldots \cdot \log_{\frac{1}{99}} \frac{1}{100} \cdot \lg 2$.

6.44. Дано: $\log_{ab} a = 9$. Знайти $\log_{ab} b$.

6.45. Спростити вираз $a^{\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}} \cdot \log_a b$.

6.46. Обчислити: $\left(\log_5 2 + \log_2 5 + 2\right)\left(\log_5 2 - \lg 2\right) \cdot \log_2 5 - \log_5 2$.

Тема 7. Тригонометричні вирази



Нехай у прямокутній системі координат одиничний вектор OA лежить на додатному напрямку осі x. Вважатимемо, що OA — початкова сторона кута AOB й $\angle AOB = \alpha$. Координати точки B на осях x та y позначимо відповідно x_α та y_α.

Синусом кута α (sinα) називають ординату точки B одиничного кола, яка відповідає куту α.

Косинусом кута α (cosα) називають абсцису точки B одиничного кола, яка відповідає куту α.

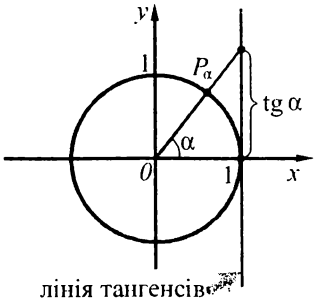
Тангенсом кута α (tgα) називають відношення ординати кінця одиничного рухомого радіуса до його абсциси: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{x_\alpha}{y_\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, де $\cos\alpha \neq 0$.

Котангенсом кута α (ctgα) називають відношення абсциси кінця одиничного рухомого радіуса до його ординати: $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{y_\alpha}{x_\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, де $\sin\alpha \neq 0$.

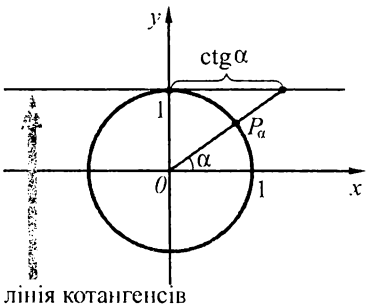
Секансом кута α (secα) називають відношення $\dfrac{1}{\cos\alpha}$, де $\cos\alpha \neq 0$.

Косекансом кута α (cosecα) називають відношення $\dfrac{1}{\sin\alpha}$, де $\sin\alpha \neq 0$.

Пряму, яка проходить через точку $P_\alpha(1; 0)$ паралельно до осі ординат, називають *лінією тангенсів*. Пряму, яка проходить через точку (0; 1) паралельно до осі абсцис, називають *лінією котангенсів*.



лінія тангенсів



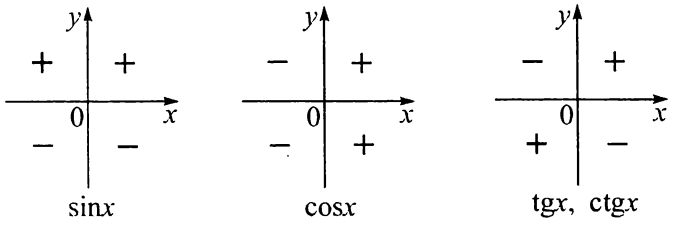
лінія котангенсів

Значення синуса, косинуса, тангенса та котангенса деяких кутів:

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
tgα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
ctgα	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Для будь-якого кута α $|\sin\alpha| \le 1$, $|\cos\alpha| \le 1$, $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ змінюються від $-\infty$ до $+\infty$.

Знаки тригонометричних функцій у чвертях:



Функції $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg}x$, $y = \operatorname{ctg}x$ — непарні, а функція $y = \cos x$ — парна, тому:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

Значення тригонометричних функцій у точках x та $x + 2\pi n$, $n \in Z$, рівні за всіх допустимих значень x, тобто $\sin(x) = \sin(x + 2\pi n)$; $\cos(x) = \cos(x + 2\pi n)$; $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(x + 2\pi n)$; $\operatorname{ctg}(x) = \operatorname{ctg}(x + 2\pi n)$. Усі тригонометричні функції є періодичними і довільне число виду $2\pi n$, $n \in Z$, $n \neq 0$, є їх періодом. Функції $y = \operatorname{tg}x$, $y = \operatorname{ctg}x$ мають своїми періодами і числа виду πn, $n \in Z$, $n \neq 0$: $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(x + \pi n)$; $\operatorname{ctg}(x) = \operatorname{ctg}(x + \pi n)$. Серед усіх можливих періодів функцій виділяють основний період — найменший додатний період. Функції $y = \sin x$, $y = \cos x$ мають основний період 2π, а функції $y = \operatorname{tg}x$, $y = \operatorname{ctg}x$ — π.

Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ — основна тригонометрична тотожність

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1;$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};\ 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin\alpha =$	—	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha =$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	—	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha =$	$\pm\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	—	$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha =$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\pm\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	—

Формули додавання для тригонометричних функцій

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta;\ \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta};\ \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta}.$$

Формули суми та різниці тригонометричних функцій

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\ \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\ \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta};\ \operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}.$$

Формули тригонометричних функцій подвійного та потрійного аргументу

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$;

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$;

$\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$;

$\operatorname{ctg}2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$;

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

$\operatorname{tg}3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$;

$\operatorname{ctg}3\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$.

Формули універсальної підстановки

$\sin\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$;

$\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$;

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$;

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Формули половинного аргументу

$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$;

$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$;

$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$;

$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

$\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$;

$\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Формули пониження степеня

$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$;

$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

Формули добутку тригонометричних функцій

$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$;

$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$;

$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}$.

Формули зведення

x	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
	$90°-\alpha$	$90°+\alpha$	$180°-\alpha$	$180°+\alpha$	$270°-\alpha$	$270°+\alpha$	$360°-\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg}x$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}x$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

Наприклад, $\cos\underbrace{(90°+x)}_{\text{2 чверть}}=-\sin x$; $\operatorname{tg}\underbrace{(\pi+5\alpha)}_{\text{3 чверть}}=\operatorname{tg}5\alpha$; $\sin\underbrace{\left(\frac{9}{2}\pi+\alpha\right)}_{\text{2 чверть}}=\cos\alpha$; $\operatorname{ctg}\underbrace{\left(\underset{7\cdot 90°}{630°}+\alpha\right)}_{\text{4 чверть}}=-\operatorname{tg}\alpha$;

$\cos\underbrace{\left(\underset{6\cdot 90°}{540°}+\alpha\right)}_{\text{3 чверть}}=-\cos\alpha$; $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{11}{2}\pi\right)=-\operatorname{tg}\underbrace{\left(\frac{11}{2}\pi+\alpha\right)}_{\text{4 чверть}}=-(-\operatorname{ctg}\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$.

Обернені тригонометричні функції

Арксинусом числа b, де $|b|\le 1$, називають таке число α із проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює b. Наприклад, якщо $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, то $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$, бо $-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Узагалі $\arcsin b=\alpha$, якщо $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\alpha=b$. Наприклад, $\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, але $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\ne\frac{3\pi}{4}$, оскільки $\frac{3\pi}{4}\notin\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Арккосинусом числа b, де $|b|\le 1$, називають таке число α із проміжку $[0;\pi]$, косинус якого дорівнює b. Наприклад, $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, бо $\frac{\pi}{3}\in[0;\pi]$ і $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$; $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$, бо $\frac{5\pi}{6}\in[0;\pi]$ і $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Узагалі $\arccos b=\alpha$, якщо $\alpha\in[0;\pi]$ і $\cos\alpha=b$. Наприклад, $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, але $\arccos\frac{1}{2}\ne-\frac{\pi}{3}$, оскільки $-\frac{\pi}{3}\notin[0;\pi]$.

Арктангенсом числа b називають таке число α з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює b. Наприклад, $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$, бо $\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$; $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$, оскільки $-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$. Узагалі, $\operatorname{arctg}b=\alpha$, якщо $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg}\alpha=b$. Наприклад, $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$, але $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)\ne\frac{2\pi}{3}$, оскільки $\frac{2\pi}{3}\notin\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Арккотангенсом числа b називають таке число α з проміжку $(0;\pi)$, котангенс якого дорівнює b. Наприклад, $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3}$, бо $\frac{\pi}{3}\in(0;\pi)$ і $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{5\pi}{6}$, бо $\frac{5\pi}{6}\in(0;\pi)$ і $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}=-\sqrt{3}$. Узагалі, $\operatorname{arcctg}b=\alpha$, якщо $\alpha\in(0;\pi)$ і $\operatorname{ctg}\alpha=b$. Наприклад, $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$, але $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)\ne-\frac{\pi}{6}$, оскільки $-\frac{\pi}{6}\notin(0;\pi)$.

Основні співвідношення між оберненими тригонометричними функціями

$\arcsin(\sin x)=x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

$\sin(\arcsin x)=x$, $x\in[-1;1]$;

$\arcsin(-x)=-\arcsin x$;

$\arccos(\cos x)=x$, $x\in[0;\pi]$;

$\cos(\arccos x)=x$, $x\in[-1;1]$;

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$;

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$;

$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$;

$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x,\ x \in (0; \pi)$;

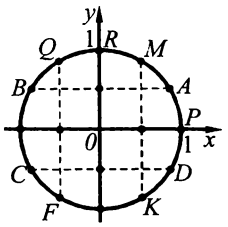
$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$;

$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$;

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ x \in [-1; 1]$;

$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.

Приклад 1. Які з точок на одиничному колі задовольняють умову $\sin\alpha = \frac{1}{2}$?



А	Б	В	Г	Д
M і K	Q і F	A і B	C і D	R

■ Синусом кута є ордината кінця одиничного рухомого радіуса. Знайдемо на колі точки, ординати яких дорівнюють 0,5. Це точки A та B.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 2. Обчислити знак добутку $\sin 280° \cdot \cos 30° \cdot \operatorname{tg} 170° \cdot \operatorname{ctg} 190°$.

■ Для кожного множника визначимо чверть, у якій міститься кінець рухомого радіуса, й з'ясуємо знак даної функції. 280° — IV чверть, $\sin 280° < 0$; 30° — I чверть, $\cos 30° > 0$; 170° — II чверть, $\operatorname{tg} 170° < 0$; 190° — III чверть, $\operatorname{ctg} 190° > 0$. Отже, маємо: «–» · «+» · «–» · «+» > 0.

Відповідь. $\sin 280° \cdot \cos 30° \cdot \operatorname{tg} 170° \cdot \operatorname{ctg} 190° > 0$. ■

Приклад 3. Знайти знак виразів: **а)** $\sin 2{,}5$; **б)** $\cos 6$.

■ $\frac{\pi}{2} < 2{,}5 < \pi$, $\frac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi$. Отже, кут $\alpha = 2{,}5$ радіана закінчується у II чверті, а кут $\beta = 6$ радіан закінчується у IV чверті. Тоді $\sin 2{,}5 > 0$, $\cos 6 > 0$.

Відповідь. $\sin 2{,}5 > 0$, $\cos 6 > 0$. ■

Приклад 3. Обчислити: $\dfrac{\sin(-30°)\cos(-60°) + \operatorname{tg}(-45°)}{\operatorname{ctg}(-60°)\cos(-30°) - \sin(-60°)\operatorname{tg}(-30°)}$.

■ Урахувавши парність (непарність) тригонометричних функцій, одержимо:

$$\frac{\sin(-30°)\cos(-60°) + \operatorname{tg}(-45°)}{\operatorname{ctg}(-60°)\cos(-30°) - \sin(-60°)\operatorname{tg}(-30°)} = \frac{-\sin 30°\cos 60° - \operatorname{tg} 45°}{-\operatorname{ctg} 60°\cos 30° - \sin 60°\operatorname{tg} 30°} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - 1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{-\frac{5}{4}}{-\frac{5}{6}} =$$

$$= \frac{6}{4} = 1\frac{2}{4} = 1{,}5.$$

Відповідь. 1,5. ■

Приклад 4. Звести $\cos\frac{391\pi}{18}$ до тригонометричної функції гострого кута.

А	Б	В	Г	Д
$\cos\frac{\pi}{18}$	$-\sin\frac{2\pi}{9}$	$\cos\frac{7\pi}{18}$	$\sin\frac{2\pi}{9}$	$\cos\frac{31\pi}{18}$

■ $\cos\frac{391\pi}{18}=\cos\left(21\pi+\frac{13\pi}{18}\right)=\cos\left(2\cdot10\pi+\pi+\frac{9\pi+4\pi}{18}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{18}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{2\pi}{9}\right)=\sin\frac{2\pi}{9}.$

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 5. Яка з указаних функцій є ні парною, ні непарною?

А	Б	В	Г	Д
$f_1(x)=\cos3x\operatorname{ctg}4x$	$f_2(x)=\frac{2+3\sin^2 5x}{6\operatorname{tg}x}$	$f_3(x)=5\sqrt{\cos x}+x^4$	$f_4(x)=\frac{x^2+\sin2x}{\sin2x-x^3}$	$f_5(x)=\sin6x\operatorname{tg}x+x^2$

■ $f_1(-x)=\cos(-3x)\operatorname{ctg}(-4x)=\cos3x\cdot(-\operatorname{ctg}4x)=-\cos3x\operatorname{ctg}4x=-f_1(x)$. Функція непарна;

$f_2(-x)=\frac{2+3\sin^2(-5x)}{6\operatorname{tg}(-x)}=\frac{2+3(-\sin5x)^2}{-6\operatorname{tg}x}=-\frac{2+3\sin^2 5x}{6\operatorname{tg}x}=-f_2(x)$. Функція непарна;

$f_3(-x)=5\sqrt{\cos(-x)}+(-x)^4=5\sqrt{\cos x}+x^4=f_3(x)$. Функція парна;

$f_4(-x)=\frac{(-x)^2+\sin(-2x)}{\sin(-2x)-(-x)^3}=\frac{x^2-\sin2x}{-\sin2x+x^3}=-\frac{x^2-\sin2x}{\sin2x-x^3}\neq f_4(x)$; $f_4(-x)\neq -f_4(x)$. Функція ні парна, ні непарна;

$f_5(-x)=\sin(-6x)\operatorname{tg}(-x)+(-x)^2=-\sin6x\cdot(-\operatorname{tg}x)+x^2=\sin6\operatorname{ctg}x+x^2=f_5(x)$. Функція парна.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 6. Знайти найбільше значення виразу $12\cos\alpha+5\sin\alpha-7$.

■ Перетворимо вираз: $12\cos\alpha+5\sin\alpha-7=\sqrt{12^2+5^2}\left(\frac{5}{\sqrt{12^2+5^2}}\sin\alpha+\frac{12}{\sqrt{12^2+5^2}}\cos\alpha\right)-7=$

$=13\left(\frac{5}{13}\sin\alpha+\frac{12}{13}\cos\alpha\right)-7=13\sin(\alpha+\varphi)-7$, де $\varphi=\arccos\frac{5}{13}$ або $\varphi=\arcsin\frac{12}{13}$. Далі маємо: $-1\le\sin(\alpha+\varphi)\le1$; $-13\le13\sin(\alpha+\varphi)\le13$; $-13-7\le13\sin(\alpha+\varphi)-7\le13-7$; $-20\le13\sin(\alpha+\varphi)-7\le6$. Отже, найбільше значення виразу $12\cos\alpha+5\sin\alpha-7$ дорівнює 6.

Відповідь. 6. ■

Приклад 7. Обчислити числове значення виразу $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}-3\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{5}{12}\pi$	$-2\frac{5}{12}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{7}{12}\pi$	$\frac{5}{12}\pi$

■ $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}-3\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{6}-3\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=$

$=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+3\cdot\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{-2\pi+3\pi+6\pi}{12}=\frac{7}{12}\pi.$

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 8. Знайти tgα, якщо $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ і $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

А	Б	В	Г	Д
0,5	2	–0,5	–2	5

■ Кут α міститься у четвертій чверті, тому $\sin\alpha < 0$. Обчислимо sinα: $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{5}} = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$. Знайдемо tgα: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{2}{\sqrt{5}} : \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -2$.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 9. Обчислити: $\sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ$.

■ $\sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ) \cdot \sin 15^\circ = \cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ = \frac{1}{2}\sin 30^\circ = \frac{1}{4}$. ■

Приклад 14. Знайти значення виразу $2\sin^2 2\alpha + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2\cos^2 2\alpha$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

А	Б	В	Г	Д
5	$2+\sqrt{3}$	3	$2-\sqrt{3}$	1

■ Спочатку спростимо вираз: $2\sin^2 2\alpha + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2\cos^2 2\alpha = 2\sin^2 2\alpha + 2\cos^2 2\alpha + 2\sin\alpha =$

$= 2\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + 2\sin\alpha = 2 + 2\sin\alpha$. Якщо $\alpha = \frac{\pi}{6}$, то $2 + 2\sin\alpha = 2 + 2 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 10. Спростити вираз $\frac{\cos 20^\circ - \cos 40^\circ}{\operatorname{tg}10^\circ + \operatorname{tg}20^\circ}$.

■ $\frac{\cos 20^\circ - \cos 40^\circ}{\operatorname{tg}10^\circ + \operatorname{tg}20^\circ} = \frac{-2\sin 30^\circ \sin(-10^\circ)}{\frac{\sin 30^\circ}{\cos 10^\circ \cos 20^\circ}} = \frac{2\sin 30^\circ \sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ}{\sin 30^\circ} =$

$= 2\sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ = \sin 20^\circ \cos 20^\circ = \frac{1}{2}\sin 40^\circ$. ■

Завдання 7.1–7.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

7.1. $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$-2\sin^2\alpha$	1	$2\cos^2\alpha$	$2\sin^2\alpha$	0

7.2. $\operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{ctg}^2\beta + 2 - \frac{1}{\cos^2\beta} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{\sin^2\beta}$	$\sin^2\beta$	$\frac{1}{\sin^2\beta}$	1	$\frac{2}{\sin^2\beta}$

7.3. Спростити вираз $\operatorname{ctg}(-\alpha) \cdot \operatorname{tg}(-\alpha) - \sin^2(-\alpha)$.

А	Б	В	Г	Д
$\cos\alpha$	$\cos^2\alpha$	$\sin^2\alpha$	$1 + \sin^2\alpha$	$-\cos^2\alpha$

7.4. Обчислити $\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha$, якщо $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha = 2$.

А	Б	В	Г	Д
2	1	4	3	–2

7.5. Обчислити $\dfrac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$, якщо $\mathrm{tg}\alpha = 3$.

А	Б	В	Г	Д
1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2

7.6. Знайти значення виразу $3\sin^2\alpha - 7\cos^2\alpha$, якщо $\cos\alpha = -0{,}1$.

А	Б	В	Г	Д
2	2,9	3,1	3,96	2,92

7.7. Знайти значення виразу $\cos\left(\alpha - \beta + \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin(\alpha + \pi)\cos(\beta - \pi)$, якщо $\alpha = 0{,}1\pi$, $\beta = 0{,}15\pi$.

А	Б	В	Г	Д
0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

7.8. $\mathrm{tg}7°\mathrm{tg}83° + \mathrm{tg}19°\mathrm{tg}71° = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	4

7.9. $\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta) - \sin\alpha\sin\beta} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
1	$\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta$	$\sin\alpha\sin\beta$	$\cos\alpha\cos\beta$	$\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta$

7.10. $\dfrac{\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y}{\mathrm{tg}(x+y)} + \dfrac{\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,y}{\mathrm{tg}(x-y)} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
2	0	1	$2\mathrm{tg}x$	$2\mathrm{tg}(x+y)$

7.11. $\sin(\pi - 2\alpha) + 2\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \alpha\right)\sin\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\sin2\alpha$	1	$3\cos2\alpha$	3	0

7.12. $\cos^4\frac{\alpha}{2} - \sin^4\frac{\alpha}{2} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\frac{\alpha}{4}$	$\cos2\alpha$	1

7.13. $\dfrac{\sin 40^\circ}{2\cos^2 20^\circ} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
cos20°	$\frac{1}{2}$	sin20°	ctg20°	tg20°

7.14. $\sin 48^\circ + \sin 12^\circ = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
sin36°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	cos18°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cos 18^\circ$

7.15. $\cos 70^\circ - \cos 10^\circ = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$-\sin 40^\circ$	$\sin 40^\circ$	$\cos 30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$2\sin 40^\circ$

7.16. $\cos 70^\circ + \cos 50^\circ = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$2\cos 10^\circ$	$\sin 10^\circ$	$\cos 10^\circ$

7.17. Знайти значення виразу $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, якщо $x = -\frac{\pi}{6}$.

А	Б	В	Г	Д
0,5	–0,25	–0,5	–2	0,25

7.18. $\cos 75^\circ \cos 15^\circ = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

7.19. $\sin 105^\circ \cos 15^\circ = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{2+\sqrt{3}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

7.20. $\sin 75^\circ \sin 15^\circ = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$

7.21. $\sin\left(\arccos\frac{1}{4}\right) = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{\sqrt{15}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$

7.22. $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{6}\right) = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{17}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{15}{16}$

7.23. $\operatorname{tg}\left(-\frac{1}{2}\arcsin 0{,}6\right) = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
0,3	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$

7.24. Обчислити: $3\sqrt{3}\cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}\right)$.

А	Б	В	Г	Д
3	–3	±3	$3\sqrt{6}$	$3\sqrt{2}$

7.25. $16\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
0,5	–0,5	2	–2	0

7.26. $\sin\frac{3\pi}{14} - \sin\frac{\pi}{14} - \sin\frac{5\pi}{14} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	–1

Завдання 7.27–7.39 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

7.27. Установити відповідність між виразами (1–4) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

1 $\sin\alpha\cos\alpha$

2 $1-2\sin^2\alpha$

3 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)$

4 $\cos(\pi-2\alpha)$

А $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$

Б $-\cos 2\alpha$

В $\cos 2\alpha$

Г $2\cos\alpha$

Д $\sin 2\alpha$

7.28. Установити відповідність між виразами (1–4) та виразами, які їм дорівнюють (А–Д).

1 $\sin 740°$

2 $\cos 560°$

3 $\cos 225°$

4 $2\sin 20°\cos 20°$

А $\cos 50°$

Б $\sin 50°$

В $\sin 20°$

Г $\sin(-45°)$

Д $-\cos 20°$

7.29. Установити відповідність між виразами (1–4) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

1 $\sin(45^\circ+\alpha)$

2 $\cos(45^\circ+\alpha)$

3 $\cos 3\alpha$

4 $\sin 3\alpha$

А $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$

Б $\cos\alpha\cos 2\alpha+\sin\alpha\sin 2\alpha$

В $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$

Г $\cos\alpha\cos 2\alpha-\sin\alpha\sin 2\alpha$

Д $\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha$

7.30. Одна зі сторін кута збігається з додатною піввіссю абсцис, а інша перетинає одиничне коло в точці $\left(-\frac{5}{13};-\frac{12}{13}\right)$. Установити відповідність між тригонометричними функціями кута β (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\sin\beta$

2 $\cos\beta$

3 $\operatorname{tg}\beta$

4 $\operatorname{ctg}\beta$

А $\frac{5}{12}$

Б $\frac{12}{5}$

В $-\frac{12}{13}$

Г $-\frac{5}{13}$

Д $\frac{13}{12}$

7.31. $\sin\beta=a$, α — кут I чверті. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)$

2 $\sin(\pi-\beta)$

3 $\sin(\pi+\beta)$

4 $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\beta\right)$

А a

Б $-a$

В $\frac{1}{a}$

Г $-\sqrt{1-a^2}$

Д $\sqrt{1-a^2}$

7.32. α — кут першої чверті, $\operatorname{tg}\alpha=a$. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

2 $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$

3 $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$

4 $\operatorname{tg}(\pi+\alpha)$

А $\sqrt{1-a^2}$

Б a

В $\frac{1}{a}$

Г $-a$

Д $-\frac{1}{a}$

7.33. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\sin 510°$
2 $\cos 690°$
3 $\cos 840°$
4 $\sin 960°$

А $-\frac{1}{2}$
Б $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
В $\frac{\sqrt{3}}{2}$
Г $\frac{\sqrt{2}}{2}$
Д $\frac{1}{2}$

7.34. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\operatorname{tg}\frac{20\pi}{3}$
2 $\operatorname{tg}\frac{28\pi}{3}$
3 $\operatorname{tg}\left(-\frac{31\pi}{6}\right)$
4 $\operatorname{ctg}\frac{16\pi}{3}$

А $-\frac{1}{\sqrt{3}}$
Б $-\sqrt{3}$
В $\frac{1}{\sqrt{3}}$
Г $\sqrt{3}$
Д -1

7.35. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–4) та тотожно рівними їм виразами (А–Д).

1 $\cos 3x\cos x - \sin 3x\sin x$
2 $\cos 3x\cos x + \sin 3x\sin x$
3 $\sin 3x\cos x + \cos 3x\sin x$
4 $\sin x\cos 3x - \sin 3x\cos x$

А $\sin 4x$
Б $-\cos 4x$
В $\cos 4x$
Г $\cos 2x$
Д $-\sin 2x$

7.36. α — кут другої чверті, $\sin\alpha = \frac{5}{13}$. Установити відповідність між заданими тригонометричними виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\sin 2\alpha$
2 $\cos 2\alpha$
3 $\operatorname{tg} 2\alpha$
4 $\operatorname{ctg} 2\alpha$

А $-\frac{119}{120}$
Б $-\frac{119}{169}$
В $\frac{119}{169}$
Г $-\frac{120}{119}$
Д $-\frac{120}{169}$

7.37. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–4) та тотожно рівними їм виразами (А–Д).

1 $\dfrac{\sin 3\alpha - \sin\alpha}{\cos 3\alpha - \cos\alpha}$	**А** $\operatorname{tg}\alpha$
2 $\dfrac{\cos\alpha - \cos 3\alpha}{\sin\alpha + \sin 3\alpha}$	**Б** $\operatorname{ctg}\alpha$
3 $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}$	**В** $\operatorname{tg}2\alpha$
4 $\dfrac{\sin 3\alpha + \sin\alpha}{\cos 3\alpha + \cos\alpha}$	**Г** $\operatorname{ctg}2\alpha$
	Д $-\operatorname{ctg}2\alpha$

7.38. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–4) та тотожно рівними їм виразами (А–Д).

1 $\sin 10° + \cos 20°$	**А** $\sin 50°$
2 $\sin 20° + \cos 10°$	**Б** $\sin 40°$
3 $\cos 20° - \sin 10°$	**В** $\sqrt{3}\sin 40°$
4 $\cos 10° - \sin 20°$	**Г** $\sqrt{3}\sin 50°$
	Д $-\sqrt{3}\sin 50°$

7.39. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\operatorname{tg}\left(\arcsin\dfrac{4}{5}\right)$	**А** $\dfrac{4}{5}$
2 $\operatorname{ctg}\left(\arccos\dfrac{3}{5}\right)$	**Б** $\dfrac{3}{5}$
3 $\cos\left(\arcsin\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right)$	**В** $\dfrac{3}{4}$
4 $\sin\left(\arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)\right)$	**Г** $\dfrac{4}{3}$
	Д $-\dfrac{3}{5}$

Розв'яжіть завдання 7.40–7.49. Відповідь запишіть десятковим дробом.

7.40. Обчислити: $\dfrac{\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos(\alpha-\pi)\operatorname{tg}(-\alpha)}{\sin(\alpha-\pi)\cos\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}$.

7.41. Спростити: $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

7.42. Спростити: $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha$.

7.43. Спростити: $\dfrac{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha}{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}\cdot 2\operatorname{ctg}\alpha$.

7.44. Спростити: $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{5\cos\alpha\cdot(\cos\alpha+\cos 2\alpha)}$.

7.45. Спростити: $\left(\sin(2\pi - x)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \cos(x - \pi) - \sin(x - \pi)\right)^2 + \cos^2(\pi - x)$.

7.46. Обчислити: $2\sin 20^\circ \cos 50^\circ \sin 60^\circ \cos 10^\circ$.

7.47. Обчислити: $\frac{1}{\cos 1 + \cos 3} + \frac{1}{\cos 1 + \cos 5} + \frac{1}{\cos 1 + \cos 7} + \ldots + \frac{1}{\cos 1 + \cos 2001} + \frac{\operatorname{tg} 1 - \operatorname{tg} 1001}{2\sin 1}$.

7.48. Спростити вираз $\frac{\cos 5\alpha + 5\cos 3\alpha + 10\cos\alpha}{\cos^5 \alpha}$.

7.49. Спростити вираз $26\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{7}{25}\right)$.

Тема 8. Цілі рівняння

Лінійні рівняння з однією змінною

Лінійним рівнянням з однією змінною називають рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a та b — відомі числа.

Якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$ — єдиний корінь лінійного рівняння;

якщо $a = 0$, $b \neq 0$, то $0 \cdot x = b$ і рівняння коренів не має;

якщо $a = 0$, $b = 0$, то $0 \cdot x = 0$ і коренями рівняння є всі дійсні числа.

Рівняння, які зводяться до лінійних:

$2x - 2(x-3) = 10;$	$2x + 2(x-3) = 10;$	$2x - 2(x-5) = 10;$
$2x - 2x + 6 = 10;$	$2x + 2x - 6 = 10;$	$2x - 2x + 10 = 10;$
$0x = 4.$	$4x = 16;$	$0x = 0.$
	$x = 4.$	
Відповідь. Коренів немає.	Відповідь. 4.	Відповідь. Довільне число.

Квадратні рівняння

Квадратним рівнянням (рівнянням другого степеня з однією змінною) називають рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна, a, b, c — відомі числа, до того ж $a \neq 0$. Якщо $b \neq 0$, $c \neq 0$, то квадратне рівняння називають повним. Якщо ж $b = 0$ або $c = 0$, то квадратне рівняння називають неповним.

Розглянемо випадки.

1) $c = 0$, $b \neq 0$. Тоді одержимо рівняння $ax^2 + bx = 0$; $x(ax + b) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$. Наприклад, $3x^2 - 7x = 0$; $x(3x - 7) = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 0; \\ 3x - 7 = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x_1 = 0; \\ x_2 = \frac{7}{3}. \end{array}\right.$ Відповідь. 0; $\frac{7}{3}$;

2) $b = 0$, $c \neq 0$. Тоді одержимо рівняння $ax^2 + c = 0$; $ax^2 = -c$; $x^2 = -\frac{c}{a}$. а) $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$, якщо $-\frac{c}{a} \geq 0$, тобто $\frac{c}{a} \leq 0$; б) якщо $-\frac{c}{a} < 0$, тобто $\frac{c}{a} > 0$, то рівняння коренів не має. Наприклад: **а)** $9x^2 - 64 = 0$; $x^2 = \frac{64}{9}$; $\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{8}{3}; \\ x_2 = -\frac{8}{3}. \end{array}\right.$ Відповідь. $\pm\frac{8}{3}$; **б)** $4x^2 + 25 = 0$; $4x^2 = -25$; $x^2 = -\frac{25}{4}$; $x \in \varnothing$.

Відповідь. $\varnothing$;

3) $b = 0$, $c = 0$. Тоді одержимо рівняння $ax^2 = 0$; $x_1 = x_2 = 0$ $(a \neq 0)$. Наприклад: $25x^2 = 0$; $x^2 = 0$; $x = 0$. Відповідь. 0;

4) $b \neq 0$, $c \neq 0$. Тоді одержимо рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Вираз $b^2 - 4ac$ називають *дискримінантом квадратного рівняння* і позначають літерою D. Кількість коренів квадратного рівняння залежить від значення дискримінанта.

Умова	*Корені*
$D = b^2 - 4ac > 0$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
$D = b^2 - 4ac = 0$	$x = \frac{-b}{2a}$
$D = b^2 - 4ac < 0$	коренів немає

Наприклад, $5x^2 - 18x + 9 = 0$. $D = (-18)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 9 = 324 - 180 = 144 > 0$.

$x_1 = \frac{18+\sqrt{144}}{2 \cdot 5} = \frac{18+12}{10} = 3$; $x_2 = \frac{18-\sqrt{144}}{2 \cdot 5} = \frac{18-12}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Відповідь. 3; $\frac{3}{5}$.

Квадратне рівняння, у якому перший коефіцієнт дорівнює одиниці ($a = 1$), називають *зведеним*. Другий коефіцієнт та вільний член зведеного квадратного рівняння позначають відповідно p та q, і рівняння має вигляд $x^2 + px + q = 0$.

Теорема Вієта. Сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, а добуток коренів — вільному члену. Тобто якщо x_1 та x_2 — корені рівняння $x^2 + px + q = 0$, то: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$. Наприклад, корені зведеного рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$ дорівнюють $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Тоді $x_1 + x_2 = 2 + 3 = 5$; $x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 3 = 6$.

Теорема, обернена до теореми Вієта. Якщо сума і добуток чисел m і n дорівнюють відповідно $-p$ і q, то m і n — корені квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$. Наприклад, -3 і -4 є відповідно сумою та добутком коренів квадратного рівняння $x^2 + 3x - 4 = 0$, тому коренями рівняння є числа -4 і 1.

Біквадратні рівняння

Біквадратним рівнянням називають рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, де x — змінна, a, b, c — відомі числа, до того ж $a \neq 0$. Заміною $x^2 = t$ біквадратне рівняння зводять до квадратного. Наприклад, розв'язати рівняння $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$. Зробимо заміну $x^2 = t$. Тоді $x^4 = \left(x^2\right)^2 = t^2$. Отримуємо рівняння $t^2 - 6t - 7 = 0$. Корені цього рівняння $t_1 = 7$, $t_2 = -1$. Повертаємося до змінної x: $x^2 = 7$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{7}$ або $x^2 = -1$; коренів немає. Відповідь. $-\sqrt{7}$; $\sqrt{7}$.

Двочленні рівняння

Алгебраїчне рівняння називають двочленним рівнянням, якщо воно має вигляд $x^n - a = 0$ ($n \in N$).

За будь-якого парного n ($n = 2k$, $k \in N$), якщо $a > 0$, рівняння $x^{2k} - a = 0$ має два дійсні корені: $x_1 = \sqrt[2k]{a}$, $x_2 = -\sqrt[2k]{a}$. Якщо $a = 0$, то рівняння має один корінь $x = 0$. Якщо $a < 0$, рівняння не має дійсних коренів. Наприклад: **а)** $x^6 - 64 = 0$; $x^6 = 64$; $x_1 = \sqrt[6]{64} = 2$; $x_2 = -\sqrt[6]{64} = -2$. Відповідь. ± 2; **б)** $x^4 + 16 = 0$; $x^4 = -16$; $x \in \varnothing$. Відповідь. $x \in \varnothing$.

За будь-якого непарного n ($n = 2k - 1$, $k \in N$), рівняння $x^{2k-1} - a = 0$ має один дійсний корінь ($a \in R$): $x = \sqrt[2k-1]{a}$. Наприклад: **а)** $x^3 - 27 = 0$; $x^3 = 27$; $x = \sqrt[3]{27} = 3$. Відповідь. 3; **б)** $x^5 + 32 = 0$; $x^5 = -32$; $x = \sqrt[5]{-32} = -2$. Відповідь. -2.

Якщо $a = 0$ за будь-якого $n \in N$ рівняння $x^n - a = 0$ має один корінь $x = 0$. Наприклад: **а)** $x^5 = 0$; $x = 0$. Відповідь. 0; **б)** $x^8 = 0$; $x = 0$. Відповідь. 0.

Цілі раціональні рівняння вищих степенів

Рівняння виду $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ ($n \in N$, $a_0 \neq 0$) називають алгебраїчним рівнянням степеня n.

Якщо $n = 1$, то $a_0x + a_1 = 0$ — лінійне рівняння.

Якщо $n = 2$, то $a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$ — квадратне рівняння.

Алгебраїчне рівняння степеня n має не більше n дійсних коренів.

Нехай $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$. Для рівняння $P_n(x) = 0$ справедлива теорема Безу (див. тему 3). Розв'язання рівнянь вищих степенів, які мають хоча б один цілий корінь, виконують у такій послідовності:

1) знаходять множину дільників вільного члена a_n;

2) за теоремою Безу перевіряють, які з дільників є коренями рівняння $P_n(x) = 0$;

3) діленням у стовпчик знаходять частку від ділення $P_n(x)$ на $x - x_1$, де x_1 — корінь рівняння $P_n(x) = 0$;

4) записують частку $Q_{n-1}(x)$ як многочлен степеня $(n - 1)$;

5) визначають, якщо це можливо, корені многочлена $Q_{n-1}(x)$, які є також коренями початкового рівняння і т. д.

Наприклад, знайти корені рівняння $2x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 21x - 18 = 0$. Випишемо дільники вільного члена (–18): ±1, ±2, ±3, ±6, ±9, ±18. Оскільки $P(1) = 0$, то поділимо многочлен $2x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 21x - 18$ на двочлен $x - 1$ і визначимо многочлен-частку:

	1	–9	4	21	–18
1	1	–7	–3	18	0

$2x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 21x - 18 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^3 - 7x^2 - 3x + 18) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; \\ 2x^3 - 7x^2 - 3x + 18 = 0. \end{array}\right.$ Аналогічно визначаємо корінь рівняння $2x^3 - 7x^2 - 3x + 18 = 0$. Коренем рівняння є число 2.

	2	–7	–3	18
2	2	–3	–9	0

Маємо: $2x^3 - 7x^2 - 3x + 18 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x^2 - 3x - 9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2; \\ 2x^2 - 3x - 9 = 0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 2; \\ x = 3; \\ x = -1{,}5. \end{array}\right.$

Відповідь. –1,5; 1; 2; 3.

Рівняння з модулями

Найпростіше рівняння з модулем $|f(x)| = a$ рівносильне сукупності рівнянь $\left[\begin{array}{l} f(x) = a; \\ f(x) = -a, \end{array}\right.$ якщо $a \geq 0$. Якщо ж $a < 0$, то рівняння коренів не має. Наприклад, розв'язати рівняння $|2x - 3| = 5$.

$|2x - 3| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 3 = 5; \\ 2x - 3 = -5; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 4; \\ x = -1. \end{array}\right.$ Відповідь. –1; 4.

Розв'язуючи рівняння, які містять змінну під знаком модуля, найчастіше застосовують такі методи:

1) розкриття модуля за означенням. Наприклад, розв'язати рівняння $|x - 1| = 2x - 5$. Розглянемо два випадки, коли підмодульний вираз $x - 1$ невід'ємний і коли він від'ємний. Якщо $x - 1 \geq 0$, то $|x - 1| = x - 1$; якщо $x - 1 < 0$, то $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$. Тоді початкове рівняння еквівалентне сукупності двох систем: $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x - 1 \geq 0; \\ x - 1 = 2x - 5; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x - 1 < 0; \\ -x + 1 = 2x - 5; \end{array}\right. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x \geq 1; \\ x = 4; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x < 1; \\ x = 2. \end{array}\right. \end{array}\right.$ Перша система має розв'язок $x = 4$, а друга система розв'язків не має. Відповідь. 4;

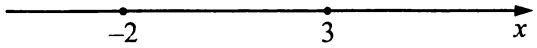
2) піднесення обох частин рівняння до квадрата. Наприклад, розв'язати рівняння $|2 - x| = 2x - 10$. Якщо $2x - 10 < 0$; $x < 5$, то рівняння розв'язків не має, оскільки $|2 - x| \geq 0$. У випадку коли $2x - 10 \geq 0$, обидві частини рівняння невід'ємні й тому при піднесенні обох частин до квадрата одержимо рівносильну початковому рівнянню систему: $\left\{\begin{array}{l} 2x - 10 \geq 0; \\ (2 - x)^2 = (2x - 10)^2; \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} 2x \geq 10; \\ 4 - 4x + x^2 = 4x^2 - 40x + 100; \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} x \geq 5; \\ x^2 - 12x + 32 = 0; \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} x \geq 5; \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 8; \\ x_2 = 4; \end{array}\right. \end{array}\right. x = 8.$

Відповідь. 8.

Спосіб піднесення до квадрата найбільше підходить для розв'язування рівнянь виду $|f(x)| = |g(x)|$. Наприклад, розв'язати рівняння $|2x - 3| = |x + 7|$; $(2x - 3)^2 = (x + 7)^2$; $4x^2 - 12x + 9 = x^2 + 14x + 49$; $3x^2 - 26x - 40 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x_1 = -\frac{4}{3}; \\ x_2 = 10. \end{array}\right.$ Відповідь. $-\frac{4}{3}$; 10;

3) метод інтервалів (проміжків). Даний метод полягає у наступному: а) прирівнюють до нуля вирази, які стоять під знаком модуля; б) отримані значення відкладають на числовій прямій, яка при цьому розбивається на проміжки (інтервали), на кожному з яких визначається знак підмодульного виразу; в) розв'язують отримані рівняння на кожному з інтервалів. Цей метод доцільно використовувати тоді, коли рівняння містить більше одного модуля. Наприклад, розв'язати рівняння $|3 - x| - |x + 2| = 5$. Нанесемо на числову пряму значення x, за яких $3 - x = 0$ і $x + 2 = 0$, тобто $x = 3$ і $x = -2$. Числова пряма при цьому розіб'ється на три проміжки: $(-\infty; -2]$, $(-2; 3]$, $(3; +\infty)$.



Розв'яжемо рівняння на кожному з цих проміжків.

1) $x \in (-\infty; -2]$. На цьому проміжку $|3 - x| = 3 - x$, $|x + 2| = -x - 2$; $3 - x - (-x - 2) = 5$; $3 - x + x + 2 = 5$; $0x = 0$; x — будь-яке число із заданого проміжку, тобто $x \in (-\infty; -2]$;

2) $x \in (-2; 3]$. На цьому проміжку $|3 - x| = 3 - x$, $|x + 2| = x + 2$; $3 - x - (x + 2) = 5$; $3 - x - x - 2 = 5$; $-2x = 4$; $x = -2$ і $-2 \notin (-2; 3]$;

3) $x \in (3; +\infty)$. На цьому проміжку $|3 - x| = -(3 - x) = -3 + x$, $|x + 2| = x + 2$; $-3 + x - (x + 2) = 5$; $-3 + x - x - 2 = 5$; $0x = 10$; $x \in \varnothing$.

Одержимо: $x \in (-\infty; -2]$.

Відповідь. $x \in (-\infty; -2]$.

Рівняння з параметрами

1. *Лінійні рівняння з параметром.*

Якщо в рівнянні, крім букв, що позначають невідомі, є одна або кілька інших букв, то таке рівняння називають *рівнянням з буквеними коефіцієнтами*. Буквені коефіцієнти в рівнянні називають *параметрами*. Наприклад, якщо в рівнянні $(a + 3) \cdot x = 7$ x — змінна, а буква a позначає якесь число, то кажуть, що це рівняння з параметром a.

Розв'язати рівняння з параметром означає знайти його корені для всіх значень параметра.

Рівняння з параметрами розв'язують так само, як і рівняння без параметрів, але лише доти, доки кожне перетворення можна виконати однозначно. Якщо ж якесь перетворення не можна виконати однозначно, то розв'язання потрібно розбити на різні випадки залежно від значення параметра.

Наприклад, щоб розв'язати рівняння $(a + 3) \cdot x = 7$, потрібно розглянути такі випадки:

1) якщо $a + 3 = 0$, тобто $a = -3$, одержимо рівняння $0x = 7$, яке не має коренів;

2) якщо $a + 3 \neq 0$, тобто $a \neq 3$, то рівняння має корінь $x = \frac{7}{a+3}$, до того ж він єдиний.

Відповідь. Якщо $a = -3$, то рівняння коренів не має; якщо $a \neq 3$, то рівняння має корінь $x = \frac{7}{a+3}$.

Узагалі будь-яке лінійне рівняння з параметром можна звести до рівняння виду $ax = b$, де a та b — деякі числа. Наприклад, розв'язати рівняння $4x + c = c^2x + 2$. $4x + c = c^2x + 2 \Leftrightarrow 4x - c^2x = 2 - c \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (4 - c^2)x = 2 - c \Leftrightarrow (2 - c)(2 + c)x = 2 - c$. Якщо $2 - c = 0$, тобто $c = 2$, то рівняння набуває виду $0x = 0$. Це рівняння має безліч коренів. Якщо $2 + c = 0$, тобто $c = -2$, одержимо $0x = 4$. Це рівняння не має коренів. Якщо $c \neq 2$ і $c \neq -2$, то рівняння має єдиний корінь $x = \frac{2-c}{(2-c)(2+c)} = \frac{1}{2+c}$.

Відповідь. Якщо $c = 2$, то $x \in R$; якщо $c = -2$, то $x \in \varnothing$; якщо $c \neq \pm 2$, то $x = \frac{1}{2+c}$.

Квадратні рівняння з параметрами

Розв'язання квадратного рівняння з параметром слід розпочинати із запитання «А чи є рівняння квадратним?». Якщо коефіцієнт біля x^2 може набувати нульового значення, то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ перетвориться в лінійне рівняння $bx + c = 0$. Наприклад, розв'язати рівняння $ax^2 + 2x + 1 = 0$. Розв'язання почнемо з випадку, коли $a = 0$. Тоді одержимо рівняння $2x + 1 = 0$, звідки $x = -0{,}5$. Якщо ж $a \neq 0$, то обчислимо: $D = 4 - 4a = 4(1 - a)$. Далі, якщо $a > 1$, то $D < 0$ і $x \in \varnothing$. Якщо $a = 1$, то $D = 0$ і $x = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1$. Якщо $a < 1$, то $D > 0$ і $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$.

Відповідь. Якщо $a > 1$, то $x \in \varnothing$; якщо $a = 0$, то $x = -0{,}5$; якщо $a = 1$, то $x = -1$; якщо $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$, то $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$, якщо $a \in (1; +\infty)$, то $x \in \varnothing$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x(x - 4) = x^2 + 8$.

А	Б	В	Г	Д
–2	2	–2; 2	$\varnothing$	$x \in R$

■ $x(x - 4) = x^2 + 8$; $x^2 - 4x = x^2 + 8$; $-4x = 8$; $x = -2$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 2. Розв'язати рівняння $4x + 3x^2 = 7$.

■ $4x + 3x^2 = 7$; $3x^2 + 4x - 7 = 0$.

$D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-7) = 16 + 84 = 100$.

$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{100}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 + 10}{6} = \frac{6}{6} = 1$; $x_2 = \frac{-4 - \sqrt{100}}{2 \cdot 3} = \frac{-14}{6} = -\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3}$.

Відповідь. $-2\frac{1}{3}$; 1. ■

Приклад 3. Обчислити відношення меншого кореня квадратного рівняння $x^2 + 5x - 6 = 0$ до його більшого кореня.

А	Б	В	Г	Д
6	–6	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{2}$

■ $x^2 + 5x - 6 = 0$; $x_1 = -6$, $x_2 = 1$. Оскільки $x_1 < x_2$, то $x_1 : x_2 = -6 : 1 = -6$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 4. Розв'язати рівняння $(x^2 + 2x)(x - 1) = 0$.

А	Б	В	Г	Д
1	0; 2	–2; 0; 1	$\varnothing$	–2; 1

■ $(x^2 + 2x)(x - 1) = 0$; $x(x + 2)(x - 1) = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = -2; \\ x = 1. \end{array}\right.$

Відповідь. **В.** ■

Приклад 5. Розв'язати рівняння $|x-5|=3$.

А	Б	В	Г	Д
8	2; 8	–8; –2	–2	коренів немає

■ $|x-5|=3;\ \left[\begin{array}{l} x-5=3; \\ x-5=-3; \end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l} x=8; \\ x=2. \end{array}\right.$

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 6. Знайти $x_1^2+x_2^2$, де x_1 та x_2 — корені рівняння $x^2-12x+13=0$.

А	Б	В	Г	Д
157	131	144	169	118

■ За теоремою Вієта $x_1\cdot x_2=13$, $x_1+x_2=12$. Піднесемо обидві частини рівності $x_1+x_2=12$ до квадрата: $(x_1+x_2)^2=12^2$; $x_1^2+2x_1x_2+x_2^2=144$; $x_1^2+x_2^2=144-2x_1x_2$; $x_1^2+x_2^2=144-2\cdot 13$; $x_1^2+x_2^2=144-26$; $x_1^2+x_2^2=118$.

Відповідь. **Д.** ■

Приклад 7. Розв'язати рівняння $|2x+3|-5x-18=0$.

А	Б	В	Г	Д
–5; –3	–5	3	–3	5

■ $|2x+3|-5x-18=0$; $|2x+3|=5x+18$; $\left\{\begin{array}{l}(2x+3)^2=(5x+18)^2; \\ 5x+18\ge 0;\end{array}\right.\ \left\{\begin{array}{l}4x^2+12x+9=25x^2+180x+324; \\ x\ge -\dfrac{18}{5};\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l}21x^2+168x+315=0; \\ x\ge -3,6;\end{array}\right.\ \left\{\begin{array}{l}x^2+8x+15=0; \\ x\ge -3,6;\end{array}\right.\ \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=-5; \\ x=-3;\end{array}\right. \\ x\ge -3,6;\end{array}\right.\ x=-3.$

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 8. Розв'язати рівняння $x^4-x^3-27x+27=0$.

А	Б	В	Г	Д
–1; –3	–3; 1	–1; 3	1; 3	1; 27

■ $x^4-x^3-27x+27=0$; $x^3(x-1)-27(x-1)=0$; $(x-1)(x^3-27)=0$; $(x-1)(x-3)(x^2+3x+9)=0$;

$\left[\begin{array}{l}x-1=0; \\ x^3-27=0;\end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l}x=1; \\ x=3.\end{array}\right.$

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 9. Розв'язати рівняння $2x^8+x^4-15=0$.

А	Б	В	Г	Д
$\pm\sqrt{3}$	$\pm\sqrt[4]{2,5}$	±3	–3; 2,5	$\pm\sqrt{2,5}$

■ Нехай $x^4=t$, $t\ge 0$. Тоді $x^8=t^2$. Маємо: $2t^2+t-15=0$; $D=1+4\cdot 2\cdot 15=121$; $t_1=\dfrac{-1+11}{4}=2,5$, $t_2=\dfrac{-1-11}{4}=-3$ — не задовольняє умову $t\ge 0$. Повертаємося до заміни: $x^4=2,5$; $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{2,5}$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 10. Розв'язати рівняння $x^2 - 2|x| - 8 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
±4	–2; 4	±2; ±4	–4; –2	±2

■ $x^2 - 2|x| - 8 = 0$; $|x|^2 - 2|x| - 8 = 0$; $|x| = -2$ — рівняння коренів не має; $|x| = 4$, $x = \pm 4$.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 11. Розв'язати рівняння $(x^2 - 5x)^2 - 2x^2 + 10x = 24$.

А	Б	В	Г	Д
–1; 1; 4; 6	–4; –1; 1; 6	–6; –1; 1; 4	–6; –4; –1; 1	–4; 6

■ $(x^2 - 5x)^2 - 2x^2 + 10x = 24$; $(x^2 - 5x)^2 - 2(x^2 - 5x) = 24$. Нехай $x^2 - 5x = t$, тоді одержимо:

$t^2 - 2t - 24 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t_1 = 6; \\ t_2 = -4. \end{array}\right.$ Повернемося до заміни: $\left[\begin{array}{l} x^2 - 5x = 6; \\ x^2 - 5x = -4; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2 - 5x - 6 = 0; \\ x^2 - 5x + 4 = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x_1 = 6; \\ x_2 = -1; \\ x_3 = 1; \\ x_4 = 4. \end{array}\right.$

Відповідь. **А.** ■

Приклад 12. Розв'язати рівняння $(x^2 + 4x)^2 - 2(x + 2)^2 = 7$.

А	Б	В	Г	Д
–5; –1; 1; 3	–5; –3; –1; 1	–3; –1; 1; 5	–1; 1; 3; 5	–3; –1; 1; 5

■ Запишемо дане рівняння у вигляді $(x^2 + 4x)^2 - 2(x^2 + 4x + 4) = 7$; $(x^2 + 4x)^2 - 2(x^2 + 4x) - 15 = 0$.

Введемо заміну $t = x^2 + 4x$; $t^2 - 2t - 15 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t_1 = -3; \\ t_2 = 5. \end{array}\right.$ Повернемося до заміни: $\left[\begin{array}{l} x^2 + 4x = -3; \\ x^2 + 4x = 5; \end{array}\right.$

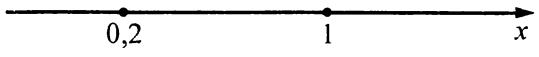
$\left[\begin{array}{l} x^2 + 4x + 3 = 0; \\ x^2 + 4x - 5 = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x_1 = -3; \\ x_2 = -1; \\ x_3 = -5; \\ x_4 = 1. \end{array}\right.$

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 13. Розв'язати рівняння $||5 - 5x| - |5x - 1|| = 3$. У відповідь записати добуток коренів. Якщо коренів безліч, то у відповідь записати число 100, якщо коренів немає, то у відповідь записати число 200.

■ Розкриємо зовнішній модуль й одержимо: $\left[\begin{array}{l} |5 - 5x| - |5x - 1| = 3; \quad (1) \\ |5 - 5x| - |5x - 1| = -3. \quad (2) \end{array}\right.$ Розв'яжемо рівняння (1).

Для цього знайдемо нулі підмодульних виразів: $5 - 5x = 0$ і $5x - 1 = 0$, звідки $x = 1$ та $x = 0{,}2$. Нанесемо одержані значення на числову пряму.



Розв'яжемо рівняння на кожному з одержаних проміжків.

1) $x \in (-\infty; 0{,}2]$. $|5 - 5x| = 5 - 5x$, $|5x - 1| = -(5x - 1) = -5x + 1$. $5 - 5x - (-5x + 1) = 3$; $5 - 5x + 5x - 1 = 3$; $0x = -1$; $x \in \varnothing$;

2) $x \in (0{,}2; 1]$. $|5 - 5x| = 5 - 5x$, $|5x - 1| = 5x - 1$. $5 - 5x - (5x - 1) = 3$; $5 - 5x - 5x + 1 = 3$; $-10x = -3$; $x = 0{,}3$; $0{,}3 \in (0{,}2; 1]$;

3) $x \in (1; +\infty)$. $|5 - 5x| = -(5 - 5x) = -5 + 5x$; $|5x - 1| = 5x - 1$. $-5 + 5x - (5x - 1) = 3$; $-5 + 5x - 5x + 1 = 3$; $0x = 7$; $x \in \varnothing$.

Отже, рівняння (1) має розв'язок $x = 0{,}3$.

Аналогічно можна одержати, що розв'язком рівняння (2) є $x = 0{,}9$.

Тоді добуток коренів дорівнює $0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}27$.

Відповідь. 0,27. ■

Приклад 14. Розв'язати рівняння $x^3 + 12x^2 + 44x + 48 = 0$. У відповідь записати суму коренів.

■ Якщо рівняння має цілий корінь, то він є дільником вільного члена 48, тобто це може бути ±1; ±2; ±3; ±4; ±6; ±8; ±12; ±16; ±24; ±48. Перевірка показує, що число –2 є коренем вихідного рівняння. Поділимо многочлен $x^3 + 12x^2 + 44x + 48$ на двочлен $x + 2$.

Отримаємо: $x^3 + 12x^2 + 44x + 48 = 0$; $(x + 2)(x^2 + 10x + 24) = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = -2; \\ x^2 + 10x + 24 = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = -2; \\ x = -4; \\ x = -6. \end{array}\right.$

Тоді сума коренів рівняння дорівнює $-2 + (-4) + (-6) = -12$.

Відповідь. –12. ■

Приклад 15. Розв'язати рівняння $(a^2 - 3a - 4)x + 16 = a^2$. У відповідь записати значення параметра a, за якого рівняння має безліч коренів.

■ Запишемо дане рівняння у вигляді $(a - 4)(a + 1)x = a^2 - 16$; $(a - 4)(a + 1)x = (a - 4)(a + 4)$.

Якщо $a = -1$, то $0x = -15$; $x \in \varnothing$;

якщо $a = 4$, то $0x = 0$; $x \in R$;

якщо $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 4) \cup (4; +\infty)$, то $x = \dfrac{(a-4)(a+4)}{(a-4)(a+1)} = \dfrac{a+4}{a+1}$.

Відповідь. 4. ■

Приклад 16. За якого значення параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + (2 - a)x - a - 3 = 0$ найменша?

■ За умови $D = (2 - a)^2 + 4(a + 3) \geq 0$ за теоремою Вієта маємо: $\begin{cases} x_1 + x_2 = a - 2; \\ x_1 \cdot x_2 = -a - 3. \end{cases}$ Тоді: $x_1^2 + x_2^2 =$

$= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = (a-2)^2 + 2(a+3) = a^2 - 2a + 10 = (a-1)^2 + 9$. Сума $x_1^2 + x_2^2$ набуває найменшого значення, якщо $a = 1$. Якщо $a = 1$, то корені існують, оскільки $D = 1^2 + 4 \cdot (1 + 3) > 0$.

Відповідь. 1. ■

Завдання 8.1–8.24 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

8.1. Розв'язати рівняння $ax + b = c$, де $a \neq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \dfrac{a}{b-c}$	$x = \dfrac{a}{c-b}$	$x = \dfrac{b-c}{a}$	$x = \dfrac{c-b}{a}$	$x = \dfrac{c+b}{a}$

8.2. Розв'язати рівняння $\dfrac{1}{7}x - 2 = 0$ і $-0{,}2x = 4$ та записати добуток їх коренів.

А	Б	В	Г	Д
–70	$-\dfrac{1}{70}$	–28	280	–280

8.3. Розв'язати рівняння $|x - 1| = 3$ та знайти суму його коренів.

А	Б	В	Г	Д
0	4	2	–2	–4

8.4. Знайти дискримінант рівняння $3x^2 - 2x - 5 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
64	–64	8	–31	49

8.5. Знайти суму коренів рівняння $2x^2 - 5x - 7 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
5	–2,5	2,5	–7	–3,5

8.6. Скласти зведене квадратне рівняння з коренями $\sqrt{2}$ і $\sqrt{8}$.

А	Б	В	Г	Д
$x^2 - 3\sqrt{2}x + 16 = 0$	$x^2 - 4x + 3\sqrt{2} = 0$	$x^2 + 3\sqrt{2}x + 4 = 0$	$x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$	Скласти неможливо

8.7. Знайти суму цілих чисел, що належать відрізку, кінцями якого є корені квадратного рівняння $10x^2 + 7x - 12 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
–2	–1	0	1	–5

8.8. Скільки коренів має рівняння $|x^2 - 3x + 2| = 2$?

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	чотири	жодного

8.9. У першій пачці зошитів було удвічі більше, ніж у другій. Коли з другої пачки переклали до першої 10 зошитів, то в другій стало в 4 рази менше зошитів, ніж у першій. Скільки зошитів було у другій пачці?

Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі, якщо кількість зошитів у другій пачці позначено через x?

А	Б	В	Г	Д
$2x = 4(x - 10)$	$4(2x + 10) = x - 10$	$2x + 10 = 4x - 10$	$2x + 10 = 4(x - 10)$	$x + 2 + 10 = 4(x - 10)$

8.10. Одну й ту ж відстань один автомобіль проїхав за 3 год, а інший — за 2 год. Знайти швидкість руху автомобіля, який їхав повільніше, якщо його швидкість на 24 км/год менша від швидкості іншого автомобіля.

Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі, якщо шукану швидкість позначено через x км/год?

А	Б	В	Г	Д
$3(x - 24) = 2x$	$3(x + 24) = 2x$	$3x = 2(x + 24)$	$\frac{x}{3} = \frac{x + 24}{2}$	$3x = 2x + 24$

8.11. У першості з волейболу було зіграно 21 матч, при цьому кожна команда зіграла з іншою по одному разу. Скільки команд брало участь у першості?

Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі, якщо кількість команд позначено через x?

А	Б	В	Г	Д
$x(x + 1) = 2$	$\frac{x(x-1)}{2} = 21$	$\frac{x(x+1)}{2} = 21$	$x + x - 1 = 21$	$x(x - 1) = 21$

8.12. За якої умови рівняння $ax + b = cx + d$ не має коренів?

А	Б	В	Г	Д
$a = 0, c \neq 0$	$a \neq c, d \neq b$	$a \neq c, d = b$	$a = c, d \neq b$	$a = c, d = b$

8.13. Коренем рівняння $kx = 3$ є число 0,2. Знайти корінь рівняння $kx = -1$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{15}$	15	$-\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$

8.14. Знайти значення параметра a, за якого рівняння $(a^2 - 1)x = a^2 + 5a - 6$ має безліч коренів.

А	Б	В	Г	Д
1	± 1	-6; 1	-6; ± 1	0

8.15. За якого значення a рівняння $a^2x - 2a^2 = 49x + 14a$ має єдиний корінь?

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -7)$	$(7; +\infty)$	$(-\infty; -7) \cup (7; +\infty)$	$(-7; 7)$	$(-\infty; -7) \cup$ $\cup (-7; 7) \cup (7; +\infty)$

8.16. За якого значення t значення виразу $-0{,}3t + 18$ на 5 більше від значення виразу $0{,}1t + 1$?

А	Б	В	Г	Д
–16,25	16,25	30	55	–30

8.17. Знайти суму коренів рівняння $|4x - 8| + |2 - x| = 4$.

А	Б	В	Г	Д
2,8	1,2	1,6	4	3

8.18. Знайти корінь рівняння $|x - 1| + |x + 3| = 6{,}2$, який належить проміжку $(-\infty; -3)$.

А	Б	В	Г	Д
–4,1	–2,1	–4	–5	–6

8.19. Вказати всі значення a, за яких рівняння $|x - 5| - 1 = a$ має два корені.

А	Б	В	Г	Д
$a > 5$	$a < 4$	$a > 1$	$a \geq -1$	$a > -1$

8.20. Знайти всі значення a, за яких один з коренів рівняння $x^2 + 2ax + a^2 = 0$ дорівнює –2.

А	Б	В	Г	Д
$a = \pm 2$	$a = 2$	$a = 4$	$a = \pm 4$	$a = -2$

8.21. За яких значень m рівняння $4x^2 + 2x - m = 0$ має тільки один корінь?

А	Б	В	Г	Д
0,5	–0,5	0,25	–0,25	$\pm 0{,}25$

8.22. Знайти всі значення c, за яких рівняння $3x^2 - 2x + c = 0$ має хоча б один спільний корінь з рівнянням $x^2 + x - 2 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$c = -5$, $c = -1{,}6$	$c = 8$, $c = 1$	$c = -16$, $c = -1$	$c = 8$, $c = -1$	$c = 5$, $c = 1{,}6$

8.23. x_1 та x_2 — корені рівняння $x^2 - 3x - 5 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайти $x_1^2 + x_2^2$.

А	Б	В	Г	Д
–1	19	4	–4	–19

8.24. Скільки коренів має рівняння $x^2 - 7|x| + 10 = 0$?

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	чотири	жодного

Завдання 8.25–8.34 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

8.25. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1 $ax + b = c,\ a \neq 0$
2 $ax - b = c,\ a \neq 0$
3 $ax - b + c = 0,\ a \neq 0$
4 $ax + b + c = 0,\ a \neq 0$

А $\frac{a}{c+b}$
Б $\frac{c+b}{a}$
В $\frac{-c-b}{a}$
Г $\frac{b-c}{a}$
Д $\frac{c-b}{a}$

8.26. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та кількістю їх розв'язків (А–Д).

1 $5x - 0,(3) = 5x - \frac{1}{3}$
2 $5x - 2 = 5x + 2$
3 $|5x - 2| = 2$
4 $5x - 2 = 2$

А Жодного
Б Один
В Два
Г Три
Д Безліч

8.27. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1 $7x + 2 = 5x + 6$
2 $7x - 2 = 6 - 5x$
3 $7x - 2 = -6 - 5x$
4 $7x + 6 = -6 - 5x$

А $-\frac{1}{3}$
Б -1
В 0
Г $\frac{2}{3}$
Д 2

8.28. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1 $x^2 - 4x = 0$
2 $2x^2 - \sqrt{3}x - 1 = 0$
3 $-x^2 + 2x + 1,5 = 0$
4 $x^2 - \sqrt{5}x - 2 = 0$

А $\frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$
Б $\frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{11}}{4}$
В 0; 4
Г $\frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{13}}{2}$
Д $\frac{2+\sqrt{10}}{2};\ \frac{3+\sqrt{11}}{4}$

8.29. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх коренів (А–Д).

1 $x^2 - 4x + 3 = 0$	**А** $\varnothing$
2 $x^2 + 2x - 3 = 0$	**Б** $\{-1; -3\}$
3 $x^2 + 4x + 3 = 0$	**В** $\{-1; 3\}$
4 $x^2 - 2x - 3 = 0$	**Г** $\{-3; 1\}$
	Д $\{1; 3\}$

8.30. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1 $x^2 - 6x + 1 = 0$	**А** $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{5}$
2 $x^2 - 6x - 1 = 0$	**Б** $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{10}$
3 $x^2 - 6x + 2 = 0$	**В** $x_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$
4 $x^2 - 6x + 4 = 0$	**Г** $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{11}$
	Д $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{7}$

8.31. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д), якщо x_1 та x_2 — корені квадратного рівняння $x^2 - 5x - 4 = 0$.

1 $x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2$	**А** –20
2 $x_1^2 + x_2^2$	**Б** 1
3 $(x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2$	**В** 33
4 $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$	**Г** 65
	Д 17

8.32. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та кількістю їх коренів (А–Д).

1 $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$	**А** Жодного
2 $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$	**Б** Один
3 $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$	**В** Два
4 $x^5 + 5x^3 - 36x = 0$	**Г** Три
	Д Чотири

8.33. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх коренів (А–Д).

1 $\lvert x - 3\rvert = 4$	**А** $\varnothing$
2 $\lvert x - 4\rvert = -3$	**Б** $\{1; 7\}$
3 $\lvert x + 4\rvert = 3$	**В** $\{-7; 1\}$
4 $\lvert x + 3\rvert = 4$	**Г** $\{-7; -1\}$
	Д $\{-1; 7\}$

8.34. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх коренів (А–Д).

1 $\lvert 2x - 3\rvert = 2x - 3$	**А** $(-\infty; 1{,}5]$
2 $\lvert 2x - 3\rvert = -2x + 3$	**Б** $(-\infty; +\infty)$
3 $\lvert 2x - 3\rvert = -x^2 - 1$	**В** $[0; +\infty)$
4 $\lvert -1 - x^2\rvert = x^2 + 1$	**Г** $[1{,}5; +\infty)$
	Д $\varnothing$

Розв'яжіть завдання 8.35–8.49. Відповідь запишіть десятковим дробом.

8.35. Розв'язати рівняння $\frac{x-2}{5}+\frac{2x-5}{4}+\frac{4x-1}{20}=4-x$.

8.36. За якого значення параметра a сума коренів рівняння $x^2-(a^2-17a+83)x-21=0$ буде найменшою?

8.37. Розв'язати рівняння $x^6-3x^3+2=0$. У відповідь записати найменший корінь.

8.38. Розв'язати рівняння $x^3+9x^2+9x+1=0$. У відповідь записати суму коренів.

8.39. Розв'язати рівняння $(x^2+3x+1)(x^2+3x+3)+1=0$. У відповідь записати найбільший корінь.

8.40. Розв'язати рівняння $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55$. У відповідь записати добуток коренів.

8.41. Розв'язати рівняння $|3x^2-x|=8+x$. У відповідь записати найбільший корінь.

8.42. Розв'язати рівняння $|x+1|+|x-5|=20$. У відповідь записати модуль різниці коренів.

8.43. Батько старший від сина в 9 разів, а сума їхніх років дорівнює 30. Через скільки років батько стане старшим від сина удвічі?

8.44. У двоцифровому числі цифра десятків утричі більша, ніж цифра одиниць. Якщо від цього числа відняти число, записане цими ж цифрами, але у зворотному порядку, то отримаємо 36. Знайти це число.

8.45. Розв'язати рівняння $(x+2)(x+1)x(x-1)=24$. У відповідь записати додатний корінь.

8.46. Розв'язати рівняння $x^4+(x-4)^4=82$. У відповідь записати найбільший корінь.

8.47. Розв'язати рівняння $x^3-5x^2-2x+24=0$. У відповідь записати найменший корінь.

8.48. Розв'язати рівняння $||x+1|-|x-3||=|x|$. У відповідь записати суму коренів.

8.49. Розв'язати рівняння $|x^2-9|+|x^2-16|=7$. У відповідь записати кількість цілих коренів.

Тема 9. Цілі нерівності

Якщо два вирази зі змінною сполучити одним зі знаків — $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, то одержимо *нерівність зі змінною*. *Розв'язком нерівності* називають будь-яке значення змінної, за якого нерівність зі змінною перетворюється у правильну числову нерівність. Наприклад, число 3 є розв'язком нерівності $2x + 5 < 20$, бо $2 \cdot 3 + 5 < 20$; $11 < 20$ — правильна нерівність. *Розв'язати нерівність* зі змінною означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків не існує. Наприклад, будь-яке число, менше за 7,5 ($x \in (-\infty; 7{,}5)$), перетворює нерівність $2x + 5 < 20$ у правильну, а всяке інше — у неправильну, тому розв'язком цієї нерівності є проміжок $x \in (-\infty; 7{,}5)$.

Нерівності називають *рівносильними*, якщо вони мають одну й ту саму множину розв'язків. Наприклад, нерівності $x^2 \leq 1$ і $|x| \leq 1$ рівносильні, оскільки вони мають одну й ту саму множину розв'язків — відрізок $[-1; 1]$.

Множина розв'язків нерівності, як правило, нескінченна, тому зробити перевірку її розв'язків, як правило, неможливо. Отже, розв'язуючи нерівність, потрібно проводити рівносильні перетворення.

Основні властивості рівносильності нерівностей:

- якщо доданок перенести з одної частини нерівності в іншу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній. Наприклад, нерівність $x - 7 < 4$ рівносильна нерівності $x < 4 + 7$;
- якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на вираз, який набуває лише додатних значень (зокрема, на додатне число), то отримаємо нерівність, рівносильну даній. Наприклад, нерівність $3x < 15$ рівносильна нерівності $x < \frac{15}{3}$;
- якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на вираз, який набуває лише від'ємних значень (зокрема, на від'ємне число), і змінити знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній. Наприклад, нерівність $-8x \geq 4$ рівносильна нерівності $x \leq \frac{4}{-8}$.

Лінійні нерівності

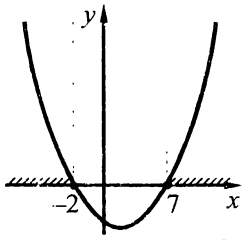
Нерівності виду $ax <> b$, де a, b — числа, x — змінна, $<>$ — один зі знаків $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, називають *лінійними*. Розглянемо нерівність $ax > b$. Якщо $a > 0$, то $ax > b \Leftrightarrow x > \frac{b}{a} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$; якщо $a < 0$, то $ax > b \Leftrightarrow x < \frac{b}{a} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$; якщо $a = 0$, то нерівність $0x > b$ правильна за будь-якого значення x, якщо b — від'ємне число ($b < 0$), і не має розв'язків, якщо b — невід'ємне число ($b \geq 0$). Наприклад, розв'язати нерівність $12 - 7x \geq 33$ $-7x \geq 33 - 12$; $-7x \geq 21$; $x \leq -3$. Відповідь. $(-\infty; -3]$.

Квадратні нерівності

Нерівності виду $ax^2 + bx + c \lozenge 0$, де a, b, c — числа, $a \neq 0$, x — змінна, $\lozenge$ — один зі знаків $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, називають ***квадратними***. Наприклад, $7x^2 + 3x - 11 \leq 0$, $x^2 - 8 > 0$ — квадратні нерівності. Розв'язання квадратних нерівностей зводять до відшукання проміжків, на яких відповідна квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ набуває додатних, від'ємних, невід'ємних, недодатних значень.

Наприклад, розв'язати нерівність $x^2 - 5x - 14 \geq 0$.

Графіком квадратичної функції $y = x^2 - 5x - 14$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору (бо $a = 1 > 0$). Знайдемо нулі цієї функції: $x^2 - 5x - 14 = 0$; $x_1 = -2$, $x_2 = 7$. Визначаємо, що функція набуває невід'ємних значень ($y \geq 0$), якщо $x \in (-\infty; -2] \cup [7; +\infty)$. Ці проміжки і є розв'язками даної нерівності.



Відповідь. $(-\infty; -2] \cup [7; +\infty)$.

Раціональні нерівності

Нерівності виду $P(x) \lozenge 0$, де $P(x)$ — многочлен, $\lozenge$ — один зі знаків $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, називають ***раціональними***. Раціональними також називають нерівності, які набувають вказаного вигляду після розкривання дужок та зведення подібних доданків. Наприклад, $5x^3 - 4x^2 - 2x - 1 \geq 0$; $x(x-7)^3(2x^2+9) > 0$ — раціональні нерівності. Лінійні та квадратичні нерівності є раціональними.

Метод інтервалів

Нехай потрібно розв'язати нерівність $(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) > 0$. Не порушуючи загальності, візьмемо, наприклад, $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) > 0$.

1. Позначимо на осі Ox точки 1, 2, 3, 4 — нулі множників лівої частини нерівності. Вони поділять вісь Ox на проміжки $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$, $(3; 4)$, $(4; +\infty)$.

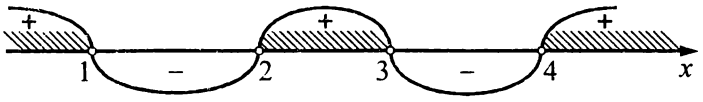
2. Для будь-якого x, що міститься праворуч від 4, будь-який двочлен лівої частини нерівності додатний, тому $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) > 0$ для будь-якого x, що належить проміжку $(4; +\infty)$.

3. Для будь-якого x, що лежить між точками 3 й 4, останній множник у добутку $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ від'ємний, а решта — додатні, тому $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) < 0$ для будь-якого x, що належить проміжку $(3; 4)$.

4. Для будь-якого x, що лежить між точками 2 і 3, останніх два множники в добутку $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ від'ємні, а решта додатні, тому $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) > 0$ для будь-якого x, що належить проміжку $(2; 3)$.

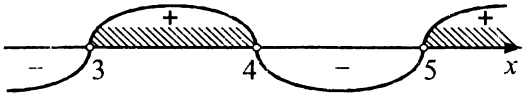
5. Аналогічно одержимо, що $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) > 0$ для x із проміжку $(-\infty; 1)$.

Отже,



Відповідь. $(-\infty; 1) \cup (2; 3) \cup (4; +\infty)$.

Наприклад, розв'язати нерівність $(x - 3)(x - 4)(x - 5) > 0$. Встановимо нулі множників: $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$. Розташуємо знайдені числа на числовій осі.



Отже, $x \in (3; 4) \cup (5; +\infty)$. Відповідь. $x \in (3; 4) \cup (5; +\infty)$.

Розглянемо розв'язання нерівностей виду $P(x) <> 0$, де $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $n \geq 1$, $n \in N$, і не всі числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — різні. У цьому випадку добуток однакових двочленів записують у вигляді степеня цього двочлена. Для розв'язання таких нерівностей використовують загальний метод інтервалів.

Наприклад, розв'язати нерівність $(x + 8)(x - 1)^2(x - 5) < 0$. Ліва частина цієї нерівності є добутком, який містить множник $(x - 1)^2$. Цей множник за будь-яких значень x, крім 1, є додатним числом. Тому для всіх $x \neq 1$ добуток має той же знак, що й добуток $(x + 8)(x - 5)$. Отже, дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases} (x+8)(x-5) < 0; \\ x \neq 1. \end{cases}$ Множиною розв'язків нерівності $(x + 8)(x - 5) < 0$ є проміжок $(-8; 5)$. Щоб знайти всі розв'язки нерівності $(x + 8)(x - 1)^2(x - 5) < 0$, потрібно із проміжку $(-8; 5)$ виключити число 1. У результаті одержимо $x \in (-8; 1) \cup (1; 5)$. Узагалі під час переходу через нуль множника парної кратності чергування знаків не відбувається.

Наприклад, розв'язати нерівність $(x - 2)^3(x + 1)(x - 4) > 0$. Позначимо на координатній прямій нулі множників: -1, 2 і 4. Рухаючись справа наліво при переході через нуль множника $(x - 2)^3$ — значення 2, добуток $(x - 2)^3(x + 1)(x - 4)$ змінює знак так само, як і добуток $(x - 2)(x + 1)(x - 4)$, оскільки мно-

жник $(x-2)^3$ змінює знак (непарний степінь числа має той самий знак, що й перший степінь цього ж числа). У результаті одержимо відповідь $x\in(-1;\ 2)\cup(4;\ +\infty)$.

Загальний метод інтервалів для розв'язання нерівностей виду $P(x) <> 0$, де $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $n \geq 1$, $n\in N$, якщо не всі $x_1, x_2, \ldots, x_n$ різні.

1. Привести раціональну нерівність до виду $P(x) <> 0$, де $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $n \geq 1$, $n\in N$, якщо не всі $x_1, x_2, \ldots, x_n$ різні, то добуток однакових двочленів записують у вигляді степеня цього двочлена $P(x) = (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_n)^{k_n}$, $k_m \geq 1$, $k_m\in N$.

2. Знайти нулі множників, що розташовані в лівій частині нерівності, і розташувати їх на осі Ox у відповідному порядку.

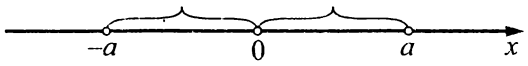
3. Над проміжком праворуч від найбільшого нуля многочлена $P(x)$ поставити знак «+». Потім, рухаючись справа наліво, при переході через черговий нуль змінювати знак на протилежний, якщо цьому нулеві відповідає двочлен у непарному степені, і зберігати знак, якщо цьому нулеві відповідає двочлен у парному степені.

Наприклад, розв'язати нерівність $(x+7)^4(x+4)^3(x-2)^2(x-3) < 0$. Знайдемо нулі множників: $x=-7$, $x=-4$, $x=2$, $x=3$.

Отже, $x\in(-4;\ 2)\cup(2;\ 3)$.

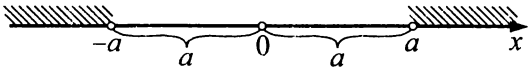
Розв'язування нерівностей з модулем

Розглянемо нерівність $|x| < a$, де $a > 0$. Скористаємося геометричною інтерпретацією модуля числа.



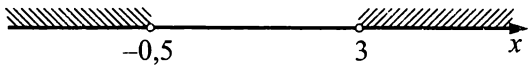
Нерівність виду $|x| < a$ задовольняють координати тих і тільки тих точок координатної прямої, які віддалені від початку відліку на відстань, меншу ніж a, тобто $-a < x < a$, $x\in(-a;\ a)$. Якщо ж $a \leq 0$, то дана нерівність розв'язків не має. Наприклад, розв'язати нерівність $|5x-1| < 9$. Задана нерівність рівносильна системі $\begin{cases}5x-1<9;\\5x-1>-9,\end{cases}$ звідки $\begin{cases}5x<10;\\5x>-8;\end{cases}$ $\begin{cases}x<2;\\x>-1{,}6;\end{cases}$ $x\in(-1{,}6;\ 2)$.

Нерівність виду $|x| > a$, де $a > 0$, задовольняють координати тих і тільки тих точок координатної прямої, які віддалені від початку відліку на відстань, більшу за a, тобто нерівність виду $|x| > a$ рівносильна сукупності нерівностей $\left[\begin{array}{l}x>a;\\x<-a.\end{array}\right.$



Якщо $a = 0$, то множиною розв'язків нерівності $|x| > a$ є множина $x\in(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$.

Якщо $a < 0$, то множиною розв'язків нерівності $|x| < a$ є множина $x\in(-\infty;\ +\infty)$, оскільки модуль як невід'ємна величина завжди більша за від'ємне число. Наприклад, розв'язати нерівність $|4x-5| > 7$. Задана нерівність рівносильна сукупності нерівностей $\left[\begin{array}{l}4x-5>7;\\4x-5<-7,\end{array}\right.$ звідки $\left[\begin{array}{l}4x>12;\\4x<-2;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x>3;\\x<-0{,}5;\end{array}\right.$



$x\in(-\infty;\ -0{,}5)\cup(3;\ +\infty)$.

Розв'язуючи нерівність виду $|f(x)| <> |g(x)|$, застосовують піднесення обох частин нерівності до квадрата.

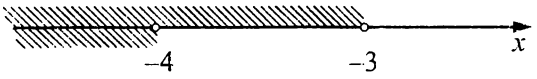
Наприклад, розв'язати нерівність $|2x - 1| \le |3x + 1|$. При піднесенні до квадрата обох частин нерівності одержимо: $(2x - 1)^2 \le (3x + 1)^2$; $4x^2 - 4x + 1 \le 9x^2 + 6x + 1$; $5x^2 + 10x \ge 0$; $x^2 + 2x \ge 0$; $x(x + 2) \ge 0$.

$x \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$.

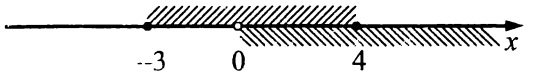
При розв'язуванні нерівностей, які містять кілька виразів під знаком модуля, можна застосувати метод інтервалів. Наприклад, розв'язати нерівність $|2x + 6| + |x - 4| > 10$. Зазначимо на координатній прямій точки –3 і 4. Розглянемо нерівність на кожному з утворених проміжків.

1) $x < -3$; $-2x - 6 - x + 4 > 10$; $-3x > 12$; $x < -4$.



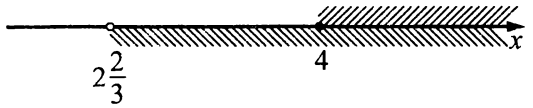
Отже, $x \in (-\infty; -4)$;

2) $-3 \le x \le 4$; $2x + 6 - x + 4 > 10$; $x > 0$.



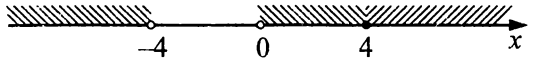
Отже, $x \in (0; 4]$;

3) $x > 4$. $2x + 6 + x - 4 > 10$; $3x > 8$; $x > 2\frac{2}{3}$.



Отже, $x \in (4; +\infty)$.

Об'єднаємо одержані розв'язки:



Одержимо відповідь: $x \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $4(x - 2) - 3(x + 1) \le 2x - 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-9; +\infty)$	$(-\infty; 9]$	$(-\infty; -9]$	$[-9; +\infty)$	$\left(-\infty; -4\frac{1}{3}\right]$

■ $4x - 8 - 3x - 3 \le 2x - 2$; $4x - 3x - 2x \le 8 + 3 - 2$; $-x \le 9$; $x \ge -9$; $x \in [-9; +\infty)$.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 2. Знайти суму найбільшого та найменшого натуральних розв'язків нерівності $2 \le \frac{x-1}{2} \le 3$.

А	Б	В	Г	Д
12	10	11	9	8

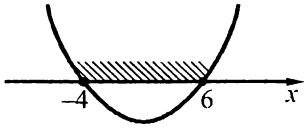
■ $2 \le \frac{x-1}{2} \le 3 \mid \cdot 2$; $4 \le x - 1 \le 6$; $4 + 1 \le x \le 6 + 1$; $5 \le x \le 7$; $x \in [5; 7]$. Найменший розв'язок — число 5, найбільший — 7, а їх сума — $5 + 7 = 12$.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 3. Розв'язати нерівність $(x-1)(x-3) \le 27-2x$.

А	Б	В	Г	Д
$[-4; 6]$	$[-4; 5]$	$(-\infty; 4]$	$(-\infty; -4]\cup[6; +\infty)$	$(-4; 6)$

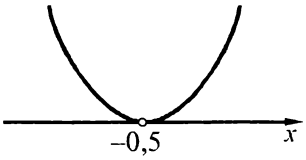
■ $(x-1)(x-3) \le 27-2x$; $x^2-3x-x+3 \le 27-2x$; $x^2-2x-24 \le 0$; $x_1=6$, $x_2=-4$. Одержимо: $x\in[-4; 6]$.



Відповідь. **А.** ■

Приклад 4. Розв'язати нерівність $4x^2+4x+1>0$.

■ $4x^2+4x+1>0$; $(2x+1)^2>0$.

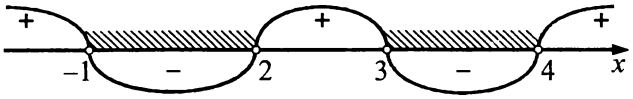


Розв'язком нерівності є всі дійсні числа, крім $x=-0{,}5$.

Відповідь. $(-\infty; -0{,}5)\cup(-0{,}5; +\infty)$. ■

Приклад 5. Розв'язати нерівність $(x^2-6x+8)(3-x)(x+1)>0$. У відповідь записати суму цілих розв'язків нерівності.

■ $(x^2-6x+8)(3-x)(x+1)>0$; $(x-2)(x-4)(x-3)(x+1)<0$.



Отже, $x\in(-1; 2)\cup(3; 4)$. Цілими розв'язками нерівності є $x=0$ та $x=1$, а їх сума дорівнює $0+1=1$.

Відповідь. 1. ■

Приклад 6. Розв'язати нерівність $(x^3-1)(x^2+2x)(6-x)(49-x^2)\ge 0$. У відповідь записати найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності.

■ $(x^3-1)(x^2+2x)(6-x)(49-x^2)\ge 0$; $x(x-1)(x^2+x+1)(x+2)(x-6)(x-7)(x+7)\ge 0$. З огляду на те, що $x^2+x+1>0$, якщо $x\in R$, поділимо обидві частини нерівності на додатне число x^2+x+1 й розв'яжемо нерівність $x(x-1)(x+2)(x-6)(x-7)(x+7)\ge 0$.

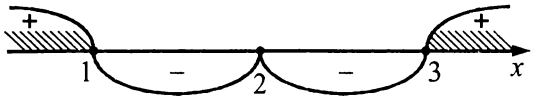
Отже, $x\in(-\infty; -7]\cup[-2; 0]\cup[1; 6]\cup[7; +\infty)$. Найбільший цілий від'ємний розв'язок дорівнює -1.

Відповідь. -1. ■

Приклад 7. Розв'язати нерівність $(x+1)^7(3-x)^5(x-2)^2\le 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1]\cup[2; 3]$	$(-\infty; -1]\cup[3; +\infty)$	$(-\infty; -1]\cup\{2\}\cup$ $\cup[3; +\infty)$	$[1; 2]\cup[3; +\infty)$	$(-\infty; 1]\cup\{2\}\cup$ $\cup[3; +\infty]$

■ $(x+1)^7(3-x)^5(x-2)^2\le 0$; $(x+1)^7(x-3)^5(x-2)^2\ge 0$.



Отже, $x \in (-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$. ■

Приклад 8. Знайти найменший розв'язок нерівності $(x+2)^2(x-1) \geq 2(x+2)^2$ на проміжку $(-5; 5)$.

А	Б	В	Г	Д
4	5	3	–2	2

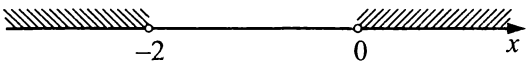
■ $(x+2)^2(x-1) \geq 2(x+2)^2$; $(x+2)^2(x-1)-2(x+2)^2 \geq 0$; $(x+2)^2(x-1-2) \geq 0$; $(x+2)^2(x-3) \geq 0$; $x - 3 \geq 0$ або $(x + 2)^2 = 0$; $x \geq 3$ або $x = -2$. Найменшим розв'язком нерівності на проміжку $(-5; 5)$ є $x = -2$

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 9. Розв'язати нерівність $|x + 1| > 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$	$(0; 2)$	$(-\infty; -2)$

■ $|x + 1| > 1$; $\left[\begin{array}{l} x+1>1; \\ x+1<-1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x>0; \\ x<-2. \end{array}\right.$



Отже, $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 10. Розв'язати нерівність $|2 - x| < 3$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$	$(5; +\infty)$	$(-\infty; -1)$	$(-1; 5)$	$(-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$

■ $|2 - x| < 3$; $|x - 2| < 3$; $\begin{cases} x-2>-3; \\ x-2<3; \end{cases}$ $\begin{cases} x>-1; \\ x<5. \end{cases}$

Отже, $x \in (-1; 5)$.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 11. Розв'язати нерівність $|x - 1| + |x - 2| \leq 3$.

А	Б	В	Г	Д
$[0; 3]$	$[0; 3)$	$(0; 3]$	$(0; 3)$	$\varnothing$

■ $|x - 1| + |x - 2| \leq 3$. Нулі підмодульних виразів $x = 1$ та $x = 2$.

1) $x \in (-\infty; 1)$. $-x + 1 + (-x + 2) \leq 3$; $-2x + 3 \leq 3$; $-2x \leq 0$; $x \geq 0$.

Отже, $x \in [0; 1)$;

2) $x \in [1; 2]$. $x - 1 + (-x + 2) \leq 3$; $0x + 1 \leq 3$; $0x \leq 2$; x — будь-яке число.

Отже, $x \in [1; 2]$;

3) $x\in(2;+\infty)$. $x-1+x-2\le 3$; $2x-3\le 3$; $x\le 3$.

Отже, $x\in(2;3]$.

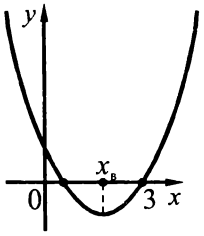
Об'єднавши всі розв'язки, одержимо: $x\in[0;1)\cup[1;2]\cup(2;3]=[0;3]$.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 12. За якого найменшого цілого значення параметра a нерівність $(a-1)x^2-2x-a>0$ справедлива для довільного $x>3$?

■ Розглянемо випадок, коли $a=1$. Тоді одержимо $-2x-1>0$ або $x<-0{,}5$. У цьому випадку умова задачі не виконується. Нехай $a\neq 1$. Дискримінант тричлена $f(x)=(a-1)x^2-2x-a$ дорівнює: $D=4+4(a-1)a=4(a^2-a+1)>0$ за довільного значення a.

Для виконання умови $f(x)>0$ для всіх значень $x>3$ необхідно, щоб більший корінь тричлена x_2 задовольняв умову $x_2\le 3$ і щоб перший коефіцієнт був додатним.



Тоді: $\begin{cases} a-1>0; \\ f(3)\ge 0; \\ x_в\le 3; \end{cases}$ $\begin{cases} a>1; \\ 9(a-1)-6-a\ge 0; \\ \dfrac{2}{2(a-1)}\le 3; \end{cases}$ $\begin{cases} a>1; \\ 8a\ge 15; \\ \dfrac{1}{a-1}-3\le 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a>1; \\ a\ge 1\dfrac{7}{8}; \\ \dfrac{1-3a+3}{a-1}\le 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a>1; \\ a\ge 1\dfrac{7}{8}; \\ \dfrac{3a-4}{a-1}\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a>1; \\ a\ge 1\dfrac{7}{8}; \\ a\in(-\infty;1)\cup\left[1\dfrac{1}{3};+\infty\right). \end{cases}$

Одержимо: $a\ge 1\dfrac{7}{8}$. Тоді найменше ціле значення $a=2$.

Відповідь. 2. ■

Завдання 9.1–9.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

9.1. Розв'язати нерівність $-4x<20$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;5)$	$(-\infty;-5)$	$(5;+\infty)$	$(-5;+\infty)$	$(-4;20)$

9.2. Розв'язати нерівність $\dfrac{x-1}{2}<2$.

А	Б	В	Г	Д
$(5;+\infty)$	$(-\infty;5)$	$(-\infty;3)$	$(3;+\infty)$	$\left(-\infty;2\dfrac{1}{2}\right)$

9.3. Розв'язати нерівність $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3}\le 4$.

А	Б	В	Г	Д
$[4;+\infty)$	$(-\infty;4]$	$[24;+\infty)$	$(-\infty;24)$	$(-\infty;24]$

9.4. Розв'язати нерівність $2 < x - 7 \le 5$.

А	Б	В	Г	Д
(2; 12]	(–5; –2]	(9; 12]	(–5; 5]	(–12; 9]

9.5. Розв'язати нерівність $-3 \le -x + 4 < 2$.

А	Б	В	Г	Д
(2; 7]	[2; 7)	[1; 6)	[–3; –2)	(1; 6]

9.6. Розв'язати нерівність $(x + 7)(x - 3) < 0$.

А	Б	В	Г	Д
(–3; 7)	$(-\infty; 3) \cup (7; +\infty)$	$(-\infty; -7) \cup (3; +\infty)$	(3; 7)	(–7; 3)

9.7. Розв'язати нерівність $x^2 + 7x - 30 \ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
[–10; 3]	$(-\infty; -10] \cup [3; +\infty)$	$(-\infty; -3] \cup [10; +\infty)$	[–3; 10]	$(-\infty; 3] \cup [10; +\infty)$

9.8. Розв'язати нерівність $-x^2 + 3x + 10 > 0$.

А	Б	В	Г	Д
(2; 5)	$(-\infty; -5) \cup (2; +\infty)$	(–5; 2)	$(-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$	(–2; 5)

9.9. Розв'язати нерівність $x^2 > 10$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(\sqrt{10}; +\infty\right)$	$\left(-\sqrt{10}; \sqrt{10}\right)$	$\left(-\sqrt{10}; +\infty\right)$	$(-\infty; -100) \cup$ $\cup (100; +\infty)$	$\left(-\infty; -\sqrt{10}\right) \cup$ $\cup \left(\sqrt{10}; +\infty\right)$

9.10. Розв'язати нерівність $(x - 1)^2 < 16$.

А	Б	В	Г	Д
(–5; 3)	(–4; 4)	(–3; 5)	$(-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$	$(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$

9.11. Розв'язати нерівність $(x - 3)(x + 5)(4 - x) \ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -5] \cup [3; 4]$	$[-5; 3] \cup [4; +\infty)$	$[-4; -3] \cup [5; +\infty)$	$(-\infty; -4] \cup [-3; 5]$	$(-\infty; 4]$

9.12. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $(2 - x)^3(x + 2)^2(x - 3) \ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
2	[2; 3]	0	3	Безліч

9.13. Знайти множину розв'язків нерівності $(x - 2)^2 (x + 3) \le 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$	$(-\infty; -3]$	[–3; 2]	$(-\infty; -3] \cup \{2\}$	$(-\infty; -2] \cup \{3\}$

9.14. Розв'язати нерівність $x(5 - x)^3 > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(5; +\infty)$	$(-\infty; -5) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (5; +\infty)$	(–5; 0)	(0; 5)

9.15. Скільки цілих розв'язків має нерівність $-x - 5 < -3x < x - 1$?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	більше, ніж три

9.16. Розв'язати нерівність $(x^2 - 3x - 10)(x - 1) > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2)\cup(1; 5)$	$(-2; 1)\cup(5; +\infty)$	$(-5; -1)\cup(2; +\infty)$	$(-\infty; -5)\cup(-1; 2)$	$(1; +\infty)$

9.17. Знайти множину розв'язків нерівності $|x - 5| < 8$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -13)\cup(3; +\infty)$	$(-\infty; 13)$	$(-13; 3)$	$(-3; 13)$	$(-\infty; -3)\cup(13; +\infty)$

9.18. Розв'язати нерівність $|x + 4| > 3$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -7)\cup(-1; +\infty)$	$(-7; -1)$	$(-1; +\infty)$	$(-\infty; 1)\cup(7; +\infty)$	$(1; 7)$

9.19. Розв'язати нерівність $|3x| < x + 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0,5)$	$(0,5; +\infty)$	$(-0,25; 0,5)$	$(-0,5; 0)\cup(0; 0,25)$	$(0,25; +\infty)$

9.20. За яких значень a розв'язком нерівності $(a - 3)x \le 7$ є проміжок $\left[\frac{7}{a-3}; +\infty\right)$?

А	Б	В	Г	Д
$a > 3$	$a \ge 3$	$a \ne 3$	$a < 3$	$a \le 3$

9.21. Знайти значення параметра a, за якого розв'язками нерівності $3x - 1 < ax + 5$ є усі дійсні числа.

А	Б	В	Г	Д
3	1	5	0	6

9.22. Знайти множину розв'язків нерівності $(x - 4)(a - x) \ge 0$, якщо $a < 4$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; a]\cup[4; +\infty)$	$[a; 4]$	$[-4; a]$	$(-\infty; -4]\cup[a; +\infty)$	$[4; -a]$

Завдання 9.23–9.32 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

9.23. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $5x > 30$
2 $-5x > 30$
3 $5x < 30$
4 $-5x < 30$

А $(-\infty; -6)$
Б $(-\infty; 6)$
В $(-6; +\infty)$
Г $(-6; 6)$
Д $(6; +\infty)$

9.24. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\frac{x-1}{3}<1$

2 $\frac{x+1}{3}<1$

3 $\frac{-x+1}{3}<1$

4 $\frac{-x-1}{3}<1$

А $(-\infty; -4)$

Б $(-\infty; 2)$

В $(-\infty; 4)$

Г $(-4; +\infty)$

Д $(-2; +\infty)$

9.25. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\frac{x}{3}-\frac{x}{4}<1$

2 $\frac{x}{4}-\frac{x}{3}<1$

3 $\frac{x}{3}-\frac{x}{4}<-1$

4 $\frac{x}{4}-\frac{x}{3}<-1$

А $(-\infty; -12)$

Б $(-\infty; 12)$

В $(-12; 12)$

Г $(-12; +\infty)$

Д $(12; +\infty)$

9.26. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $(x-8)(x-3)<0$

2 $(x-8)(x+3)>0$

3 $(x+8)(x-3)<0$

4 $(x+8)(x+3)>0$

А $(-\infty; -8)\cup(-3; +\infty)$

Б $(-\infty; -3)\cup(8; +\infty)$

В $(-\infty; 3)\cup(8; +\infty)$

Г $(-8; 3)$

Д $(3; 8)$

9.27. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $(x-2)(x+3)<0$

2 $(2-x)(x+3)<0$

3 $(x+2)(x-3)<0$

4 $(x+2)(3-x)<0$

А $(-\infty; -3)\cup(2; +\infty)$

Б $(-\infty; -2)\cup(3; +\infty)$

В $(-3; -2)$

Г $(-3; 2)$

Д $(-2; 3)$

9.28. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $(x+3)^2x(x-1)\le 0$

2 $x^2(x+3)(x-1)\le 0$

3 $(x+3)x(x-1)^2\le 0$

4 $(x+3)^2x(x-1)^2\le 0$

А $(-\infty; 0]$

Б $(-\infty; 0]\cup\{1\}$

В $[-3; 1]$

Г $[-3; 0]\cup\{1\}$

Д $\{-3\}\cup[0; 1]$

9.29. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $x^2+x-6<0$

2 $x^2-x-6<0$

3 $-x^2+x+12<0$

4 $-x^2-6x-10<0$

А $\varnothing$

Б $(-\infty; +\infty)$

В $(-2; 3)$

Г $(-3; 2)$

Д $(-\infty; -3)\cup(4; +\infty)$

9.30. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $3 < x - 2 < 5$	**А** $(-7; -5)$
2 $3 < x + 2 < 5$	**Б** $(-3; -1)$
3 $3 < -x - 2 < 5$	**В** $(-1; 3)$
4 $3 < -x + 2 < 5$	**Г** $(1; 3)$
	Д $(5; 7)$

9.31. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\|x - 2\| < 5$	**А** $(-7; -3)$
2 $\|x + 2\| < 5$	**Б** $(-7; 7)$
3 $\|x - 5\| < 2$	**В** $(-7; 3)$
4 $\|x + 5\| < 2$	**Г** $(-3; 7)$
	Д $(3; 7)$

9.32. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\|x - 3\| > 4$	**А** $(-\infty; -7) \cup (1; +\infty)$
2 $\|x - 4\| > 3$	**Б** $(-\infty; -7) \cup (-1; +\infty)$
3 $\|x + 4\| > 3$	**В** $(-\infty; -7) \cup (-1; +\infty)$
4 $\|x + 3\| > 4$	**Г** $(-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$
	Д $(-\infty; 1) \cup (7; +\infty)$

Розв'яжіть завдання 9.33–9.45. Відповідь запишіть десятковим дробом.

9.33. Розв'язати нерівність $\frac{2-x}{4} + 1 < \frac{2x-1}{10} - \frac{2x-3}{6}$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок.

9.34. Розв'язати нерівність $7 < 1 - 3x < 16$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок.

9.35. Розв'язати нерівність $x + 1 < \frac{x}{2} < x + 2$. У відповідь записати суму цілих розв'язків.

9.36. Розв'язати нерівність $2 \le x^2 + x < 6$. У відповідь записати найменший додатний розв'язок.

9.37. Розв'язати нерівність $(x^2 + 2x - 15)(x^2 - 4x + 3)(x - 1) \le 0$. У відповідь записати кількість додатних цілих розв'язків.

9.38. Розв'язати нерівність $x^6 - 9x^3 + 8 < 0$. У відповідь записати кількість цілих розв'язків.

9.39. Розв'язати нерівність $(x - 2)^4 - 13(x - 2)^2 + 36 \le 0$. У відповідь записати суму цілих розв'язків.

9.40. Розв'язати нерівність $1 < |x - 2| < 5$. У відповідь записати добуток цілих розв'язків.

9.41. Розв'язати нерівність $x^2 - 3|x| + 2 \le 0$. У відповідь записати добуток цілих розв'язків.

9.42. Розв'язати нерівність $|3x - 8| < x - 2$. У відповідь записати середину проміжку, який є розв'язком нерівності.

9.43. Розв'язати нерівність $(x^2 - x - 1)(x^2 - x - 7) \le -5$. У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків.

9.44. Розв'язати нерівність $|x^2 - x + 1| \ge |x^2 - 3x + 4|$. У відповідь записати найменший розв'язок.

9.45. Розв'язати нерівність $|x - 1| + |x + 1| < 4$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок.

Тема 10. Раціональні рівняння

Раціональним називають рівняння виду $f(x) = g(x)$, де $f(x)$ та $g(x)$ — раціональні вирази. Якщо хоча б один із цих виразів дробовий, то рівняння називають *дробовим*.

Наприклад, $\frac{x+1}{5x-7} = \frac{3}{4-x}$ — дробове раціональне рівняння.

Розв'язуючи дробове раціональне рівняння виду $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, потрібно розв'язати алгебраїчне рівняння $P(x) = 0$ і вилучити ті його корені, за яких $Q(x) = 0$ (якщо такі є).

Схема розв'язування дробових раціональних рівнянь

Щоб розв'язати дробове раціональне рівняння, можна:

1) звести рівняння до вигляду $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$;

2) розв'язати рівняння $P(x) = 0$;

3) перевірити корені рівняння $P(x) = 0$ на виконання умови $Q(x) \neq 0$.

Наприклад, розв'язати рівняння $\frac{3x}{x+2} = \frac{1}{x}$; $\frac{3x}{x+2} - \frac{1}{x} = 0$; $\frac{3x^2-(x+2)}{x(x+2)} = 0$; $\begin{cases} 3x^2-(x+2)=0; \\ x(x+2) \neq 0; \end{cases}$

$3x^2 - x - 2 = 0$; $x_1 = 1, x_2 = -\frac{2}{3}$. За значень змінної 1 і $-\frac{2}{3}$ вираз $x(x+2)$ не дорівнює нулю. Отже, $-\frac{2}{3}$ і 1 — корені рівняння.

Зауваження. Щоб розв'язати дробове раціональне рівняння, можна спочатку знайти його ОДЗ; помножити обидві частини рівняння на спільний знаменник; розв'язати одержане ціле рівняння й перевірити, чи всі знайдені розв'язки входять до ОДЗ (якщо знайдений розв'язок не входить до ОДЗ, то він не є коренем заданого рівняння).

Розв'язування рівнянь методом заміни

Розв'язати рівняння $7\left(x+\frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) = 9$. Нехай $x+\frac{1}{x} = t$, тоді $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = t^2$;

$x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = t^2$, звідки $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Отже, одержали рівняння $7t - 2(t^2-2) = 9$; $2t^2 - 7t + 5 = 0$;

$\left[\begin{array}{l} t_1 = 2{,}5; \\ t_2 = 1. \end{array}\right.$ Повернемося до заміни: $\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x} = 2{,}5; \\ x+\frac{1}{x} = 1; \end{array}\right.$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x^2-5x+2=0; \\ x^2-x+1=0; \end{array}\right. \\ x \neq 0. \end{cases}$ Перше рівняння має коренями числа $x_1 = 2$, $x_2 = 0{,}5$, а друге рівняння дійсних коренів не має.

Відповідь. 2; 0,5.

Рівняння виду $\frac{Ax}{ax^2+b_1x+c} + \frac{Bx}{ax^2+b_2x+c} = D$ та рівняння виду $\frac{ax^2+b_1x+c}{ax^2+b_2x+c} + \frac{ax^2+b_3x+c}{ax^2+b_4x+c} = A$

Загальний метод розв'язування рівнянь виду $\frac{Ax}{ax^2+b_1x+c} + \frac{Bx}{ax^2+b_2x+c} = D$ полягає у діленні чисельника та знаменника на $x \neq 0$ та використанні заміни $t = ax + \frac{c}{x}$ в отриманому рівнянні $\frac{Ax}{ax+b_1+\frac{c}{x}} + \frac{Bx}{ax+b_2+\frac{c}{x}} = D$. За допомогою такої заміни останнє рівняння зводиться до квадратного.

Наприклад, $\frac{2x}{x^2-4x+2}+\frac{3x}{x^2+x+2}=-\frac{5}{4}$. ОДЗ: $x\neq 2\pm\sqrt{2}$. Оскільки $x=0$ не є коренем даного рівняння, то, розділивши чисельник і знаменник кожного дробу у лівій частині рівняння на x, одержимо рівняння, рівносильне вихідному: $\frac{2}{x-4+\frac{2}{x}}+\frac{3}{x+1+\frac{2}{x}}=-\frac{5}{4}$. Виконаємо заміну: $x+\frac{2}{x}=t$. Тоді одержимо: $\frac{2}{t-4}+\frac{3}{t+1}=-\frac{5}{4}$; $\begin{cases}8(t+1)+12(t-4)=-5(t-4)(t+1);\\ t\neq 4;\\ t\neq -1;\end{cases}$ $\begin{cases}t^2+t-12=0;\\ t\neq 4;\\ t\neq -1;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t_1=-4;\\ t_2=3;\end{array}\right.\\ t\neq 4;\\ t\neq -1;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}t_1=-4;\\ t_2=3.\end{array}\right.$ Повертаємося до заміни: $x+\frac{2}{x}=-4$; $\left[\begin{array}{l}x^2+4x+2=0;\\ x\neq 0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x_1=-2-\sqrt{2};\\ x_2=-2+\sqrt{2}\end{array}\right.$ або $x+\frac{2}{x}=3$; $\left[\begin{array}{l}x^2-3x+2=0;\\ x\neq 0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x_3=1;\\ x_4=2.\end{array}\right.$

Відповідь. 1; 2; $-2\pm\sqrt{2}$.

Симетричні рівняння третього степеня

Рівняння виду $ax^3+bx^2+bx+a=0$, де $a\neq 0$, $b\in R$, називають *симетричним* рівнянням третього степеня.

1. Симетричне рівняння третього степеня має коренем число $x=-1$. Справді, $a\cdot(-1)^3+b\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+a=-a+b-b+a=0$; $0=0$.

2. Діленням многочлена ax^3+bx^2+bx+a на двочлен $x+1$ рівняння зводиться до квадратного. Наприклад, розв'язати рівняння $3x^3-7x^2-7x+3=0$. Оскільки $x=-1$ — корінь рівняння, то $3x^3-7x^2-7x+3=0\Leftrightarrow(x+1)(3x^2-10x+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1;\\ 3x^2-10x+3=0;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-1;\\ x_2=3;\\ x_3=\frac{1}{3}.\end{array}\right.$

Відповідь. -1; $\frac{1}{3}$; 3.

Симетричні рівняння четвертого степеня

Рівняння виду $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$, де $a\neq 0$, $b\in R$, $c\in R$, називають *симетричним* рівнянням четвертого степеня. Для розв'язування рівняння такого виду можна:

1. Поділити обидві частини рівняння на x^2 і згрупувати вирази так: $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$.

2. Уведенням заміни $x+\frac{1}{x}=t$, $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$, зведемо рівняння до квадратного.

Наприклад, розв'язати рівняння $2x^4+x^3-11x^2+x+2=0$. Очевидно, що $x=0$ не є коренем заданого рівняння. Поділимо обидві частини рівняння на $x^2\neq 0$: $2x^2+x-11+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=0$;

$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-11=0$; $\begin{cases}x+\frac{1}{x}=t;\\ 2t^2+t-15=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x+\frac{1}{x}=t;\\ \left[\begin{array}{l}t_1=2,5;\\ t_2=-3;\end{array}\right.\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}x+\frac{1}{x}=2,5;\\ x+\frac{1}{x}=-3;\end{array}\right.$ $\begin{cases}x\neq 0;\\ \left[\begin{array}{l}2x^2-5x+2=0;\\ x^2+3x+1=0;\end{array}\right.\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=2;\\ x_2=0,5;\\ x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}.\end{cases}$

Відповідь. $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$; 2; 0,5.

Дробові раціональні рівняння з параметрами

Дробові раціональні рівняння з параметрами розв'язують, як звичайні рівняння, але тільки доти, доки кожне перетворення можна виконувати однозначно. Якщо ж перетворення не можна виконувати однозначно, то розв'язання слід розбити на кілька випадків.

Наприклад, розв'язати рівняння $\frac{2x}{x+2}=2+\frac{a}{x}$. ОДЗ: $x\neq -2$; $x\neq 0$. Помножимо обидві частини заданого рівняння на вираз $x(x+2)$ й одержимо ціле рівняння, яке за умови $x(x+2)\neq 0$ рівносильне заданому: $2x^2=2x(x+2)+a(x+2)$; $2x^2=2x^2+4x+ax+2a$; $4x+ax+2a=0$; $(4+a)x=-2a$. Якщо $4+a=0$, тобто $a=-4$, то одержимо: $0x=8$ — рівняння коренів не має; якщо $a\neq -4$, то матимемо: $x=\frac{-2a}{4+a}$. З'ясуємо, за яких значень a знайдені корені не входять до ОДЗ заданого рівняння, тобто знайдемо такі значення a, за яких $x=-2$ або $x=0$. $\frac{-2a}{4+a}=-2$; $2a=2(4+a)$; $2a=8+2a$; $0a=8$; $a\in\varnothing$.

Отже, не існує такого значення a, щоб $x=-2$. Знайдемо значення a, за якого $x=0$: $\frac{-2a}{4+a}=0$; $a=0$.

Відповідь. Якщо $a=0$ або $a=-4$, то рівняння коренів не має; якщо $a\neq 0$ і $a\neq -4$, то $x=\frac{-2a}{4+a}$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{4x}{x^2-12x+15}$.

■ $\frac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\frac{4x}{x^2-12x+15}$. ОДЗ: $x\neq 6\pm\sqrt{21}$. $x=0$ не є коренем даного рівняння. Розділимо чисельник і знаменник кожного із дробів на $x\neq 0$ й одержимо: $\frac{x+\frac{15}{x}-10}{x+\frac{15}{x}-6}=\frac{4}{x+\frac{15}{x}-12}$. Виконаємо заміну $x+\frac{15}{x}=t$. Тоді $\frac{t-10}{t-6}=\frac{4}{t-12}$; $\begin{cases}t^2-26t+144=0;\\ t\neq 6;\\ t\neq 12;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t_1=18;\\ t_2=8;\end{array}\right.\\ t\neq 6;\\ t\neq 12;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}t_1=18;\\ t_2=8.\end{array}\right.$ Повернемося до заміни:

$x+\frac{15}{x}=18$; $\left[\begin{array}{l}x^2-18x+15=0;\\ x\neq 0;\end{array}\right.$ $x=9\pm\sqrt{66}$ або $x+\frac{15}{x}=8$; $\left[\begin{array}{l}x^2-8x+15=0;\\ x\neq 0;\end{array}\right.$ $x=5$; $x=3$.

Відповідь. $9\pm\sqrt{66}$; 5; 3.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$.

А	Б	В	Г	Д
3	4	5	6	2 і 3

■ $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$; $\frac{2}{(x-2)(x+2)}+\frac{x-4}{x(x+2)}=\frac{1}{x(x-2)}$;

$\frac{2}{(x-2)(x+2)}\overset{\setminus x}{+}\frac{x-4}{x(x+2)}\overset{\setminus x-2}{-}\frac{1}{x(x-2)}\overset{\setminus x+2}{=}0$; $\frac{2x+(x-2)(x-4)-(x+2)}{x(x-2)(x+2)}=0$; $\frac{2x+x^2-6x+8-x-2}{x(x-2)(x+2)}=0$;

$$\begin{cases} x^2-5x+6=0; \\ x\neq 0; \\ x\neq \pm 2; \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=2; \\ x_2=3; \end{array}\right. \\ x\neq 0; \\ x\neq \pm 2; \end{cases} \quad x=3.$$

Відповідь. **А.** ■

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=-2,5.$

А	Б	В	Г	Д
–2	–1	–2,5	0,5	1

■ $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=-2,5$; ОДЗ: $x\neq 0$. Нехай $\frac{x^2+1}{x}=t$, тоді $\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{t}$. Маємо: $t+\frac{1}{t}+\frac{5}{2}=0$;

$\begin{cases} 2t^2+5t+2=0; \\ t\neq 0; \end{cases}$ $t_1=-0,5$; $t_2=-2$. Повернемося до заміни: $\frac{x^2+1}{x}=-0,5$; $2x^2+2=-x$; $2x^2+x+2=0$;

$D<0$, рівняння не має коренів; $\frac{x^2+1}{x}=-2$; $x^2+1=-2x$; $x^2+2x+1=0$; $(x+1)^2=0$; $x=-1$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\frac{13x}{3x^2-5x+2}-\frac{12x}{3x^2+x+2}=5$. У відповідь записати найбільший корінь рівняння.

■ Перевіркою встановлюємо, що $x=0$ не є коренем рівняння. Поділимо чисельник і знаменник кожного дробу на $x\neq 0$, одержимо: $\frac{13}{3x-5+\frac{2}{x}}-\frac{12}{3x+1+\frac{2}{x}}=5$. Нехай $3x+\frac{2}{x}=t$, тоді останнє рівняння можна записати у вигляді: $\frac{13}{t-5}-\frac{12}{t+1}=5$; $\begin{cases} 13(t+1)-12(t-5)=5(t-5)(t+1); \\ t\neq 5; \\ t\neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 5t^2-21t-98=0; \\ t\neq 5; \\ t\neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t_1=-2,8; \\ t_2=7; \end{array}\right. \\ t\neq 5; \\ t\neq 1. \end{cases}$

Повертаючись до заміни, матимемо: $3x+\frac{2}{x}=-2,8$; $15x^2+14x+10=0$; $D<0$, рівняння коренів не має; $3x+\frac{2}{x}=7$; $3x^2-7x+2=0$; $x_1=\frac{1}{3}$; $x_2=2$. Найбільшим коренем рівняння є $x=2$.

Відповідь. 2. ■

Приклад 5. Розв'язати рівняння $2x^4+3x^3-4x^2-3x+2=0$. У відповідь записати суму його коренів.

■ Поділимо обидві частини рівняння на $x^2\neq 0$ й одержимо: $2x^2+3x-4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0$;

$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x-\frac{1}{x}\right)-4=0$. Нехай $x-\frac{1}{x}=t$, тоді $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=t^2+2$. Одержимо:

$2(t^2+2)+3t-4=0$; $2t^2+3t=0$; $t(2t+3)=0$; $\left[\begin{array}{l} t_1=0; \\ t_2=-1,5. \end{array}\right.$ Повернемося до заміни: 1) $x-\frac{1}{x}=0$; $x^2-1=0$;

$x^2 = 1$; $x = \pm 1$; 2) $x - \frac{1}{x} = -1{,}5$; $2x^2 + 3x - 2 = 0$; $x_1 = -2$; $x_2 = 0{,}5$. Отже, рівняння має 4 корені. Їхня сума дорівнює: $-1 + 1 - 2 + 0{,}5 = -1{,}5$.

Відповідь. $-1{,}5$. ■

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\frac{12x}{3x^2 - 10x + 1} - \frac{1}{x} = 3x - 6$. У відповідь записати число, обернене до добутку коренів рівняння.

■ $\frac{12x}{3x^2 - 10x + 1} - \frac{1}{x} = 3x - 6$; $\frac{12x}{3x^2 - 10x + 1} - \frac{1}{x} - 3x + 6 = 0$; $\frac{12x}{3x^2 - 10x + 1} - \frac{3x^2 - 6x + 1}{x} = 0$. Ураховавши, що $x \neq 0$, одержимо: $\frac{12}{3x + \frac{1}{x} - 10} - \frac{3x + \frac{1}{x} - 6}{1} = 0$. Нехай $3x + \frac{1}{x} = t$, тоді одержимо: $\frac{12}{t - 10} - \frac{t - 6}{1} = 0$, $\begin{cases} 12 - (t-6)(t-10) = 0; \\ t \neq 10; \end{cases}$ $\begin{cases} t^2 - 16t + 48 = 0; \\ t \neq 10; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} t_1 = 4; \\ t_2 = 12. \end{array}\right.$ Повернувшись до заміни, одержимо: $\left[\begin{array}{l} 3x + \frac{1}{x} = 4; \\ 3x + \frac{1}{x} = 12; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 3x^2 - 4x + 1 = 0; \\ 3x^2 - 12x + 1 = 0. \end{array}\right.$ Обидва рівняння мають корені. Тоді добуток коренів першого рівняння дорівнює $\frac{1}{3}$, другого — $\frac{1}{3}$, обох рівнянь — $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Число, обернене до числа $\frac{1}{9}$, — 9.

Відповідь. 9. ■

Приклад 7. Знайти всі значення a, за яких рівняння $\frac{(x + a)(x - 5a)}{x + 7} = 0$ має єдиний корінь. У відповідь записати найменший з них.

■ ОДЗ: $x \neq -7$. На ОДЗ дане рівняння рівносильне рівнянню $(x + a)(x - 5a) = 0$; $x + a = 0$ або $x - 5a = 0$; $x = -a$ або $x = 5a$. З'ясуємо, за яких значень a знайдені корені не входять до ОДЗ, тобто за яких значень a буде виконуватися рівність $x = -7$. Одержуємо: 1) $-a = -7$; $a = 7$; 2) $5a = -7$; $a = -1{,}4$. Якщо $a = 7$, то тоді $x = 5a = 35$ — єдиний корінь. Якщо $a = -1{,}4$, то тоді $x = -a = 1{,}4$ — єдиний корінь. Задане рівняння матиме єдиний корінь і тоді, коли $-a = 5a \neq 7$, тобто якщо $a = 0$. Отже, одержали: $a = 7$, $a = -1{,}4$, $a = 0$. Найменше значення a дорівнює $-1{,}4$.

Відповідь. $-1{,}4$. ■

Завдання 10.1–10.21 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

10.1. Розв'язати рівняння $\frac{x - 5}{x - 5} = 0$.

А	Б	В	Г	Д
R	5	∅	$(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$	$(5; +\infty)$

10.2. Розв'язати рівняння $\frac{x - 5}{x - 5} = 1$.

А	Б	В	Г	Д
5	R	∅	$(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$	$(5; +\infty)$

10.3. Розв'язати рівняння $\frac{x-x}{x-3}=0$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	R	$(-\infty;-3)\cup(-3;+\infty)$	$(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$	-3

10.4. Розв'язати рівняння $5x+\frac{1}{x^2-9}=\frac{1}{x^2-9}+10$.

А	Б	В	Г	Д
$\{2;3\}$	$\varnothing$	$\{-3;2;3\}$	$\{-3;3\}$	$\{2\}$

10.5. Розв'язати рівняння $6x+\frac{1}{x^2-9}=\frac{1}{x^2-9}+18$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	$\{0\}$	$\{-3\}$	$\{-3;3\}$	$\{3\}$

10.6. Розв'язати рівняння $\frac{x^3-4x}{x^2-4}=0$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	$\{2\}$	$\{-2;2\}$	$\{-2;0;2\}$	$\{0\}$

10.7. Розв'язати рівняння $\frac{(x^2-9)(x^2-16)}{(x-3)(x+4)}=0$.

А	Б	В	Г	Д
$\{-4;-3;3;4\}$	$\{3;4\}$	$\{-3;-4\}$	$\{-3;4\}$	$\{-4;3\}$

10.8. Знайти суму коренів рівняння $\frac{(x-3)(x-5)}{x-2}=0$.

А	Б	В	Г	Д
5	-8	-1	8	10

10.9. Розв'язати рівняння $\frac{3x+4}{x+1}=2$.

А	Б	В	Г	Д
$\{-1\}$	$\left\{-1;-\frac{4}{3}\right\}$	$\left\{-\frac{4}{3}\right\}$	$\{-2\}$	$\{2\}$

10.10. Вказати інтервал, який містить корені рівняння $\frac{3}{x}=\frac{2}{x+1}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-5;-3)$	$(-1;2)$	$(2;4)$	$(-2;1)$	$(-4;-2)$

10.11. Розв'язати рівняння $\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x+4}=0$ і вказати проміжок, якому належить його корінь.

А	Б	В	Г	Д
$(1;2)$	$(-2;-1)$	$(-4;-2)$	$(2;4)$	$(4;6)$

10.12. Розв'язати рівняння $\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-3}+1=0$ і вказати проміжок, якому належить більший його корінь.

А	Б	В	Г	Д
(0; 1)	(2; 3)	(4; 5)	(3; 4)	(4; +∞)

10.13. Знайти суму коренів рівняння $\frac{x}{3}=\frac{5}{x+2}$.

А	Б	В	Г	Д
2	–2	15	–15	5

10.14. Встановити значення a, за яких рівняння $\frac{x-a}{x^2-8x+15}=0$ не має коренів.

А	Б	В	Г	Д
$a=15$	$a=3$ або $a=5$	$a=8$	$a=-3$ або $a=-5$	$a=-8$

10.15. Встановити значення a, за яких рівняння $\frac{x-5}{x+9}=\frac{a-x}{x+9}$ не має коренів.

А	Б	В	Г	Д
$a=-23$	$a=-9$	$a=5$	$a=23$	$a=9$

10.16. За якого найменшого значення параметра a рівняння $|4x+3|=5a+3$ має розв'язок?

А	Б	В	Г	Д
1,25	–3	3	–0,6	1

10.17. Катер проходить 160 км за течією річки за той же час, що й 140 км проти течії. Знайти власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі, якщо власну швидкість катера позначено через x км/год?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{x+2}{160}=\frac{2x}{140}$	$\frac{x-2}{140}=\frac{x}{160}$	$\frac{160}{x-2}=\frac{140}{x+2}$	$\frac{160}{x+2}=\frac{140}{x}x$	$\frac{160}{x+2}=\frac{140}{x-2}$

10.18. Робітник повинен був виготовити за деякий час 90 деталей. Щоденно він виготовляв на 3 деталі більше, ніж планувалося, і тому завдання виконав на 1 день раніше. Скільки деталей щоденно виготовляв робітник?

Кількість деталей, що виготовляє робітник за 1 день, позначено через x. Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{90}{x-1}-\frac{90}{x}=3$	$\frac{90}{x-3}-\frac{90}{x}=1$	$\frac{90}{x}-\frac{90}{x-3}=1$	$\frac{90}{x}-\frac{90}{x-1}=3$	$90(x-3)-90x=1$

10.19. З одного міста в інше, відстань між якими дорівнює 300 км, одночасно виїхали два автомобілі. Швидкість першого з них на 10 км/год більша від швидкості другого, а тому він приїхав до місця призначення на 1 год раніше. Знайти швидкість кожного з автомобілів.

Швидкість першого автомобіля позначено через x км/год. Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{300}{x-1}-\frac{300}{x}=10$	$\frac{300}{x}-\frac{300}{x-1}=10$	$\frac{300}{x}-\frac{300}{x-10}=1$	$\frac{300}{x-10}-\frac{300}{x}=1$	$\frac{x-10}{300}-\frac{x}{300}=1$

10.20. Два робітники, працюючи разом, можуть виконати деяке завдання за 60 год. За скільки годин може виконати всю роботу кожний з робітників, працюючи окремо, якщо перший з них може це зробити на 22 год швидше, ніж другий?

Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі, якщо час, за який може виконати завдання перший робітник, позначено через x год?

А	Б	В	Г	Д
$x+(x+22)=60$	$x+(x-22)=60$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+22}=60$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+22}=\frac{1}{60}$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-22}=\frac{1}{60}$

10.21. На заводі за певний термін повинні були відремонтувати 300 вагонів. Перевиконуючи план ремонту на 3 вагони за тиждень, за два тижні до закінчення терміну відремонтували 299 вагонів. Скільки вагонів ремонтували щотижня?

Кількість вагонів, які ремонтували за тиждень, позначено через x. Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{300}{x-3}-\frac{299}{x}=2$	$\frac{300}{x}-\frac{299}{x-3}=2$	$\frac{300}{x-2}-\frac{299}{x}=3$	$\frac{300}{x}-\frac{299}{x-2}=3$	$\frac{299}{x-3}-\frac{300}{x}=2$

Завдання 10.22–10.27 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

10.22. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та рівносильними їм рівняннями або системами (А–Д).

1 $\frac{x}{x-1}=-\frac{2}{x+1}$

2 $x^2+3x-2=0$

3 $\sqrt{x}(x+1)(x-2)=0$

4 $x^2+7=0$

А $(x+1)(x-2)=0$

Б $x(x-2)=0$

В $x^4+13=0$

Г $\begin{cases} x(x+1)=-2(x-1); \\ (x-1)(x+1)\neq 0 \end{cases}$

Д $x(x+1)=-2(x-1)$

10.23. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\frac{x-4}{x-4}=0$

2 $\frac{x-4}{x-4}=1$

3 $\frac{x^2-16}{x+4}=0$

4 $\frac{x^2-16}{x+4}=1$

А $\{4\}$

Б $\{5\}$

В $(-\infty;4)\cup(4;+\infty)$

Г $(-\infty;5)\cup(5;+\infty)$

Д $\varnothing$

10.24. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $2x+\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-5}+10$

2 $2x^2+\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-5}+50$

3 $2x^2+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x+5}+50$

4 $2x^2+\frac{x-5}{x}=\frac{x-5}{x}+50$

А $\{-5; 5\}$
Б $\{0\}$
В $\varnothing$
Г $\{-5\}$
Д $\{5\}$

10.25. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\frac{(x^2-4)(x^2-25)}{(x-2)(x-5)}=0$

2 $\frac{(x^2-4)(x^2-25)}{(x+2)(x+5)}=0$

3 $\frac{(x+2)(x-5)}{(x^2-4)(x^2-25)}=0$

4 $\frac{(x^2-4)(x^2-25)}{(x-2)(x+5)}=0$

А $\{-2; 5\}$
Б $\{-2; -5\}$
В $\{2; 5\}$
Г $\{2; -5\}$
Д $\varnothing$

10.26. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\frac{2x-4}{x-2}=1$

2 $\frac{3x+2}{x+2}=1$

3 $\frac{(2x+3)(x-2)}{x^2-4}=1$

4 $\frac{4x-3}{x-2}=-1$

А $\{1\}$
Б $\{-1\}$
В $\{0\}$
Г $\{2\}$
Д $\varnothing$

10.27. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\frac{4}{x}=\frac{3}{x+1}$

2 $\frac{2}{x}=\frac{1}{x-2}$

3 $\frac{1}{x-3}=\frac{2}{9-x}$

4 $\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x-3}$

А $\{-5\}$
Б $\{-4\}$
В $\{4\}$
Г $\{5\}$
Д $\{6\}$

Розв'яжіть завдання 10.28–10.42. Відповідь запишіть десятковим дробом.

10.28. Розв'язати рівняння $\frac{2x-2}{x+2}+\frac{x+3}{x-3}-5=0$. У відповідь записати суму коренів.

10.29. Розв'язати рівняння $\frac{2x}{x+2}+\frac{1}{x-2}=\frac{4}{x^2-4}$.

10.30. Розв'язати рівняння $\frac{3}{x^2-9}-\frac{1}{x^2-6x+9}=\frac{3}{2x^2+6x}$.

10.31. Розв'язати рівняння $\frac{5}{4x^2+4x+4}-\frac{3x}{x^3-1}=\frac{1}{2(x-1)}$. У відповідь записати найменший корінь.

10.32. Розв'язати рівняння $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0$. У відповідь записати добуток коренів.

10.33. Розв'язати рівняння $\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2$. У відповідь записати суму коренів.

10.34. Розв'язати рівняння $\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^4-8\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^2=9$. У відповідь записати найбільший корінь.

Розв'язати задачі за допомогою рівнянь (10.35–10.37).

10.35. З пункту A в пункт B, відстань між якими дорівнює 60 км, спочатку виїхав автобус, а через 20 хв — легковий автомобіль, швидкість якого на 20 км/год вища, ніж швидкість автобуса. Знайти швидкість автобуса у км/год, якщо він приїхав до пункту B на 10 хв пізніше від легкового автомобіля.

10.36. Бригада робітників повинна була за кілька днів виготовити 272 деталі. Перші десять днів бригада виконувала встановлену норму, а потім почала виготовляти щоденно на 4 деталі більше, ніж за нормою. Тому за один день до терміну було виготовлено 280 деталей. Скільки деталей повинна була виготовляти бригада щоденно за планом?

10.37. Басейн наповнюється водою двома трубами за 6 год. Перша труба може заповнити басейн водою на 5 год швидше, ніж друга. За скільки годин може заповнити весь басейн лише перша труба?

10.38. Розв'язати рівняння $9\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=14$. У відповідь записати суму коренів.

10.39. Розв'язати рівняння $\frac{16}{(x+6)(x-1)}-\frac{20}{(x+2)(x+3)}=1$. У відповідь записати найменший корінь.

10.40. Розв'язати рівняння $\frac{2x}{x^2-4x+2}+\frac{3x}{x^2+x+2}=-\frac{5}{4}$. У відповідь записати найбільший корінь.

10.41. Розв'язати рівняння $\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-2}{x+3}=\frac{x-4}{x+5}-\frac{x-5}{x+6}$. У відповідь записати найбільший корінь.

10.42. Знайти всі значення параметра a, за яких рівняння $\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{x}+a=0$ має тільки один корінь. У відповідь записати найбільше значення a.

Тема 11. Раціональні нерівності

Нерівності виду $\frac{P(x)}{Q(x)} \lozenge 0$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени, $\lozenge$ — один зі знаків $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, називають *дробово-раціональними*. Шляхом виконання рівносильних перетворень дробово-раціональну нерівність зводять до раціональної.

1) $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x) \cdot Q(x) > 0;$

2) $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x) \cdot Q(x) < 0;$

3) $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \geq 0, \\ Q(x) \neq 0; \end{cases}$

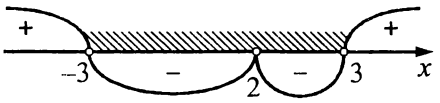
4) $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \leq 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$

Метод інтервалів для розв'язання нерівностей виду $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ і $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени відносно x. Нерівності $P(x) \cdot Q(x) > 0$ і $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ ($P(x) \cdot Q(x) < 0$ і $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$) рівносильні. Розглянемо випадок, коли многочлени $P(x)$ і $Q(x)$ розкладаються у добутки двочленів виду $x - x_0$.

Наприклад, розв'язати нерівність $\frac{x}{x+3} + \frac{2}{x-2} < \frac{5x}{(x+3)(x-2)}$. ОДЗ: $\begin{cases} x \neq -3; \\ x \neq 2. \end{cases}$ Тоді одержимо:

$\frac{x}{x+3} + \frac{2}{x-2} < \frac{5x}{(x+3)(x-2)}$; $\frac{x}{x+3} + \frac{2}{x-2} - \frac{5x}{(x+3)(x-2)} < 0$; $\frac{x(x-2)+2(x+3)-5x}{(x+3)(x-2)} < 0$; $\frac{x^2-5x+6}{(x+3)(x-2)} < 0$;

$\frac{(x-3)(x-2)}{(x+3)(x-2)} < 0$. Тоді $(x-3)(x+3)(x-2)^2 < 0$. Нулі множників: $x = 3$, $x = -3$, $x = 2$.



Отже, $x \in (-3; 2) \cup (2; 3)$.

Відповідь. $(-3; 2) \cup (2; 3)$.

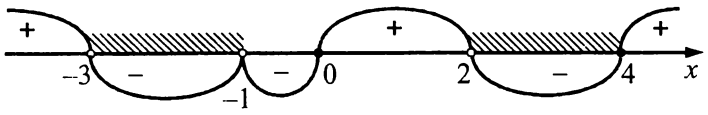
Зауваження. Розв'язки нерівностей виду $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ та $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ є об'єднаннями розв'язків відповідних нерівностей $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ і $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ та рівняння $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$.

Наприклад, знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} \geq \frac{1}{x^2-x-2}$. Маємо:

$\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} \geq \frac{1}{x^2-x-2}$; $\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} - \frac{1}{x^2-x-2} \geq 0$; $\frac{8x+3}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} - \frac{1}{(x-2)(x+1)} \geq 0$;

$\frac{8x+3-(x+1)(x+3)}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \geq 0$; $\frac{-x^2+4x}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \geq 0$; $\frac{x(x-4)}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \leq 0$; $\begin{cases} x(x-4)(x+1)^2(x+3)(x-2) \leq 0; \\ (x+1)^2(x+3)(x-2) \neq 0. \end{cases}$

Нулі чисельника: $x = 4$, $x = 0$; нулі знаменника: $x = -3$, $x = -1$; $x = 2$.



Отже, $\left[\begin{array}{l}-3<x<-1;\\ -1<x\le 0;\\ 2<x\le 4.\end{array}\right.$ Цілими розв'язками є –2; 0; 3; 4.

Відповідь. 4.

Розв'язування дробових раціональних нерівностей з параметром

Розглянемо приклад: розв'язати нерівність $\frac{x-2}{ax-1}<0$. Якщо $a=0$, то одержимо лінійну нерівність $-(x-2)<0$, тобто $x>2$.

Нехай $a\neq 0$, тоді дана нерівність рівносильна нерівності $a(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)<0$. Застосуємо для розв'язування цієї нерівності метод інтервалів. Нулі множників: $x_1=2$ та $x_2=\frac{1}{a}$, до того ж:

1) $x_1=x_2=2$, якщо $a=0{,}5$;

2) $x_2<x_1$, якщо $\frac{1}{a}<2 \Leftrightarrow \frac{1}{a}-2<0;\ \frac{1-2a}{a}<0;\ 2\left(a-\frac{1}{2}\right)a>0;$ $a<0$ або $a>0{,}5$;

3) $x_1<x_2$, якщо $a\in(0;\ 0{,}5)$.

Розглянемо випадки.

1) $a=0{,}5$. У цьому випадку нерівність набуває вигляду $(x-2)^2<0$, що неможливо. Отже, якщо $a=0{,}5$, то вихідна нерівність не має розв'язків;

2.1) $a<0$. $a\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-2)<0;\ \left(x-\frac{1}{a}\right)(x-2)>0;\ x\in\left(-\infty;\frac{1}{a}\right)\cup(2;+\infty)$;

2.2) $a\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. $a\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-2)<0;\ \left(x-\frac{1}{a}\right)(x-2)<0;\ x\in\left(\frac{1}{a};2\right)$;

2.3) $a\in(0;\ 0{,}5)$. $a(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)<0;\ (x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)<0;\ x\in\left(2;\frac{1}{a}\right)$.

Відповідь. Якщо $a<0$, то $x\in\left(-\infty;\frac{1}{a}\right)\cup(2;+\infty)$; якщо $a=0$, то $x\in(2;+\infty)$; якщо $a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$, то $x\in\left(2;\frac{1}{a}\right)$; якщо $a=0{,}5$, то $x\in\varnothing$; якщо $a>0{,}5$, то $x\in\left(\frac{1}{a};2\right)$.

Приклад 1. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $\frac{6-x}{3x-9}\ge 0$.

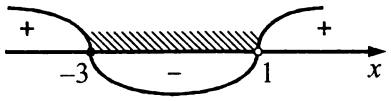
А	Б	В	Г	Д
3; 4; 5; 6	інша відповідь	3	4	4; 5; 6

■ $\frac{6-x}{3x-9}\ge 0;\ \frac{-(x-6)}{3(x-3)}\ge 0\,\big|\cdot(-3);\ \frac{x-6}{x-3}\le 0;$ $\overset{+}{\underset{0}{\bullet}}\ \overset{-}{\underset{3}{\circ}}\ \overset{+}{\underset{6}{\bullet}}$. Отже, $x\in(3;\ 6]$. Цілими розв'язками нерівності є 4; 5; 6 і їх кількість дорівнює 3.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\frac{5x+7}{x-1} \le 2$.

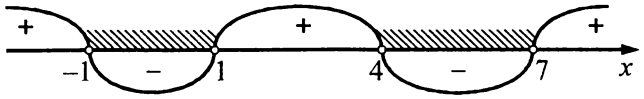
■ $\frac{5x+7}{x-1} \le 2$; $\frac{5x+7}{x-1} - 2 \le 0$; $\frac{5x+7-2(x-1)}{x-1} \le 0$; $\frac{3x+9}{x-1} \le 0 \;\Big|:3$; $\frac{x+3}{x-1} \le 0$;



Отже, розв'язок нерівності — $x \in [-3; 1)$.
Відповідь. $[-3; 1)$. ■

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\frac{x^2-5x+4}{-x^2+6x+7} > 0$. У відповідь записати кількість цілих розв'язків нерівності.

■ $\frac{x^2-5x+4}{-x^2+6x+7} > 0$; $\frac{(x-1)(x-4)}{(x+1)(x-7)} < 0$; $(x-1)(x-4)(x+1)(x-7) < 0$. Нулі множників: $x = -1$, $x = 1$, $x = 4$, $x = 7$.



Отже, $x \in (-1; 1) \cup (4; 7)$. Цілими розв'язками є 0; 5; 6.
Відповідь. 3. ■

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\frac{x}{2x+3} > \frac{1}{x}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3) \cup (-1; 0) \cup (3; +\infty)$	$(-1{,}5; -1) \cup (3; +\infty)$	$(-\infty; -1{,}5] \cup [-1; 0] \cup [3; +\infty)$	$(-1{,}5; 1) \cup (0; 3)$	$(-\infty; -1{,}5) \cup (-1; 0) \cup (3; +\infty)$

■ $\frac{x}{2x+3} > \frac{1}{x}$; $\frac{x}{2x+3} - \frac{1}{x} > 0$; $\frac{x^2-(2x+3)}{x(2x+3)} > 0$; $\frac{x^2-2x-3}{x(2x+3)} > 0$; $\frac{(x+1)(x-3)}{x(2x+3)} > 0$;
$(x+1)(x-3)x(2x+3) > 0$. Нулі множників: $x = -1$, $x = 3$, $x = 0$, $x = -1{,}5$.

Отже, $x \in (-\infty; -1{,}5) \cup (-1; 0) \cup (3; +\infty)$.
Відповідь. **Д.** ■

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\frac{x^2-5x+6}{|x|+7} < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$x \in R$	$(2; 3)$	$(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$	$(-\infty; -3) \cup (-2; +\infty)$	$(-\infty; -7) \cup (2; 3)$

■ Оскільки $|x| + 7 > 0$ за будь-якого значення x, то маємо: $\frac{x^2-5x+6}{|x|+7} < 0$; $x^2 - 5x + 6 < 0$;
$(x-2)(x-3) < 0$.

Отже, $x\in(2;\,3)$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 6. Розв'язати нерівність $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-|x|-2}\geq -3x$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

■ $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-|x|-2}\geq -3x$. Знайдемо ОДЗ нерівності $x^2-|x|-2\neq 0$.

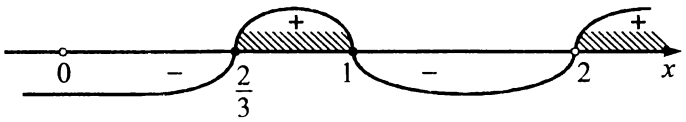
1) $x\geq 0$: $x^2-x-2\neq 0$; $\left[\begin{array}{l} x\neq 2;\\ x\neq -1;\end{array}\right.$ $x\neq 2$;

2) $x<0$: $x^2+x-2\neq 0$; $\left[\begin{array}{l} x\neq -2;\\ x\neq 1;\end{array}\right.$ $x\neq -2$.

Отже, $x\neq \pm 2$.

1) Нехай $x\geq 0$, $x\neq 2$, тоді отримаємо: $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-x-2}\geq -3x$; $\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-2)}\geq -3x$; $\dfrac{x+2}{x-2}\geq -3x$;

$\dfrac{x+2}{x-2}+3x\geq 0$; $\dfrac{x+2+3x^2-6x}{x-2}\geq 0$; $\dfrac{3x^2-5x+2}{x-2}\geq 0$; $\dfrac{(x-1)(3x-2)}{x-2}\geq 0$; $(x-1)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)(x-2)\geq 0$.



Отже, $x\in\left[\dfrac{2}{3};1\right]\cup(2;+\infty)$.

2) нехай $x<0$, $x\neq -2$, тоді отримаємо: $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+x-2}\geq -3x$; $\dfrac{(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-1)}\geq -3x$; $\dfrac{x+1}{x-1}+3x\geq 0$;

$\dfrac{x+1+3x(x-1)}{x-1}\geq 0$; $\dfrac{3x^2-2x+1}{x-1}\geq 0$. Квадратний тричлен $3x^2-2x+1$ має від'ємний дискримінант, перший коефіцієнт $a=3>0$, тому за всіх значень x набуває тільки додатних значень, тому одержимо нерівність $x-1>0$, звідки $x\in\varnothing$.

Розв'язками вихідної нерівності є $x\in\left[\dfrac{2}{3};1\right]\cup(2;+\infty)$, а найменший цілий розв'язок нерівності $x=1$.

Відповідь. 1. ■

Приклад 7. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\left|\dfrac{3x+1}{x-3}\right|<3$.

■ $\left|\dfrac{3x+1}{x-3}\right|<3$; $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{3x+1}{x-3}<3;\\ \dfrac{3x+1}{x-3}>-3.\end{array}\right.$ ОДЗ: $x\neq 3$. $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{3x+1-3x+9}{x-3}<0;\\ \dfrac{3x+1+3x-9}{x-3}>0;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{10}{x-3}<0;\\ \dfrac{6x-8}{x-3}>0;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}x-3<0;\\ (x-3)\left(x-\dfrac{4}{3}\right)>0;\end{array}\right.$

$\begin{cases} x<3; \\ \left[\begin{array}{l} x>3; \\ x<\frac{4}{3}; \end{array}\right. \end{cases}$ $x<\frac{4}{3}$. Отже, $x\in\left(-\infty;\frac{4}{3}\right)$. Тоді найбільший цілий розв'язок $x=1$.

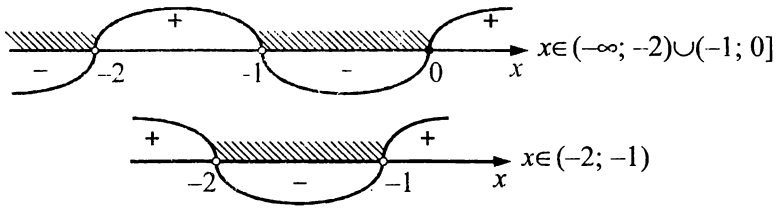
Відповідь. 1. ■

Приклад 8. Розв'язати нерівність $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|\geq 1$.

А	Б	В	Г	Д
(–2; –1)	(–2; –1)∪(0; +∞)	(–∞; –2)∪(–2; –1)∪∪(–1; 0]	(–∞; 0)	(0; +∞)

■ $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|\geq 1$; $\left[\begin{array}{l} \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\geq 1; \\ \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\leq -1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \frac{x^2-3x+2-x^2-3x-2}{x^2+3x+2}\geq 0; \\ \frac{x^2-3x+2+x^2+3x+2}{x^2+3x+2}\leq 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \frac{-6x}{x^2+3x+2}\geq 0; \\ \frac{2x^2+4}{x^2+3x+2}\leq 0; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{(x+1)(x+2)}\leq 0; \\ \frac{x^2+2}{(x+1)(x+2)}\leq 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x(x+1)(x+2)\leq 0; \\ (x+1)(x+2)\neq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} (x+1)(x+2)\leq 0; \\ (x+1)(x+2)\neq 0. \end{cases} \end{array}\right.$



Отже, $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup(-1;0]$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 9. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких нерівність $\frac{\left|x^2+4a(a-x)+4\right|}{|x-2a|}\leq$ $\leq 2x+3-x^2$ має хоча б один розв'язок. У відповідь записати найбільше значення параметра a.

■ Перетворимо чисельник дробу: $|x^2+4a(a-x)+4|=|x^2+4a^2-4ax+4|=|(x-2a)^2+4|=$ $=(x-2a)^2+4$.

Тепер ліва частина нерівності перетвориться так:

$h(x)=\frac{(x-2a)^2+4}{|x-2a|}=|x-2a|+\frac{4}{|x-2a|}=2\left(\frac{|x-2a|}{2}+\frac{2}{|x-2a|}\right)$. Для всіх $b>0$ виконується нерівність $b+\frac{1}{b}\geq 2$. Тому $\frac{|x-2a|}{2}+\frac{2}{|x-2a|}\geq 2$. Отже, $h(x)\geq 2\cdot 2=4$, звідки $\frac{1}{2}\left(|x-2a|+\frac{4}{|x-2a|}\right)\geq 2$; $|x-2a|+\frac{4}{|x-2a|}\geq 4$. Права частина нерівності перетвориться так: $f(x)=-x^2+2x+3=-(x^2-2x-3)=$ $=-(x^2-2x+1)+4=-(x-1)^2+4$, тому $-(x-1)^2+4\leq 4$. Маємо: $h(x)\geq 4$, $f(x)\leq 4$. Задана нерівність виконується лише тоді, коли $h(x)=f(x)=4$. З умови $f(x)=4$ випливає, що $x=1$. Тоді умову $h(x)=4$ можна записати так: $2\cdot\left(\frac{|1-2a|}{2}+\frac{2}{|1-2a|}\right)=4$. Нехай $|1-2a|=t$. Тоді $t+\frac{4}{t}=4$; $t^2-4t+4=0$; $(t-2)^2=0$;

$t = 2$, тобто $|1 - 2a| = 2$; $\left[\begin{array}{l} 1-2a=2; \\ 1-2a=-2; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} a=-0{,}5; \\ a=1{,}5. \end{array}\right.$ Найбільше значення $a = 1{,}5$.

Відповідь. 1,5. ■

Завдання 11.1–11.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

11.1. Знайти множину розв'язків нерівності $x + \frac{1}{x} > \frac{1}{x} - 2$.

А	Б	В	Г	Д
R	$(-2; +\infty)$	$(-2; 0)\cup(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; -2)\cup(-2; 0)\cup$ $\cup(0; +\infty)$

11.2. Вибрати нерівність, множиною розв'язків якої є R.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{-x^2}{x^2-4} \le 0$	$\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2 \ge 0$	$\frac{x^2-4}{x^2-4} \ge 0$	$\frac{x^2+1}{x^2} \ge 0$	$\frac{-x^2}{x^2+4} \le 0$

11.3. Вибрати нерівність, множиною розв'язків якої є $\varnothing$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{x^2+1}{x^2+1} \le 1$	$\frac{x^2}{x^2+1} \le 1$	$\frac{x^2}{x^2+1} \ge 1$	$\frac{x^2-1}{x^2-1} \ge 0$	$\frac{x^2+1}{x^2} \ge 1$

11.4. Розв'язати нерівність $\frac{x}{x-5} \ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0]\cup(5; +\infty)$	$(-\infty; 0)\cup[5; +\infty)$	$(-\infty; 0)\cup(5; +\infty)$	$[0; 5)$	$(0; 5]$

11.5. Розв'язати нерівність $\frac{x+5}{x-2} \le 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2)\cup[5; +\infty)$	$(-\infty; -5]\cup(2; +\infty)$	$[-5; 2]$	$[-5; 2)$	$(-2; 5]$

11.6. Розв'язати нерівність $\frac{(x+5)(x-3)}{x^2+4} < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-3; 5)$	$(-5; 3)$	$(-\infty; -5)\cup(2; 3)$	$(-\infty; -5)\cup(3; +\infty)$	$(-\infty; -3)\cup(5; +\infty)$

11.7. Розв'язати нерівність $\frac{x+5}{x^2-4} \le 0$.

А	Б	В	Г	Д
$[-5; -2)\cup(2; +\infty)$	$(-\infty; -5]\cup(-2; 2)$	$(-\infty; -5]\cup[-2; 2]$	$(-\infty; -5)$	$(-\infty; 5]$

11.8. Розв'язати нерівність $\frac{x+5}{x+3} > 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -5)\cup(-3; +\infty)$	$(-5; +\infty)$	$(-3; +\infty)$	$(-\infty; -5)$	$(-\infty; -3)$

11.9. Розв'язати нерівність $\frac{3x+4}{x+1} \le 2$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[-1\frac{1}{3}; -1\right)$	$[-2; -1]$	$[-2; -1)$	$\left[-1\frac{1}{3}; -1\right]$	$(-\infty; -2]\cup(-1; +\infty)$

11.10. Розв'язати нерівність $\frac{1}{x} \le -x$.

А	Б	В	Г	Д
$(1; +\infty)$	$(-\infty; -1)$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0)$	$(-\infty; 0]$

11.11. Розв'язати нерівність $\frac{3}{x} \le \frac{2}{x+1}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3]\cup(-1; 0)$	$(-\infty; -3]\cup[-1; 0]$	$[-3; -1)$	$(-1; 0)$	$(-3; -1]$

11.12. Знайти множину розв'язків нерівності $\frac{3}{x-3} > \frac{1}{x+2}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2)\cup(3; +\infty)$	$(-\infty; -4{,}5)\cup(-2; 3)$	$(-4{,}5; -2)\cup(3; +\infty)$	$(-2; 3)$	$(-3; 2)\cup(4{,}5; +\infty)$

11.13. Знайти множину розв'язків нерівності $\frac{4x^2-4x+1}{(x+4)(x-3)} \ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -4)\cup(3; +\infty)$	$(-4; 3)$	$\left(-4; \frac{1}{2}\right)\cup(3; +\infty)$	$(-\infty; -4)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup$ $\cup(3; +\infty)$	$(-\infty; -4]\cup[3; +\infty)$

11.14. Розв'язати нерівність $\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8} \le 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-4; 3)$	$(-4; 2)\cup(2; 3]$	$(-\infty; -4)\cup\{2\}\cup$ $\cup(3; +\infty)$	$(-\infty; -4)\cup(3; +\infty)$	$(-3; 4)$

11.15. Обчислити найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-2-x^2}{x+9} \le 0$.

А	Б	В	Г	Д
-9	-8	0	9	1

11.16. Розв'язати нерівність $\frac{(x-1)^2(x+7)(x+3)^3}{x^2+6x+9} \ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
$[-7; -3)\cup[1; +\infty)$	$(-\infty; -7]\cup(-3; +\infty)$	$[-7; -3)$	$(-\infty; 3)\cup[7; +\infty)$	$(3; 7]$

11.17. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\frac{x(x-3)(3x-2)}{2x-3} \le 0$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	інша відповідь

11.18. Розв'язати нерівність $\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8} \le 1$.

А	Б	В	Г	Д
(–4; 3)	(–4; 3)	(–∞; –4)	(–4; +∞)	(–4; 2)∪(2; +∞)

11.19. Знайти множину розв'язків нерівності $\left|\frac{1}{x-5}\right| > 1$.

А	Б	В	Г	Д
(4; 5)∪(5; 6)	(4; 6)	(–∞; 4)∪(6; +∞)	(–6; –4)	(–∞; –6)∪(–4; +∞)

11.20. Знайти множину розв'язків нерівності $\frac{7}{|x|+5} < 1$.

А	Б	В	Г	Д
R	(–2; 2)	(–∞; –2)∪(2; +∞)	(–∞; –5)∪(2; +∞)	(–5; 2)

11.21. Знайти множину розв'язків нерівності $\frac{(x+2)(x-a)}{x-4} \le 0$, якщо $-2 < a < 3$.

А	Б	В	Г	Д
$[-2; a]$	$[a; 4)$	$[-2; a]\cup(4; +\infty)$	$(-\infty; -2]\cup[a; 4)$	$[a; 4]$

11.22. Знайти множину розв'язків нерівності $\frac{x^2-2x-15}{(x-5)(x-a)} \le 0$, якщо $-3 < a < 5$.

А	Б	В	Г	Д
$[-3; a]$	$[-3; a)$	$(-\infty; -3]\cup(5; +\infty)$	$(-\infty; -3]\cup[5; +\infty)$	$(-\infty; -3]\cup(a; 5)\cup$ $\cup(5; +\infty)$

Завдання 11.23–11.29 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

11.23. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $x^2 > 3$

2 $|x| \le \sqrt{3}$

3 $\frac{x+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}} \le 0$

4 $x - \sqrt{3} > 0$

А $\left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$

Б $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$

В $\left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right]$

Г $\left(\sqrt{3}; \infty\right)$

Д $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; \infty\right)$

11.24. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та рівносильними їм нерівностями (А–Д).

1 $(x+2)(x-3)<0$

2 $(x+2)(x-3)>0$

3 $\dfrac{x+2}{x-3}\geq 0$

4 $(x+2)^2>0$

А $\dfrac{x-3}{x+2}<0$

Б $\begin{cases}(x+2)(x-3)\geq 0;\\ x\neq 3\end{cases}$

В $(x+2)(x-3)\leq 0$

Г $\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^2\geq 0$

Д $\dfrac{x+2}{x-3}>0$

11.25. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $x+\dfrac{1}{x-2}\geq\dfrac{1}{x-2}+2$

2 $x+\dfrac{1}{x-3}>\dfrac{1}{x-3}+2$

3 $x+\dfrac{1}{x+1}\geq\dfrac{1}{x+1}+2$

4 $-x+\dfrac{1}{x-3}\leq\dfrac{1}{x-3}+2$

А $[2;+\infty)$

Б $(-\infty;-2]$

В $(-2;3)\cup(3;+\infty)$

Г $(2;3)\cup(3;+\infty)$

Д $(2;+\infty)$

11.26. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\dfrac{x-3}{x+2}\leq 0$

2 $\dfrac{x+2}{x-3}\leq 0$

3 $\dfrac{1}{(x+2)(x-3)}\leq 0$

4 $\dfrac{(x+2)(x-3)}{5}\leq 0$

А $(-2;3)$

Б $[-2;3]$

В $[-2;3)$

Г $(-2;3]$

Д $(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)$

11.27. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\dfrac{x+3}{x^2-4}\leq 0$

2 $\dfrac{x+3}{x^2-4}\geq 0$

3 $\dfrac{x^2-4}{x+3}\geq 0$

4 $\dfrac{x^2-4}{x+3}\leq 0$

А $(-\infty;-3)\cup[-2;2]$

Б $(-\infty;-3]\cup(-2;2)$

В $(-\infty;-3]\cup[-2;2]$

Г $[-3;-2)\cup(2;+\infty)$

Д $(-3;-2]\cup[2;+\infty)$

11.28. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\frac{x+4}{x+1}>1$	**А** $(-\infty; -4)$
2 $\frac{x+1}{x+4}>1$	**Б** $(-\infty; -1)$
3 $\frac{x+1}{x+4}<1$	**В** $(-\infty; 4)$
4 $\frac{x+4}{x+1}<1$	**Г** $(-4; +\infty)$
	Д $(-1; +\infty)$

11.29. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\frac{1}{x}\le -x$	**А** $(-\infty; -1]\cup(0; 1]$
2 $\frac{1}{x}\ge -x$	**Б** $(-\infty; 0)$
3 $\frac{1}{x}\le x$	**В** $[-1; 0)\cup[1; +\infty)$
4 $\frac{1}{x}\ge x$	**Г** $(-1; 1)$
	Д $(0; +\infty)$

Розв'яжіть завдання 11.30–11.43. Відповідь запишіть десятковим дробом.

11.30. Розв'язати нерівність $\frac{x-5}{x+5}<x$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок.

11.31. Розв'язати нерівність $\frac{2}{x+9}<\frac{x}{x-6}$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

11.32. Розв'язати нерівність $\frac{1}{1-x}\ge 1-2x$. У відповідь записати суму всіх додатних цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

11.33. Розв'язати нерівність $\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{2x}\le 1$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

11.34. Розв'язати нерівність $\frac{1}{x^2-3x+2}\le\frac{1}{2}$. У відповідь записати добуток усіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

11.35. Розв'язати нерівність $2+\frac{1}{x-3}+\frac{x-3}{x+2}\le\frac{1}{(x-3)(x+2)}$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок.

11.36. Розв'язати нерівність $\frac{2}{3x+7}\le\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+1}$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок.

11.37. Розв'язати нерівність $\frac{x-8}{x^2-5x+4}>\frac{2}{x+1}$. У відповідь записати найменший додатний цілий розв'язок.

11.38. Розв'язати нерівність $\frac{x^3-x^2+x-1}{x+8}\le 0$. У відповідь записати добуток усіх розв'язків.

11.39. Розв'язати нерівність $\left|\frac{2x+5}{4x+1}\right|<1$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

11.40. Розв'язати нерівність $1-\frac{1}{x+2}\ge\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x+1}\right)(x-1)}$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

11.41. Розв'язати нерівність $\frac{x^3-3x+2}{6-x}\le 0$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

11.42. Розв'язати нерівність $\frac{|x+7|}{x^2+8x+7}<5$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

11.43. Розв'язати нерівність $\left|\frac{1}{x+1}\right|<\left|\frac{2}{x-2}\right|$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

Тема 12. Ірраціональні рівняння

Ірраціональними називають рівняння, які містять змінну під знаком кореня (радикала) або в основі степеня з раціональним показником. Наприклад, $x+3=\sqrt{2x-1}$; $x^{\frac{1}{4}}-10=6$.

Основними методами розв'язування ірраціональних рівнянь є: а) метод піднесення обох частин рівняння до одного й того ж степеня; б) метод уведення нових змінних; в) штучні прийоми.

При розв'язуванні ірраціональних рівнянь методом піднесення обох частин до парного степеня можуть з'явитися побічні (зайві) корені.

Так, наприклад, якщо задано рівняння $\sqrt{x+5}=x-1$, то, піднісши до квадрата обидві його частини, одержимо: $\left(\sqrt{x+5}\right)^2=(x-1)^2$; $x+5=x^2-2x+1$; $x^2-3x-4=0$; $x_1=4$ і $x_2=-1$. Коренем вихідного рівняння $\left(\sqrt{4+5}=4-1\right)$ є $x_1=4$, а $x_2=-1$ є побічним коренем $\left(\sqrt{-1+5}\neq -1-1;\sqrt{4}\neq -2\right)$.

При розв'язуванні ірраціонального рівняння, яке містить парні степені радикалів, буває корисним знаходження ОДЗ, що може полегшити його розв'язування.

Відокремлення квадратного кореня

Наприклад, розв'язати рівняння $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=3$. Відокремимо один квадратний корінь $\sqrt{x+2}=3-\sqrt{3-x}$, а потім піднесемо обидві частини рівняння до квадрата: $x+2=9-6\sqrt{3-x}+3-x$; $5-x=3\sqrt{3-x}$. Ще раз піднесемо до квадрата: $25-10x+x^2=9(3-x)$; $x^2-x-2=0$; $x_1=-1$, $x_2=2$. Обидва значення є коренями даного рівняння: якщо $x_1=-1$, то одержимо: $\sqrt{-1+2}+\sqrt{3-(-1)}=3$; $\sqrt{1}+\sqrt{4}=3$; $3=3$; якщо $x_2=2$, то одержимо: $\sqrt{2+2}+\sqrt{3-2}=3$; $\sqrt{4}+\sqrt{1}=3$; $3=3$.

Іноді корисно почати розв'язання рівняння з визначення його області визначення. Наприклад, розв'язати рівняння $\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}-\sqrt{9x+7}+\sqrt{x-2}=0$. ОДЗ: $\begin{cases}11x+3\geq 0;\\ 2-x\geq 0;\\ 9x-7\geq 0;\\ x-2\geq 0;\end{cases}\begin{cases}x\geq -\frac{3}{11};\\ x\leq 2;\\ x\geq \frac{7}{9};\\ x\geq 2;\end{cases}$ $x=2$. Отже, область визначення складається тільки з однієї точки $x=2$. Перевіримо, чи буде це значення коренем вихідного рівняння: $\sqrt{11\cdot 2+3}-\sqrt{2-2}-\sqrt{9\cdot 2+7}+\sqrt{2-2}=0$; $\sqrt{25}-\sqrt{25}=0$; $0=0$.

Відповідь. 2.

При розв'язуванні ірраціональних рівнянь слід пам'ятати:

1) у рівнянні корені парного степеня є арифметичними, а це значить, що значення кореня завжди невід'ємне, крім цього, підкореневий вираз теж невід'ємний;

2) корені непарного степеня визначені для будь-якого значення підкореневого виразу;

3) формальне використання властивостей кореня $\sqrt[2n]{ab}=\sqrt[2n]{a}\cdot\sqrt[2n]{b}$ або $\sqrt[2n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[2n]{a}}{\sqrt[2n]{b}}$ може призвести до звуження області визначення рівняння, що не допустимо.

Одним зі способів, який застосовують для розв'язування ірраціональних рівнянь, є введення нової змінної. Наприклад, розв'язати рівняння $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2-6x+18}=9$. Позначимо вираз x^2-6x+9 через t: $x^2-6x+9=t\geq 0$. Тоді $x^2-6x+18=t+9$ і вихідне рівняння набуде вигляду: $\sqrt{t}+\sqrt{t+9}=9$. Розв'яжемо його: $\sqrt{t}=9-\sqrt{t+9}$; $\left(\sqrt{t}\right)^2=\left(9-\sqrt{t+9}\right)^2$; $t=81-18\sqrt{t+9}+t+9$; $18\sqrt{t+9}=90$; $\sqrt{t+9}=5$; $t+9=25$; $t=16$. Повернувшись до заміни, одержимо: $x^2-6x+9=16$; $x^2-6x-7=0$;

$x_1 = -1$, $x_2 = 7$. Виконавши перевірку, встановлюємо, що обидва значення задовольняють початкове рівняння.

Відповідь. –1; 7.

Рівняння виду $\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{g(x)} = h(x)$

При розв'язуванні рівнянь такого виду доцільно піднести обидві частини до куба за формулою $\left(\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}\right)^3 = a \pm b \pm 3\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}\right)$. Раціональне рівняння, яке виникне, може мати сторонні розв'язки, тому для знайдених розв'язків обов'язково потрібно виконати перевірку.

Наприклад, розв'язати рівняння $\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{x+1} = 3$. Після піднесення обох частин рівняння до куба отримаємо: $8 - x + x + 1 + 3\sqrt[3]{(8-x)(x+1)}\left(\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{x+1}\right) = 27$. Використаємо умову, що $\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{x+1} = 3$. Одержимо: $\sqrt[3]{(8-x)(x+1)} = 2$; $(8 - x)(x + 1) = 8$; $x^2 - 7x = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 7$. Перевіркою встановлюємо, що обидва значення перетворюють задане рівняння в тотожність.

Відповідь. 0; 7.

Зведення ірраціонального рівняння до системи рівнянь

Нехай потрібно розв'язати рівняння $\sqrt[4]{8-x} + \sqrt[4]{89+x} = 5$. Позначимо $\sqrt[4]{8-x} = a$, звідки $8 - x = a^4$; $\sqrt[4]{89+x} = b$, звідки $89 + x = b^4$ і $a^4 + b^4 = 8 - x + 89 + x = 97$. Одержимо систему рівнянь: $\begin{cases} a + b = 5; \\ a^4 + b^4 = 97. \end{cases}$ Перетворимо вираз $a^4 + b^4$: $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = ((a + b)^2 - 2ab)^2 - 2a^2b^2$. Одержимо рівняння: $(25 - 2ab)^2 - 2a^2b^2 = 97$. Нехай $ab = t$, тоді маємо: $(25 - 2t)^2 - 2t^2 = 97$; $625 - 100t + 4t^2 - 2t^2 - 97 = 0$; $2t^2 - 100t + 528 = 0$; $t^2 - 50t + 264 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t_1 = 44; \\ t_2 = 6, \end{array}\right.$ тобто $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a + b = 5; \\ ab = 6; \end{cases} \\ \begin{cases} a + b = 5; \\ ab = 44. \end{cases} \end{array}\right.$ Розв'язками першої системи є $a = 2$, $b = 3$ або $a = 3$, $b = 2$, друга система розв'язків не має. Повертаємося до заміни й одержуємо: $x_1 = -8$, $x_2 = -73$. Відповідь. –8; –73.

Спряженість в ірраціональних рівняннях

Наприклад, розв'язати рівняння $\sqrt{1 + x + x^2} + \sqrt{1 - x + x^2} = 4$ (1). Складемо нове рівняння: $\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2} = A$ (2). Перемножимо почастинно рівняння (1) і (2): $(1 + x + x^2) - (1 - x + x^2) = 4A$ й виразимо A через x: $2x = 4A$; $A = \frac{x}{2}$. Таким чином, $\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2} = \frac{x}{2}$. Додамо вихідне рівняння до останнього: $2\sqrt{1 + x + x^2} = 4 + \frac{x}{2}$; $4\left(1 + x + x^2\right) = 16 + 4x + \frac{x^2}{4}$; $16 + 16x + 16x^2 = 64 + 16x + x^2$; $15x^2 = 48$; $\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{4\sqrt{5}}{5}; \\ x_2 = -\frac{4\sqrt{5}}{5}. \end{array}\right.$ Перевіркою встановлюємо, що обидва корені задовольняють вихідне рівняння.

Відповідь. $\pm\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Розв'язування ірраціональних рівнянь з використанням властивостей відомих функцій та оцінки значень лівої й правої частин рівняння

Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2-7x+6}=12x-x^2-36$. Перепишемо задане рівняння так: $\sqrt{x^2-7x+6}=-(x-6)^2$; $f(x)=\sqrt{x^2-7x+6}\geq 0$; $g(x)=-(x-6)^2\leq 0$. Отже, дане рівняння рівносильне системі: $\begin{cases}\sqrt{x^2-7x+6}=0;\\ -(x-6)^2=0;\end{cases}$ $x=6$.

Відповідь. 6.

Якщо розв'язування рівнянь призводить до громіздких обчислень, то іноді варто скористатися властивостями зростання чи спадання відповідних функцій. Це можна зробити так:

1) дібрати один чи кілька коренів рівняння;

2) довести, що дане рівняння не має інших коренів.

Наприклад, розв'язати рівняння $\sqrt{x-7}+\sqrt[3]{x}=3$. ОДЗ: $x\geq 7$. Неважко побачити, що $x=8$ є коренем заданого рівняння. Розглянемо функцію $f(x)=\sqrt{x-7}+\sqrt[3]{x}$. Вона зростає на проміжку $[7;+\infty)$, тоді рівняння $f(x)=3$ має єдиний корінь, і цей корінь $x=8$. Відповідь. 8.

Ірраціональні рівняння з параметрами

Нехай потрібно з'ясувати, за яких значень параметра a рівняння $\sqrt{a+\sqrt{a+x}}=x$ має тільки один корінь. Оскільки ліва частина рівняння невід'ємна, то рівняння може мати корінь, лише якщо $x\geq 0$. Виконаємо заміну $\sqrt{a+x}=y$, $y\geq 0$. Тоді $\begin{cases}\sqrt{a+x}=y;\\ \sqrt{a+y}=x;\\ x\geq 0,\ y\geq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}y^2-x-a=0;\\ x^2-y-a=0;\\ x\geq 0,\ y\geq 0.\end{cases}$ Віднявши від першого рівняння друге, отримаємо рівняння: $(y^2-x^2)+(y-x)=0$; $(y-x)(y+x+1)=0$. Оскільки $y+x+1>0$ за усіх значень x та y, то залишається одна можливість: $y-x=0$; $y=x$. Отже, система набуде вигляду: $\begin{cases}x^2-x-a=0;\\ x\geq 0.\end{cases}$ Вона матиме один додатний розв'язок у таких випадках: 1) $\begin{cases}D=1+4a=0;\\ x_0=\dfrac{1}{2}>0,\end{cases}$ звідки $a=-\dfrac{1}{4}$; 2) $a>0$ (корені квадратного тричлена ax^2+bx+c мають різні знаки, коли $ac<0$).

Відповідь. $a=-\dfrac{1}{4}$ або $a>0$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\sqrt{3x+7}=x-7$.

А	Б	В	Г	Д
3	14	3,14	–7	6

■ $\sqrt{3x+7}=x-7$. Якщо $x-7<0$, то рівняння коренів не має. Якщо $x-7\geq 0$, $x\geq 7$, то: $\left(\sqrt{3x+7}\right)^2=(x-7)^2$; $3x+7=x^2-14x+49$; $x^2-17x+42=0$; $x_1=3$ — не задовольняє умову $x\geq 7$, $x_2=14$.

Відповідь. 14. ■

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+3}+\sqrt{4x-23}-\sqrt{x+10}=0$.

А	Б	В	Г	Д
6	7,5	4,14	8	5

■ $\sqrt{x+3}+\sqrt{4x-23}-\sqrt{x+10}=0$; $\sqrt{x+3}+\sqrt{4x-23}=\sqrt{x+10}$; $\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{4x-23}\right)^2=\left(\sqrt{x+10}\right)^2$;

$5x-20+2\sqrt{(x+3)(4x-23)}=x+10$; $2\sqrt{(x+3)(4x-23)}=30-4x$; $\sqrt{4x^2-11x-69}=15-2x$;

$4x^2-11x-69=225-60x+4x^2$; $49x=294$; $x=6$.

Перевірка: $\sqrt{6+3}+\sqrt{4\cdot 6-23}-\sqrt{6+10}=\sqrt{9}+\sqrt{1}-\sqrt{16}=0$; $0=0$ — правильна рівність; 6 — корінь рівняння.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 3. Розв'язати рівняння $2x^{\frac{1}{2}}-5x^{\frac{1}{4}}=3$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$	81	12	3

■ $2x^{\frac{1}{2}}-5x^{\frac{1}{4}}=3$. Зробимо заміну: $x^{\frac{1}{4}}=t$, $t\geq 0$. Тоді $x^{\frac{1}{2}}=t^2$, і задане рівняння матиме вигляд: $2t^2-5t=3$; $2t^2-5t-3=0$; $t_1=3$; $t_2=-\frac{1}{2}$ — не задовольняє умову $t\geq 0$. Тому: $x^{\frac{1}{4}}=3$; $x=3^4$; $x=81$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 4. Розв'язати рівняння $3\sqrt[8]{2x-9}-\sqrt{4-x}=1$.

■ Знайдемо ОДЗ: $\begin{cases}2x-9\geq 0;\\ 4-x\geq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}2x\geq 9;\\ -x\geq -4;\end{cases}$ $\begin{cases}x\geq 4{,}5;\\ x\leq 4;\end{cases}$ $x\in\varnothing$. Оскільки ОДЗ — порожня множина, то рівняння коренів не має.

Відповідь. $\varnothing$. ■

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x-3}=\sqrt{-2-x}$.

■ ОДЗ: $-2-x\geq 0$ або $x\leq -2$. Якщо $x\leq -2$, то тоді $x-3<0$. Отже, $\sqrt[3]{x-3}<0$. Звідси випливає, що на ОДЗ рівняння його ліва частина від'ємна, а права — невід'ємна, тому вихідне рівняння коренів не має.

Відповідь. $\varnothing$. ■

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}=0$.

■ $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}=0$. ОДЗ: $x\geq -3$. $\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^6=\left(\sqrt{x+3}\right)^6$; $(x+7)^2=(x+3)^3$; $x^2+14x+49=$ $=x^3+9x^2+27x+27$; $x^3+8x^2+13x-22=0$. Підбором знаходимо, що $x=1$ — корінь рівняння. Тоді маємо: $x^3+8x^2+13x-22=(x-1)(x^2+9x+22)$; $x^2+9x+22=0$; $D<0$, це рівняння не має коренів. Перевіркою встановлюємо, що $x=1$ задовольняє вихідне рівняння.

Відповідь. 1. ■

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{5-x}=2$. У відповідь записати суму коренів рівняння.

■ $\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{5-x}=2$. ОДЗ: $x\leq 5$. Нехай $\sqrt[3]{x+3}=a$, $\sqrt{5-x}=b$, $b\geq 0$. Тоді $x+3=a^3$, $5-x=b^2$ і $a^3+b^3=x+3+5-x=8$. Маємо: $\begin{cases}a+b=2;\\ a^3+b^2=8;\end{cases}$ $\begin{cases}b=2-a;\\ a^3+(2-a)^2=8;\end{cases}$ $\begin{cases}b=2-a;\\ a^3+4-4a+a^2=8;\end{cases}$

$$\begin{cases} b=2-a; \\ a^3+a^2-4a-4=0; \end{cases} \begin{cases} b=2-a; \\ a^2(a+1)-4(a+1)=0; \end{cases} \begin{cases} b=2-a; \\ (a+1)(a^2-4)=0; \end{cases} \begin{cases} b=2-a; \\ \left[\begin{array}{l} a=-1; \\ a=2; \\ a=-2; \end{array}\right. \end{cases} \begin{cases} b=2-a; \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x+3}=-1; \\ \sqrt[3]{x+3}=2; \\ \sqrt[3]{x+3}=-2; \end{array}\right. \end{cases} \left[\begin{array}{l} x=-4; \\ x=5; \\ x=-11. \end{array}\right.$$

Сума коренів рівняння: $-4+5-11=-10$.

Відповідь. -10. ■

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\sqrt[8]{x}+\sqrt[5]{x}=\frac{2}{x}$. У відповідь записати суму коренів рівняння.

■ $\sqrt[8]{x}+\sqrt[5]{x}=\frac{2}{x}$. ОДЗ: $x\neq 0$. Розглянемо функцію $f(x)=\sqrt[8]{x}+\sqrt[5]{x}$. Вона є зростаючою на кожному із проміжків області визначення. Функція $g(x)=\frac{2}{x}$ спадає на кожному із проміжків $x\in(-\infty;\,0)$ і $x\in(0;\,+\infty)$. На проміжку $x\in(0;\,+\infty)$ вихідне рівняння має корінь $x=1$, і він єдиний, оскільки якщо в рівнянні $f(x)=g(x)$ функція $f(x)$ зростає на певному проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому ж проміжку, то це рівняння може мати не більше одного кореня на даному проміжку. Розглянемо тепер проміжок $(-\infty;\,0)$. На ньому корінь даного рівняння $x=-1$, і він з аналогічних міркувань єдиний. Отже, вихідне рівняння має два корені: $x=1$ та $x=-1$. Тоді сума коренів дорівнює $1+(-1)=0$.

Відповідь. 0. ■

Приклад 9. За якого найбільшого значення параметра a рівняння $\left(\sqrt{x-2}-3\right)(x-a)=0$ має єдиний корінь?

■ ОДЗ: $x-2\geq 0$; $x\geq 2$. Маємо: $\left(\sqrt{x-2}-3\right)(x-a)=0$; $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2}-3=0; \\ x-a=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-2}=3; \\ x=a; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x-2=9; \\ x=a; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=11; \\ x=a. \end{array}\right.$ Рівняння має лише один корінь $x=11$, якщо $a<2$ або якщо $a=11$. Отже, найбільшим значенням параметра a, за якого рівняння має єдиний корінь, є $a=11$.

Відповідь. 11. ■

Приклад 10. Розв'язати рівняння $x+3-\sqrt{\frac{x+3}{x-5}}=\frac{6}{x-5}$. У відповідь записати найбільший корінь рівняння.

■ ОДЗ: $\frac{x+3}{x-5}>0$; $(x+3)(x-5)>0$. $x\in(-\infty;\,-3)\cup(5;\,+\infty)$.

Оскільки $\sqrt{\frac{x+3}{x-5}}=\frac{\sqrt{(x+3)(x-5)}}{|x-5|}$, то дана нерівність рівносильна сукупності таких систем:

$$\begin{cases} x>5; \\ x+3-\frac{\sqrt{(x+3)(x-5)}}{x-5}=\frac{6}{x-5}; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x<5; \\ x+3+\frac{\sqrt{(x+3)(x-5)}}{x-5}=\frac{6}{x-5}. \end{cases} \quad (2)$$

Розв'яжемо друге рівняння системи (1): $(x+3)(x-5)-\sqrt{(x+3)(x-5)}=6$.

Нехай $\sqrt{(x+3)(x-5)}=t$, $t>0$, тоді маємо: $t^2-t-6=0$; $\left[\begin{array}{l} t_1=3; \\ t_2=-2; \end{array}\right.$ $t_2=-2$ не задовольняє умову $t>0$.

Отже, $\left\{\begin{array}{l} x>5; \\ \sqrt{(x+3)(x-5)}=3; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x>5; \\ x^2-2x-15=9; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x>5; \\ x^2-2x-24=0; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x>5; \\ \left[\begin{array}{l} x_1=6; \\ x_2=-4; \end{array}\right. \end{array}\right.$ $x=6$.

Розв'яжемо друге рівняння системи (2): $(x+3)(x-5)+\sqrt{(x+3)(x-5)}=6$. Нехай $\sqrt{(x+3)(x-5)}=t$, $t>0$, тоді маємо: $t^2+t-6=0$; $\left[\begin{array}{l} t_1=-3; \\ t_2=2; \end{array}\right.$ $t_1=-3$ не задовольняє умову $t>0$. Отже,

$\left\{\begin{array}{l} x<5; \\ \sqrt{(x+3)(x-5)}=2; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x<5; \\ x^2-2x-15=4; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x<5; \\ x^2-2x-19=0; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x<5; \\ \left[\begin{array}{l} x_1=1+2\sqrt{5}; \\ x_2=1-2\sqrt{5}; \end{array}\right. \end{array}\right.$ $x=1-2\sqrt{5}$.

Корені $x=6$ і $x=1-2\sqrt{5}$ задовольняють ОДЗ. Більшим коренем є $x=6$.

Відповідь. 6. ■

Завдання 12.1–12.23 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

12.1. Знайти область визначення (область допустимих значень) рівняння $\sqrt{5-x}+\sqrt{x+1}=2$.

А	Б	В	Г	Д
R	$(-\infty;-1]$	$[5;+\infty)$	$(-1;5)$	$[-1;5]$

12.2. Вказати рівняння, областю визначення якого є одне число.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{x-4}+\sqrt{5-x}=3$	$\sqrt{5-x}+\sqrt{x-7}=2$	$\sqrt{x+2}-\sqrt{x}=-x$	$\sqrt{2x-6}+\sqrt{9-3x}=x$	$\sqrt{x}+\sqrt{-x-1}=2$

12.3. Вказати рівняння, область визначення якого є порожня множина.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{x+4}+\sqrt{x}=2$	$\sqrt{4-x}+\sqrt{-x}=2$	$\sqrt{x}+\sqrt{-x}=0$	$\sqrt{x-3}+\sqrt{x-6}=1$	$\sqrt{x-5}+\sqrt{4-x}=2$

12.4. Вказати рівняння, коренем якого є число 2.

А	Б	В	Г	Д
$(x-2)\sqrt{x-3}=0$	$(x-2)\sqrt{3-2x}=0$	$(x-2)\sqrt{-x}=0$	$(x-2)\sqrt{x-1}=0$	$(x-2)\sqrt{1-x}=0$

12.5. Знайти суму коренів рівнянь $\sqrt[3]{x}=2$, $\sqrt[3]{x}=-3$ і $\sqrt[3]{-x}=1$.

А	Б	В	Г	Д
–20	–18	0	12	9

12.6. Знайти суму коренів рівнянь $\sqrt{x-1}=2$ і $\sqrt{-x}=5$.

А	Б	В	Г	Д
30	–20	8	–7	–24

12.7. Яке з наведених рівнянь має корені?

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{x+7}=-1$	$\sqrt{x-3}+\sqrt{1-x}=2$	$\sqrt{x+5}+\sqrt{2-x}=0$	$\sqrt{2x-6}+\sqrt{x-3}=0$	$\sqrt{x}+\sqrt{3-x}=-2$

12.8. Знайти значення виразу $\sqrt{2x-9}$, якщо значення x задовольняє умову $\sqrt{2x-9}=\sqrt{6-x}$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	5 або –1	1 або –1	5	1

12.9. Знайти значення виразу $\sqrt{x+11}$, якщо значення x задовольняє умову $\sqrt{x+11}=1-x$.

А	Б	В	Г	Д
3 або 4	3 або –3	3	4 або –4	4

12.10. Знайти суму коренів рівняння $\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}+2=0$.

А	Б	В	Г	Д
9	–9	3	–3	2

12.11. Розв'язати рівняння $2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[6]{x+1}=6$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	$-4\frac{3}{8};7$	7	–7	63

12.12. Скільки коренів має рівняння $3\sqrt{x-1}+7\sqrt{1-x}=3x^3+7x^5$?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	більше, ніж три

12.13. Скільки цілих коренів має рівняння $\sqrt[4]{3x-6}+\sqrt[3]{x+6}=2-\sqrt{2-x}$?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	чотири

12.14. Скільки цілих коренів має рівняння $\sqrt{2008-x}+\sqrt{x-2007}=1$?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	чотири

12.15. Скільки ірраціональних коренів має рівняння $\sqrt{2x-3}=3-2x$?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	чотири

12.16. Скільки коренів має рівняння $\left(x^2-5\right)\left(x+\sqrt{-x}\right)=0$?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	чотири

12.17. Розв'язати рівняння $(3x+12)\sqrt{x-2}=0$.

А	Б	В	Г	Д
–4	–4; 2	2	–2; 4	–2

12.18. Знайти суму коренів рівняння $(x^2+5x-6)\sqrt{x+1,5}=0$.

А	Б	В	Г	Д
–6,5	3,5	–5	–2,5	–0,5

12.19. Скільки коренів має рівняння $(x-1)\sqrt{x^2-x-6}=6x-6$?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	чотири

12.20. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-a}=a$.

А	Б	В	Г	Д
За будь-якого a $x=2a$	за будь-якого a $x=a^2+a$	якщо $a\le 0$, $x\in\varnothing$, якщо $a>0$, $x=a^2+a$	якщо $a<0$, $x\notin\varnothing$, якщо $a\ge 0$, $x=a^2+a$	якщо $a<0$, $x\notin\varnothing$, якщо $a\ge 0$, $x=2a$

12.21. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+4}=a-2$.

А	Б	В	Г	Д
За будь-якого a $x=a^2-2a$	якщо $a<2$, $x\in\varnothing$, якщо $a\ge 0$, $x=a-2$	якщо $a\le 2$, $x\in\varnothing$, якщо $a>0$, $x=a-2$	якщо $a\le 2$, $x\in\varnothing$, якщо $a>0$, $x=a^2-2a$	якщо $a<2$, $x\in\varnothing$, якщо $a\ge 0$, $x=a^2-4a$

12.22. Знайти всі значення a, за яких рівняння $\sqrt{(x-a)(x+1)}=0$ та $(x-a)\sqrt{x+1}=0$ рівносильні.

А	Б	В	Г	Д
$a\le -1$	$a=-1$	$a>-1$	$a\ge -1$	$a<-1$

12.23. Знайти всі значення a, за яких рівняння $\sqrt{(x-a)(x+1)}=0$ та $(x+1)\sqrt{x-a}=0$ рівносильні.

А	Б	В	Г	Д
$a\le -1$	$a=-1$	$a>-1$	$a\ge -1$	$a<-1$

Завдання 12.24–12.30 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

12.24. Установити відповідність між заданими рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\sqrt{x-2}=-2$

2 $(x+2)\sqrt{x-6}=0$

3 $\sqrt{\dfrac{x-2}{x-6}}=0$

4 $\sqrt{x+6}=2$

А {2}

Б {6}

В ∅

Г {–2; 6}

Д {–2}

12.25. Установити відповідність між заданими рівняннями (1–4) та рівносильними їм рівняннями або системами (А–Д).

1 $\sqrt{x-2}=\sqrt{-5-x+x^2}$

2 $\sqrt{x^2-2x}=\sqrt{3}$

3 $(x+1)\cdot\sqrt{x-3}=0$

4 $\sqrt{x^2-6x+9}=1$

А $x^2-6x+9=0$

Б $\sqrt{x+1}\cdot(x-3)=1$

В $x^2-2x-3=0$

Г $|x-3|=1$

Д $\begin{cases}x^2-2x-3=0;\\ x-2\geq 0\end{cases}$

12.26. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та областями їх визначення (А–Д).

1 $\sqrt{x-4}+\sqrt{4-x}=0$

2 $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+4}=4$

3 $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+4}=4$

4 $\sqrt{x-4}+\sqrt{-x}=4$

А $\varnothing$

Б $(-\infty;-4]$

В $[-4;4]$

Г $[4;+\infty)$

Д $\{4\}$

12.27. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх коренів (А–Д).

1 $\sqrt{-x}=4$

2 $\sqrt{x}=-4$

3 $\sqrt{x^2}=16$

4 $\sqrt{x}-4=0$

А $\varnothing$

Б $\{-4;4\}$

В $\{16\}$

Г $\{-16\}$

Д $\{-16;16\}$

12.28. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх коренів (А–Д).

1 $\sqrt[3]{-2x}=4$

2 $\sqrt[4]{-4x}=4$

3 $\sqrt[4]{-4x}=-4$

4 $\sqrt[5]{-2x}=-2$

А $\varnothing$

Б $\{-64\}$

В $\{-32\}$

Г $\{32\}$

Д $\{16\}$

12.29. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та кількістю їх коренів (А–Д).

1 $x^2-10x\sqrt{x}+9x=0$

2 $x+10\sqrt{x}+9=0$

3 $x-5\sqrt{x}+4=0$

4 $x-3\sqrt{x}-4=0$

А Один

Б Два

В Три

Г Чотири

Д Жодного

12.30. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1 $(x-2)\sqrt{x+1}=0$

2 $(x+1)\sqrt{x-2}=0$

3 $(x-1)\sqrt{x-2}=0$

4 $(x+2)\sqrt{x-1}=0$

А $-1;2$

Б 2

В 2

Г $-1;1$

Д 1

Розв'яжіть завдання 12.31–12.47. Відповідь запишіть десятковим дробом.

12.31. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2-5x+1}=\sqrt{x-4}$.

12.32. Розв'язати рівняння $\sqrt{3-x}\sqrt{2-x}=\sqrt{2}$.

12.33. Розв'язати рівняння $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$.

12.34. Розв'язати рівняння $(x-1)\sqrt{x^2-x-42}=0$. У відповідь записати модуль різниці коренів.

12.35. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=1$.

12.36. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-1}=\sqrt{x+1}$.

12.37. Розв'язати рівняння $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\frac{x+3}{5-x}}=2$.

12.38. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2-3x+5}=-x^2+3x+7$. У відповідь записати модуль різниці коренів.

12.39. Знайти суму коренів рівняння $(x+1)(x-4)=\sqrt{x^2-3x+7}+9$.

12.40. Розв'язати рівняння $\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$.

12.41. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}\sqrt{x+7}-\sqrt{y-9}=2;\\ \sqrt{y+7}-\sqrt{x-9}=2.\end{cases}$ У відповідь записати найбільше зі значень x_0 або y_0, де пара $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

12.42. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2-3x-88}+\sqrt{176+6x-2x^2}\arccos(x-10)=0$.

12.43. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3$. У відповідь записати суму коренів.

12.44. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}=0$.

12.45. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-1}+2\sqrt{x^2+5x-6}=51-2x$.

12.46. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+6+4\sqrt{x+2}}-\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}}=4$. У відповідь записати найменший корінь.

12.47. Розв'язати рівняння $\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}=a$. У відповідь записати найбільше значення a, за якого рівняння має корені.

Тема 13. Ірраціональні нерівності

Нерівність, яка містить змінну під знаком радикала або в основі степеня з раціональним показником, називають *ірраціональною*. Наприклад, $\sqrt{x-2} > 3-7x$, $\sqrt[3]{x}+\sqrt{2x+1} \le 1$, $x^{\frac{1}{3}} - x > 3$ — ірраціональні нерівності.

Основним методом розв'язування ірраціональних нерівностей є піднесення обох її частин до степеня. Необхідно звернути увагу на таке:

1. Піднесення обох частин нерівності до непарного степеня зі збереженням знака нерівності завжди є рівносильним перетворенням. Наприклад, розв'язати нерівність $\sqrt[3]{x-2} < -2$. Можна виконати такі рівносильні перетворення: $\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^3 < (-2)^3$; $x - 2 < -8$; $x < -6$; $x \in (-\infty; -6)$.

Відповідь. $(-\infty; -6)$.

2. Якщо обидві частини нерівності на деякій множині X визначені та набувають лише невід'ємних значень, то при піднесенні обох частин нерівності до квадрата або іншого парного степеня зі збереженням знака вихідної нерівності одержимо нерівність, рівносильну вихідній на множині X. Наприклад, розв'язати нерівність $\sqrt[6]{2x-6} < 1$. ОДЗ: $2x - 6 \ge 0$; $x \ge 3$. Обидві частини вихідної нерівності невід'ємні, отже, дана нерівність рівносильна на $D(f)$ нерівностям: $\left(\sqrt[6]{2x-6}\right)^6 < 1^6$; $2x - 6 < 1$; $x < 3{,}5$. Врахувавши ОДЗ, одержимо: $3 \le x < 3{,}5$.

Відповідь. $[3; 3{,}5)$.

3. Ірраціональні нерівності виду $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$, де $g(x) < 0$, розв'язків не мають.

4. Щоб уникнути помилок, при розв'язуванні ірраціональних нерівностей доцільно розглядати ті значення змінної, за яких усі функції, які входять до нерівності, є визначеними, тобто знайти $D(f)$ цієї нерівності, а потім обґрунтовано виконати рівносильний перехід на всій області визначення або на її частинах.

Для розв'язування ірраціональних нерівностей можна застосовувати ще такі рівносильні перетворення:

1. $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0; \\ g(x) > 0; \\ f(x) < (g(x))^{2n}. \end{cases}$

Наприклад, розв'язати нерівність $\sqrt{4-x} < x+2$. Замінимо вихідну нерівність системою нерівностей $\begin{cases} 4-x \ge 0; \\ x+2 > 0; \\ 4-x < (x+2)^2; \end{cases} \begin{cases} x \le 4; \\ x > -2; \\ x^2 + 5x > 0; \end{cases} \begin{cases} -2 < x \le 4; \\ x(x+5) > 0; \end{cases} \begin{cases} -2 < x \le 4; \\ \left[\begin{array}{l} x < -5; \\ x > 0; \end{array}\right. \end{cases}$ $0 < x \le 4$; $x \in (0; 4]$.

Відповідь. $(0; 4]$.

2. $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0; \\ g(x) < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0; \\ f(x) > (g(x))^{2n}, \end{cases} \end{array}\right.$ зокрема, нерівність $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ рівносильна системі нерівностей $\begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$

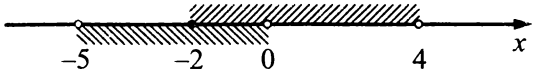
Наприклад: а) розв'язати нерівність $\sqrt{\frac{x-3}{1-3x}} > -1$. ОДЗ: $\frac{x-3}{1-3x} \geq 0$; $\frac{x-3}{3x-1} \leq 0$; $\begin{cases} 3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-3) \leq 0; \\ x \neq \frac{1}{3}; \end{cases}$

$\frac{1}{3} < x \leq 3$. Оскільки $\sqrt{\frac{x-3}{1-3x}} \geq 0$, то за всіх $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right]$ виконується нерівність $\sqrt{\frac{x-3}{1-3x}} > -1$.

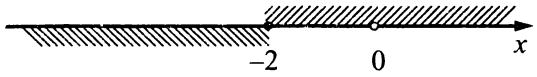
Відповідь. $\left(\frac{1}{3}; 3\right]$;

б) розв'язати нерівність $\sqrt{4-x} > x+2$. 1) $\begin{cases} 4-x \geq 0; \\ x+2 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 4; \\ x < -2; \end{cases}$ $x \in (-\infty; -2)$;

2) $\begin{cases} x+2 \geq 0; \\ 4-x > (x+2)^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -2; \\ x^2+5x < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -2; \\ -5 < x < 0; \end{cases}$ $x \in [-2; 0)$.



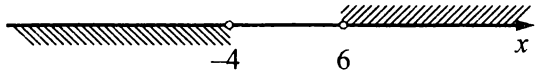
3) запишемо відповідь, об'єднавши результати, отримані в 1) і 2), й одержимо: $x \in (-\infty; -2) \cup [-2; 0) = (-\infty; 0)$.



Відповідь. $(-\infty; 0)$.

Розв'язування ірраціональних нерівностей виду $\sqrt{f(x)} + b <> bf(x) + c$

Розв'яжемо нерівність $\sqrt{2x^2-8x+12} < x^2-4x-6$. Виконаємо перетворення: $\sqrt{2x^2-8x+12} < \frac{1}{2}(2x^2-8x+12)-12$. Уведемо нову змінну: $\sqrt{2x^2-8x+12} = t$, $t \geq 0$. Отримаємо: $t < \frac{1}{2}t^2 - 12$; $t^2 - 2t - 24 > 0$; $t_1 = 6$, $t_2 = -4$. Урахувавши, що $t \geq 0$, маємо: $t > 6$.



Повертаємося до заміни: $\sqrt{2x^2-8x+12} > 6$; $2x^2 - 8x + 12 > 36$; $x^2 - 4x - 12 > 0$.

$\begin{bmatrix} x < -2; \\ x > 6; \end{bmatrix}$ $x \in (-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$.

Розв'язування ірраціональних нерівностей виду $\sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d} <> \sqrt{kx+m}$

Розв'яжемо нерівність $\sqrt{x+3} > \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1}$. ОДЗ: $\begin{cases} x \geq -3; \\ x \geq 0{,}5; \\ x \geq 1; \end{cases}$ $x \geq 1$. Оскільки обидві частини нерівності невід'ємні, то піднесемо їх до квадрата й одержимо: $x + 3 > 2x - 1 + x - 1 + 2\sqrt{(2x-1)(x-1)}$; $2\sqrt{(2x-1)(x-1)} < 5 - 2x$;

$\begin{cases} 5-2x > 0; \\ x \geq 1; \\ 4(2x^2-3x+1) < 25-20x+4x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \leq x < 2{,}5; \\ 8x^2-12x+4 < 25-20x+4x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \leq x < 2{,}5; \\ 4x^2+8x-21 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \leq x < 2{,}5; \\ -3{,}5 < x < 1{,}5; \end{cases}$

$x \in [1; 1{,}5)$.

Відповідь. $[1; 1{,}5)$.

Розв'язування ірраціональних нерівностей методом інтервалів

Алгоритм розв'язання складається із таких кроків:

1. Звести нерівність до виду $f(x) > 0$ або $f(x) < 0$.
2. Знайти $D(f)$.
3. Знайти нулі функції $f(x)$, розв'язавши рівняння $f(x) = 0$.
4. Позначити нулі функції та знайти знаки функції на кожному із проміжків, на які розбито $D(f)$.
5. Записати відповідь, урахувавши знак нерівності.

Наприклад, розв'язати нерівність $2\sqrt{x} + \sqrt{5-x} > \sqrt{x+21}$.

1. Зведемо нерівність до виду $2\sqrt{x} + \sqrt{5-x} - \sqrt{x+21} > 0$. Нехай $f(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt{5-x} - \sqrt{x+21}$.

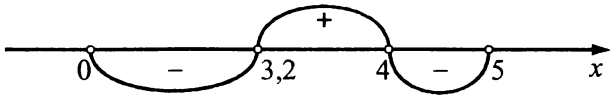
2. $D(f)$: $\begin{cases} x \ge 0; \\ 5-x \ge 0; \\ x+21 \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 0; \\ x \le 5; \\ x \ge -21; \end{cases}$ $0 \le x \le 5$.

3. Нулі функції $2\sqrt{x} + \sqrt{5-x} - \sqrt{x+21} = 0$.

$2\sqrt{x} + \sqrt{5-x} = \sqrt{x+21}$; $4x + 5 - x + 4\sqrt{x}\sqrt{5-x} = x + 21$; $4\sqrt{5x-x^2} = 16 - 2x$; $2\sqrt{5x-x^2} = 8 - x$;

$\begin{cases} 4(5x-x^2) = 64 - 16x + x^2; \\ 0 \le x \le 5; \\ 8 - x \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 5x^2 - 36x + 64 = 0; \\ 0 \le x \le 5; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = 4; \\ x_2 = \frac{16}{5}; \end{array}\right. \\ 0 \le x \le 5; \end{cases}$ $x_1 = 4$; $x_2 = 3{,}2$.

4. Розбиваємо $D(f)$ точками 4 і 3,2 на проміжки і знаходимо знак $f(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt{5-x} - \sqrt{x+21}$ на кожному із проміжків:



5. Відповідь. (3,2; 4).

Ірраціональні нерівності з параметрами

Розв'яжемо нерівність $\sqrt{x+a} + \sqrt{x} < a$. Оскільки ліва частина нерівності за умов $x \ge 0$ та $x + a \ge 0$ невід'ємна, то якщо $a \le 0$ нерівність розв'язків не має. Якщо $a > 0$, то отримаємо $\sqrt{x+a} < a - \sqrt{x}$;

$\begin{cases} a - \sqrt{x} > 0; \\ x + a < (a - \sqrt{x})^2; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x} < a; \\ x + a < a^2 - 2a\sqrt{x} + x; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x} < a; \\ 2a\sqrt{x} < a^2 - a; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{x} < a; \\ \sqrt{x} < \frac{a-1}{2}. \end{cases}$ За умови $a \le 1$ нерівність $\sqrt{x} < \frac{a-1}{2}$ розв'язків не має. Якщо $a > 1$, то $0 < \frac{a-1}{2} < a$, тому система рівносильна нерівності $\sqrt{x} < \frac{a-1}{2}$, звідки $x \in \left[0; \frac{(a-1)^2}{4}\right)$.

Відповідь. Якщо $a \le 1$, то $x \in \varnothing$; якщо $a > 1$, то $x \in \left[0; \frac{(a-1)^2}{4}\right)$.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\sqrt{2x+3} \geq -4$.

А	Б	В	Г	Д
$(-3{,}5; +\infty)$	$(6{,}5; +\infty)$	$(1{,}5; +\infty)$	$[6{,}5; +\infty)$	$[-1{,}5; +\infty)$

■ $\sqrt{2x+3} \geq -4$. Розв'язки нерівності — усі допустимі значення x. Отже, $2x+3 \geq 0$; $2x \geq -3$; $x \geq -1{,}5$.

Відповідь. **Д.** ■

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{x^3-2x} > x+2$.

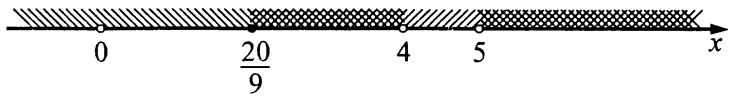
■ Піднесемо обидві частини нерівності $\sqrt[3]{x^3-2x} > x+2$ до куба: $x^3-2x > x^3+6x^2+12x+8$; $6x^2+14x+8<0$; $3x^2+7x+4<0$; $x_1=-1, x_2=-\frac{4}{3}$; $x \in \left(-\frac{4}{3}; -1\right)$.

Відповідь. $\left(-\frac{4}{3}; -1\right)$. ■

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\sqrt{9x-20} < x$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{20}{9}; 4\right)$	$\left[\frac{20}{9}; 4\right) \cup (5; +\infty)$	$[5; +\infty)$	$\left(\frac{20}{9}; 4\right) \cup (5; +\infty)$	$(5; +\infty)$

■ $\begin{cases} 9x-20 \geq 0; \\ x>0; \\ \left(\sqrt{9x-20}\right)^2 < x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq \frac{20}{9}; \\ x>0; \\ 9x-20<x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq \frac{20}{9}; \\ x^2-9x+20>0; \end{cases}$ $x_1=4, x_2=5;$ $\begin{cases} x \geq \frac{20}{9}; \\ x \in (-\infty; 4) \cup (5; +\infty). \end{cases}$



$x \in \left[\frac{20}{9}; 4\right) \cup (5; +\infty)$

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\sqrt{\left(x^2-5x+6\right)^2} > 2-x$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$(2; +\infty)$	$[3; +\infty)$	$(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup \cup (3; +\infty)$

■ Замінимо вихідну нерівність на нерівність $|x^2-5x+6| > 2-x$; далі розкриємо модуль за означенням: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-5x+6 \geq 0; \\ x^2-5x+6>2-x; \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x^2-5x+6<0; \\ -(x^2-5x+6)>2-x. \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$ Розв'яжемо систему (1): $\begin{cases} x^2-5x+6 \geq 0; \\ x^2-5x+6>2-x; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-2)(x-3) \geq 0; \\ x^2-4x+4>0; \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq 2; \\ x \geq 3; \end{array}\right. \\ x \neq 2; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x<2; \\ x \geq 3; \end{array}\right.$ $x \in (-\infty; 2) \cup [3; +\infty)$.

Розв'яжемо систему (2): $\begin{cases} x^2-5x+6<0; \\ x^2-5x+6<x-2; \end{cases} \begin{cases} (x-2)(x-3)<0; \\ x^2-6x+8<0; \end{cases} \begin{cases} 2<x<3; \\ 2<x<4; \end{cases} x\in(2;\,3).$

Об'єднавши результати, одержимо:

$x\in(-\infty;\,2)\cup(2;\,+\infty)$.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2-3x-4}<\sqrt{x^2-5x+6}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;\,-1]$	$(-\infty;\,-1]\cup[4;\,5)$	$[4;\,5)$	$(-\infty;\,-1)\cup(4;\,5)$	$(-\infty;\,5)$

■ Дана нерівність рівносильна системі: $\begin{cases} x^2-3x-4\ge 0; \\ x^2-5x+6>0; \\ x^2-3x-4<x^2-5x+6; \end{cases} \begin{cases} (x+1)(x-4)\ge 0; \\ (x-2)(x-3)>0; \\ 2x<10; \end{cases}$

$\begin{cases} x\in(-\infty;\,-1)\cup(4;\,+\infty); \\ x\in(-\infty;\,2)\cup(3;\,+\infty); \\ x<5; \end{cases} \begin{bmatrix} x\le 1; \\ 4\le x<5; \end{bmatrix} x\in(-\infty;\,-1]\cup[4;\,5).$

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 6. Розв'язати нерівність $\sqrt{\dfrac{x-3}{1-5x}}\le 0$.

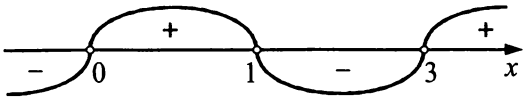
А	Б	В	Г	Д
0,2; 3	(0,2; 3]	3	$[3;\,+\infty)$	$\varnothing$

■ Ураховуючи, що $\sqrt{\dfrac{x-3}{1-5x}}\ge 0$ для всіх допустимих значеннях x, можемо зробити висновок, що розв'язком заданої нерівності є лише розв'язок рівняння $\sqrt{\dfrac{x-3}{1-5x}}=0;\ \dfrac{x-3}{1-5x}=0;\ x=3$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 7. Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}>1$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

■ ОДЗ: $x-1\ge 0;\ x\ge 1$. Перепишемо нерівність у вигляді: $\sqrt[3]{2-x}>1-\sqrt{x-1}$ й піднесемо обидві частини нерівності до куба: $\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^3>\left(1-\sqrt{x-1}\right)^3;\ 2-x>\left(1-\sqrt{x-1}\right)^3;\ 1-(x-1)>\left(1-\sqrt{x-1}\right)^3$. Нехай $\sqrt{x-1}=t$. Тоді останню нерівність перепишемо у вигляді: $1-t^2>(1-t)^3;\ (1-t)(1+t)>(1-t)^3;\ (1-t)(1+t-1+2t-t^2)>0;\ (1-t)(3t-t^2)>0;\ t(t-1)(t-3)>0$.



$\left[\begin{array}{l} t>3; \\ 0<t<1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1}>3; \\ 0<\sqrt{x-1}<1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x-1>9; \\ 0<x-1<1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x>10; \\ 1<x<2. \end{array}\right.$

Отже, $x\in(1;\,2)\cup(10;\,+\infty)$. Найменший цілий розв'язок дорівнює 11.

Відповідь. 11. ■

Приклад 8. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $(x-2)\sqrt{16-x^2}\le 0$.

■ ОДЗ: $16-x^2\ge 0$; $(x-4)(x+4)\le 0$; $-4\le x\le 4$; $x\in[-4;\,4]$. Тоді: $\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x\in[-4;\,4]; \\ \left[\begin{array}{l} x=-4; \\ x=4; \\ x=2; \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x-2<0; \\ x\in[-4;\,4], \end{array}\right. \end{array}\right.$ звідки $\left[\begin{array}{l} x=-4; \\ x=4; \\ x=2; \\ -4<x<2. \end{array}\right.$

Отже, $x\in[-4;\,2]\cup\{4\}$. Цілими розв'язками є: –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 4, усього їх є 8.

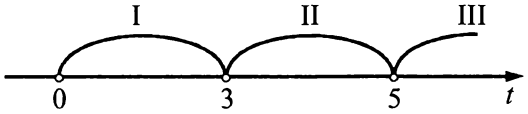
Відповідь. 8. ■

Приклад 9. Розв'язати нерівність $\sqrt{5x+8-6\sqrt{5x-1}}+\sqrt{5x+24-10\sqrt{5x-1}}\le 2$. (*) У відповідь записати суму цілих розв'язків нерівності.

■ $\sqrt{5x+8-6\sqrt{5x-1}}+\sqrt{5x+24-10\sqrt{5x-1}}\le 2$. Нехай $\sqrt{5x-1}=t$, $t\ge 0$. Тоді $5x-1=t^2$; $5x+8=t^2+9$; $5x+24=t^2+25$. Тоді маємо: $\sqrt{t^2-6t+9}+\sqrt{t^2-10t+25}\le 2$; $\sqrt{(t-3)^2}+\sqrt{(t-5)^2}\le 2$; $|t-3|+|t-5|\le 2$. (**)

1. ОДЗ нерівності (**): $t\in R$, але за умовою $t\ge 0$.

2. Нулі підмодульних функцій: $t_1=3$; $t_2=5$.

3. 

I. $\left\{\begin{array}{l} 0\le t\le 3; \\ -t+3-t+5\le 2; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} 0\le t\le 3; \\ -2t\le -6; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} 0\le t\le 3; \\ t\ge 3; \end{array}\right.$ $t=3$;

II. $\left\{\begin{array}{l} 3<t\le 5; \\ t-3-t+5\le 2; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} 3<t\le 5; \\ 0t\le 0; \end{array}\right.$ $t\in(3;\,5]$;

III. $\left\{\begin{array}{l} t>5; \\ t-3+t-5\le 2; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} t>5; \\ 2t\le 10; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} t>5; \\ t\le 5; \end{array}\right.$ розв'язків немає.

Отже, $3\le t\le 5$.

Повернемося до заміни: $3\le\sqrt{5x-1}\le 5$; $9\le 5x-1\le 25$; $10\le 5x\le 26$; $2\le x\le 5{,}2$. Цілі розв'язки: 2, 3, 4, 5, а їхня сума 2 + 3 + 4 + 5 = 14.

Відповідь. 14. ■

Приклад 10. За якого найбільшого цілого значення параметра a будь-яке x із проміжку [1; 5] задовольняє нерівність $3ax+2\sqrt{3x+1}-6x+a-5<0$?

■ Задана нерівність на проміжку $x\in[1;\,5]$ рівносильна нерівності: $(3x+1)a<6x-2\sqrt{3x+1}+5$;

$a<\dfrac{6x+5}{3x+1}-\dfrac{2}{\sqrt{3x+1}}$; $a<2+\dfrac{3}{3x+1}-\dfrac{2}{\sqrt{3x+1}}$; $a<\dfrac{3}{3x+1}-2\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3x+1}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}+2$; $a<\dfrac{5}{3}+\left(\sqrt{\dfrac{3}{3x+1}}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$.

Рівняння $\sqrt{\frac{3}{3x+1}}-\frac{\sqrt{3}}{3}=0$ має єдиний корінь $x=\frac{8}{3}$ $\left(\frac{3}{3x+1}=\frac{3}{9}\Leftrightarrow 3x+1=9; x=\frac{8}{3}\right)$ і цей корінь належить проміжку [1; 5]. Доходимо висновку: лише якщо $a<\frac{5}{3}$, то будь-яке $x\in[1; 5]$ задовольняє початкову нерівність.

Отже, $a<\frac{5}{3}$, $a\in\left(-\infty;\frac{5}{3}\right)$, найбільше ціле значення $a = 1$.

Відповідь. 1. ■

Завдання 13.1–13.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

13.1. Знайти множину розв'язків нерівності $\sqrt{x}>-3$.

А	Б	В	Г	Д
R	$\varnothing$	(9; +∞)	[0; +∞)	(0; +∞)

13.2. Розв'язати нерівність $\sqrt{x}\geq 5$.

А	Б	В	Г	Д
[0; +∞)	[5; +∞)	[25; +∞)	(5; +∞)	(25; +∞)

13.3. Розв'язати нерівність $\sqrt{x}\leq 4$.

А	Б	В	Г	Д
(–∞; 16]	(0; 2]	[0; 2]	(0; 16]	[0; 16]

13.4. Знайти множину розв'язків нерівності $\sqrt{x}<-2$.

А	Б	В	Г	Д
R	$\varnothing$	(–∞; –2)	(–∞; –4)	[0; 4)

13.5. Розв'язати нерівність $\sqrt[4]{x}<2$.

А	Б	В	Г	Д
[0; 2)	[0; 8)	(–∞; 16)	[0; 16)	(0; 16)

13.6. Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{x}>-2$.

А	Б	В	Г	Д
(–8; +∞)	(0; +∞)	(8; +∞)	(–8; 0)	(–8; 0]

13.7. Знайти множину розв'язків нерівності $\sqrt{x+3}>\sqrt{x-1}$.

А	Б	В	Г	Д
R	[3; +∞)	[1; +∞)	(1; +∞)	[3; +∞)

13.8. Розв'язати нерівність $\sqrt{x}\leq x$.

А	Б	В	Г	Д
[1; +∞)	[0; +∞)	[0; 1]	{0}∪(1; +∞)	{0}∪[1; +∞)

13.9. Скільки цілих розв'язків має нерівність $\sqrt{2x} \geq x$?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	більше, ніж три

13.10. Розв'язати нерівність $(x+4)\sqrt{-x} > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	$(-4; 0)$	$(-4; 0]$	$(-4; +\infty)$	$\{0\} \cup (4; +\infty)$

13.11. Скільки цілих розв'язків має нерівність $(5-x)\sqrt{x} > 0$?

А	Б	В	Г	Д
Три	чотири	п'ять	шість	більше, ніж шість

13.12. Розв'язати нерівність $(x-6)\sqrt{x} \geq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$(6; +\infty)$	$[6; +\infty)$	$\{0\} \cup [6; +\infty)$

13.13. Розв'язати нерівність $(x+1)\sqrt{x+3} \leq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	$[-3; +\infty)$	$[-1; +\infty;)$	$[-3; -1]$	$[1; 3]$

13.14. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2-9} < x$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$	$(3; +\infty)$	$[3; +\infty)$	$(-\infty; -3]$	$\varnothing$

13.15. Знайти множину розв'язків нерівності $\sqrt{x^2-1} > x$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	$[-1; 1]$	$(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$	$(-\infty; -1)$	$(-\infty; -1]$

13.16. Знайти множину розв'язків нерівності $\sqrt{3x+7} < x+1$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[-\frac{7}{3}; +\infty\right)$	$(-1; 0)$	$(3; +\infty)$	$[3; +\infty)$	$(-1; 3)$

13.17. Серед наведених нерівностей вказати ту, множина розв'язків якої містить множину натуральних чисел.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{x} > 1$	$\sqrt{x} > -1$	$\sqrt{x} < -1$	$\sqrt{x} < 1$	$\sqrt{-x} > -1$

13.18. Серед наведених нерівностей вказати ту, множиною розв'язків якої є відрізок $[-2; 0]$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{-x} \geq \sqrt{2}$	$\sqrt{x} \geq \sqrt{2}$	$\sqrt{x} \leq \sqrt{2}$	$\sqrt{-x} \leq \sqrt{2}$	$\sqrt{-x} \leq -\sqrt{2}$

13.19. Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{x-3}\sqrt{x-2}\sqrt[4]{5-x} \le 0$.

А	Б	В	Г	Д
$[3; +\infty)$	$[5; +\infty)$	$(-\infty; 3]$	$[2; 3]$	$[2; 3]\cup\{5\}$

13.20. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\sqrt[3]{x-3}\sqrt{x-3}\sqrt[4]{5-x} \ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
14	12	9	7	6

Завдання 13.21–13.27 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

13.21. Установити відповідність між заданими нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\sqrt{x^2+1} > -2$

2 $\sqrt{x+1} < -2$

3 $\frac{1}{\sqrt{3-x}} > 0$

4 $\sqrt{x} > \sqrt{2x-3}$

А $(-\infty; +\infty)$

Б $(-\infty; -\sqrt{3})\cup(\sqrt{3}; +\infty)$

В $(-\infty; 3)$

Г $\varnothing$

Д $(1{,}5; 3)$

13.22. Установити відповідність між заданими нерівностями (1–4) та рівносильними їм нерівностями або системами (А–Д).

1 $\sqrt{x^2+7} > x$

2 $\sqrt{x-2} < \sqrt{1-x}$

3 $\sqrt{x^2+2x} > -3$

4 $\sqrt{2-x} > \sqrt{x-1}$

А $x^2+2x > 9$

Б $\cos x < -\sqrt{3}$

В $\begin{cases} 2x < 3; \\ x-1 \ge 0 \end{cases}$

Г $\sin x > -\frac{\pi}{2}$

Д $x^2+2x \ge 0$

13.23. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\sqrt{x} \ge -4$

2 $\sqrt{x+4} \ge 0$

3 $\sqrt{x} \ge 2$

4 $\sqrt{x-2} \ge 0$

А $[-4; +\infty)$

Б $[-2; +\infty)$

В $[0; +\infty)$

Г $[2; +\infty)$

Д $[4; +\infty)$

13.24. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\sqrt{x} \le 2$

2 $\sqrt{x} \le -2$

3 $\sqrt{x-2} \le 2$

4 $\sqrt{x+2} \le 2$

А $[-2; 0]$

Б $[-2; 2]$

В $[0; 4]$

Г $[2; 6]$

Д $\varnothing$

13.25. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\sqrt{-x} \geq -\sqrt{3}$	**А** $(-\infty; -3]$
2 $\sqrt{-x} \leq -\sqrt{3}$	**Б** $(-\infty; 0]$
3 $\sqrt{-x} \geq \sqrt{3}$	**В** $[-3; 0]$
4 $\sqrt{-x} \leq \sqrt{3}$	**Г** $[0; +\infty)$
	Д $\varnothing$

13.26. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\sqrt{x+2} > \sqrt{x}$	**А** $\varnothing$
2 $\sqrt{x} > \sqrt{x-2}$	**Б** $[-2; +\infty)$
3 $\sqrt{x+2} > \sqrt{-x}$	**В** $[-1; 0]$
4 $\sqrt{-x} > \sqrt{x-2}$	**Г** $[0; +\infty)$
	Д $[2; +\infty)$

13.27. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\sqrt{x} \geq x$	**А** $\varnothing$
2 $\sqrt{x} \leq x$	**Б** $(-\infty; 0]$
3 $\sqrt{-x} \geq x$	**В** $[0; 1]$
4 $\sqrt{-x} \leq x$	**Г** $[1; +\infty)$
	Д $\{0\}$

Розв'яжіть завдання 13.28–13.40. Відповідь запишіть десятковим дробом.

13.28. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2 - 7x + 5} \geq \sqrt{3x - 4}$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

13.29. Розв'язати нерівність $\sqrt{\dfrac{2x-3}{4x-1}} \geq \sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$. У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.

13.30. Розв'язати нерівність $\sqrt{(x-3)(2-x)} < 3 + 2x$. У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.

13.31. Розв'язати нерівність $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$. У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.

13.32. Розв'язати нерівність $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x-2} < 1$. У відповідь записати суму всіх натуральних чисел, які не є розв'язками нерівності.

13.33. Розв'язати нерівність $(x-1)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$. У відповідь записати найбільше ціле від'ємне число, яке не є розв'язком нерівності.

13.34. Розв'язати нерівність $\sqrt{x-6} - \sqrt{x+10} \leq 1$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

13.35. Розв'язати нерівність $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+15} \leq 5$. У відповідь записати суму найбільшого та найменшого розв'язків нерівності.

13.36. Розв'язати нерівність $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$. У відповідь записати суму всіх цілих розв'язків нерівності.

13.37. Розв'язати нерівність $\sqrt{(3x-2)^2}>x+6$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

13.38. Розв'язати нерівність $\left|\sqrt{x-2}-3\right|\geq\left|\sqrt{7-x}-2\right|+1$. У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.

13.39. Розв'язати нерівність $\sqrt{25-x^2}\leq\frac{12}{x}$. У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.

13.40. Розв'язати нерівність $\frac{11-\sqrt{25-x^2}}{x}\leq 2$. У відповідь записати модуль добутку усіх цілих розв'язків нерівності.

Тема 14. Показникові рівняння

Рівняння, яке містить змінну в показнику степеня, називають *показниковим* рівнянням.

Рівняння виду $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називають найпростішим показниковим рівнянням. Наприклад, $5^x = 125$; $\left(\frac{2}{7}\right)^x = 1{,}5$ тощо. Якщо $b > 0$, то розв'язком рівняння $a^x = b$ є $x = \log_a b$; якщо $b \leq 0$, то рівняння $a^x = b$ коренів не має.

Показникові рівняння найчастіше розв'язують шляхом логарифмування обох його частин:

- рівняння виду $a^{f(x)} = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ розв'язують, логарифмуючи обидві його частини за основою a. Отримують рівносильне рівняння $f(x) = \log_a b$;
- рівняння виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, де $a > 0$, $a \neq 1$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$;
- рівняння виду $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)\log_a b$.

Зведення до однієї основи

Розв'язати рівняння $2^{7-3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$. Маємо: $2^{7-3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$; $2^{7-3x} = 2^{4-x}$; $7 - 3x = 4 - x$; $2x = 3$; $x = 1{,}5$.

Відповідь. 1,5.

Розв'язати рівняння $7^{2\sin+\sqrt{3}} = 1$. Одержимо: $7^{2\sin+\sqrt{3}} = 1$; $7^{2\sin+\sqrt{3}} = 7^0$; $2\sin x + \sqrt{3} = 0$; $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

Відповідь. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

Рівняння $a^{f(x)} = b^{f(x)}$, які не зводяться до однієї основи

Розв'язати рівняння $3^{x+2} = 5^{x+2}$ (основи різні, показники однакові). Розділимо обидві частини рівняння на $5^{x+2} \neq 0$. Одержимо: $\frac{3^{x+2}}{5^{x+2}} = 1$; $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+2} = \left(\frac{3}{5}\right)^0$; $x + 2 = 0$; $x = -2$.

Відповідь. –2.

Розв'язати рівняння $3^{2x-1} = 5^{3-x}$. Прологарифмуємо рівняння за основою 10 (логарифмувати можна й за основою 5 або за основою 3): $\lg 3^{2x-1} = \lg 5^{3-x}$; $(2x-1)\lg 3 = (3-x)\lg 5$; $2x\lg 3 + x\lg 5 = 3\lg 5 + \lg 3$; $x(2\lg 3 + \lg 5) = 3\lg 5 + \lg 3$, звідки $x = \frac{3\lg 5 + \lg 3}{2\lg 3 + \lg 5} = \frac{\lg(5^3 \cdot 3)}{\lg(3^2 \cdot 5)} = \frac{\lg 375}{\lg 45} = \lg_{45} 375$.

Відповідь. $\lg_{45}375$.

Винесення спільного множника за дужки

Розв'язати рівняння $2 \cdot 7^{x+1} - 6 \cdot 7^{x-1} - 7^x = 85$. Винесемо за дужки 7^{x-1} — множник з найменшим показником. Матимемо: $7^{x-1}(2 \cdot 7^2 - 6 - 7) = 85$; $7^{x-1} \cdot 85 = 85$; $7^{x-1} = 1$; $7^{x-1} = 7^0$; $x - 1 = 0$; $x = 1$.

Відповідь. 1.

Рівняння, які зводять до квадратних

1. Рівняння виду $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x + C = 0$

Уведемо нову змінну $a^x = t$, $t > 0$ й одержимо квадратне рівняння.

Наприклад, розв'язати рівняння $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$. Нехай $2^x = t$, тоді маємо: $t^2 - 10t + 16 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t_1 = 2; \\ t_2 = 8. \end{array}\right.$ Повертаємося до заміни: $\left[\begin{array}{l} 2^x = 2; \\ 2^x = 8; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 1; \\ x = 3. \end{array}\right.$

Відповідь. 1; 3.

2. Рівняння виду $A \cdot a^x + B \cdot a^{-x} = C$

За допомогою заміни $a^x = t$, $t > 0$ рівняння можна звести до квадратного.

Наприклад, розв'язати рівняння $5^x + 3 \cdot 5^{-x} = 4$. Нехай $5^x = t$, тоді маємо: $t + \frac{3}{t} = 4$; $t^2 - 4t + 3 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t_1 = 1; \\ t_2 = 3. \end{array}\right.$ Повертаємося до заміни: $\left[\begin{array}{l} 5^x = 1; \\ 5^x = 3; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = \log_5 3. \end{array}\right.$

Відповідь. 0; $\log_5 3$.

Однорідні показникові рівняння $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x \cdot b^x + C \cdot b^{2x} = 0$

Поділимо обидві частини рівняння на $a^{2x} \neq 0$, тоді одержимо рівняння $A + B\left(\frac{b}{a}\right)^x = C\left(\frac{b}{a}\right)^{2x}$. Виконаємо заміну $\left(\frac{b}{a}\right)^x = t$, $t > 0$, і зведемо це рівняння до квадратного.

Наприклад, розв'язати рівняння $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$. Маємо: $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$; $3 \cdot 4^{2x} + 2 \cdot 9^{2x} = 5 \cdot 4^x \cdot 9^x$. Поділимо обидві частини на $9^{2x} \neq 0$: $3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 2 = 0$. Нехай $\left(\frac{4}{9}\right)^x = t$, $t > 0$, тоді маємо: $3t^2 - 5t + 2 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t_1 = 1; \\ t_2 = \frac{2}{3}. \end{array}\right.$ Повертаємося до заміни: $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{4}{9}\right)^x = 1; \\ \left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{4}{9}\right)^0; \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ 2x = 1; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = 0{,}5. \end{array}\right.$

Відповідь. 0; 0,5.

Рівняння виду $A^x + B^x = C$, де $A \cdot B = 1$

Уведемо заміну $A^x = t$, $t > 0$. Тоді $B^x = \frac{1}{t}$ і рівняння можна звести до квадратного.

Наприклад, розв'язати рівняння $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x + \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = 6$. Нехай $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x = t$, $t > 0$. Тоді $\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = \left(\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}\right)^x = \frac{1}{t}$. Одержимо: $t + \frac{1}{t} = 6$; $t^2 - 6t + 1 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t_1 = 3 + 2\sqrt{2}; \\ t_2 = 3 - 2\sqrt{2}. \end{array}\right.$ Повертаємося до заміни: $\left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x = 3 + 2\sqrt{2}; \\ \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x = 3 - 2\sqrt{2}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \left(3+2\sqrt{2}\right)^{\frac{x}{2}} = 3 + 2\sqrt{2}; \\ \left(3+2\sqrt{2}\right)^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \left(3+2\sqrt{2}\right)^{\frac{x}{2}} = 3 + 2\sqrt{2}; \\ \left(3+2\sqrt{2}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(3+2\sqrt{2}\right)^{-1}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 2; \\ x = -2. \end{array}\right.$

Відповідь. ± 2.

Використання монотонності функцій

Розв'язати рівняння $2^x = 3 - x$. Методом підбору знаходимо, що $x = 1$ — корінь рівняння. Функція $y = 2^x$ — зростаюча, а функція $y = 3 - x$ — спадна, тому цей корінь — єдиний.

Відповідь. 1.

Розв'язати рівняння $12^x + 5^x = 13^x$. Поділимо обидві частини рівняння на $12^x \neq 0$: $1+\left(\frac{5}{12}\right)^x = \left(\frac{13}{12}\right)^x$.

Методом підбору знаходимо, що $x = 2$ — корінь рівняння. Функція $y = 1+\left(\frac{5}{12}\right)^x$ — спадна, а функція $y = \left(\frac{13}{12}\right)^x$ — зростаюча ($a > 1$), тому графіки цих функцій перетинаються не більше як в одній точці.

Відповідь. 2.

Показниково-степеневі рівняння — рівняння, які мають змінну в показнику степеня і в основі

Розв'язування рівнянь виду $\left(f(x)\right)^{g(x)} = \left(f(x)\right)^m$ зводиться до випадків:

1. $f(x) = 1$.
2. $f(x) = -1$.
3. $f(x) = 0$.
4. $g(x) = m$.

Наприклад, розв'язати рівняння $\left(x+1\right)^{x^2+x-4} = \left(x+1\right)^2$. Для відшукання коренів рівняння потрібно розглянути чотири випадки:

1. $x + 1 = 1$, звідки $x = 0$. Одержимо: $1^{-4} = 1^2$; $1 = 1$. $x = 0$ — корінь рівняння;
2. $x + 1 = -1$, звідки $x = -2$. Одержимо: $(-1)^{-2} = (-1)^2$; $1 = 1$. $x = -2$ — корінь рівняння;
3. $x + 1 = 0$, звідки $x = -1$. Одержимо: вираз 0^{-4} не має змісту, тому $x = -1$ не є коренем рівняння;
4. $x^2 + x - 4 = 2$; $x^2 + x - 6 = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = -3$.

Відповідь. –3; –2; 0; 2.

Показникові рівняння з параметром

Розв'язати рівняння $3 \cdot 4^{x-2} + 27 = a + a \cdot 4^{x-2}$.

Перетворимо задане рівняння: $3 \cdot 4^{x-2} - a \cdot 4^{x-2} = a - 27$; $4^{x-2}(3 - a) = a - 27$. Якщо $a = 3$, то маємо: $4^{x-2} \cdot 0 = -24$ — рівняння коренів не має. У випадку, коли $a \neq 3$, одержимо рівняння: $4^{x-2} = \frac{a-27}{3-a}$. Це рівняння матиме корені, якщо $\frac{a-27}{3-a} > 0$, тобто коли $a \in (3; 27)$. Тоді за означенням логарифма маємо: $x - 2 = \log_4 \frac{a-27}{3-a}$; $x = 2 + \log_4 \frac{a-27}{3-a}$.

Відповідь. Якщо $a \leq 3$ або $a \geq 27$, то рівняння коренів не має; якщо $a \in (3; 27)$, то $x = 2 + \log_4 \frac{a-27}{3-a}$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $0{,}2^{3x-1} = \sqrt{125}$.

А	Б	В	Г	Д
5	3	1	$-\frac{1}{6}$	0,4

■ $0{,}2^{3x-1} = \sqrt{125}$; $\left(5^{-1}\right)^{3x-1} = \left(5^3\right)^{\frac{1}{2}}$; $5^{-3x+1} = 5^{\frac{3}{2}}$; $-3x + 1 = \frac{3}{2}$; $x = -\frac{1}{6}$.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 2. Розв'язати рівняння $4^{x-1} - 1{,}5 \cdot 2^{x+2} + 20 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\log_2 20$	2	2; $\log_2 20$	10	4

■ $4^{x-1}-1{,}5\cdot 2^{x+2}+20=0$; $\frac{4^x}{4^1}-1{,}5\cdot 2^x\cdot 2^2+20=0$; $4^x-24\cdot 2^x+80=0$. Зробимо заміну: $2^x=t$, тоді $4^x=t^2$. Одержимо: $t^2-24t+80=0$; $t_1=20$, $t_2=4$. Повертаємось до змінної x: $2^x=20$; $x=\log_2 20$ або $2^x=4$; $x=2$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 3. Розв'язати рівняння $3\cdot 4^x-5\cdot 6^x+2\cdot 9^x=0$.

А	Б	В	Г	Д
0	1	$\frac{2}{3}$	$1;\frac{2}{3}$	0; 1

■ $3\cdot 4^x-5\cdot 6^x+2\cdot 9^x=0$; $3\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x\cdot 3^x+2\cdot 3^{2x}=0$. Поділимо обидві частини рівняння на вираз $3^{2x}\neq 0$ й одержимо: $3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+2=0$. Зробимо заміну: $\left(\frac{2}{3}\right)^x=a$. Тоді $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=a^2$. Отримаємо: $3a^2-5a+2=0$; $a_1=1, a_2=\frac{2}{3}$. Повертаємося до попередньої змінної: $\left(\frac{2}{3}\right)^x=1; x=0$ або $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{2}{3}$; $x=1$.

Відповідь. **Д.** ■

Приклад 4. Розв'язати рівняння $7^{x+1}=14\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}$

А	Б	В	Г	Д
1	7	0	14	0,5

■ $7^{x+1}=14\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}$. Очевидно, що $x=0$ — корінь рівняння $\left(7^1=14\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1;\ 7=7\right)$. Функція $y=7^{x+1}$ зростаюча, а функція $y=14\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}$ спадна. Тому дане рівняння має не більше одного кореня. Отже, інших коренів, крім $x=0$, немає.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 5. Розв'язати рівняння $5^{\frac{x+4}{x}}-124\cdot 5^{\frac{2}{x}}-25=0$.

А	Б	В	Г	Д
1	4	2	0	0,5

■ Зведемо степені лівої частини до одного показника: $5^{\frac{x+4}{x}}-124\cdot 5^{\frac{2}{x}}-25=0$; $5^{1+\frac{4}{x}}-124\cdot 5^{\frac{2}{x}}-25=0$; $5\cdot\left(5^{\frac{2}{x}}\right)^2-124\cdot 5^{\frac{2}{x}}-25=0$. Зробимо заміну $5^{\frac{2}{x}}=a$. Одержимо: $5a^2-124a-25=0$; $a_1=-\frac{1}{5}$; $a_2=25$. Повертаємося до попередньої заміни: $5^{\frac{2}{x}}=-\frac{1}{5}$ — коренів немає. $5^{\frac{2}{x}}=25$; $5^{\frac{2}{x}}=5^2$; $\frac{2}{x}=2$; $x=1$.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 6. Знайти суму коренів рівняння $\left(3^{2x^2-29}-27\right)\sqrt[4]{5x+18}=0$.

А	Б	В	Г	Д
0,4	–3,6	4	інша відповідь	–7,6

■ ОДЗ рівняння: $5x+18\geq 0$; $x\geq -3{,}6$. Маємо: **1.** $3^{2x^2-29}-27=0$; $3^{2x^2-29}=3^3$; $2x^2-29=3$; $x^2=16$; $x_1=-4$, $x_2=4$. Урахувавши ОДЗ, маємо: $x=4$. **2.** $\sqrt[4]{5x+18}=0$; $5x+18=0$; $x=-3{,}6$. Отже, коренями рівняння є числа –3,6 і 4, а їх сума дорівнює –3,6 + 4 = 0,4.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 7. Знайти суму коренів рівняння $2^x+2^{-x}=2\cos 2x$.

■ Оцінимо ліву й праву частини рівняння: $2^x+2^{-x}=2^x+\frac{1}{2^x}\geq 2$; $2\cos 2x\leq 2$. Замінимо рівняння рівносильною системою: $\begin{cases}2^x+\frac{1}{2^x}=2; & (1)\\ 2\cos 2x=2. & (2)\end{cases}$

Розв'яжемо перше рівняння системи. Нехай $2^x=t$, $t>0$. $t+\frac{1}{t}=2$; $t^2-2t+1=0$; $t=1$; $2^x=1$; $x=0$.

Перевіримо, чи задовольняє корінь $x=0$ друге рівняння системи: $2\cos(2\cdot 0)=2$; $2\cdot 1=2$; $2=2$. Отже, $x=0$ — розв'язок системи, а, отже, й даного рівняння.

Відповідь. 0. ■

Приклад 8. Розв'язати рівняння $3\cdot 4^x+(3x-10)\cdot 2^x+3-x=0$. У відповідь записати більший корінь.

■ Нехай $2^x=t$, $t>0$. Тоді $3t^2+(3x-10)t+3-x=0$; $3t^2+3tx-10t+3-x=0$; $3t^2-9t+3tx-t+3-x=0$; $3t(t-3+x)-(t-3+x)=0$; $(t-3+x)(3t-1)=0$; $t_1=3-x$; $t_2=\frac{1}{3}$. Повертаємося до заміни: 1) $2^x=3-x$ (1). Ліва частина рівняння (1) — зростаюча функція, права — спадна; $x=1$ — єдиний корінь; 2) $2^x=\frac{1}{3}$ (2); $x=\log_2\frac{1}{3}=-\log_2 3$. Отже, корені рівняння $x=1$ та $x=-\log_2 3$. Більший корінь дорівнює 1.

Відповідь. 1. ■

Приклад 9. За яких значень a рівняння $3^{x^2+a}+4^{x^2+a}+5^{x^2+a}=6^{x^2+a}$ має тільки один корінь?

■ Нехай $x^2+a=t$. Тоді маємо: $3^t+4^t+5^t=6^t$. Підбором знаходимо, що $t=3$ — корінь цього рівняння. Покажемо, що цей корінь єдиний. Для цього поділимо обидві частини рівняння на 6^t й одержимо: $\left(\frac{1}{2}\right)^t+\left(\frac{2}{3}\right)^t+\left(\frac{5}{6}\right)^t=1$. Оскільки функція $f(t)=\left(\frac{1}{2}\right)^t+\left(\frac{2}{3}\right)^t+\left(\frac{5}{6}\right)^t$ за довільних значень t спадна, як сума спадних функцій і $E(f)=(0;+\infty)$, то її графік перетинає пряму $y=1$ лише один раз (якщо $t=3$). Отже, $x^2+a=3$; $x^2=3-a$. Одержане рівняння має лише один корінь $x=0$, якщо $a=3$.

Відповідь. 3. ■

Завдання 14.1–14.23 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

14.1. Розв'язати рівняння $5^x = 8$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[5]{8}$	$\sqrt[8]{5}$	$\log_5 8$	$\log_8 5$	$\pm\sqrt[8]{5}$

14.2. Розв'язати рівняння $5^{x-9} = 5$ і $3^x - 3 = 0$ та вказати суму їх коренів.

А	Б	В	Г	Д
0	1	8	9	11

14.3. Розв'язати рівняння $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} = 4^{2x}$ і $4^{3x+1} = 8^{-2x-1}$ та вказати інтервал, який містить їх корені.

А	Б	В	Г	Д
$(-3; -2)$	$(-2; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; 2)$

14.4. Розв'язати рівняння $3^{x-5} = 9^{-2x}$.

А	Б	В	Г	Д
$1\frac{2}{3}$	1	1,25	0	–1

14.5. Розв'язати рівняння $5^{\frac{x-2}{(x+2)(x-1)}} = 1$ і $\left(\frac{2}{3}\right)^{(x^2-4)(x-1)} = 1$ та вказати їх спільні корені.

А	Б	В	Г	Д
–2; 2 і 1	2 і 1	–2 і 1	–2 і 2	2

14.6. Якому з проміжків належить корінь рівняння $0{,}008^x = 5^{1-2x}$?

А	Б	В	Г	Д
$[0; 2]$	$(-1; 5]$	$(2; +\infty)$	$(0; 1)$	$(-3; 0]$

14.7. Серед наведених рівнянь вказати рівняння, рівносильне рівнянню $8^x = 16^{-1}\sqrt{32^x}$.

А	Б	В	Г	Д
$3x = x - 1$	$3x = \frac{x}{2} - 1$	$3x = \frac{5x}{2} \cdot 4$	$3x = \frac{5x}{2} - 4$	$3x = \frac{6x}{2} - 4$

14.8. Яке з наведених рівнянь має корені?

А	Б	В	Г	Д
$7^{x^2} = \frac{1}{2}$	$7^x = \frac{1}{2}$	$7^{\lvert x\rvert} = \frac{1}{2}$	$7^x = 0$	$7^x = -\frac{1}{2}$

14.9. Розв'язати рівняння $6^{x+1} = 3^{x+1}$ і $2^{x-5} = 8^{x-5}$ і знайти суму їх коренів.

А	Б	В	Г	Д
4	–4	5	–5	53

14.10. Розв'язати рівняння $4^{x+2} - 4^{x+1} + 4^x = 39$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[4]{3}$	$\sqrt[3]{4}$	$\log_3 4$	$\log_4 3$	$\varnothing$

14.11. Знайти суму коренів рівняння $5^{2x}-6\cdot 5^{x}+5=0$.

А	Б	В	Г	Д
1	0	–6	6	–5

14.12. Встановити кількість коренів рівняння $3^{2x^2}-12\cdot 3^{x^2}+27=0$.

А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	чотири

14.13. Розв'язати рівняння $7^{x^2}=2$.

А	Б	В	Г	Д
$\pm\sqrt{\log_2 7}$	$\sqrt{\log_2 7}$	$\pm\sqrt{\log_7 2}$	$\sqrt{\log_7 2}$	$\pm\sqrt{7}$

14.14. Розв'язати рівняння $2^{x}\cdot 3^{x-1}=72$ і $\sqrt{2^{x}}\cdot\sqrt{7^{x}}=196$ і вказати суму їх коренів.

А	Б	В	Г	Д
8	7	6	5	4

14.15. Розв'язати рівняння $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^{x}=\frac{27}{64}$ і $5^{2x}\cdot 6^{2x}=900$ і вказати суму їх коренів.

А	Б	В	Г	Д
8	7	6	5	4

14.16. Знайти значення виразу 7^{x}, якщо $7^{x}-\left(\frac{1}{7}\right)^{1-x}=6$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	6	7	14

14.17. Знайти значення виразу $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$, якщо $3\cdot 2^{2x}+2\cdot 3^{2x}=5\cdot 6^{x}$.

А	Б	В	Г	Д
4	3 або 4	$\frac{2}{3}$ або 1	0 або 1	$\frac{4}{9}$ або 1

14.18. Знайти значення виразу 2^{x}, якщо $2^{2-x}-2^{x-1}=1$.

А	Б	В	Г	Д
2	2 або –4	1	4	2 або 4

14.19. Знайти значення виразу $9^{\frac{1}{x}}$, якщо $81^{\frac{1}{x}}-4\cdot 9^{\frac{1}{x}}=45$.

А	Б	В	Г	Д
4 або 9	–4 або 9	9	81	16 або 25

14.20. Указати проміжок, якому належить корінь рівняння $9^{\frac{3}{x}}+2\cdot 3^{\frac{x+3}{x}}-27=0$.

А	Б	В	Г	Д
[–4; –2]	[–2; 0]	[0; 2]	[2; 4]	[4; 6]

14.21. Розв'язати рівняння $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	0	$2\pi k,\ k \in Z$	$\pi k,\ k \in Z$	$\frac{\pi k}{2},\ k \in Z$

14.22. За якого значення параметра a рівняння $16^x - (a+1)\cdot 4^x + a = 0$ має один корінь?

А	Б	В	Г	Д
–2	–1	0	1	2

14.23. Знайти суму коренів рівняння $(x^2 + x + 1)^{x-3} = 1$.

А	Б	В	Г	Д
3	0; –1	–1; 0; 3	2	–2

Завдання 14.24–14.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

14.24. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1 $5^x = 7$
2 $x^5 = 7$
3 $7^x = 5$
4 $x^7 = 5$

А 5^7
Б $\sqrt[7]{5}$
В $\sqrt[5]{7}$
Г $\log_7 5$
Д $\log_5 7$

14.25. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та кількістю їх коренів (А–Д).

1 $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|} = 2^{1-x}$
2 $2^{|x-1|} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$
3 $2^{-x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x+3}$
4 $2^{|x-1|} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

А Жодного
Б Один
В Два
Г Три
Д Безліч

14.26. Установити відповідність між парами рівнянь (1–4) та сумою їх коренів (А–Д).

1 $6^{-2x} = 36$ і $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} = \frac{1}{8}$
2 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} = 4$ і $\left(\frac{1}{7}\right)^{1-x} = 49$
3 $3^x = 243$ і $\left(\frac{8}{125}\right)^{x+4} = \left(\frac{5}{2}\right)^9$
4 $5^{2x} \cdot 6^{2x} = 900$ і $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{7^x} = 196$

А –2
Б 2
В –1
Г 5
Д 0

14.27. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та значеннями (А–Д) виразу 2^{x_0-1}, де x_0 — корінь рівняння.

1 $2^x - 2^{x-2} = 24$

2 $2^{x+1} - 7 \cdot 2^{x-2} = 16$

3 $2^{x+4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 120$

4 $2^{x+2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} = 56$

А 2
Б 4
В 8
Г 16
Д 32

14.28. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та сумами їх коренів (А–Д).

1 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-x} - 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} + 16 = 0$

2 $4^x - 36 \cdot 2^x + 128 = 0$

3 $16^x - 20 \cdot 4^x + 64 = 0$

4 $\left(\frac{1}{9}\right)^{-x} - 30 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} + 81 = 0$

А 3
Б 4
В 5
Г 2
Д 7

Розв'яжіть завдання 14.29–14.43. Відповідь запишіть десятковим дробом.

14.29. Розв'язати рівняння $0{,}125 \cdot 8^{2x-5} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{-4}$

14.30. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{2^x \cdot \sqrt[3]{4^x \cdot 0{,}125^{\frac{1}{x}}}} = \sqrt[9]{4}$. У відповідь записати суму коренів рівняння.

14.31. Розв'язати рівняння $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \cdot \ldots \cdot 5^{2x} = 0{,}04^{-28}$.

14.32. Розв'язати рівняння $2^{\sqrt{x}+2} - 2^{\sqrt{x}+1} = 12 + 2^{\sqrt{x}-1}$.

14.33. Розв'язати рівняння $7 \cdot 3^x - 5^{x+1} = 3^{x+3} - 5^{x+2}$.

14.34. Розв'язати рівняння $3^{2\sqrt{x+5}} - 10 \cdot 3^{\sqrt{x+5}} + 9 = 0$. У відповідь записати суму коренів рівняння.

14.35. Указати найбільше ціле значення параметра a, за якого рівняння $2^{2x} + (a+1) \cdot 2^x + \frac{1}{4} = 0$ має два різних корені.

14.36. Розв'язати рівняння $\frac{4}{2^x + 2} - \frac{1}{2^x - 3} = 2$. У відповідь записати суму коренів рівняння.

14.37. Розв'язати рівняння $8 \cdot 81^x + 9 \cdot 64^x = 17 \cdot 72^x$. У відповідь записати суму коренів рівняння.

14.38. Розв'язати рівняння $2^{\cos 2x} = 3 \cdot 2^{\cos^2 x} - 4$. У відповідь записати $\frac{x_0}{\pi}$, де x_0 — найменший додатний корінь рівняння.

14.39. Розв'язати рівняння $50 \cdot 7^{\sqrt{-5x}} - 7^{\sqrt{-20x}+1} - 7 = 0$.

14.40. Розв'язати рівняння $3^{2x}+\frac{36}{3^{2x}}-\left(3^{x}+\frac{6}{3^{x}}\right)=8$. У відповідь записати найбільший корінь рівняння.

14.41. Розв'язати рівняння $81\cdot\left(\sqrt{10}+3\right)^{5x-61}=\left(\frac{3}{\sqrt{10}-3}\right)^{5x-61}$

14.42. Розв'язати рівняння $\left|x-5\right|^{\frac{x}{x-6}}=1$. У відповідь записати найбільший корінь рівняння.

14.43. Розв'язати рівняння $25^{x}-\left(2a+1\right)\cdot 5^{x}+a^{2}+a=0$. У відповідь записати найменше ціле значення a, за якого рівняння має два корені.

Тема 15. Показникові нерівності

Нерівність, яка містить змінну в показнику степеня, називають *показниковою*. Наприклад, $2^{x+3} < 7$; $5^{x^2} \le \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$ тощо. Розв'язування показникових нерівностей, як правило, ґрунтується на властивостях показникової функції, а саме:

1) функція $y = a^x$ зростає, якщо $a > 1$;

2) функція $y = a^x$ спадає, якщо $0 < a < 1$;

3) функція $y = a^x$ набуває лише додатних значень.

Показникові нерівності можна класифікувати за способами їх розв'язання:

1. Найпростіші та ті, які зводяться до найпростіших:
   а) зведення до однієї основи;
   б) винесення спільного множника за дужки;
   в) ділення обох частин на степінь.
2. Нерівності, які зводяться до алгебраїчних:
   а) зведення до квадратної нерівності шляхом заміни;
   б) однорідні.
3. Нестандартні показникові нерівності.

Показникові нерівності виду $a^{nx} <> b^{nx}$ $(a \ne b)$ зводяться до найпростіших шляхом ділення обох частин на b^{nx} або a^{nx} $(b^{nx} \ne 0, a^{nx} \ne 0)$

Наприклад, розв'язати нерівність $5^{3x-2} < 7^{3x-2}$. Поділимо обидві частини нерівності на $7^{3x-2} > 0$. Одержимо: $\left(\frac{5}{7}\right)^{3x-1} < 1$. Приведемо нерівність до однієї основи: $\left(\frac{5}{7}\right)^{3x-2} < \left(\frac{5}{7}\right)^{0}$. Оскільки $\frac{5}{7} < 1$, то одержимо: $3x - 2 > 0$; $x \in \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Відповідь. $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Нерівності виду $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

Наприклад: а) розв'язати нерівність $(0{,}5)^x \ge \frac{1}{32}$. Маємо: $\left(\frac{1}{2}\right)^x \ge \left(\frac{1}{2}\right)^5$. Оскільки основа $0 < \frac{1}{2} < 1$, то отримаємо: $x \le 5$; $x \in (-\infty; 5]$.

Відповідь. $(-\infty; 5]$.

б) розв'язати нерівність $16^x > 0{,}125$. Маємо: $2^{4x} > 2^{-3}$. Оскільки основа $2 > 1$, то отримаємо: $4x > -3$; $x > -0{,}75$; $x \in (-0{,}75; +\infty)$.

Відповідь. $(-0{,}75; +\infty)$.

Нерівності виду $a^{f(x)} > b$

Необхідно розглянути випадки:

1) $b \le 0$, тоді $a^{f(x)} > b$; $x \in D(f)$;

2) $b > 0$, тоді $a^{f(x)} > b$; $f(x) > \log_a b$, якщо $a > 1$, і $f(x) < \log_a b$, якщо $0 < a < 1$.

Наприклад: а) розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{3}\right)^x > -2$. Оскільки $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 0$, якщо $x \in R$, то $\left(\frac{1}{3}\right)^x > -2$; $x \in R$.

Відповідь. $x \in R$;

б) розв'язати нерівність $2^x > 7$. Одержимо нерівність $2^x > 2^{\log_2 7}$. Оскільки основа $2 > 1$, то отримаємо: $x > \log_2 7$; $x \in (\log_2 7; +\infty)$.

Відповідь. $(\log_2 7; +\infty)$.

Нерівності виду $a^{f(x)} > b^{g(x)}$

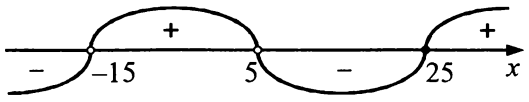
При розв'язуванні нерівностей такого виду застосовують логарифмування обох частин за основами a чи b. Врахувавши властивості функцій, одержимо: $a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)\log_a b$, якщо $a > 1$, $a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)\log_a b$, якщо $0 < a < 1$.

Наприклад, розв'язати нерівність $11^{3-x} > 3^{2x-1}$. Прологарифмуємо обидві частини нерівності за основою 3 й одержимо: $\log_3 11^{3-x} > \log_3 3^{2x-1}$; $(3 - x)\log_3 11 > 2x - 1$; $(2 + \log_3 11)x < 1 + 3\log_3 11$. Оскільки $2 + \log_3 11 > 0$, то $x < \dfrac{1+3\log_3 11}{2+\log_3 11}$; $x \in \left(-\infty; \dfrac{1+3\log_3 11}{2+\log_3 11}\right)$. Відповідь. $\left(-\infty; \dfrac{1+3\log_3 11}{2+\log_3 11}\right)$.

Розв'язування показникових нерівностей методом заміни змінної

Нехай потрібно розв'язати нерівність $\dfrac{1}{5^x - 5} \le \dfrac{2}{5^x + 15}$. Уведемо заміну $5^x = t$. Тоді одержимо:

$$\frac{1}{t-5} \le \frac{2}{t+15};\ \frac{1}{t-5} - \frac{2}{t+15} \le 0;\ \frac{t+15-2(t-5)}{(t-5)(t+15)} \le 0;\ \frac{-t+25}{(t-5)(t+15)} \le 0;\ \frac{t-25}{(t-5)(t+15)} \ge 0.$$



$t \in (-15; 5) \cup [25; +\infty)$.

Повернемося до заміни: $\left[\begin{array}{l} -15 < 5^x < 5; \\ 5^x \ge 25; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 5^x < 5^1; \\ 5^x \ge 5^2; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x < 1; \\ x \ge 2; \end{array}\right.$ $x \in (-\infty; 1) \cup [2; +\infty)$.

Відповідь. $(-\infty; 1) \cup [2; +\infty)$.

Зведення показникових нерівностей до найпростіших шляхом винесення спільного множника за дужки

Показникові нерівності виду $A_0 \cdot a^{kx+b_0} + A_1 \cdot a^{kx+b_1} + \ldots + A_n \cdot a^{kx+b_n} <> B$ зводяться до найпростіших шляхом винесення за дужки спільного множника a^{kx+b_i}, де b_i — найменше з чисел $b_0, b_1, \ldots, b_n$.

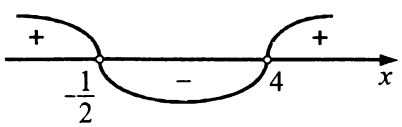
Наприклад, розв'язати нерівність $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 4^{x+1} + 3 \cdot 4^{x+2} \le 236$. Перетворимо нерівність і винесемо спільний множник 4^x за дужки: $3 \cdot 4^x + 8 \cdot 4^x + 48 \cdot 4^x \le 236$; $4^x(3 + 8 + 48) \le 236$; $4^x \cdot 59 \le 236$; $4^x \le 4$; $x \le 1$.

Відповідь. $(-\infty; 1]$.

Зведення показникових нерівностей до квадратних шляхом уведення нової змінної

Показникові нерівності виду $Aa^{2x} + Ba^x + C <> 0$ зводяться до квадратних шляхом уведення заміни $a^x = t$, $t > 0$.

Наприклад, розв'язати нерівність $4^{-x+0,5} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$. Нехай $2^{-x} = t$, $t > 0$. Тоді $4^{-x} = 2^{-2x} = \left(2^{-x}\right)^2 = t^2$. Одержимо: $2t^2 - 7t - 4 < 0$; $2\left(t + \dfrac{1}{2}\right)(t - 4) < 0$;



$-\dfrac{1}{2} < t < 4$. Врахувавши, що $t > 0$, маємо: $0 < t < 4$.

Тоді початкова нерівність рівносильна нерівності: $2^{-x} < 4$; $2^{-x} < 2^2$; $-x < 2$; $x > -2$.

Отже, $x\in(-2;\,+\infty)$.

Відповідь. $(-2;\,+\infty)$.

Розв'язування нерівностей, які містять однорідні функції відносно показникових функцій

Нерівності виду $A_0a^{nx}+A_1a^{(n-1)x}b^x+A_2a^{(n-2)x}b^{2x}+\ldots+A_{n-1}a^xb^{(n-1)x}+A_nb^{nx}<>0$ є однорідними відносно функцій a^x і b^x. Поділимо обидві частини нерівності на $b^{nx}\neq 0$ й одержимо таку нерівність: $A_0\left(\frac{a}{b}\right)^{nx}+A_1\left(\frac{a}{b}\right)^{(n-1)x}+\ldots+A_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{x}+A_n<>0$, яку після заміни $\left(\frac{a}{b}\right)^x=t,\ t>0$, можна звести до раціональної нерівності $A_0t^n+A_1t^{n-1}+\ldots+A_{n-1}t+A_n<>0$.

Наприклад, розв'язати нерівність $2\cdot 9^x-5\cdot 6^x+3\cdot 4^x\geq 0$. Запишемо задану нерівність у вигляді $2\cdot 3^{2x}-5\cdot 2^x\cdot 3^x+3\cdot 2^{2x}\geq 0$. Поділимо обидві частини на $3^{2x}>0$ й отримаємо: $2-5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}\geq 0$. Нехай $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t$, тоді одержимо: $3t^2-5t+2\geq 0$; $\left[\begin{array}{l}t\geq 1;\\ t\leq\frac{2}{3};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^x\geq 1;\\ \left(\frac{2}{3}\right)^x\leq\frac{2}{3};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x\leq 0;\\ x\geq 1;\end{array}\right.$

$x\in(-\infty;\,0]\cup[1;\,+\infty)$.

Відповідь. $(-\infty;\,0]\cup[1;\,+\infty)$.

Степенево-показникові нерівності

1. Нерівності виду $\left(f(x)\right)^{g(x)}>1$.

$$\left(f(x)\right)^{g(x)}>1\Leftrightarrow\left(f(x)\right)^{g(x)}>\left(f(x)\right)^0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<f(x)<1;\\ g(x)<0;\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)>1;\\ g(x)>0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Наприклад, розв'язати нерівність $\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}>1$.

$$\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}>1\Leftrightarrow\left(4x^2+2x+1\right)^{x^2-x}>\left(4x^2+2x+1\right)^0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<4x^2+2x+1<1;\\ x^2-x<0;\end{cases}\\ \begin{cases}4x^2+2x+1>1;\\ x^2-x>0;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4x^2+2x+1>0;\\ 4x^2+2x+1<1;\\ x^2-x<0;\end{cases}\\ \begin{cases}4x^2+2x>0;\\ x^2-x>0;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-\infty<x<+\infty;\\ x(x+0{,}5)<0;\\ x(x-1)<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x(x+0{,}5)>0;\\ x(x-1)>0;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-0{,}5<x<0;\\ 0<x<1;\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>0;\\ x<-0{,}5;\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x>1;\\ x<0;\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\varnothing;\\ \left[\begin{array}{l}x>1;\\ x<-0{,}5;\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>1;\\ x<-0{,}5.\end{array}\right.$$

Отже, $x\in(-\infty;\,-0{,}5)\cup(1;\,+\infty)$.

Відповідь. $(-\infty;\,-0{,}5)\cup(1;\,+\infty)$.

2. Нерівності виду $\left(f(x)\right)^{g(x)}<1$.

$$\left(f(x)\right)^{g(x)}<1\Leftrightarrow\left(f(x)\right)^{g(x)}<\left(f(x)\right)^0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<f(x)<1;\\ g(x)>0;\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)>1;\\ g(x)<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Наприклад, розв'язати нерівність $(3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}}<1$.

$$(3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}}<1 \Leftrightarrow (3-x)^{\frac{3x-5}{3-x}}<(3-x)^0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<3-x<1;\\ \dfrac{3x-5}{3-x}>0;\end{cases}\\ \begin{cases}3-x>1;\\ \dfrac{3x-5}{3-x}<0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-3<-x<-2;\\ \left(x-\dfrac{5}{3}\right)(x-3)<0;\end{cases}\\ \begin{cases}x<2;\\ \left(x-\dfrac{5}{3}\right)(x-3)>0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<3;\\ \dfrac{5}{3}<x<3;\end{cases}\\ \begin{cases}x<2;\\ \left[\begin{array}{l}x>3;\\ x<\dfrac{5}{3};\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2<x<3;\\ x<\dfrac{5}{3}.\end{array}\right.$$

Отже, $x\in\left(-\infty;\frac{5}{3}\right)\cup(2;3)$.

Відповідь. $\left(-\infty;\frac{5}{3}\right)\cup(2;3)$.

3. Нерівність виду $\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}>\left(g(x)\right)^{\varphi(x)}$

Нерівності такого виду найпростіше розв'язують логарифмуванням обох частин зі збереженням знака початкової нерівності, якщо основа логарифма $a>1$, і зі зміною знака на протилежний, якщо основа логарифма $0<a<1$.

Наприклад, розв'язати нерівність $\frac{1}{4}x^{\log_2 x}<2^{\log_2 x}$. Знайдемо ОДЗ: $x>0$. Прологарифмуємо обидві частини нерівності за основою $a=2>1$ на її ОДЗ: $\log_2\left(\frac{1}{4}x^{\log_2 x}\right)<\log_2\left(2^{\log_2 x}\right)$; $\log_2\frac{1}{4}+\log_2 x^{\log_2 x}<$ $<\log_2 x\cdot\log_2 2$; $-2+\log_2 x\cdot\log_2 x<\log_2 x$; $\log_2^2 x-\log_2 x-2<0$. Уведемо позначення: $t=\log_2 x$, тоді одержимо нерівність: $t^2-t-2<0$; $t_1=-1$, $t_2=2$; $-1<t<2$. Повертаємося до заміни: $\begin{cases}\log_2 x>-1;\\ \log_2 x<2;\end{cases}$

$\begin{cases}x>\frac{1}{2};\\ x<4;\end{cases}$ $\frac{1}{2}<x<4$; $x\in\left(\frac{1}{2};4\right)$.

Відповідь. $\left(\frac{1}{2};4\right)$.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $0{,}5^{2x+7}\le 4$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-4{,}5]$	$[-2{,}5;+\infty)$	$[-4{,}5;+\infty)$	$(-\infty;-2{,}5]$	$[2{,}5;+\infty)$

■ $0{,}5^{2x+7}\le 4$. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+7}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; $2x+7\ge -2$; $2x\ge -9$; $x\ge -4{,}5$. $x\in[-4{,}5;+\infty)$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 2. Розв'язати нерівність $5^{8x+1}+5^{8x-1}<130$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-0{,}25)$	$(-\infty;0{,}25)$	$(-0{,}25;+\infty)$	$(0{,}25;+\infty)$	$(-\infty;4)$

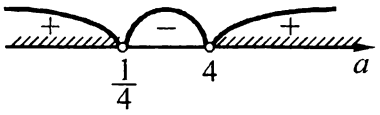
■ $5^{8x+1}+5^{8x-1}<130$. $5\cdot5^{8x}+\frac{5^{8x}}{5}<130 \;\Big|\times5$; $25\cdot5^{8x}+5^{8x}<650$; $26\cdot5^{8x}<650$; $5^{8x}<25$; $5^{8x}<5^2$; $8x<2$; $x<0{,}25$. $x\in(-\infty;0{,}25)$.

Відповідь: **Б.** ■

Приклад 3. Розв'язати нерівність $4^{\frac{x+1}{x}}-17\cdot2^{\frac{1}{x}}+4>0$.

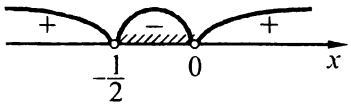
А	Б	В	Г	Д
$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2};0\right)$	$\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

■ $4^{\frac{x+1}{x}}-17\cdot2^{\frac{1}{x}}+4>0$; $4^{1+\frac{1}{x}}-17\cdot2^{\frac{1}{x}}+4>0$; $4\cdot4^{\frac{1}{x}}-17\cdot2^{\frac{1}{x}}+4>0$. Зробимо заміну: $2^{\frac{1}{x}}=a$. Тоді $4^{\frac{1}{x}}=\left(2^2\right)^{\frac{1}{x}}=\left(2^{\frac{1}{x}}\right)^2=a^2$. $4a^2-17a+4>0$; $a_1=4$, $a_2=\frac{1}{4}$.



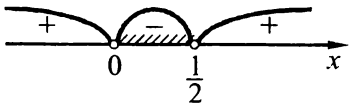
$a<\frac{1}{4}$ або $a>4$. Повернемось до заміни:

1. $2^{\frac{1}{x}}<\frac{1}{4}$; $2^{\frac{1}{x}}<2^{-2}$; $\frac{1}{x}<-2$; $\frac{1+2x}{x}<0$.



$x\in\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

2. $2^{\frac{1}{x}}>4$; $2^{\frac{1}{x}}>2^2$; $\frac{1}{x}>2$; $\frac{1-2x}{x}>0$; $\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x}<0$.



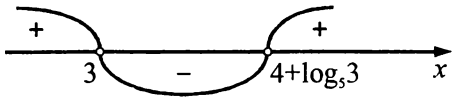
$x\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Отже, $x\in\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)$

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 4. Розв'язати нерівність $3^{x-3} > 5^{x^2-7x+12}$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

■ Прологарифмуємо обидві частини нерівності за основою 5. Оскільки $5 > 1$, то знак нерівності зберігається. Тоді: $(x-3)\log_5 3 > x^2 - 7x + 12$; $(x-3)\log_5 3 > (x-3)(x-4)$; $(x-3)(x-4-\log_5 3) < 0$.

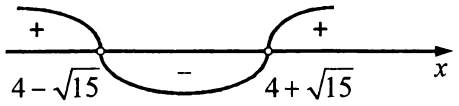


Отже, $x \in (3; 4 + \log_5 3)$. Найменший цілий розв'язок — 4.

Відповідь. 4. ■

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x < 8$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок нерівності.

■ Очевидно, що $\sqrt{4+\sqrt{15}} \cdot \sqrt{4-\sqrt{15}} = 1$, звідки $\sqrt{4-\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}$. Виконавши заміну: $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x = t$, $t > 0$, одержимо: $t + \frac{1}{t} < 8$; $t^2 - 8t + 1 < 0$. $t_{1,2} = 4 \pm \sqrt{15}$.



$4 - \sqrt{15} < t < 4 + \sqrt{15}$.

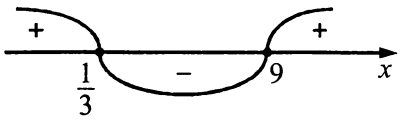
Задана нерівність рівносильна нерівності $4 - \sqrt{15} < \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x < 4 + \sqrt{15}$;

$\left(4+\sqrt{15}\right)^{-1} < \left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{2}} < \left(4+\sqrt{15}\right)^1$; $-1 < \frac{x}{2} < 1$; $-2 < x < 2$. Найбільший цілий розв'язок — $x = 1$.

Відповідь. 1. ■

Приклад 6. Розв'язати нерівність $3^{1+\sqrt{x+1}} + 3^{2-\sqrt{x+1}} \geq 28$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

■ $3^{1+\sqrt{x+1}} + 3^{2-\sqrt{x+1}} \geq 28$; $3 \cdot 3^{\sqrt{x+1}} + \frac{3^2}{3^{\sqrt{x+1}}} \geq 28$. Нехай $3^{\sqrt{x+1}} = t$, $t > 0$. Тоді задану нерівність можна записати так: $3t + \frac{9}{t} - 28 \geq 0$; $3t^2 - 28t + 9 \geq 0$; $3\left(t - \frac{1}{3}\right)(t-9) \geq 0$;



$$\left[\begin{array}{l} t \leq \frac{1}{3}; \\ t \geq 9. \end{array}\right.$$

Повернемося до заміни: 1) $3^{\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{3}$; $3^{\sqrt{x+1}} \leq 3^{-1}$; $\sqrt{x+1} \leq -1$ — нерівність розв'язків не має; 2) $3^{\sqrt{x+1}} \geq 9$; $\sqrt{x+1} \geq 2$; $x \geq 3$. Найменший цілий розв'язок — $x = 3$.

Відповідь. 3. ■

Приклад 7. Розв'язати нерівність $\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq \left(x^2+x+1\right)^3$. У відповідь записати суму цілих розв'язків нерівності.

■ Оскільки $x^2 + x + 1 > 0$ для всіх значень x, то вихідна нерівність рівносильна сукупності двох систем нерівностей: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+x+1 \geq 1; \\ \dfrac{x+5}{x+2} \geq 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+x+1 \leq 1; \\ \dfrac{x+5}{x+2} \leq 3; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+x \geq 0; \\ \dfrac{x+5-3x-6}{x+2} \geq 0; \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x^2+x \leq 0; \\ \dfrac{x+5-3x-6}{x+2} \leq 0. \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$

Розв'яжемо систему (1): $\begin{cases} x(x+1) \geq 0; \\ 2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x+2) \leq 0; \\ x \neq -2; \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq -1; \\ x \geq 0; \end{array}\right. \\ -2 < x \leq -\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ $x \in (-2; -1]$.

Розв'яжемо систему (2): $\begin{cases} x(x+1) \leq 0; \\ 2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x+2) \geq 0; \\ x \neq -2; \end{cases} \begin{cases} -1 \leq x \leq 0; \\ \left[\begin{array}{l} x < -2; \\ x \geq -\dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \end{cases}$ $x \in \left[-\dfrac{1}{2}; 0\right]$.

Об'єднавши розв'язки систем (1) і (2), одержимо: $x \in (-2; -1] \cup \left[-\dfrac{1}{2}; 0\right]$.

Цілими розв'язками є –1 і 0, а їх сума дорівнює –1 + 0 = –1.

Відповідь. –1. ■

Приклад 8. За яких значень a нерівність $4^x - (a-4)2^x + 4 > 0$ виконується для будь-яких дійсних значень x? У відповідь записати найбільше ціле значення a.

■ Нехай $2^x = t$, $t > 0$. Одержимо квадратну нерівність $t^2 - (a - 4)t + 4 > 0$. Сформулюємо завдання так: за яких значень параметра a графік квадратичної функції $f(t) = t^2 - (a - 4)t + 4$ на проміжку $(0; +\infty)$ розміщений над віссю t? Це можливо у двох випадках:

1) графік функції $y = f(t)$ міститься над віссю t для будь-якого t, а, отже, і на інтервалі $(0; t)$, якщо дискримінант квадратного тричлена $f(t)$ від'ємний: $(a - 4)^2 - 16 < 0$; $a^2 - 8a + 16 - 16 < 0$; $a(a - 8) < 0$; $a \in (0; 8)$;

2) якщо $D \geq 0$, то тричлен $f(t)$ не повинен мати додатних коренів. А це можливо за умови $\begin{cases} f(0) \geq 0; \\ t_в = \dfrac{a-4}{2} < 0; \\ D \geq 0, \end{cases}$ звідки $\begin{cases} 4 > 0; \\ a < 4; \\ a \in (-\infty; 0] \cup [8; +\infty); \end{cases}$ $a \in (-\infty; 0]$. Об'єднавши розв'язки 1) і 2), одержимо $a \in (-\infty; 8)$. Найбільше ціле значення дорівнює $a = 7$.

Відповідь. 7. ■

Завдання 15.1–15.21 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

15.1. Розв'язати нерівність $5^x > 5$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1)$	$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$	$(1; +\infty)$	$(5; +\infty)$

15.2. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$(1; +\infty)$	$\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$	$\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$	$(-\infty; 0)$	$(-\infty; 1)$

15.3. Знайти множину розв'язків нерівності $0,7^x < 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$	$(1; +\infty)$

15.4. Розв'язати нерівність $2^x < \frac{1}{8}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3)$	$\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$	$\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$	$(-3; +\infty)$	$\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$

15.5. Розв'язати нерівність $9^{x+5} > 27^x$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 5)$	$(10; +\infty)$	$(-\infty; 10)$	$(0; 10)$	Будь-яке дійсне число

15.6. Яка з наведених нерівностей має розв'язки?

А	Б	В	Г	Д
$7^x < -1$	$7^{\lvert x\rvert} < 0,7$	$7^{x^2} < 1$	$\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2} < 2$	$\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2} > 2$

15.7. Розв'язати нерівність $7^x - 7^{\frac{1}{x}} > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1)\cup(0; 1)$	$(-1; 1)$	$(1; +\infty)$	$(-\infty; -1)\cup(1; +\infty)$	$(-1; 0)\cup(1; +\infty)$

15.8. Знайти множину розв'язків нерівності $4^x > 3$.

А	Б	В	Г	Д
R	$(-\infty; \log_4 3)$	$(-\infty; \log_3 4)$	$(\log_4 3; +\infty)$	$(\log_3 4; +\infty)$

15.9. Розв'язати нерівність $1 \le \left(\frac{1}{3}\right)^x \le 27$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[0; \frac{1}{3}\right]$	$[0; 3]$	$\left[\frac{1}{3}; 1\right]$	$[-3; 0]$	$\left[-\frac{1}{3}; 0\right]$

15.10. Розв'язати нерівність $3^x > 5^x$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; -1)$	$(1; +\infty)$	$\varnothing$

15.11. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x-20} > 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{5}\right)$	(–5; 4)	(4; 5)	$\left(-\frac{1}{5};\frac{1}{4}\right)$	(–4; 5)

15.12. Розв'язати нерівність $2^{x+1} + 2^x < 24$.

А	Б	В	Г	Д
(–3; +∞)	(–∞; –3)	(3; +∞)	(0; 3)	(–∞; 3)

15.13. Знайти множину розв'язків нерівності $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$.

А	Б	В	Г	Д
(–6; 8)	(2; 4)	(1; 2)	(–∞; 2)∪(4; +∞)	(–∞; 1)∪(2; +∞)

15.14. Розв'язати нерівність $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \le 0$.

А	Б	В	Г	Д
(–∞; –1)∪(–1; 1)	(–1; 1)	$\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$	(–3; 3)	$\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$

15.15. Розв'язати нерівність $3^x + 3^{2-x} > 10$.

А	Б	В	Г	Д
(–∞; 0)∪(2; +∞)	(–∞; 1)∪(9; +∞)	(0; 2)	(–∞; 3)∪(10; +∞)	(1; 9)

15.16. Указати найменший розв'язок нерівності $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+2} \le \left(\frac{5}{2}\right)^2$.

А	Б	В	Г	Д
0	–4	4	–2	Не існує

15.17. Розв'язати нерівність $3^{|x|+2} > 27$.

А	Б	В	Г	Д
(–∞; –5)∪(5; +∞)	(–5; 5)	(–1; 1)	(–∞; –1)∪(1; +∞)	∅

15.18. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|-1} < \frac{1}{8}$.

А	Б	В	Г	Д
R	(–∞; –4)∪(4; +∞)	(–4; 4)	(4; +∞)	(–∞; –2)∪(2; +∞)

15.19. Розв'язати нерівність $\left(2^x - 2\right)\sqrt{x^2 - 5x + 6} \ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
[1; 2)∪(3; +∞)	[0; 2]∪[3; +∞)	[3; +∞)	[1; +∞)	[1; 2]∪[3; +∞)

15.20. Розв'язати нерівність $2^{x^2} > \sin x$.

А	Б	В	Г	Д
R	∅	(–∞; 0)∪(0; +∞)	0	(–∞; 1)∪(1; +∞)

15.21. За якого значення параметра a нерівність $a^2 - 2 \cdot 4^{x+1} - a \cdot 2^{x+1} > 0$ не має розв'язків?

А	Б	В	Г	Д
$a > 1$	$a \neq 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a = 0$

Завдання 15.22–15.25 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

15.22. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $7^x > 1$

2 $7^x > -1$

3 $\left(\frac{1}{7}\right)^x < -1$

4 $\left(\frac{1}{7}\right)^x > 1$

А $(1; +\infty)$

Б $(-\infty; 0)$

В $(0; +\infty)$

Г $(-\infty; +\infty)$

Д $\varnothing$

15.23. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $(\lg 5)^{x+2} > (\lg 5)^{-1}$

2 $(\lg 12)^{x+2} > (\lg 12)^{-1}$

3 $(\sin 3)^{x-3} > (\sin 3)^4$

4 $(\ln 3)^{x-3} > (\ln 3)^3$

А $(6; +\infty)$

Б $(-\infty; 7)$

В $(-\infty; -3)$

Г $(-\infty; 3)$

Д $(-3; +\infty)$

15.24. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 16$

2 $1 \leq 2^x \leq 16$

3 $1 \leq 16^x \leq 2$

4 $1 \leq \left(\frac{1}{16}\right)^x \leq 2$

А $\left[-\frac{1}{4}; 0\right]$

Б $[-4; 0]$

В $\left[0; \frac{1}{4}\right]$

Г $\left[\frac{1}{4}; 4\right]$

Д $[0; 4]$

15.25. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $2^{|x|+2} > \frac{1}{8}$

2 $2^{|x|+2} > 8$

3 $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|+2} > 8$

4 $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|+2} > \frac{1}{8}$

А $(1; +\infty)$

Б $(-1; 1)$

В $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

Г $(-\infty; +\infty)$

Д $\varnothing$

Розв'яжіть завдання 15.26–15.41. Відповідь запишіть десятковим дробом.

15.26. Розв'язати нерівність $\sqrt{27}\cdot 3^{7x-x^2} \geq \frac{\sqrt{243}}{3^{2x+1}}$. У відповідь записати суму всіх цілих розв'язків нерівності.

15.27. Розв'язати нерівність $2^{x^2+3x} - 8\cdot 2^x > 0$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

15.28. Розв'язати нерівність $5\cdot 2^{\sqrt{x}} - 3\cdot 2^{\sqrt{x}-1} \geq 56$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

15.29. Розв'язати нерівність $2^x + 2^{-x+1} - 3 < 0$. У відповідь записати координату середини проміжку, який є розв'язком нерівності.

15.30. Розв'язати нерівність $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} \leq 1$. У відповідь записати координату середини проміжку, який є розв'язком нерівності.

15.31. Розв'язати нерівність $\left(2^x - 8\right)\left(x^2 - 4x + 3\right) > 0$. У відповідь записати добуток усіх натуральних чисел, які не є розв'язками нерівності.

15.32. Розв'язати нерівність $\frac{1}{2^{x+1}-1} > \frac{1}{2^x+3}$. У відповідь записати координату середини проміжку, який є розв'язком нерівності.

15.33. Розв'язати нерівність $2\cdot 4^x - 5\cdot 6^x + 3\cdot 9^x < 0$. У відповідь записати координату середини проміжку, який є розв'язком нерівності.

15.34. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $7^{x-5} > 3^{x^2+x-30}$.

15.35. Розв'язати нерівність $\left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leq \left(\sqrt{2}+1\right)^{-x}$. У відповідь записати найбільший розв'язок нерівності.

15.36. Розв'язати нерівність $3^{x^2+2} - 5^{x^2-1} > 5^{x^2+1} + 3^{x^2-1}$. У відповідь записати суму всіх розв'язків нерівності.

15.37. Розв'язати нерівність $\sqrt{9^x + 24} - 2 > 3^{x+1}$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок нерівності.

15.38. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-0,5x^2} \geq 2^{|2x-10|+x}$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

15.39. Розв'язати нерівність $7^{x-5} > 3^{x^2+x-30}$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

15.40. Розв'язати нерівність $\left(\sqrt{5}-2\right)^x + \left(\sqrt{5}+2\right)^x < 2\sqrt{5}$. У відповідь записати суму всіх розв'язків нерівності.

15.41. Розв'язати нерівність $(x+3)^{-2x^2-7x-5} < 1$. У відповідь записати суму всіх цілих недодатних розв'язків нерівності.

Тема 16. Логарифмічні рівняння

Рівняння, яке містить змінну під знаком логарифма або в основі логарифма, називають *логарифмічним*.

Найпростіші логарифмічні рівняння

1. $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$, $a > 0$, $a \neq 1$. Наприклад, $\log_2 x = 4$; $x = 2^4$; $x = 16$.

Відповідь. 16.

2. $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$, $a > 0$, $a \neq 1$. Наприклад, $\log_{0,2}(x + 4) = -2$; $x + 4 = (0,2)^{-2}$; $x + 4 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$; $x + 4 = 5^2$; $x = 25 - 4$; $x = 21$.

Відповідь. 21.

3. $\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Наприклад, $\log_2(4^x - 2) = x$; $4^x - 2 = 2^x$; $(2^x)^2 - 2^x - 2 = 0$. Нехай $2^x = t$, тоді маємо: $t^2 - t - 2 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 2; \\ t = -1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2^x = 2; \\ 2^x = -1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 1; \\ x \in \varnothing; \end{array}\right.$ $x = 1$.

Відповідь. 1.

4. Рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x) = g(x); \\ f(x) > 0; \end{cases}$ або системі $\begin{cases} f(x) = g(x); \\ g(x) > 0, \end{cases}$ де $a > 0$, $a \neq 1$.

Наприклад, $\log_2(x^2 - x - 2) = \log_2(x + 1)$; $\begin{cases} x + 1 > 0; \\ x^2 - x - 2 = x + 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x + 1 > 0; \\ x^2 - 2x - 3 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -1; \\ \left[\begin{array}{l} x = -1; \\ x = 3; \end{array}\right. \end{cases}$ $x = 3$.

Відповідь. 3.

5. Рівняння $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x)$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x) = g(x); \\ f(x) > 0; \\ \varphi(x) > 0; \\ \varphi(x) \neq 1; \end{cases}$ або системі $\begin{cases} f(x) = g(x); \\ g(x) > 0; \\ \varphi(x) > 0; \\ \varphi(x) \neq 1. \end{cases}$

Наприклад, $\log_{2x}(x^2 - 3x) = \log_{2x}(6x - 8)$; $\begin{cases} x^2 - 3x = 6x - 8; \\ 6x - 8 > 0; \\ 2x > 0; \\ 2x \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 9x + 8 = 0; \\ x > \frac{4}{3}; \\ x > 0; \\ x \neq \frac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1, \ x = 8; \\ x > \frac{4}{3}; \end{cases}$ $x = 8$.

Відповідь. 8.

Розв'язування логарифмічних рівнянь потенціюванням

Перехід від рівняння, яке містить логарифми, до рівняння, яке їх не містить, називають *потенціюванням*.

Наприклад, розв'язати рівняння $\lg(x - 9) + \lg(2x - 1) = 2$. Подамо число 2 у вигляді десяткового логарифма: $2 = \lg 100$. Тоді $\lg(x - 9) + \lg(2x - 1) = \lg 100$. Суму логарифмів замінимо логарифмом добутку виразів: $\lg((x - 9)(2x - 1)) = \lg 100$. Врахувавши ОДЗ $\begin{cases} x - 9 > 0; \\ 2x - 1 > 0 \end{cases}$, замінимо рівняння рівносильною

системою й одержимо: $\begin{cases}(x-9)(2x-1)=100;\\ x-9>0;\\ 2x-1>0;\end{cases}$ $\begin{cases}2x^2-19x+9=100;\\ x>9;\\ x>\frac{1}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=13;\\ x=-3{,}5;\end{array}\right. x=13.\\ x>9;\end{cases}$

Відповідь. 13.

Розв'язування рівнянь із застосуванням основної логарифмічної тотожності $a^{\log_a b}=b$

Наприклад, розв'язати рівняння $9^{\log_3(1-2x)}=5x^2-5$. Перетворимо ліву частину початкового рівняння, застосувавши основну логарифмічну тотожність: $9^{\log_3(1-2x)}=\left(3^2\right)^{\log_3(1-x)}=3^{2\log_3(1-x)}=3^{\log_3(1-x)^2}=(1-2x)^2$ за умови, що $1-2x>0$. Звідки одержимо: $9^{\log_3(1-2x)}=5x^2-5$; $\begin{cases}(1-2x)^2=5x^2-5;\\ 1-2x>0;\end{cases}$ $\begin{cases}1-4x+4x^2=5x^2-5;\\ x<\frac{1}{2};\end{cases}$

$\begin{cases}x^2+4x-6=0;\\ x<\frac{1}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-2+\sqrt{10};\\ x=-2-\sqrt{10};\end{array}\right.\\ x<\frac{1}{2};\end{cases}$ $x=-2-\sqrt{10}$.

Відповідь. $-2-\sqrt{10}$.

Використання формул $f^{\log_a g}=g^{\log_a f}$***, де*** $a>0$, $a\neq 1$, $f>0$, $g>0$

Наприклад, розв'язати рівняння $3x^{\log_5 2}+2^{\log_5 x}=64$. ОДЗ: $x>0$. На цій множині $x^{\log_5 2}=2^{\log_5 x}$, тому вихідне рівняння рівносильне рівнянню $3\cdot 2^{\log_5 x}+2^{\log_5 x}=64$; $4\cdot 2^{\log_5 x}=64$; $2^{\log_5 x}=16$; $2^{\log_5 x}=2^4$; $\log_5 x=4$; $x=625$.

Відповідь. 625.

Зведення до однієї основи

Наприклад, розв'язати рівняння $\log_4 x+\log_{\frac{1}{16}} x+\log_8 x^3=5$. Зведемо всі логарифми до основи 2: $\frac{\log_2 x}{\log_2 4}+\frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{16}}+\frac{\log_2 x^3}{\log_2 8}=5$; $\frac{1}{2}\log_2 x-\frac{1}{4}\log_2 x+\frac{3}{3}\log_2 x=5$. Зведемо подібні доданки: $\frac{5}{4}\log_2 x=5$; $\log_2 x=4$; $x=2^4$; $x=16$.

Відповідь. 16.

Розв'язування рівнянь логарифмуванням обох частин рівняння

Розв'язати рівняння $x^{\lg x}=100x$. Прологарифмуємо обидві частини рівняння за основою 10: $\lg x^{\lg x}=\lg 100x$; $\lg x\cdot\lg x=\lg 100+\lg x$; $\lg^2 x=2+\lg x$; $\lg^2 x-\lg x-2=0$. Нехай $\lg x=t$. Тоді одержимо: $t^2-t-2=0$; $\left[\begin{array}{l}t=2;\\ t=-1.\end{array}\right.$ Повернемося до заміни: $\left[\begin{array}{l}\lg x=2;\\ \lg x=-1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x_1=100;\\ x_2=0{,}1.\end{array}\right.$

Відповідь. 0,1; 100.

Розв'язування логарифмічних рівнянь методом заміни змінної

При розв'язуванні рівнянь цим методом необхідно звернути увагу на таке:

$\log_a^2\left(x^2\right)=\left(\log_a x^2\right)^2=\left(2\log_a|x|\right)^2=2^2\left(\log_a|x|\right)^2=4\log_a^2|x|$;

$\log_a^2 x^3=\left(\log_a x^3\right)^2=\left(3\log_a x\right)^2=3^2\log_a^2 x=9\log_a^2 x$.

Узагалі, для непарних m маємо: $\log_a^n x^m = m^n \log_a^n x$.

Для парних m маємо: $\log_a^n x^m = m^n \log_a^n |x|$.

Наприклад:

1) розв'язати рівняння $3\log_3^2 x - 4\log_3 x - 4 = 0$. Нехай $\log_3 x = t$, тоді маємо рівняння: $3t^2 - 4t - 4 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t_1 = 2; \\ t_2 = -\frac{2}{3}. \end{array}\right.$ Повертаємося до заміни: а) $\log_3 x = 2$; $x = 9$; б) $\log_3 x = -\frac{2}{3}$; $x = 3^{-\frac{2}{3}}$; $x = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

Відповідь. 9; $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$;

2) розв'язати рівняння $\lg^2 x^4 - \lg x^{14} = 2$. Перетворимо дане рівняння: $\lg^2 x^4 - \lg x^{14} = 2$; $4^2\lg^2|x| - 14\lg|x| - 2 = 0$; $8\lg^2|x| - 7\lg|x| - 1 = 0$. Нехай $\lg|x| = t$, тоді маємо: $8t^2 - 7t - 1 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t_1 = 1; \\ t_2 = -\frac{1}{8}. \end{array}\right.$ Повернемося до заміни: $\left[\begin{array}{l} \lg|x| = 1; \\ \lg|x| = -\frac{1}{8}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} |x| = 10^1; \\ |x| = 10^{-\frac{1}{8}}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \pm 10; \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt[8]{10}}. \end{array}\right.$

Отже, дане рівняння має чотири корені: $\pm 10; \pm\frac{1}{\sqrt[8]{10}}$.

Відповідь. $\pm 10; \pm\frac{1}{\sqrt[8]{10}}$.

Застосування монотонності при розв'язуванні логарифмічних рівнянь

Розв'язати рівняння $\log_5(x + 3) = 3 - x$. Встановимо монотонність функцій у лівій і правій частинах: $y = \log_5(x + 3)$ — зростаюча функція ($a = 5 > 1$); $y = 3 - x$ — спадна. Підбором знайдемо корінь: $x = 2$. Із властивостей монотонності $x = 2$ — єдиний корінь.

Відповідь. 2.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\lg(5x - 3) = 1$.

А	Б	В	Г	Д
0,6	1,2	2,6	1	0

■ $\lg(5x - 3) = 1$; $\lg(5x - 3) = \lg 10$; $5x - 3 = 10$; $x = 2{,}6$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\log_2(2x + 1) = \log_2(9x + 17) - \log_2(x + 5)$.

А	Б	В	Г	Д
–3	2	2; –3	$-1\frac{5}{6}$	–2

■ $\log_2(2x + 1) = \log_2(9x + 17) - \log_2(x + 5)$; $\log_2(2x + 1) + \log_2(x + 5) = \log_2(9x + 17)$.

$$\begin{cases}\log_2\big((2x+1)(x+5)\big)=\log_2(9x+17);\\ 2x+1>0;\\ 9x+17>0;\\ x+5>0;\end{cases}\quad\begin{cases}2x^2+11x+5=9x+17;\\ x>-\frac{1}{2};\\ x>-\frac{17}{9};\\ x>-5;\end{cases}\quad\begin{cases}2x^2+2x-12=0;\\ x>-\frac{1}{2};\end{cases}\quad\begin{cases}x^2+x-6=0;\\ x>-\frac{1}{2};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1=-3;\\ x_2=2;\end{array}\right.\\ x>-\frac{1}{2}.\end{cases}$$ Отже, $x=2$ — корінь рівняння.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\log_5\log_4\log_3 x=0$.

А	Б	В	Г	Д
∅	12	0	1	81

■ $\log_5\log_4\log_3 x=0$. $\log_5\log_4\log_3 x=\log_5 1$; $\log_4\log_3 x=1$. $\log_4\log_3 x=\log_4 4$; $\log_3 x=4$; $x=3^4$; $x=81$.

Відповідь. **Д.** ■

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\log_2^2 x-\log_2 x^5=4\log_2 64$.

А	Б	В	Г	Д
–3; 8	8	–3	$\frac{1}{8}$; 256	256

■ $\log_2^2 x-\log_2 x^5=4\log_2 64$; $\log_2^2 x-5\log_2 x=24$. Заміна: $\log_2 x=a$. Матимемо: $a^2-5a-24=0$; $a_1=8$, $a_2=-3$. $\log_2 x=8$; $x=2^8$; $x=256$ або $\log_2 x=-3$; $x=2^{-3}$; $x=\frac{1}{8}$.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\log_8(x-7)+\log_3(7-x)=11$.

А	Б	В	Г	Д
∅	7	±7	$\pm2\sqrt{15}$	0

■ $\log_8(x-7)+\log_3(7-x)=11$. Визначимо ОДЗ рівняння: $\begin{cases}x-7>0,\\ 7-x>0;\end{cases}\ \begin{cases}x>7,\\ x<7;\end{cases}\ x\in\varnothing$. Рівняння коренів не має.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\log_x 7+2\log_x 7=3$.

А	Б	В	Г	Д
Немає коренів	1; 7	$\sqrt[3]{56}$	інша відповідь	7

■ $\log_x 7+2\log_x 7=3$; $3\log_x 7=3$; $\log_x 7=1$; $x=7$.

Відповідь. **Д.** ■

Приклад 7. Розв'язати рівняння $x-1+\log_4 3=\log_4\left(5^x-4^{x-1}\right)$.

А	Б	В	Г	Д
1	4	0	$\varnothing$	3

■ За означенням логарифма одержимо: $4^{(x-1+\log_4 3)}=5^x-4^{x-1}$. Ліву частину перетворимо так: $4^{(x-1+\log_4 3)}=4^{x-1}\cdot 4^{\log_4 3}=4^{x-1}\cdot 3$. Одержимо рівняння: $3\cdot 4^{x-1}=5^x-4^{x-1}$; $4\cdot 4^{x-1}=5^x$; $4^x=5^x$; $\left(\frac{4}{5}\right)^x=1$; $x=0$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\log_x\left(2x^2-3x-4\right)=2$.

А	Б	В	Г	Д
–1	4	–1; 4	–4; 1	1

■ Замінимо задане рівняння рівносильною системою: $\begin{cases} x^2=2x^2-3x-4; \\ x>0; \\ x\neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-3x-4=0; \\ x>0; \\ x\neq 1; \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4; \\ x=-1; \end{array}\right. \\ x>0; \quad x=4. \\ x\neq 1; \end{cases}$

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 9. Розв'язати рівняння $\log_{x^2-1}\left(x^3+6\right)=\log_{x^2-1}\left(4x^2-x\right)$. У відповідь записати суму коренів рівняння.

■ Задане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x^3+6>0; \\ x^2-1>0; \\ x^2-1\neq 1; \\ x^3+6=4x^2-x. \end{cases}$ Рівняння системи $x^3-4x^2+x+6=0$ за наслідком з теореми Безу має три корені: $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=3$. Число $x_1=-1$ не задовольняє умову $x^2-1>0$. Числа $x_2=2$, $x_3=3$ є розв'язками цієї системи, а отже, й вихідного рівняння. Сума коренів дорівнює $2+3=5$.

Відповідь. 5. ■

Приклад 10. Розв'язати рівняння $x\log_3^2 x-(2x+3)\log_3 x+6=0$. У відповідь записати добуток коренів рівняння.

■ Нехай $\log_3 x=t$. Перетворимо одержане квадратне рівняння відносно t: $xt^2-(2x+3)t+6=0$; $xt^2-2xt-3t+6=0$; $xt(t-2)-3(t-2)=0$; $(t-2)(xt-3)=0$. Тоді коренями рівняння є:

1. $t_1=2$; $\log_3 x=2$; $x=9$;

2. $t_2=\frac{3}{x}$; $\log_3 x=\frac{3}{x}$. Якщо $x>0$, то функція $y=\log_3 x$ зростаюча, функція $y=\frac{3}{x}$ — спадна. Тому, якщо існує корінь рівняння $\log_3 x=\frac{3}{x}$, то він єдиний. Підбором знаходимо корінь $x=3$.

Отже, вихідне рівняння має два корені: $x = 3$ і $x = 9$. Тоді їх добуток дорівнює $3 \cdot 9 = 27$.
Відповідь. 27. ■

Приклад 11. Розв'язати рівняння $\lg 2x + \lg(2-x) = \lg\lg a$. За яких значень параметра a рівняння має корені?

■ $\lg 2x + \lg(2-x) = \lg\lg a$; $\begin{cases} \lg\big(2x(2-x)\big) = \lg\lg a; \\ 2x > 0; \\ 2-x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x(2-x) = \lg a; \\ 0 < x < 2. \end{cases}$ Оскільки $2x(2-x) > 0$, то рівняння матиме корені, лише якщо $\lg a > 0$; $a > 1$. Тоді одержимо: $\begin{cases} 2x^2 - 4x + \lg a = 0; \\ 0 < x < 2. \end{cases}$ Розв'яжемо рівняння системи. Для цього знайдемо дискримінант: $D = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \lg a = 16 - 8\lg a$. Щоб вихідне рівняння мало розв'язки, необхідно виконання умови $D \geq 0$, тобто $16 - 8\lg a \geq 0$; $\lg a \leq 2$; $a \leq 100$.

Якщо $1 < a \leq 100$, то $\begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16(1 - 0{,}5\lg a)}}{4}; \\ 0 < x < 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 0{,}5\lg a}; \\ 0 < x < 2. \end{cases}$

Так як $1 < a \leq 100$, то $0 < \lg a \leq 2$; $-1 \leq -\dfrac{1}{2}\lg a < 0$; $0 \leq 1 - \dfrac{1}{2}\lg a < 1$; $0 \leq \sqrt{1 - \dfrac{1}{2}\lg a} < 1$; $1 \leq 1 + \sqrt{1 - \dfrac{1}{2}\lg a} < 2$ і $0 < 1 - \sqrt{1 - \dfrac{1}{2}\lg a} \leq 1$. Отже, що x_1 і x_2 задовольняють умову $0 < x < 2$.

Відповідь. Якщо $1 < a \leq 100$, то $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 0{,}5\lg a}$; якщо $a > 100$, то рівняння коренів не має; якщо $a \leq 1$, то рівняння не має змісту. ■

Завдання 16.1–16.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

16.1. Розв'язати рівняння $\log_a x = c$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	$a \cdot c$	c^a	a^c	$\dfrac{c}{a}$

16.2. Розв'язати рівняння $\log_{\frac{1}{2}} x = -4$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	-16	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{1}{16}$; 16	16

16.3. Розв'язати рівняння $\log_2(-x) = 5$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	32	-32	$\dfrac{1}{32}$	$-\dfrac{1}{32}$

16.4. Розв'язати рівняння $\lg(x^2 - x) = 1 - \lg 5$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	-3; 2	-2; 1	-2; 3	-1; 2

16.5. Скільки коренів має рівняння $\lg\left(x^4-10x^2\right)=\lg 3x^3$?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	чотири

16.6. Розв'язати рівняння $\log_6(x-2)+\log_6(x-1)=1$ і вказати проміжок, якому належить його корінь.

А	Б	В	Г	Д
(–2,1; –1,9)	(3,9; 4,1)	(2,9; 3,1)	(1,9; 3,1)	(5,9; 6,1)

16.7. Розв'язати рівняння $\log_2(x+1)-\log_2(x-1)=1$ і вказати проміжок, якому належить його корінь.

А	Б	В	Г	Д
(0,9; 1,1)	(1,9; 2,1)	(2,9; 3,1)	(3,9; 4,1)	(5,9; 6,1)

16.8. Розв'язати рівняння $\log_2(x+1)+\log_2(x+2)=3-\log_2 4$ і вказати проміжок, якому належить його корінь.

А	Б	В	Г	Д
(–1,1; –0,9)	(–0,1; 0,1)	(0,9; 1,1)	(1,9; 2,1)	(3,9; 4,1)

16.9. Розв'язати рівняння $\log_2^2 x-2\log_2 x-3=0$ і вказати суму його коренів.

А	Б	В	Г	Д
–8,5	7,5	–2	2	8,5

16.10. Указати рівняння, рівносильне рівнянню $\log_3 x+\log_9 x+\log_{81} x=7$.

А	Б	В	Г	Д
$\log_3 x=\frac{49}{4}$	$\log_3 x=1$	$\log_3 x=4$	$\log_3 x=-\frac{7}{5}$	$\log_3 x=35$

16.11. Указати рівняння, рівносильне рівнянню $x^{\lg x}=10$.

А	Б	В	Г	Д
$2\lg x=10$	$2\lg x=1$	$\lg^2 x=10$	$\lg^2 x=1$	$\lg^2 x=2$

16.12. Указати рівняння, яке утворюється з рівняння $x^{\lg x}=1000x^2$ у результаті логарифмування обох його частин.

А	Б	В	Г	Д
$\lg^2 x+2\lg x+$ $+1000=0$	$\lg^2 x-2\lg x-$ $-1000=0$	$\lg^2 x=6\lg x$	$\lg^2 x+2\lg x+3=0$	$\lg^2 x-2\lg x-3=0$

16.13. Указати рівняння, рівносильне рівнянню $2\lg x^2-\lg^2(-x)=4$.

А	Б	В	Г	Д
$5\lg(-x)=4$	$3\lg(-x)=4$	$\lg^2 x-4\lg x+4=0$	$\lg^2(-x)-$ $-4\lg(-x)+4=0$	$\lg^2(-x)-$ $-4\lg(-x)-4=0$

16.14. Розв'язати рівняння $\log_a\log_b\log_c x=0$.

А	Б	В	Г	Д
c^b	a^{bc}	b^c	a^c	abc

16.15. Указати кількість коренів рівняння $\log_2^2 x^2 - 5\log_2 x^4 + 24 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
Чотири	три	два	один	жодного

16.16. Розв'язати рівняння $\lg x \log_2 x = \lg 2$ і знайти суму його коренів.

А	Б	В	Г	Д
2,5	3,5	4,5	10,5	1

16.17. Розв'язати рівняння $5^{\log_3 x} + x^{\log_3 5} = 50$ і вказати проміжок, якому належить його корінь.

А	Б	В	Г	Д
(3,9; 4,1)	(4,9; 5,1)	(5,9; 6,1)	(6,9; 7,1)	(8,9; 9,1)

16.18. Указати рівняння, рівносильне рівнянню $\lg x(x+9) + \lg\dfrac{x+9}{x} = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\lg x = 0$	$\lg(x+9) = 0$	$\lg\lvert x\rvert = 0$	$\lg\lvert x+9\rvert = 0$	$\lg\lvert -x-9\rvert = 0$

16.19. Розв'язати рівняння $5^{2^x} = 7$.

А	Б	В	Г	Д
$\log_5\log_2 7$	$\log_2\log_5 7$	$\log_7\log_5 2$	$\log_7\log_2 5$	$\log_2\log_7 5$

16.20. За якого найбільшого значення параметра a рівняння $(x-a)\log_2(3x-8) = 0$ має один корінь?

А	Б	В	Г	Д
–3	–1	0	1	3

Завдання 16.21–16.26 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

16.21. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\log_2^2 x = 1$

2 $2\log_2 x - \log_2(2-x) = 0$

3 $2\cdot 3^x = -6$

4 $3\cdot 2^{2x} = 2\cdot 3^{2x}$

А $\{1\}$

Б $\left\{\frac{1}{2};\ 2\right\}$

В $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Г $\varnothing$

Д $\{-2;\ 1\}$

16.22. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх коренів (А–Д).

1 $\log_3(-x) = 4$

2 $\log_4 x = -3$

3 $\log_3 x = -4$

4 $\log_4(-x) = 3$

А $-\frac{1}{64}$

Б $\frac{1}{64}$

В -64

Г $\frac{1}{81}$

Д -81

16.23. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1 $\log_2\log_3\log_4 x = 0$	**А** 8
2 $\log_4\log_3\log_2 x = 0$	**Б** 9
3 $\log_3\log_2\log_4 x = 0$	**В** 16
4 $\log_2\log_4\log_3 x = 0$	**Г** 64
	Д 81

16.24. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та добутками їх коренів (А–Д).

1 $\log_2^2 x + 4\log_2 x + 3 = 0$	**А** 4
2 $\log_2^2 x + 2\log_2 x - 3 = 0$	**Б** 16
3 $\log_2^2 x - 4\log_2 x + 3 = 0$	**В** $\frac{1}{4}$
4 $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0$	**Г** $\frac{1}{2}$
	Д $\frac{1}{16}$

16.25. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та кількістю їх коренів (А–Д).

1 $\lg^5 x - 3\lg^3 x - 4\lg x = 0$	**А** жодного
2 $\lg^4 x - 5\lg^2 x + 4 = 0$	**Б** два
3 $\lg^4 x + 5\lg^2 x + 4 = 0$	**В** три
4 $\lg^4 x + 3\lg^2 x - 4 = 0$	**Г** чотири
	Д п'ять

16.26. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1 $5^{2^x} = 9$	**А** $\log_5\log_9 2$
2 $2^{5^x} = 9$	**Б** $\log_9\log_2 5$
3 $2^{9^x} = 5$	**В** $\log_2\log_9 5$
4 $9^{2^x} = 5$	**Г** $\log_5\log_2 9$
	Д $\log_2\log_5 9$

Розв'яжіть завдання 16.27–16.39. Відповідь запишіть десятковим дробом.

16.27. Розв'язати рівняння $\log_7(x-2) - \log_7(x+2) = 1 - \log_7(2x-7)$.

16.28. Розв'язати рівняння $\log_2\frac{x-5}{x+5} + \log_2\left(x^2-25\right) = 0$.

16.29. Розв'язати рівняння $\lg^2 x^4 - \lg x^{14} = 2$. У відповідь записати найменший корінь рівняння.

16.30. Розв'язати рівняння $4\lg x^2 - \lg^2(-x) = 16$. У відповідь записати $x_0 : 1000$, де x_0 — корінь рівняння.

16.31. Розв'язати рівняння $\frac{1}{5-\lg x} + \frac{2}{1+\lg x} = 1$. У відповідь записати модуль різниці коренів рівняння.

16.32. Розв'язати рівняння $\lg^2(100x) + \lg^2(10x) = 14 + \lg\frac{1}{x}$. У відповідь записати найбільший корінь рівняння.

16.33. Розв'язати рівняння $\log_5 x + \log_x 25 = 3$. У відповідь записати добуток коренів рівняння.

16.34. Розв'язати рівняння $\log_2 x \cdot \log_4 x \cdot \log_8 x = 36$.

16.35. Розв'язати рівняння $x^{\lg x} = 1000x^2$. У відповідь записати найменший корінь рівняння.

16.36. Розв'язати рівняння $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12$. У відповідь записати добуток коренів рівняння.

16.37. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}} = 10$. У відповідь записати добуток коренів рівняння.

16.38. Розв'язати рівняння $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0$. У відповідь записати суму коренів рівняння.

16.39. Розв'язати рівняння $\left|\log_{\sqrt{5}} x - 4\right| - \left|\log_5 x - 4\right| = 1$. У відповідь записати добуток коренів рівняння.

Тема 17. Логарифмічні нерівності

Нерівність, яка містить змінну під знаком логарифма або в його основі, називають *логарифмічною*. Наприклад, $\log_5 x < 3$, $\lg x + \lg(x+8) \geq \lg(4-5x)$ тощо. Розв'язування логарифмічних нерівностей грунтується на властивості монотонності логарифмічної функції: функція $y = \log_a x$ монотонно зростає, якщо $a > 1$, і монотонно спадає, якщо $0 < a < 1$. При цьому слід урахувати, що підлогарифмічний вираз може набувати лише додатних значень.

Нерівності, що розв'язуються з використанням властивостей логарифмів

Розглянемо нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$. Одержимо:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1; \\ g(x) > 0; \\ f(x) > g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1; \\ f(x) > 0; \\ f(x) < g(x); \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1; \\ 0 < g(x) < f(x); \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1; \\ 0 < f(x) > g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Аналогічно розв'язується нерівність $\log_a f(x) < \log_a g(x)$.

Наприклад, розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-6x+18\right) < 2\log_{\frac{1}{3}}(x-4)$. Перепишемо задану нерівність у вигляді $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-6x+18\right) < \log_{\frac{1}{3}}(x-4)^2$ за умови, що $x-4>0$. Оскільки $0 < \frac{1}{3} < 1$, то дана нерівність рівносильна системі: $\begin{cases} x^2-6x+18 > (x-4)^2; \\ x-4>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-6x+18 > x^2-8x+16; \\ x>4; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+2>0; \\ x>4; \end{cases}$ $\begin{cases} x>-1; \\ x>4; \end{cases}$

$x > 4$;

$x \in (4; +\infty)$.

Відповідь. $(4; +\infty)$.

Нерівності виду $\log_a f(x) > b$ розв'язують так: $\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \log_a f(x) > b\log_a a \Leftrightarrow \log_a f(x) > \log_a a^b \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < f(x) < a^b; \\ 0 < a < 1; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) > a^b; \\ a > 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Аналогічно: $\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \log_a f(x) < b\log_a a \Leftrightarrow \log_a f(x) < \log_a a^b \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > a^b; \\ 0 < a < 1; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < a^b; \\ a > 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Наприклад: 1) розв'язати нерівність $\log_2(8-x) < 1$. Одержимо: $\log_2(8-x) < 1$; $\log_2(8-x) < \log_2 2$; $0 < 8-x < 2$. Тоді $\begin{cases} 8-x>0; \\ 8-x<2; \end{cases}$ $\begin{cases} x<8; \\ x>6; \end{cases}$ $x \in (6; 8)$.

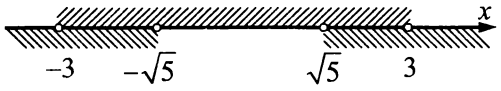
Відповідь. $(6; 8)$;

2) розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{2}} \log_5\left(x^2-4\right)>0$. Запишемо дану нерівність у вигляді:

$\log_{\frac{1}{2}} \log_5\left(x^2-4\right)>\log_{\frac{1}{2}} 1$; $0<\log_5\left(x^2-4\right)<1$; $\begin{cases}\log_5\left(x^2-4\right)<\log_5 5;\\ \log_5\left(x^2-4\right)>\log_5 1;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-4<5;\\ x^2-4>1;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2<9;\\ x^2>5;\end{cases}$

$\begin{cases}x\in(-3;3);\\ x\in\left(-\infty;\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5};+\infty\right).\end{cases}$

Тоді спільний розв'язок:



$x\in\left(-3;-\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5};3\right)$.

Відповідь. $\left(-3;-\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5};3\right)$.

Логарифмічні нерівності, які розв'язуються заміною змінної

Розв'язати нерівність $\log^2_{0,5} x+\log_{0,5} x-2\le 0$. Нехай $\log_{0,5}x = t$. Перепишемо нерівність у вигляді: $t^2 + t - 2 \le 0$; $t_1 = -2$, $t_2 = 1$; $t\in[-2; 1]$.

Повернемося до заміни: $\begin{cases}t_1\ge -2;\\ t_2\le 1;\end{cases}$ $\begin{cases}\log_{0,5} x\ge -2;\\ \log_{0,5} x\le 1;\end{cases}$ $\begin{cases}\log_{0,5} x\ge \log_{0,5} 0,5^{-2};\\ \log_{0,5} x\le \log_{0,5} 0,5;\end{cases}$ $\begin{cases}x\le 4;\\ x\ge 0,5;\end{cases}$ $x\in[0,5; 4]$.

Відповідь. [0,5; 4].

Показниково-логарифмічні нерівності

Показниково-логарифмічними нерівностями називають нерівності виду $\left(g(x)\right)^{f(x)} <> a$, де $f(x)$ містить логарифмічну функцію, а знак <> — один зі знаків <, >, ≤, ≥.

Розв'язуючи такі нерівності, спочатку переконуємося, що обидві частини нерівності набувають тільки додатні значення, тобто що логарифми цих частин існують, і тоді логарифмуємо їх за деякою основою.

Наприклад, розв'язати нерівність $\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x-2}\le 100$. ОДЗ: $x > 0$. Обидві частини нерівності при $x > 0$ набувають тільки додатні значення, тобто логарифми обох частин існують. Прологарифмуємо дану нерівність за основою 10. Оскільки $10 > 1$, то одержимо: $\lg\left(\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x-2}\right)\le \lg 100$; $(\lg x-2)\lg\frac{x}{10}\le 2$; $(\lg x-2)(\lg x-\lg 10)\le 2$; $(\lg x-2)(\lg x-1)\le 2$. Нехай $\lg x = t$, тоді маємо: $(t-2)(t-1)\le 2$; $t^2-3t\le 0$; $0\le t\le 3$; $0\le \lg x\le 3$; $\lg 1\le \lg x\le \lg 10^3$; $1\le x\le 1000$; $x\in[1; 1000]$.

Відповідь. [1; 1000].

Нерівності, які містять змінну під знаком логарифма й в основі логарифма

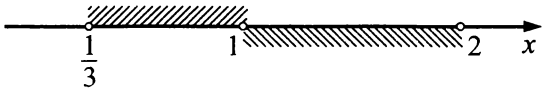
$$\log_{\varphi(x)} f(x)>M \Leftrightarrow \log_{\varphi(x)} f(x)>\log_{\varphi(x)}\left(\varphi(x)\right)^M \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\varphi(x)>1;\\ f(x)>\left(\varphi(x)\right)^M;\end{cases}\\ \begin{cases}0<\varphi(x)<1;\\ 0<f(x)<\left(\varphi(x)\right)^M.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\varphi(x) > 1;\\ 0 < g(x) < f(x);\end{cases}\\ \begin{cases}0 < \varphi(x) < 1;\\ 0 < f(x) < g(x).\end{cases}\end{array}\right.$$

Наприклад, розв'язати нерівність $\log_x \frac{3x-1}{x^2+1} > 0$. Перепишемо нерівність так: $\log_x \frac{3x-1}{x^2+1} > \log_x 1$.

Ця нерівність рівносильна сукупності двох систем: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 < x < 1;\\ \frac{3x-1}{x^2+1} < 1;\\ \frac{3x-1}{x^2+1} > 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x > 1;\\ \frac{3x-1}{x^2+1} > 1;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 < x < 1;\\ 3x-1 < x^2+1;\\ 3x-1 > 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x > 1;\\ 3x-1 > x^2+1;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 < x < 1;\\ x^2-3x+2 > 0;\\ x > \frac{1}{3};\end{cases}\\ \begin{cases}x > 1;\\ x^2-3x+2 < 0;\end{cases}\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{1}{3} < x < 1;\\ \left[\begin{array}{l}x > 2;\\ x < 1;\end{array}\right.\end{cases} \quad \left[\begin{array}{l}\frac{1}{3} < x < 1;\\ 1 < x < 2.\end{array}\right.\\ \begin{cases}x > 1;\\ 1 < x < 2;\end{cases}\end{array}\right.$$



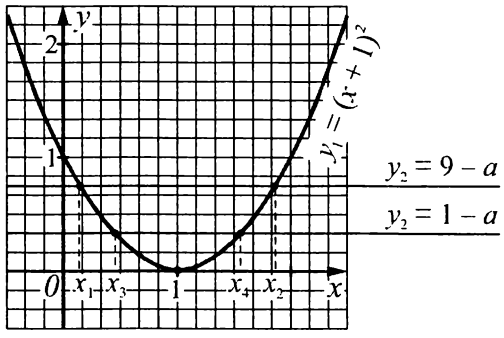
$x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 2)$.

Відповідь. $\left(\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 2)$.

Логарифмічні нерівності з параметрами

Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 2x + a\right) > -3$.

Перепишемо дану нерівність у вигляді: $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 2x + a\right) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$. Звідси випливає: $0 < x^2 - 2x + a < 8$; $0 < (x-1)^2 + a - 1 < 8$; $1 - a < (x-1)^2 < 9 - a$. (1) Зобразимо на координатній площині графіки функцій $y_1 = (x-1)^2$; $y_2 = 9 - a$ та $y_3 = 1 - a$.



З нерівності (1) та рисунка слідує, що якщо $9 - a \le 0$, тобто $a \ge 9$, то нерівність розв'язків не має.

Якщо $\begin{cases} 9-a>0; \\ 1-a<0; \end{cases}$ $1 < a < 9$, то нерівність матиме розв'язки і ними будуть усі такі x, що $x_1 < x < x_2$, де x_1 і x_2 — абсциси точок перетину параболи $y_1 = (x-1)^2$ з прямою $y_2 = 9 - a$, які обчислюють за формулою $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{9-a}$.

Якщо ж припустити, що $\begin{cases} 9-a>0; \\ 1-a\ge 0; \end{cases}$ $a \le 1$, то розв'язками вихідної нерівності є всі такі x, що $x_1 < x < x_3$, $x_4 < x < x_2$, де x_3 і x_4 — абсциси точок перетину параболи $y_1 = (x-1)^2$ з прямою $y_2 = 1 - a$, які обчислюють за формулою $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1-a}$.

Відповідь. Якщо $a \le 1$, то $x \in (x_1; x_3) \cup (x_4; x_2)$; якщо $1 < a < 9$, то $x \in (x_1; x_2)$; якщо $a \ge 9$, то $x \in \varnothing$, де $x_1 = 1 - \sqrt{9-a}$, $x_2 = 1 + \sqrt{9-a}$; $x_3 = 1 - \sqrt{1-a}$; $x_4 = 1 + \sqrt{1-a}$.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\log_3\left(x^2 - 5x - 5\right) > 2$.

■ $\log_3\left(x^2 - 5x - 5\right) > 2$; $\log_3\left(x^2 - 5x - 5\right) > \log_3 3^2$. Оскільки основа логарифмів $3 > 1$, то дана нерівність рівносильна такій: $x^2 - 5x - 5 > 9$; $x^2 - 5x - 14 > 0$; $x_1 = -2$, $x_2 = 7$; $x \in (-\infty; -2) \cup (7; +\infty)$.

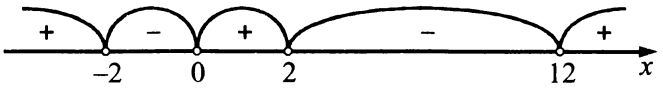
Відповідь. $(-\infty; -2) \cup (7; +\infty)$. ■

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{2x-3}{x^2+2x} < 3$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2) \cup (2; 12)$	$(2; 12)$	$(-2; 0) \cup (2; 12)$	$(-\infty; -2) \cup (0; 2) \cup$ $\cup (12; +\infty)$	$\varnothing$

■ $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{2x-3}{x^2+2x} < 3$; $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{2x-3}{x^2+2x} < \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{8}$. Оскільки функція $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ спадна, то $\dfrac{2x-3}{x^2+2x} > \dfrac{1}{8}$;

$\dfrac{16x - 24 - x^2 - 2x}{8(x^2+2x)} > 0$; $\dfrac{x^2 - 14x + 24}{x^2+2x} < 0$; $\dfrac{(x-2)(x-12)}{x(x+2)} < 0$.



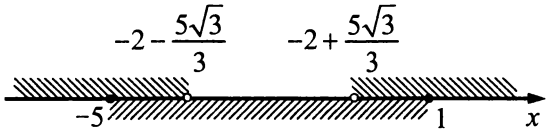
$x \in (-2; 0) \cup (2; 12)$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 3. Знайти цілі розв'язки нерівності $\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 + 4x - 4\right)} < 1$. У відповідь записати їхню суму.

■ Дана нерівність рівносильна подвійній нерівності: $0 < \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 + 4x - 4\right) < 1$. Перетворимо останню нерівність: $\log_{\frac{1}{3}} 1 < \log_{\frac{1}{3}}\left(x^2 + 4x - 4\right) < \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{3}$. Врахувавши, що $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ — спадна функція, одержимо: $\dfrac{1}{3} < x^2 + 4x - 4 \le 1$, звідки: $\begin{cases} 3x^2 + 12x - 13 > 0; \\ x^2 + 4x - 5 \le 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \left(x + 2 + \dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right)\left(x + 2 - \dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right) > 0; \\ (x-1)(x+5) \le 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} x \in \left(-\infty; -2-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(-2+\dfrac{5\sqrt{3}}{3}; +\infty\right); \\ x \in [-5; 1]. \end{cases}$$



Отже, $x \in \left[-5; -2-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(-2+\dfrac{5\sqrt{3}}{3}; 1\right]$.

Цілими розв'язками є –5 і 1. Їхня сума дорівнює –5 + 1 = –4.

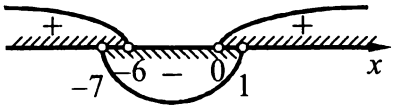
Відповідь. –4. ■

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\log_{\cos 1} \log_8 \left(x^2+6x+1\right) > 0$.

■ $\log_{\cos 1} \log_8 \left(x^2+6x+1\right) > 0$; $\log_{\cos 1} \log_8 \left(x^2+6x+1\right) > \log_{\cos 1} 1$. Оскільки основа логарифмів $0 < \cos 1 < 1$, то дана нерівність рівносильна подвійній нерівності:

$0 < \log_8 \left(x^2+6x+1\right) < 1$; $\log_8 1 < \log_8 \left(x^2+6x+1\right) < \log_8 8$; $1 < x^2+6x+1 < 8$;

$$\begin{cases} x^2+6x+1 > 1; \\ x^2+6x+1 < 8; \end{cases} \begin{cases} x^2+6x > 0; \\ x^2+6x-7 < 0; \end{cases} \begin{cases} x(x+6) > 0; \\ (x+7)(x-1) < 0; \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty); \\ x \in (-7; 1). \end{cases}$$



$x \in (-7; -6) \cup (0; 1)$.

Відповідь. $(-7; -6) \cup (0; 1)$. ■

Приклад 5. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\log_5^2 x + (2x-7)\log_5 x + x^2 - 7x + 6 \le 0$.

■ Ліву частину нерівності розглянемо як квадратний тричлен відносно $\log_5 x$. Нехай $\log_5 x = t$. Знайдемо корені рівняння: $t^2 + (2x-7)t + x^2 - 7x + 6 = 0$; $D = (2x-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (x^2 - 7x + 6) =$ $= 4x^2 - 28x + 49 - 4x^2 + 28x - 24 = 25$; $t_{1,2} = \dfrac{(7-2x) \pm 5}{2}$; $t_1 = -x + 1$, $t_2 = -x + 6$. Повернемося до заміни: $(\log_5 x + x - 1)(\log_5 x + x - 6) \le 0$. Функції $t_1 = \log_5 x + x - 1$ та $t_2 = \log_5 x + x - 6$ при $x > 0$ є монотонно зростаючими і перетворюються у нуль, якщо $x_1 = 1$ або $x_2 = 5$ відповідно.

Отже, знаки лівої частини нерівності такі:

Тоді $x \in [1; 5]$.

Цілими розв'язками є числа 1, 2, 3, 4, 5, а їхня сума дорівнює 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.

Відповідь. 15. ■

Завдання 17.1–17.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

17.1. Знайти множину розв'язків нерівності $\log_3(x-4) \le \log_3 8$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 12)$	$(-\infty; 12]$	$[4; 12]$	$(4; 12]$	$(0; 12]$

17.2. Розв'язати нерівність $\log_{0,1}(2x-5) > \log_{0,1} x$.

А	Б	В	Г	Д
$(2{,}5; +\infty)$	$(5; +\infty)$	$(-\infty; 5)$	$(0; 5)$	$(2{,}5; 5)$

17.3. Розв'язати нерівність $\log_\pi x > \log_\pi 3 + \log_\pi 5$.

А	Б	В	Г	Д
$(15; +\infty)$	$(-\infty; 15)$	$(0; 15)$	$(8; +\infty)$	$(0; 8)$

17.4. Розв'язати нерівність $\log_{0,1}(2x-1) \ge \log_{0,1} 10 - \log_{0,1} 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(0; 3]$	$[3; +\infty)$	$(-\infty; 3]$	$(0{,}5; 3]$	$(0{,}5; 4{,}5]$

17.5. Знайти множину розв'язків нерівності $\log_{\sin 1} x > 2\log_{\sin 1} 7$.

А	Б	В	Г	Д
$(49; +\infty)$	$(0; 49)$	$(14; +\infty)$	$(0; 14)$	$(-\infty; 49)$

17.6. Знайти множину розв'язків нерівності $\log_5 x < 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 25)$	$(25; +\infty)$	$(0; 25)$	$(0; 2)$	$(-\infty; 2)$

17.7. Скільки цілих чисел є розв'язками нерівності $\log_{\frac{1}{2}}(x+3) \ge -1$?

А	Б	В	Г	Д
Одне	два	три	жодне	більше, ніж три

17.8. Розв'язати нерівність $\log_8(3x-10) < \frac{1}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(0; 3\frac{1}{3}\right)$	$\left(-\infty; 3\frac{1}{3}\right)$	$(4; +\infty)$	$(-\infty; 4)$	$\left(3\frac{1}{3}; 4\right)$

17.9. Вказати найбільший цілий розв'язок нерівності $\log_{\frac{1}{7}}(x+3) > -1$.

А	Б	В	Г	Д
6	7	4	3	–3

17.10. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{\frac{1}{5}}(2-x)} < 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 2)$	$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$	$(0; 2)$	$(2; +\infty)$

17.11. Скільки цілих розв'язків має нерівність $-2 < \log_{\frac{1}{2}} x < 3$?

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	жодного	більше, ніж три

17.12. Розв'язати нерівність $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 \le 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1]\cup[2; +\infty)$	$[1; 2]$	$[3; 9]$	$(-\infty; 3]\cup[9; +\infty)$	$(3; 9)$

17.13. Розв'язати нерівність $\lg^2 x - 4\lg x + 3 \ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1]\cup[3; +\infty)$	$(0; 1]\cup[3; +\infty)$	$[10; 1000]$	$(-\infty; 10]\cup[1000; +\infty)$	$(0; 10]\cup[1000; +\infty)$

17.14. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{3}}(\log_5 x) \ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{1}{3}; 5\right]$	$(1; 5]$	$(0; 1]$	$(-\infty; 0]\cup[1; +\infty)$	$(-\infty; 1]\cup[5; +\infty)$

17.15. Скільки цілих розв'язків має нерівність $\dfrac{\sqrt{x+3}}{\log_2(2x-3)} \le 0$?

А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	більше, ніж три

17.16. Знайти множину розв'язків нерівності $\log_x 5 < 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(0; 1)\cup(1; +\infty)$	$(0; 1)\cup(5; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(0; 5)\cup(5; +\infty)$	$(0; 1)\cup(1; 5)$

17.17. Вказати цілі розв'язки нерівності $\log_{\frac{2x-1}{3}} 2 < 0$.

А	Б	В	Г	Д
1; 2	1	0; 1	0; 1; 2	2; 3

17.18. Розв'язати нерівність $\log_9 (x+3)^2 \le 1$.

А	Б	В	Г	Д
$[-6; 0]$	$[-6; -3)\cup(-3; +\infty)$	$(-\infty; -6]\cup[0; +\infty)$	$(-\infty; -6)\cup(0; +\infty)$	$[-6; -3)\cup(-3; 0]$

17.19. Розв'язати нерівність $(x-2)\log_{0,5} x \le 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1]\cup[2; +\infty)$	$[1; 2]$	$(0; 1]\cup[2; +\infty)$	$(0; 2]$	$(0; 1)\cup(2; +\infty)$

17.20. Розв'язати нерівність $x^x < 1$, якщо $x > 0$, застосувавши логарифмування.

А	Б	В	Г	Д
$(1; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(0; 1)$	$(-\infty; 0)\cup(0; 1)$	1

17.21. Розв'язати нерівність $\left|\log_{\frac{1}{2}} x\right| \le 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[\frac{1}{2}; 2\right]$	$\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$	$\left(0; \frac{1}{2}\right]$	$\left(0; \frac{1}{2}\right)$	$[2; +\infty)$

17.22. Розв'язати нерівність $|\log_3 x| \ge 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[\frac{1}{3}; 3\right]$	$[3; +\infty)$	$\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup [3; +\infty)$	$\left(0; \frac{1}{3}\right] \cup [3; +\infty)$	$\left[-\frac{1}{3}; 0\right) \cup [3; +\infty)$

Завдання 17.23–17.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

17.23. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та рівносильними їм нерівностями або системами (А–Д).

1 $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > -2$

2 $\log_2(x+1) > 2$

3 $2^{x+1} < 16$

4 $0{,}5^{x+1} < 4$

А $x+1 > 4$

Б $x+1 < 4$

В $\begin{cases} x+1 < 4; \\ x+1 > 0 \end{cases}$

Г $x+1 > -2$

Д $x+1 < -2$

17.24. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\log_4 x < 0$

2 $\log_4 x > 0$

3 $\log_4(-x) < 0$

4 $\log_4(-x) > 0$

А $(-\infty; -1)$

Б $(-\infty; 1)$

В $(1; +\infty)$

Г $(-1; 0)$

Д $(0; 1)$

17.25. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\log_{0,5} x < 0$

2 $\log_{0,5} x > 0$

3 $\log_{0,5}(-x) < 0$

4 $\log_{0,5}(-x) > 0$

А $(-\infty; -1)$

Б $(-\infty; 1)$

В $(1; +\infty)$

Г $(-1; 0)$

Д $(0; 1)$

17.26. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\log_9 x < \frac{1}{2}$

2 $\log_{\frac{1}{3}} x > -2$

3 $\log_{\frac{1}{9}} x < -\frac{1}{2}$

4 $\log_{\frac{1}{9}} x < \frac{1}{2}$

А $(0; 9)$

Б $(9; +\infty)$

В $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$

Г $(0; 3)$

Д $(3; +\infty)$

17.27. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\log_5(x-2) < \log_5(-x)$	**А** $(-1; +\infty)$
2 $\log_{\frac{1}{5}}(2-x) < \log_{\frac{1}{5}}(-x)$	**Б** $(-1; 0)$
3 $\log_5(x+2) > \log_5(-x)$	**В** $(-2; -1)$
4 $\log_{\frac{1}{5}}(x+2) > \log_{\frac{1}{5}}(-x)$	**Г** $(-\infty; 0)$
	Д $\varnothing$

17.28. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\log_2(\log_5 x) < 0$	**А** $(0; 0{,}5)$
2 $\log_{\frac{1}{2}}(\log_5 x) < 0$	**Б** $(1; 2)$
3 $\log_5(\log_2 x) < 0$	**В** $(1; 5)$
4 $\log_{\frac{1}{5}}\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) < 0$	**Г** $(-\infty; 5)$
	Д $(5; +\infty)$

Розв'яжіть завдання 17.29–17.41. Відповідь запишіть десятковим дробом.

17.29. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6) > -1$. У відповідь записати найменше натуральне число, яке не є розв'язком нерівності.

17.30. Розв'язати нерівність $\lg(x-2)+\lg(27-x) < 2$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок нерівності.

17.31. Розв'язати нерівність $\lg x + 6\log_x 10 \le 5$. У відповідь записати кількість цілих розв'язків нерівності.

17.32. Розв'язати нерівність $\lg^2(-x) + \lg x^2 - 3 < 0$. У відповідь записати кількість цілих розв'язків нерівності.

17.33. Розв'язати нерівність $\lg^2 100x - 5\lg x > 6$. У відповідь записати кількість натуральних чисел, які не є розв'язками нерівності.

17.34. Розв'язати нерівність $9^{\log_3^2 x} < 4x^{\log_3 x} - 3$. У відповідь записати суму всіх натуральних розв'язків нерівності.

17.35. Розв'язати нерівність $\log_{x^2}\frac{2x}{x-3} \le \frac{1}{2}$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

17.36. Розв'язати нерівність $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1$. У відповідь записати найменше натуральне число, яке не є розв'язком нерівності.

17.37. Розв'язати нерівність $x^{\frac{3x-1}{2-x}} > 1$. У відповідь записати найменше натуральне число, яке не є розв'язком нерівності.

17.38. Розв'язати нерівність $\log_2(5-x)\log_{x+1}\frac{1}{8} \ge -6$. У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.

17.39. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{2}}|x| \geq |x| - 1$. У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.

17.40. Розв'язати нерівність $\log_x 3x \leq \sqrt{\log_x\left(3x^7\right)}$. У відповідь записати добуток усіх натуральних чисел, які не є розв'язками нерівності.

17.41. Розв'язати нерівність $\log_{x+1}|x-2| \leq 1$. У відповідь записати суму всіх натуральних чисел, які не є розв'язками нерівності.

Тема 18. Тригонометричні рівняння

Тригонометричними називають рівняння, які містять змінну під знаком тригонометричних функцій.

Найпростіші тригонометричні рівняння

Рівняння виду $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, де x — невідома величина, a — довільне дійсне число, називають *найпростішими тригонометричними рівняннями.*

1. Рівняння $\sin x = a$.

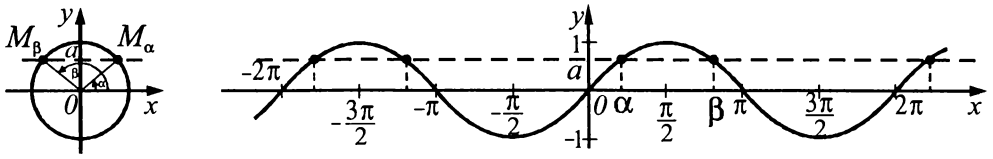
Оскільки $-1 \le \sin x \le 1$ для будь-якого x, то якщо $a > 1$ або $a < -1$, рівняння $\sin x = a$ не має коренів. Для того, щоб розв'язати рівняння $\sin x = a$, досить знайти на одиничному колі або графіку відповідної функції такі точки, ординати яких дорівнюють a. Якщо пряма $y = a$ перетинає одиничне коло (графік) у точках M_α і M_β, то кути α і β є коренями рівняння $\sin x = a$.

$\sin x = a$

$|a| \le 1$

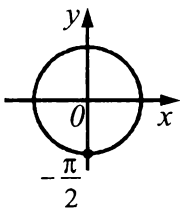
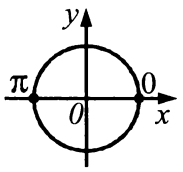
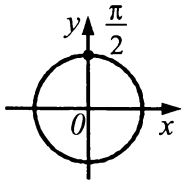
$$\sin x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}; \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Ці формули можна об'єднати в одну: $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.



$\alpha = \arcsin a$; $\beta = \pi - \arcsin a$

Окремі випадки

$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$
$\sin x = -1$	$\sin x = 0$	$\sin x = 1$
$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$	$x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$
		

Наприклад:

1. Розв'язати рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$. Використаємо формулу коренів рівняння: $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь. $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2. Розв'язати рівняння $\sin x = -\frac{1}{2}$. Маємо: $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь. $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3. Знайти найменший розв'язок рівняння $\sqrt{2}-2\sin\frac{\pi x}{9}=0$, який задовольняє умову $0<x<10$. Запишемо рівняння у вигляді: $\sin\frac{\pi x}{9}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, тоді $\frac{\pi x}{9}=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$; $x=(-1)^k\frac{9}{4}+9k$, $k\in Z$. Якщо $k<0$, то $x<0$; якщо $k=0$, то $x=(-1)^0\frac{9}{4}+9\cdot 0=2{,}25$, якщо $k=1$, то $x=(-1)^1\frac{9}{4}+9\cdot 1=$ $-2{,}25+9=$ $=6{,}75$. Оскільки $0<x<10$, то найменший розв'язок з цього проміжку дорівнює 2,25.

Відповідь. 2,25.

4. Розв'язати рівняння $\sin(\pi\cdot 4^x)=0$. Використаємо формулу для випадку $\sin t=0$, $t=\pi n$. Отже, $\pi\cdot 4^x=\pi n$; $4^x=n$, $n\in N$, бо показникова функція набуває лише додатних значень, звідки $x=\log_4 n$.

Відповідь. $\log_4 n$.

2. Рівняння $\cos x=a$.

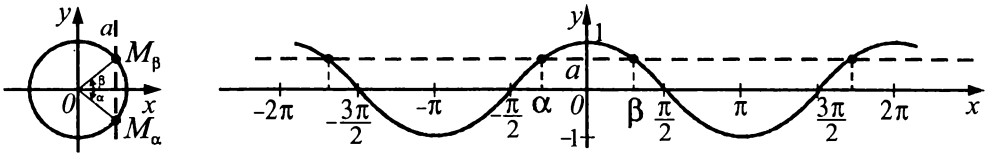
Оскільки $-1\le\cos x\le 1$ для будь-якого x, то якщо $a>1$ або $a<-1$, рівняння $\cos x=a$ не має коренів. Для того, щоб розв'язати рівняння $\cos x=a$, досить знайти на одиничному колі або графіку відповідної функції такі точки, абсциси (ординати) яких дорівнюють a. Якщо пряма $x=a$ перетинає одиничне коло (графік) у точках M_α і M_β, то кути α і β є коренями рівняння $\cos x=a$.

$\cos x=a$

$|a|\le 1$

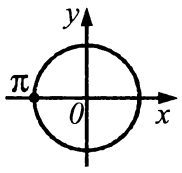
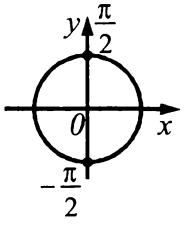
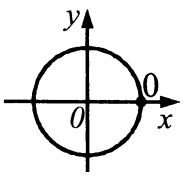
$$\cos x=a\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\arccos a+2\pi k,\ k\in Z;\\ x=-\arccos a+2\pi k,\ k\in Z.\end{array}\right.$$

Ці формули можна об'єднати в одну: $x=\pm\arccos a+2\pi k$, $k\in Z$.



$\alpha=-\arccos a$; $\beta=\arccos a$

Окремі випадки

$a=-1$	$a=0$	$a=1$
$\cos x=-1$	$\cos x=0$	$\cos x=1$
$x=\pi+2\pi nk$ $k\in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$	$x=2\pi k$, $k\in Z$
		

Наприклад:

1. Розв'язати рівняння $2\cos x=1$. Запишемо рівняння у вигляді: $\cos x=\frac{1}{2}$; $x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi k$, $k\in Z$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

Відповідь. $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

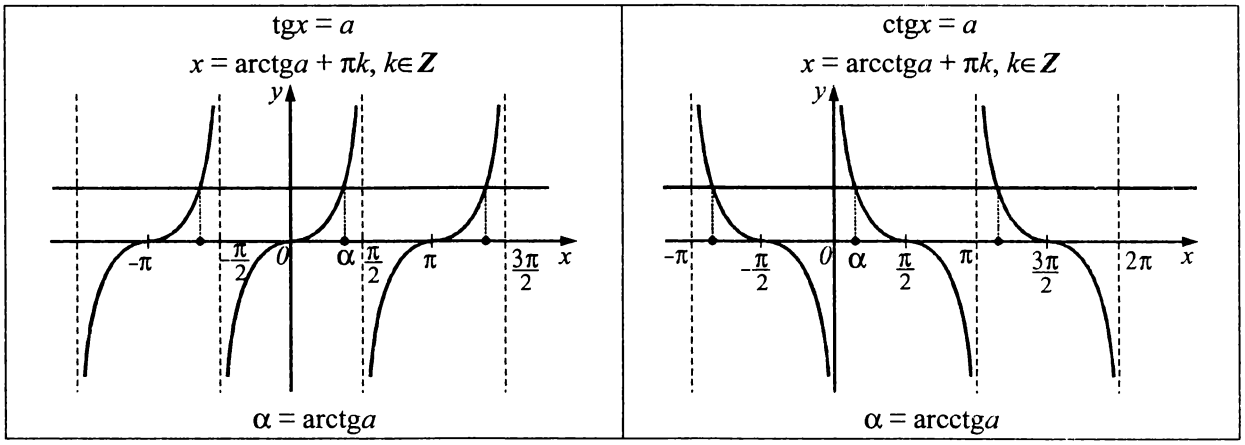
2. Розв'язати рівняння $\cos 4x = -\frac{1}{2}$. Нехай $4x = t$, тоді $\cos t = -\frac{1}{2}$; $t = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k$, $k \in Z$; $t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. Повернемося до заміни: $4x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

Відповідь. $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

3. Рівняння tg$x$ = a і ctg$x$ = a.

Для будь-якого дійсного числа a на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ існує тільки один кут α такий, що $\operatorname{tg}\alpha = a$. Це кут $\alpha = \operatorname{arctg} a$. Враховуючи періодичність функції $y = \operatorname{tg} x$, одержуємо формулу коренів рівняння $\operatorname{tg} x = a$: $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$, $k \in Z$.

Для будь-якого дійсного числа a на проміжку $(0; \pi)$ існує тільки один кут α такий, що $\operatorname{ctg}\alpha = a$. Це кут $\alpha = \operatorname{arcctg} a$. Враховуючи періодичність функції $y = \operatorname{ctg} x$, одержуємо формулу коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = a$: $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$, $k \in Z$.



Наприклад, розв'язати рівняння $3\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{6} - 2x\right) + \sqrt{3} = 0$. Запишемо дане рівняння у вигляді $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{6} - 2x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Скористаємося формулами зведення й одержимо: $\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{6} - 2x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{tg}\left(\pi - \left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $-\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Уведемо заміну $t = 2x + \frac{\pi}{6}$. Маємо: $\operatorname{tg} t = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $t = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi k$, $k \in Z$; $t = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$. Повернемося до заміни: $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$; $2x = \pi k$, $k \in Z$; $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

Відповідь. $\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

Рівняння, що зводяться до квадратних

Нехай потрібно розв'язати рівняння $4\cos^2\frac{x}{2} - 8\cos\frac{x}{2} + 3 = 0$. Уведемо нову змінну: $\cos\frac{x}{2} = t$, звідки одержимо рівняння: $4t^2 - 8t + 3 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{1}{2}; \\ t_2 = 1{,}5. \end{array}\right.$ Повернемося до заміни та розв'яжемо одержані рів-

няння: 1) $\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$; $\frac{x}{2}=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi k$, $k\in Z$; $\frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; $x=\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi k$, $k\in Z$; 2) $\cos\frac{x}{2}=1{,}5$; $x\in\varnothing$.

Відповідь. $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi k$, $k\in Z$.

Рівняння виду asinx + bcosx = c, де a, b, c∈R

Рівняння цього виду розв'язують за допомогою введення допоміжного кута. Вважаючи, що $a^2+b^2\neq 0$, поділимо обидві частини вихідного рівняння на $\sqrt{a^2+b^2}$ й одержимо: $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Одержані коефіцієнти при sin$x$ і cos$x$ мають такі властивості: $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1$, $\left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1$, $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, тому можна стверджувати, що існує такий кут φ, що, наприклад, $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$, $\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi$. Тоді останнє рівняння зводиться до найпростішого: $\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Наприклад, розв'язати рівняння $3\sin x+4\cos x=2$. Перетворимо рівняння: $3\sin x+4\cos x=2$; $\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}\sin x+\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\cos x=\frac{2}{\sqrt{3^2+4^2}}$; $\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x=\frac{2}{5}$. Уведемо допоміжний кут: $\frac{3}{5}=\cos\varphi$, $\frac{4}{5}=\sin\varphi$. Оскільки $\sin\varphi>0$ і $\cos\varphi>0$, то за допоміжний кут φ можна взяти $\varphi=\arcsin\frac{4}{5}$. Тоді маємо: $\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi=\frac{2}{5}$; $\sin(x+\varphi)=\frac{2}{5}$; $x=(-1)^k\arcsin\frac{2}{5}-\varphi+\pi k$, $k\in Z$, де $\varphi=\arcsin\frac{4}{5}$.

Відповідь. $(-1)^k\arcsin\frac{2}{5}-\varphi+\pi k$, $k\in Z$, де $\varphi=\arcsin\frac{4}{5}$.

Однорідні тригонометричні рівняння

Однорідні тригонометричні рівняння — це рівняння виду $a_0\sin^n x+a_1\sin^{n-1}x\cos x+a_2\sin^{n-2}x\cos^2 x+\ldots+a_{n-1}\sin x\cos^{n-1}x+a_n\cos^n x=0$, де a_0, a_1, a_2, ..., a_n — дійсні числа, $n\ge 1$. Таке рівняння легко звести до рівняння відносно tg$x$, якщо всі його члени поділити на $\cos^n x$. При цьому, якщо $a_0\neq 0$, то ділення не спричиняє втрати коренів. Справді, якщо cos$x=0$, то початкове рівняння набуває вигляду $a_0\sin^n x=0$, звідки sin$x=0$, що неможливо, оскільки cos$x$ і sin$x$ одночасно не можуть дорівнювати нулю.

Наприклад, розв'язати рівняння $3\sin^2 x-2\sin x\cos x-\cos^2 x=0$. Поділимо обидві частини рівняння на $\cos^2 x\neq 0$: $\frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{0}{\cos^2 x}$. Одержимо: $3\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg}x-1=0$. Уведемо заміну tg$x=t$ й матимемо: $3t^2-2t-1=0$; $\left[\begin{array}{l}t_1=-\frac{1}{3};\\ t_2=1.\end{array}\right.$ Повернемося до заміни:

1) $\operatorname{tg}x=-\frac{1}{3}$; $x=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi k$, $k\in Z$; $x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$, $k\in Z$;

2) $\operatorname{tg}x=1$; $x=\operatorname{arctg}1+\pi k$, $k\in Z$; $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$.

Відповідь. $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$, $k\in Z$; $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$.

Дробово-раціональні тригонометричні рівняння

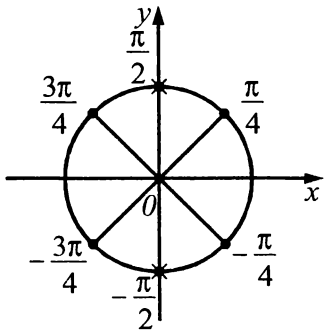
Складність розв'язування рівнянь цього типу полягає у формуванні відповіді. Основною складністю при розв'язуванні дробово-раціональних тригонометричних рівнянь є відбір його коренів.

Наприклад, розв'язати рівняння $\frac{\cos x+\cos 3x}{\sin 2x}=0$. ОДЗ: $\sin 2x\neq 0$; $2x\neq \pi k$, $k\in Z$; $x\neq \frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$.

Розв'яжемо рівняння $\cos x+\cos 3x=0$; $2\cos\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2}=0$; $2\cos 2x\cos x=0$. Тоді $\left[\begin{array}{l}\cos x=0;\\ \cos 2x=0;\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z;\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z.\end{array}\right.$$

Зобразимо на одиничному колі точки, які відповідають кореням рівняння $\cos x = 0$ і $\cos 2x = 0$ і закреслимо точки, які не входять в ОДЗ.



Отже, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$ — корені рівняння.

Відповідь. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$.

Розв'язування рівнянь на застосування обмеженості функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$

Наприклад, розв'язати рівняння $\cos 3x+\cos\frac{5x}{2}=2$. Маємо: $|\cos 3x|\le 1$, $\left|\cos\frac{5x}{2}\right|\le 1$, тоді $\cos 3x+\cos\frac{5x}{2}\le 2$, до того ж рівність виконується лише тоді, коли: $\left\{\begin{array}{l}\cos 3x=1;\\ \cos\frac{5x}{2}=1;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{2\pi n}{3}, n\in Z;\\ x=\frac{4\pi k}{5}, k\in Z.\end{array}\right.$ Прирівнюючи праві частини цих рівностей, одержуємо: $\frac{2\pi n}{3}=\frac{4\pi k}{5}$, звідки $10\pi n = 12\pi k$, $n\in Z$, $k\in Z$; $n=\frac{6k}{5}$, $n\in Z$, $k\in Z$. Оскільки n і k — цілі числа, то в праву частину замість k можна підставити лише цілі числа кратні 5. Тому останнє рівняння має розв'язки лише у цілих числах виду $k = 5l$, $l\in Z$. Підставляючи значення $k = 5l$ в розв'язок системи $x=\frac{4\pi k}{5}$, одержуємо, що $x = 4\pi l$, $l\in Z$.

Відповідь. $4\pi l$, $l\in Z$.

Тригонометричні рівняння з параметрами

Розв'язати рівняння $a\sin^2 x + 2(a + 2)\sin x + 8 = 0$.

Задане рівняння є або лінійним відносно $\sin x$, якщо $a = 0$, або квадратним відносно $\sin x$, якщо $a \neq 0$.

1. $a = 0$: $4\sin x + 8 = 0$; $\sin x = -2$; $x \in \varnothing$;

2. $a \neq 0$. Уведемо заміну $\sin x = t$ й одержимо: $at^2 + 2(a+2)t + 8 = 0$; $\frac{D}{4} = (a+2)^2 - 8a = (a-2)^2$;

$t_{1,2} = \frac{-(a+2) \pm (a-2)}{a}$; $\left[\begin{array}{l} t_1 = -2; \\ t_2 = -\frac{4}{a}. \end{array}\right.$ Повернемося до заміни:

1) $\sin x = -2$; $x \in \varnothing$;

2) $\sin x = -\frac{4}{a}$. Якщо $a \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$, то $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{4}{a}\right) + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$; якщо $a \in (-4; 4)$, то $x \in \varnothing$.

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$, то $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{4}{a}\right) + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$; якщо $a \in (-4; 4)$, то $x \in \varnothing$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \pi k,$ $k \in Z$	$x = \frac{\pi}{60} + \frac{\pi k}{5},$ $k \in Z$	$x = -\frac{\pi}{60} + \pi k,$ $k \in Z$	$x = \frac{\pi}{12} + \pi k,$ $k \in Z$	$x = \frac{\pi}{4} + 3\pi k,$ $k \in Z$

■ $\operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$; $5x + \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $5x = \frac{\pi}{12} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

$x = \frac{\pi}{60} + \frac{\pi k}{5}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$	$\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$	$-\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$	$\pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$	$\pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

■ $\cos 2x = -\frac{1}{2}$; $2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 3. Знайти найбільший від'ємний корінь рівняння $\cos 3x = 1$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{\pi}{3}$	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{k\pi}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$	$-\frac{\pi}{2}$

■ $\cos 3x = 1$; $3x = 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $x = \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. $\frac{2k\pi}{3} < 0$; $k\pi < 0$; $k < 0$. Найбільший від'ємний корінь одержимо, якщо $k = -1$. Отже, $x = -\frac{2\pi}{3}$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\cos 3x + \sin 2x - \cos x = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi k}{2};\ (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,$ $k, n \in Z$	$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,$ $n \in Z$	$\frac{\pi k}{2},\ k \in Z$	$\frac{\pi k}{2};\ \frac{\pi}{6} + \pi n,$ $k, n \in Z$	$\pi k;\ (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,$ $k, n \in Z$

■ $\cos 3x + \sin 2x - \cos x = 0$. Розкладемо ліву частину рівняння на множники:

$-2\sin 2x \cdot \sin x + \sin 2x = 0;\ \sin 2x \cdot (1 - 2\sin x) = 0;$

$\sin 2x = 0;$ або $1 - 2\sin x = 0;$

$2x = \pi k,\ k \in Z;$ $\sin x = \frac{1}{2};$

$x = \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$ $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ k \in Z.$

Відповідь. **А.** ■

Приклад 5. Розв'язати рівняння $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$2\pi k,\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$ $k, n \in Z$	$2\pi k,\ k \in Z$	$\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$2\pi k,\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$ $k, n \in Z$	$2\pi k,\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$ $k, n \in Z$

■ $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0;\ 2(1 - \cos^2 x) + \cos x - 1 = 0;\ -2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0;\ 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$

$\cos x = 1;$ або $\cos x = -\frac{1}{2};$

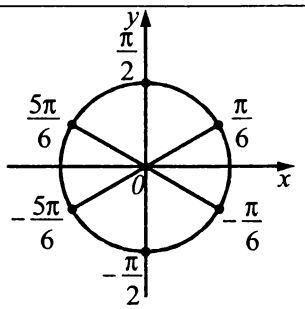
$x = 2\pi k,\ k \in Z$ $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Відповідь. **Г.** ■

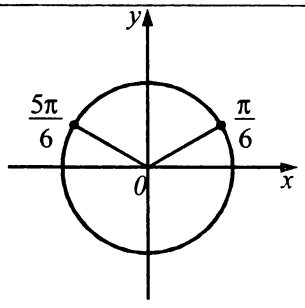
Приклад 6. Розв'язати рівняння $\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0$. У відповідь записати найменший додатний корінь (у градусах).

■ $\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x - 2\sin x \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x(1 - 2\sin x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 3x = 0; \\ 1 - 2\sin x = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z; \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$ Зобразимо множину розв'язків $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$ і $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$ на одиничному колі.



а) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$



б) $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

Множина розв'язків $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$ є підмножиною множини $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z$. Тому відповіддю є $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z$.

Отже, $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$.

Найменший додатний корінь дорівнює $\frac{\pi}{6}=30°$.

Відповідь. 30°. ■

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\cos^2x+\cos^22x+\cos^23x+\cos^24x=2$. У відповідь записати кількість коренів, які належать проміжку $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$.

■ Перетворимо вихідне рівняння: $\cos^2x+\cos^22x+\cos^23x+\cos^24x=2\Leftrightarrow\frac{1+\cos2x}{2}+\frac{1+\cos4x}{2}+\frac{1+\cos6x}{2}+\frac{1+\cos8x}{2}=2\Leftrightarrow(\cos8x+\cos2x)+(\cos6x+\cos4x)=0;\quad 2\cos5x\cdot\cos3x+2\cos5x\cdot\cos x=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos5x(\cos3x+\cos x)=0\Leftrightarrow 4\cos x\cdot\cos2x\cdot\cos5x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z;\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k\in Z;\\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi m}{5}, m\in Z.\end{array}\right.$ Проміжку $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ належать три корені: $\frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{4}$.

Відповідь. 3. ■

Приклад 8. За яких значень параметра a рівняння $\sin^4x+\cos^4x=a$ має корені? У відповідь записати найменший з них.

■ Маємо: $\sin^4x+\cos^4x=\sin^4x+2\sin^2x\cos^2x+\cos^4x-2\sin^2x\cos^2x=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x=$

$=1-2\sin^2x\cos^2x=1-\frac{1}{2}\sin^22x=1-\frac{1}{4}(1-\cos4x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos4x=\frac{1}{4}(\cos4x+3)$. Тоді дане рівняння рівносильне такому: $\frac{1}{4}(\cos4x+3)=a$, або $\cos4x=4a-3$. Воно має корені, якщо виконується умова $-1\le 4a-3\le 1$, звідки $a\in[0{,}5;\ 1]$. Найменшим значення є 0,5.

Відповідь. 0,5. ■

Приклад 9. За яких значень параметра a рівняння $\sin2x+(a+2)(\sin x-\cos x)=2a+1$ має принаймні один корінь? У відповідь записати кількість цілих значень a.

■ Перетворимо рівняння: $\sin2x+(a+2)(\sin x-\cos x)=2a+1$; $-(1-\sin2x)+(a+2)(\sin x-\cos x)=2a$; $-(\sin^2x-2\sin x\cos x+\cos^2x)+(a+2)(\sin x-\cos x)=2a$; $(\sin x-\cos x)^2-(a+2)(\sin x-\cos x)+2a=0$. Уведемо заміну: $\sin x-\cos x=t$. Тоді одержимо рівняння: $t^2-(a+2)t+2a=0$; $t_1=2$, $t_2=a$. Повернемося до заміни: $\sin x-\cos x=2$ або $\sin x-\cos x=a$. Оскільки $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, то $-\sqrt{2}\le\sin x-\cos x\le\sqrt{2}$, звідки слідує, що рівняння $\sin x-\cos x=2$ коренів не має, а рівняння $\sin x-\cos x=a$ має корені тільки у випадку виконання умови $-\sqrt{2}\le a\le\sqrt{2}$. Проміжок $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ містить такі цілі числа: –1, 0, 1, а їх кількість дорівнює 3.

Відповідь. 3. ■

Завдання 18.1–18.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

18.1. Розв'язати рівняння $2\sin x = -1$.

А	Б	В	Г	Д
$x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$	$x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$	$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$	$x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$	$x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$

18.2. Розв'язати рівняння $\sin \pi x = 1$.

А	Б	В	Г	Д
$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$	$x=\frac{\pi^2}{2}+2\pi^2 n$, $n\in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$	$x=\frac{1}{2}+n$, $n\in Z$	$x=\frac{1}{2}+2n$, $n\in Z$

18.3. Розв'язати рівняння $2\cos 2x = -\sqrt{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	$x=\pm\frac{3\pi}{8}+\pi n$, $n\in Z$	$x=\pm\frac{\pi}{8}+\pi n$, $n\in Z$	$x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$	$x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$

18.4. Розв'язати рівняння $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$.

А	Б	В	Г	Д
$x=\pi n$, $n\in Z$	$x=\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$	$x=-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$	$x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$

18.5. Розв'язати рівняння $(\mathrm{ctg}\,x)^{100}=1$.

А	Б	В	Г	Д
$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$	$x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$	0	$x=\mathrm{arcctg}\,100+\pi n$, $n\in Z$

18.6. Указати рівняння, яке має хоча б один корінь.

А	Б	В	Г	Д
$\cos x=\frac{\pi}{3}$	$\arccos x=-\frac{\pi}{3}$	$\arcsin x=\pi$	$\mathrm{arctg}\,x=2$	$\mathrm{arcctg}\,x=3$

18.7. Указати рівняння, яке має тільки один корінь.

А	Б	В	Г	Д
$\sin x=-1$	$\cos x=-2$	$\mathrm{arctg}\,x=1$	$\mathrm{tg}\,x=1$	$\frac{\cos x-1}{\sin x}=0$

18.8. Розв'язати рівняння $\sin^2 x-\sin x=0$.

А	Б	В	Г	Д
$x=\pi n$, $n\in Z$	$x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$	$x=\pi n$, $x=-\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$	$x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$

18.9. Знайти корінь рівняння $\sin 2x - 4\cos x = 0$, який належить проміжку $[2\pi; 3\pi]$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{4}$

18.10. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},$ $n \in Z$	Рівняння коренів немає

18.11. Розв'язати рівняння $\frac{\cos x}{\sin x - 1} = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$x = -\frac{\pi}{2} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$ $n \in Z$

18.12. Розв'язати рівняння $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \frac{\pi}{6} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{3} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in Z$

18.13. Розв'язати рівняння $\cos^2 x + 5\cos x - 6 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \pi + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \pm\arccos 1 + \pi n,$ $n \in Z$	$x = 2\pi n, n \in Z,$ $x = \pm(\pi - \arccos 6) +$ $+2\pi k, k \in Z$	$x = \pi n,$ $n \in Z$	$x = 2\pi n,$ $n \in Z$

18.14. Розв'язати рівняння $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \pi + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \frac{5\pi}{4} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{2}\right) + \pi n,$ $n \in Z$

18.15. Розв'язати рівняння $\sin x^2 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{\pi n}, n \in N$	0	$\{0\} \cup \{\sqrt{2\pi n}, n \in N\}$	$-\sqrt{2\pi n}, n \in N$	$\{0\} \cup \{\pm\sqrt{\pi n}, n \in N\}$

18.16. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg}\sqrt{x} = -1$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right)^2,$ $n \in N$	$x = -\frac{\pi^2}{16} + \pi^2 n^2,$ $n \in N$	$x = \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n\right)^2,$ $n \in N$	$x = \frac{\pi^2}{16} + \pi^2 n^2,$ $n \in N$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in N$

18.17. У якому вигляді можна подати розв'язок рівняння $\cos(\pi x) = x^2 - 4x + 5$?

А	Б	В	Г	Д
$\log_\pi \pi^2$	$\log_\pi \pi$	$\log_\pi \frac{\pi}{2}$	$\log_{\frac{1}{\pi}} \pi$	$\log_\pi \pi^3$

18.18. Розв'язати рівняння $\cos(\cos x) = 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$ $n \in Z$	$x = \pm\arccos(2\pi n) +$ $+2\pi n, n \in Z$	$x = 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \pm\pi + 2\pi n,$ $n \in Z$

18.19. Розв'язати рівняння $\sin x + \sin|x| = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\pi n, n \in Z$	0	$(-\infty; 0]$	$(-\infty; 0] \cup \{\pi n, n \in N\}$	$(-\infty; 0] \cup \left\{\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right\}$

18.20. Розв'язати рівняння $|\cos x| = \cos x + 2\sin x$.

А	Б	В	Г	Д
$x = 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \pi n,$ $n \in Z$	$x = \pi n, x = -\frac{\pi}{4} +$ $+2\pi k,\ n, k \in Z$	$x = \pi n, x = -\frac{\pi}{4} +$ $+\pi k,\ n, k \in Z$	$x = 2\pi n, x = \frac{3\pi}{4} +$ $+2\pi k,\ n, k \in Z$

18.21. За якого найменшого значення параметра a рівняння $2\cos 4x = a - 5$ має корені?

А	Б	В	Г	Д
–3	0	3	1	–1

18.22. Знайти всі значення a, за яких рівняння $(a+2)\sin x = a^2 - 4$ має корені.

А	Б	В	Г	Д
$a \in (1; 3)$	$a \in R$	$a \neq 2$	$a \in \{-2\} \cup [1; 3]$	$\varnothing$

Завдання 18.23–18.34 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

18.23. Установити відповідність між заданими рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків на проміжку $[0; 2\pi]$ (А-Д).

1 $\sin 2x = 0$

2 $2\cos x = 2$

3 $\cos 2x = 0$

4 $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = 1$

А $\{0; 2\pi\}$

Б $\left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi\right\}$

В $\left\{0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi\right\}$

Г $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

Д $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$

18.24. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=a, |a|\le 1$

2 $\sin x\cos x=\frac{a}{2}$

3 $\sin x=a\cos x$

4 $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=a$

А $\pm\arccos a+2n\pi,\ n\in Z$

Б $\operatorname{arctg} a+n\pi,\ n\in Z$

В $\operatorname{arcctg} a+n\pi,\ n\in Z$

Г $(-1)^n\arcsin a+n\pi,\ n\in Z$

Д $(-1)^n\cdot\frac{1}{2}\arcsin a+\frac{n\pi}{2},\ n\in Z$

18.25. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх розв'язками (А–Д).

1 $2\sin x=1$

2 $\sin 2x=1$

3 $\sin\frac{x}{2}=1$

4 $2\sin\frac{x}{2}=1$

А $x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\pi n,\ n\in Z$

Б $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$

В $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$

Г $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$

Д $x=(4n+1)\pi,\ n\in Z$

18.26. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та кількістю їх коренів на відрізку $[0;\ 2\pi]$ (А–Д).

1 $\sin 2x=0$

2 $\sin 2x=-\frac{1}{2}$

3 $\sin\frac{x}{8}=1$

4 $\sin\frac{x}{4}=\frac{1}{2}$

А жодного

Б один

В два

Г чотири

Д п'ять

18.27. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та кількістю їх коренів на проміжку $(0;\ \pi)$ (А–Д).

1 $\operatorname{ctg} 3x=4$

2 $\operatorname{ctg} 2x=2$

3 $\operatorname{ctg}\frac{x}{4}=0$

4 $|\operatorname{ctg} 2x|=1$

А чотири

Б три

В два

Г один

Д жодного

18.28. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1 $\sin^2 x-4\sin x+3=0$

2 $\sin^2 x-3\sin x-4=0$

3 $\cos^2 x-5\cos x+4=0$

4 $\cos^2 x-4\cos x-5=0$

А $x=2\pi n,\ n\in Z$

Б $x=\pi(2n+1),\ n\in Z$

В $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$

Г $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

Д $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$

18.29. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та рівносильними їм рівняннями (А–Д).

1 $\cos 3x - \cos x = 0$

2 $\cos 3x + \cos x = 0$

3 $\sin 3x - \sin x = 0$

4 $\sin 5x + \sin x = 0$

А $\sin 2x \cos 3x = 0$

Б $\sin 3x \cos 2x = 0$

В $\sin x \cos x = 0$

Г $\sin x \cos 2x = 0$

Д $\cos x \cos 2x = 0$

18.30. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1 $\sin\frac{x}{2} - \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} = 0$

2 $\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 0$

3 $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$

4 $\sqrt{3}\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0$

А $x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

Б $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

В $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

Г $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

Д $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

18.31. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та рівносильними їм рівняннями (А–Д).

1 $\frac{\cos x}{\sin x - 2} = 0$

2 $\frac{\cos x}{\sin x - 1} = 0$

3 $\frac{\sin x}{1 - \cos x} = 0$

4 $\frac{\sin x - 1}{\cos x} = 0$

А $\sin x = -1$

Б $\sin x = 1$

В $\cos x = 2$

Г $\cos x = 0$

Д $\cos x = -1$

18.32. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1 $\sin x^2 = 1$

2 $\sin\sqrt{x} = 1$

3 $\sin^2 x = 1$

4 $\sin|x| = 1$

А $x = \sqrt{\frac{5\pi}{2} + 2\pi(n-1)}, n \in \boldsymbol{N}$

Б $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, де n — ціле невід'ємне число

В $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$

Г $x = \pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, де n — ціле невід'ємне число

Д $x = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^2$, де n — ціле невід'ємне число

18.33. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1 $|\sin x| = -\sin x$
2 $|\sin x| = \sin x$
3 $|\cos x| = -\cos x$
4 $|\cos x| = \cos x$

А $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in Z$

Б $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in Z$

В $x \in [\pi(2k+1); 2\pi(k+2)], k \in Z$

Г $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 4\pi k; \frac{3\pi}{2} + 4\pi k\right], k \in Z$

Д $x \in [2\pi k; \pi(2k+1)], k \in Z$

18.34. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1 $\sin(x - |x|) = 0$
2 $\sin(x + |x|) = 0$
3 $\cos(x + |x|) = 1$
4 $\cos(x - |x|) = 1$

А $\{-\pi n, n \in N\} \cup [0; +\infty)$

Б $\{-2\pi n, n \in N\} \cup [0; +\infty)$

В $(-\infty; 0] \cup \left\{\frac{\pi n}{2}, n \in N\right\}$

Г $(-\infty; 0] \cup \{\pi n, n \in N\}$

Д $\left\{-\frac{\pi n}{2}, n \in N\right\} \cup [0; +\infty)$

Розв'яжіть завдання 18.35–18.52. Відповідь запишіть десятковим дробом.

18.35. Розв'язати рівняння $\sin(\pi \sin x) = -1$. У відповідь записати кількість коренів на проміжку $[0; \pi]$.

18.36. Розв'язати рівняння $\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\cos x - \frac{4\pi}{3}\right) = 1$. У відповідь записати найменший додатний корінь, округлений з точністю до 0,1.

18.37. Знайти кількість коренів рівняння $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 3\sin x$ на проміжку $(0; \pi)$.

18.38. Розв'язати рівняння $3\sin x - 2\cos^2 x = -3$. У відповідь записати кількість коренів на проміжку $[0; \pi]$.

18.39. Розв'язати рівняння $3\sin^2 x - 4\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$. У відповідь записати кількість коренів на проміжку $[0; \pi]$.

18.40. Розв'язати рівняння $\sqrt{1 - \sin x} = \cos x$. У відповідь записати значення $\frac{x_0}{\pi}$, де x_0 — найменший додатний корінь рівняння.

18.41. Розв'язати рівняння $\cos x - \cos 3x = \sin 2x$. У відповідь записати кількість коренів на проміжку $[0; \pi]$.

18.42. Розв'язати рівняння $\cos x = \sin 3x$. У відповідь записати значення $\frac{x_0}{\pi}$, де x_0 — найменший додатний корінь рівняння.

18.43. Розв'язати рівняння $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2$. У відповідь записати значення $\frac{3x_0}{\pi}$, де x_0 — найменший додатний корінь рівняння.

18.44. Розв'язати рівняння $\sin^2 2x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$. У відповідь записати кількість коренів на проміжку $[0; 2\pi]$.

18.45. Розв'язати рівняння $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$. У відповідь записати кількість коренів на проміжку $[0; 2\pi]$.

18.46. Розв'язати рівняння $(\sin x + \cos x)^2 - 3(\sin x + \cos x) + 2 = 0$. У відповідь записати кількість коренів на проміжку $[0; 2\pi]$.

18.47. Нехай x_0 — найменший додатний корінь рівняння $\cos^2 x - 5\sin x \cos x + 2 = 0$. Знайти $\operatorname{tg} x_0$.

18.48. За яких значень параметра a рівняння $\sin^4 x + \cos^4 x = a$ має розв'язки? У відповідь записати суму найбільшого та найменшого значень a.

18.49. Розв'язати рівняння $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \cos^2 4x + \frac{1}{4}$. У відповідь записати значення $\frac{4x_0}{\pi}$, де x_0 — найменший додатний корінь рівняння.

18.50. Розв'язати рівняння $9(\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x) = 15(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 + 2$. У відповідь записати кількість коренів на проміжку $[0; 2\pi]$.

18.51. Розв'язати рівняння $\arccos(\sin x) = \frac{x}{2}$. У відповідь записати значення $\frac{S}{\pi}$, де S — сума всіх коренів рівняння.

18.52. Розв'язати рівняння $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x = a$. У відповідь записати найбільше значення a, за якого рівняння має корені.

Тема 19. Тригонометричні нерівності

Нерівності, які містять змінну під знаком тригонометричної функції, називають *тригонометричними.* Наприклад, $\cos x \le \frac{1}{3}$; $5\sin^2 x + 3\cos x > 6$ тощо. Розв'язування тригонометричних нерівностей зводять до розв'язування *найпростіших тригонометричних нерівностей.*

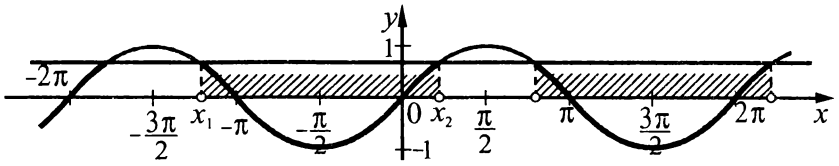
Найпростіші тригонометричні нерівності

Найпростіші тригонометричні нерівності — це нерівності виду $\sin x <> a$, $\cos x <> a$, $\operatorname{tg} x <> a$, $\operatorname{ctg} x <> a$. Розв'язувати найпростіші тригонометричні нерівності можна графічно або за допомогою одиничного кола.

За означенням, синусом кута α є ордината точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола, а косинусом — абсциса точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола. Цей факт використовується при розв'язуванні тригонометричних нерівностей виду $\sin x <> a$, $\cos x <> a$ за допомогою одиничного кола.

Наприклад: 1. Розв'язати нерівність $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Оскільки $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| \le 1$, то розв'язок існує. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ та виділимо проміжки, на яких графік функцій $y = \sin x$ розташований нижче від графіка прямої $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

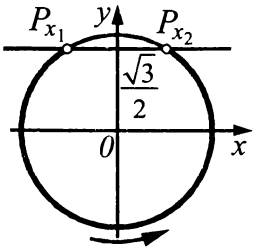


Знайдемо абсциси точок x_1 і x_2 $(x_1 < x_2)$ — перетину графіків зазначених функцій. $x_1 = -\pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$; $x_2 = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$. Запишемо відповідь, врахувавши період функції $y = \sin x$.

Відповідь. $\left(-\frac{5\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

2. Розв'язати нерівність $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Побудуємо одиничне коло, пряму $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ і позначимо точки P_{x_1} і P_{x_2} перетину одиничного кола й зазначеної прямої та виділимо множину точок, ординати яких менші за $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



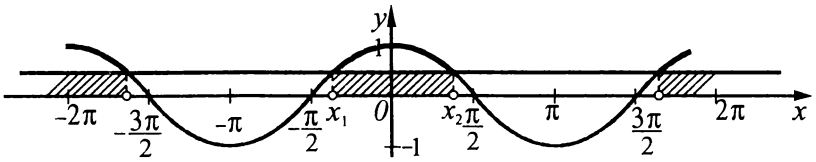
Знайдемо значення x_1 і x_2, здійснюючи обхід дуги проти годинникової стрілки: $x_1 < x_2$, $x_1 = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$; $x_2 = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi = \frac{\pi}{3} + 2\pi$.

Відповідь. $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Розглянемо розв'язування тригонометричних нерівностей, які містять функцію $y = \cos x$.

Наприклад: 1. Розв'язати нерівність $\cos x > \frac{1}{2}$.

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \cos x$ і $y = \frac{1}{2}$ та виділимо проміжки, на яких графік функцій $y = \cos x$ розташований вище від графіка прямої $y = \frac{1}{2}$.

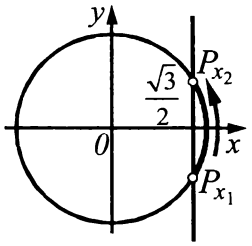


Знайдемо абсциси точок x_1 і x_2 ($x_1 < x_2$) — перетину графіків зазначених функцій, які є кінцями одного з проміжків, на якому виконується задана нерівність. $x_1 = -\arccos\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3}$; $x_2 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$. Запишемо відповідь, врахувавши період функції $y = \cos x$.

Відповідь. $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

2. Розв'язати нерівність $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Побудуємо одиничне коло і пряму $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, позначимо точки P_{x_1} і P_{x_2} перетину одиничного кола й зазначеної прямої та виділимо множину точок, абсциси яких більші за $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



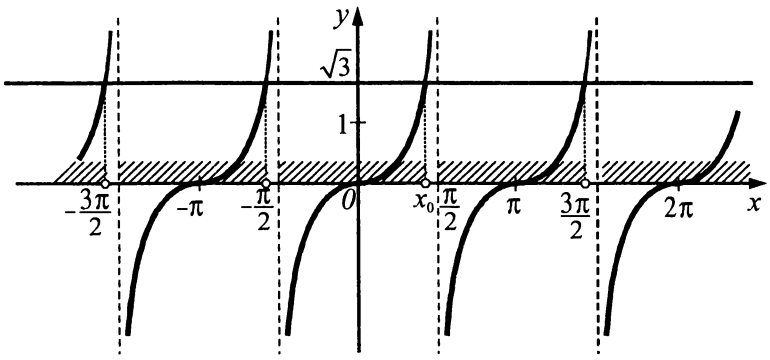
Знайдемо значення x_1 і x_2, здійснюючи обхід дуги проти годинникової стрілки: $x_1 < x_2$, $x_1 = -\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{6}$; $x_2 = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Відповідь. $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Розглянемо розв'язування тригонометричних нерівностей, які містять функцію $y = \operatorname{tg} x$.

Наприклад: 1. Розв'язати нерівність $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$.

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \sqrt{3}$ та виділимо проміжки, на яких графік функцій $y = \operatorname{tg} x$ розташований нижче від графіка прямої $y = \sqrt{3}$.



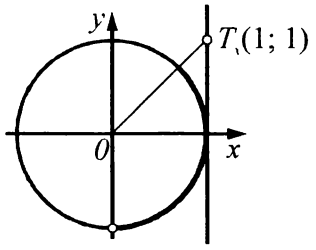
Знайдемо абсцису точки x_0 — перетину графіків зазначених функцій, яка є кінцем одного з проміжків, на якому виконується задана нерівність $x_0 = \frac{\pi}{3}$. Іншим кінцем цього проміжка є точка $-\frac{\pi}{2}$, у якій функція $y = \operatorname{tg} x$ невизначена.

Одним із проміжків, який є розв'язком нерівності, є $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{3}$. Запишемо відповідь, врахувавши, що період функції $y = \operatorname{tg} x$ дорівнює π.

Відповідь. $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

2. Розв'язати нерівність $\operatorname{tg} x < 1$.

Побудуємо одиничне коло, лінію тангенсів, на якій позначимо точку $T_x(1; 1)$ і виділимо ту частину лінії тангенсів, яка розміщена нижче від точки T_x, та дугу кола, яка відповідає виділеній частині лінії тангенсів. Запишемо значення кутів, які відповідають виділеній дузі.



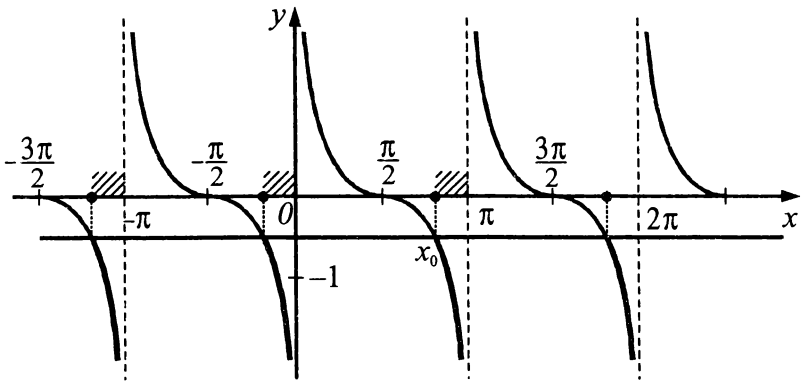
$-\frac{\pi}{2} < x < \operatorname{arctg} 1$; $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$. Запишемо відповідь, врахувавши, що період функції $y = \operatorname{tg} x$ дорівнює π.

Відповідь. $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Розглянемо розв'язування тригонометричних нерівностей, які містять функцію $y = \operatorname{ctg} x$.

1. Розв'язати нерівність $\operatorname{ctg} x \le -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \operatorname{ctg} x$ і $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ та виділимо проміжки, на яких графік функцій $y = \operatorname{ctg} x$ розташований не вище від графіка прямої $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.



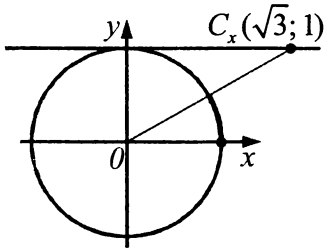
Знайдемо абсцису точки x_0, яка є кінцем одного з проміжків, на якому виконується задана нерівність $x_0 = \frac{2\pi}{3}$. Іншим кінцем цього проміжка є точка π, у якій функція $y = \operatorname{ctg} x$ невизначена.

Одним із проміжків, який є розв'язком нерівності, є $\frac{2\pi}{3} \le x < \pi$. Запишемо відповідь, врахувавши, що період функції $y = \operatorname{ctg} x$ дорівнює π.

Відповідь. $\left[\frac{2\pi}{3} + \pi k; \pi + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2. Розв'язати нерівність $\operatorname{ctg} x \ge \sqrt{3}$.

Побудуємо одиничне коло, лінію котангенсів, на якій позначимо точку $C_x\left(\sqrt{3}; 1\right)$ і виділимо ту частину лінії котангенсів, яка розміщена праворуч від точки C_x, та дугу кола, яка відповідає виділеній частині лінії котангенсів.



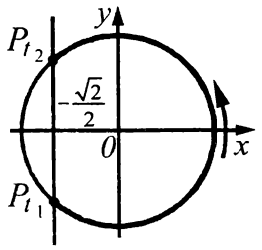
$0 < x \le \frac{\pi}{6}$. Запишемо відповідь, врахувавши, що період функції $y = \operatorname{ctg} x$ дорівнює π.

Відповідь. $\left[\pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Тригонометричні нерівності зі складним аргументом

Наприклад, розв'язати нерівність $\cos 2x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Уведемо нову змінну $t = 2x$ і запишемо дану нерівність у вигляді: $\cos t \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Виділимо на одиничному колі множину точок, абсциси яких не менші за $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Знайдемо значення $t_1 = -\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\pi}{4}$ і $t_2 = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, здійснюючи обхід проти годинникової стрілки: $t_1 < t_2$.

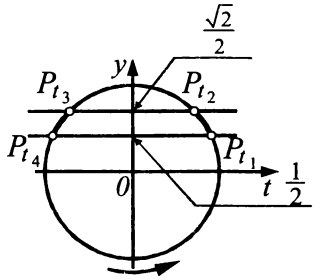
Запишемо умову, за якої точка t належить дузі $P_{t_1} P_{t_2}$: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq t \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Повернемося до початкової змінної: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq 2x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Розв'яжемо одержану подвійну нерівність відносно x: $-\frac{3\pi}{8} + \pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{8} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь. $\left[-\frac{3\pi}{8} + \pi k; \frac{3\pi}{8} + \pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Подвійні тригонометричні нерівності

Розв'язати нерівність $\frac{1}{2} < \sin\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Уведемо нову змінну $t = \frac{x}{2}$ й одержимо нерівність $\frac{1}{2} < \sin t < \frac{\sqrt{2}}{2}$. На одиничному колі виділимо множину точок, ординати яких більші за $\frac{1}{2}$ і менші за $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (дуги $P_{t_1} P_{t_2}$ і $P_{t_3} P_{t_4}$).



Знайдемо значення t_1, t_2, t_3 і t_4, здійснюючи обхід кола проти годинникової стрілки: $t_1 < t_2$, $t_3 < t_4$.

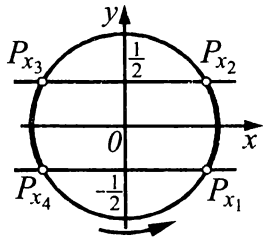
$t_1 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; $t_2 = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$; $t_3 = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$; $t_4 = \pi - \arcsin\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Тоді маємо: $\frac{\pi}{6}+2\pi k<t<\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$ і $\frac{3\pi}{4}+2\pi k<t<\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$. Повернувшись до заміни,одержимо: $\frac{\pi}{6}+2\pi k<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$ і $\frac{3\pi}{4}+2\pi k<\frac{x}{2}<\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$. Розв'яжемо одержані нерівності відносно x: $\frac{\pi}{3}+4\pi k<x<\frac{\pi}{2}+4\pi k,\ k\in Z$ і $\frac{3\pi}{2}+4\pi k<x<\frac{5\pi}{3}+4\pi k,\ k\in Z$.

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{3}+4\pi k;\frac{\pi}{2}+4\pi k\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2}+4\pi k;\frac{5\pi}{3}+4\pi k\right),\ k\in Z$.

Нерівності, у яких тригонометрична функція міститься під знаком модуля

Нехай необхідно розв'язати нерівність $|\sin x|<\frac{1}{2}$. Запишемо задану нерівність у вигляді подвійної нерівності: $-\frac{1}{2}<\sin x<\frac{1}{2}$. Для цього виділимо на одиничному колі множини точок, ординати яких більші за $-\frac{1}{2}$ і менші за $\frac{1}{2}$ (дуги $P_{x_1}P_{x_2}$ і $P_{x_3}P_{x_4}$).



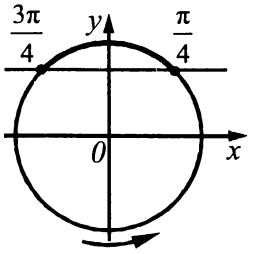
Знайдемо значення x_1, x_2, x_3 і x_4, виконуючи обхід кола проти годинникової стрілки: $x_1<x_2, x_3<x_4$.
$x_1=\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6};\ x_2=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6};\ x_3=\pi-\arcsin\frac{1}{2}=\frac{5\pi}{6};\ x_4=\pi+\arcsin\frac{1}{2}=\frac{7\pi}{6}$.

Запишемо умови, за яких точка x є розв'язком нерівності: $-\frac{\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi k<x<\frac{7\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$. Запишемо відповідь, врахувавши, що дуги $P_{x_1}P_{x_2}$ і $P_{x_3}P_{x_4}$ симетричні відносно початку координат.

Відповідь. $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi k<x<\frac{\pi}{6}+\pi k\right),\ k\in Z$.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\sin 3x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$.

■ $3x\in\left[\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi k;\pi-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi k\right],\ k\in Z;\ 3x\in\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right],\ k\in Z;$

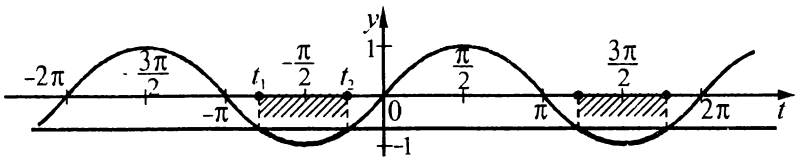


$x \in \left[\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3};\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3}\right]$, $k \in Z$.

Відповідь. $\left[\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{3};\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi k}{3}\right]$, $k \in Z$. ■

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\sin\left(\frac{x}{4}-1\right) \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$. У відповідь записати кількість цілих розв'язків нерівності з проміжку [–6; 2].

■ Уведемо нову змінну $t=\frac{x}{4}-1$ і розв'яжемо нерівність $\sin t \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (див. рис.).



Знайдемо абсциси точок t_1 і t_2 ($t_1 < t_2$): $t_1 = -\pi + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$; $t_2 = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

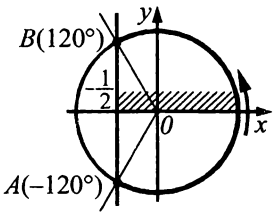
$-\frac{3\pi}{4}+2\pi k \le t \le -\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k \in Z$. Повернемося до заміни: $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k \le \frac{x}{4}-1 \le -\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k \in Z$; $1-\frac{3\pi}{4}+2\pi k \le \frac{x}{4} \le 1-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k \in Z$; $4-3\pi+8\pi k \le x \le 4-\pi+8\pi k$, $k \in Z$. Якщо $k=0$, то цілими розв'язками є числа –5, –4, –3–2, –1, 0, усього їх є 6. Якщо $k=\pm1, \pm2, \ldots$, то розв'язків на проміжку [–6; 2] немає.

Відповідь. 6. ■

Приклад 3. Визначити найменше додатне значення x, для якого виконується нерівність $2\cos\left(x-\frac{5\pi}{6}\right) \ge -1$.

А	Б	В	Г	Д
0°	30°	45°	60°	90°

■ Запишемо нерівність у вигляді $\cos(x-150°) \ge -\frac{1}{2}$.



Далі маємо: $-120° + 360°n \le x - 150° \le 120° + 360°n$, $n \in Z$; $30° + 360°n \le x \le 270° + 360° \cdot n$, $n \in Z$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\cos^2 x < \frac{3}{4}$.

■ $\cos^2 x < \frac{3}{4}$; $\frac{1+\cos 2x}{2} < \frac{3}{4}$; $1+\cos 2x < \frac{3}{2}$; $\cos 2x < \frac{1}{2}$; $\arccos\frac{1}{2}+2\pi k < 2x < 2\pi - \arccos\frac{1}{2}+2\pi k$,

$k\in Z$; $\frac{\pi}{3}+2\pi k<2x<2\pi-\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; $\frac{\pi}{3}+2\pi k<2x<\frac{5\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; $\frac{\pi}{6}+\pi k<x<\frac{5\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$.

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{6}+\pi k<x<\frac{5\pi}{6}+\pi k\right)$, $k\in Z$. ■

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x\ge 1$.

■ $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x\ge 1$; $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\ge\frac{1}{2}$; $\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{6}\ge\frac{1}{2}$; $\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\ge\frac{1}{2}$;

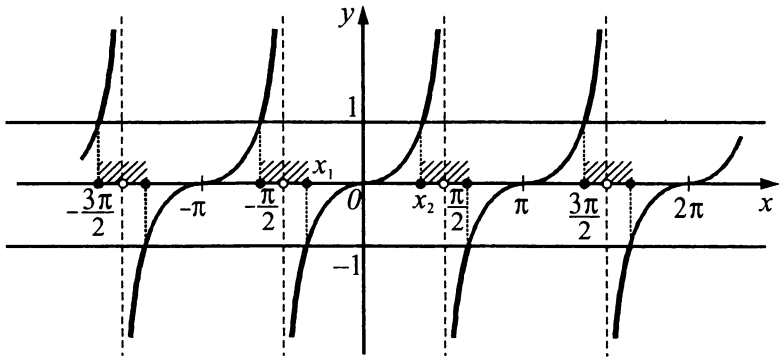
$\arcsin\frac{1}{2}+2\pi k\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\pi-\arcsin\frac{1}{2}+2\pi k$, $k\in Z$; $\frac{\pi}{6}+2\pi k\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$;

$\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}+2\pi k\le 2x\le\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$; $2\pi k\le 2x\le\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; $\pi k\le x\le\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in Z$.

Відповідь. $\left[\pi k;\frac{\pi}{3}+\pi k\right]$ $k\in Z$. ■

Приклад 6. Розв'язати нерівність $|\mathrm{tg}x|\ge 1$.

■ Запишемо дану нерівність у вигляді сукупності нерівностей $\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}\,x\le -1;\\ \mathrm{tg}\,x\ge 1.\end{array}\right.$ Побудуємо графіки функцій $y=\mathrm{tg}x$, $y=-1$ і $y=1$ та виділимо проміжки, на яких графік функції $y=\mathrm{tg}x$ розташований вище від прямої $y=1$ і нижче від прямої $y=-1$.



Знайдемо абсциси точок x_1 і x_2 ($x_1<x_2$): $x_1=\mathrm{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$; $x_2=\mathrm{arctg}\,1=\frac{\pi}{4}$.

Відповідь. $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;-\frac{\pi}{4}+\pi k\right]\cup\left[\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in Z$. ■

Приклад 7. Знайти всі значення параметра a із проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, для кожного з яких нерівність $\sin^2 x+\cos^2(x-a)\ge\frac{3}{4}+2\sin x\sin a\cos(x-a)$ виконується для всіх x. У відповідь записати найбільше значення параметра з цього проміжка (у градусах).

■ Виконаємо перетворення: $\sin^2 x+\cos^2(x-a)\ge\frac{3}{4}+2\sin x\sin a\cos(x-a)$;

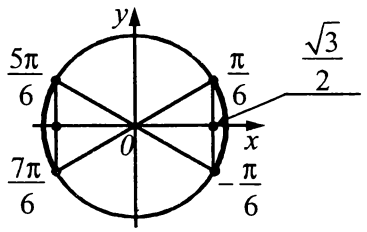
$\sin^2 x-\frac{3}{4}\ge 2\sin x\sin a\cos(x-a)-\cos^2(x-a)$; $\sin^2 x-\frac{3}{4}\ge\cos(x-a)\left(2\sin x\sin a-\cos(x-a)\right)$;

$\sin^2 x-\frac{3}{4}\ge(\cos x\cos a+\sin x\sin a)(2\sin x\sin a-\cos x\cos a-\sin x\sin a)$;

$\sin^2 x-\frac{3}{4}\ge(\sin x\sin a+\cos x\cos a)(\sin x\sin a-\cos x\cos a)$; $\sin^2 x-\frac{3}{4}\ge\sin^2 x\sin^2 a-\cos^2 x\cos^2 a$;

$\sin^2 x(1-\sin^2 a)+\cos^2 x\cos^2 a\ge\frac{3}{4}$; $\sin^2 x\cos^2 a+\cos^2 x\cos^2 a\ge\frac{3}{4}$; $\cos^2 a(\sin^2 x+\cos^2 x)\ge\frac{3}{4}$; $\cos^2 a\ge\frac{3}{4}$;

$|\cos a|\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Отже, $a\in\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\frac{7\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in Z$. Найбільше значення a з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ — $\frac{7\pi}{6}=210°$.

Відповідь. 210°. ■

Завдання 19.1–19.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

19.1. Розв'язати нерівність $2\sin 2x>-\sqrt{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\frac{\pi}{8}+\pi k;\frac{3\pi}{8}+\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k;\frac{3\pi}{4}+\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{8}+2\pi k;\frac{5\pi}{8}+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{8}+\pi k;\frac{5\pi}{8}+\pi k\right)$, $k\in Z$

19.2. Знайти довжину кожного з відрізків координатної прямої, які утворюють розв'язки нерівності $2\sin x\le 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{6\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$

19.3. Розв'язати нерівність $\cos\pi x>\frac{1}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(-\frac{1}{8}+2k;\frac{1}{6}+2k\right)$, $k\in Z$	$\left(\frac{1}{3}+2k;\frac{7}{3}+2k\right)$, $k\in Z$	$\left(-\frac{1}{3}+k;\frac{1}{3}+k\right)$, $k\in Z$	$\left(-\frac{1}{3}+2k;\frac{1}{3}+2k\right)$, $k\in Z$

19.4. Знайти довжину кожного з відрізків координатної прямої, які утворюють розв'язки нерівності $\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\le-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$

19.5. Розв'язати нерівність $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)>1$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n\in Z$

19.6. Серед наведених нерівностей вибрати ту, яка не має розв'язків.

А	Б	В	Г	Д
$\cos x<-\frac{3}{4}$	$\sin x\geq 0,2$	$\mathrm{arctg}\,x\geq 2$	$\mathrm{tg}\,x\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\mathrm{arctg}\,x\leq 1,2$

19.7. Серед наведених нерівностей вибрати ту, яка має розв'язки.

А	Б	В	Г	Д
$\cos x\geq\frac{3}{2}$	$\cos x<-1$	$\sin x>1$	$\mathrm{tg}\,x\leq\sqrt{3}$	$\arcsin x\leq-\pi$

19.8. Розв'язати нерівність $\cos 5x\cos x-\sin 5x\sin x<-\frac{1}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{2}{3}\pi+2\pi n;\frac{4}{3}\pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(\frac{\pi}{6}\pi+2\pi n;\frac{\pi}{3}\pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(-\frac{4}{3}\pi+2\pi n;\frac{2}{3}\pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3};\frac{2\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}\right)$, $n\in Z$	$\left(-\frac{2}{9}\pi+\frac{\pi n}{3};\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}\right)$, $n\in Z$

19.9. Розв'язати нерівність $\sin^2 x>\frac{1}{4}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5}{6}\pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{6}\pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{7}{6}\pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{5}{6}\pi+\pi n\right)$, $n\in Z$

19.10. Розв'язати нерівність $\cos^2 x\leq\frac{1}{4}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[-\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{\pi}{3}+\pi k\right]$, $k\in Z$	$\left[\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{2\pi}{3}+\pi k\right]$, $k\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{2}{3}\pi+2\pi k\right]$, $k\in Z$	$\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{2}{3}\pi+\pi k\right)$, $k\in Z$

19.11. Розв'язати нерівність $(2\sin x-3)\,\mathrm{tg}\,x\geq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;2\pi n\right]$, $n\in Z$	$\left[\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\pi n\right]$, $n\in Z$	$\varnothing$	$\left[-\frac{\pi}{2}+\pi n;\pi n\right)$, $n\in Z$

19.12. Розв'язати нерівність $\sin x<\cos x$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(-\frac{3}{4}\pi+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(-\frac{3}{4}\pi+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in Z$	$(-\pi+2\pi n;2\pi n)$, $n\in Z$	$\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{5}{4}\pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$

19.13. Розв'язати нерівність $\sin x - \cos x > 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\pi+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{3}{4}+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\pi+\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(\frac{3}{4}\pi+\pi k;\frac{9}{4}\pi+\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(\pi+2\pi k;\frac{5}{2}\pi+2\pi k\right)$, $k\in Z$

19.14. Розв'язати нерівність $\sqrt{\sin x} \geq \sqrt{\cos x}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{5}{4}\pi+2\pi k\right]$, $k\in Z$	$\left[2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in Z$	$\left(2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\varnothing$	$\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in Z$

19.15. Розв'язати нерівність $|\sin x| < \frac{1}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{5}{6}\pi+\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{\pi}{6}+\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{5}{6}\pi+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{7}{6}\pi+\pi k\right)$, $k\in Z$

19.16. Розв'язати нерівність $|\cos x| > \frac{1}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{2}{3}\pi+\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{5}{6}\pi+\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{2\pi}{3}+\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{\pi}{3}+\pi k\right)$, $k\in Z$

19.17. Розв'язати нерівність $\arccos x \leq \frac{1}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[\cos\frac{1}{2};1\right]$	$\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$	$\left[-1;\cos\frac{1}{2}\right]$	$\left(\cos\frac{1}{2};1\right)$	$\left(-1;\cos\frac{1}{2}\right)$

19.18. Розв'язати нерівність $0 < \arcsin x \leq \frac{\pi}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(0;\frac{1}{2}\right]$	$\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$	$\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$	$\left[0;\frac{1}{2}\right)$

19.19. Розв'язати нерівність $\operatorname{arctg} x \geq \frac{\pi}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\infty;\sqrt{3}\right]$	$\left[\frac{\sqrt{3}}{3};+\infty\right)$	$[1;+\infty)$	$\left[\sqrt{3};+\infty\right)$	$\left(-\infty;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

19.20. Розв'язати нерівність $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} x \le \frac{\pi}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\sqrt{3};1\right]$	$\left(-1;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$	$\left(-1;\sqrt{3}\right]$	$\left[-\sqrt{3};1\right)$	$\left[-\frac{\sqrt{3}}{3};1\right)$

Завдання 19.21–19.27 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

19.21. Установити відповідність між заданими нерівностями (1–4) та їх найбільшими розв'язками на проміжку $[0; 2\pi]$ (А–Д).

1 $\cos x \le -\frac{1}{2}$

2 $\sin x \ge \frac{1}{2}$

3 $\operatorname{tg} x \le 1$

4 $\operatorname{ctg} x \ge -1$

А $\frac{5\pi}{6}$

Б $\frac{3\pi}{4}$

В 2π

Г $\frac{7\pi}{4}$

Д $\frac{4\pi}{3}$

19.22. Установити відповідність між заданими нерівностями (1–4) та їх найменшими розв'язками на проміжку $[0; \pi]$ (А–Д).

1 $\cos^2 x - \sin^2 x < 2$

2 $\sin 2x \ge 1$

3 $\operatorname{ctg} 2x \le 1$

4 $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x \ge 1$

А $\frac{\pi}{8}$

Б $\frac{\pi}{2}$

В $\frac{\pi}{4}$

Г 0

Д π

19.23. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та їх розв'язками (А–Д).

1 $\sin\frac{x}{2} > \frac{1}{2}$

2 $\sin\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

3 $\sin\frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$

4 $\sin\frac{x}{2} < -2$

А $\frac{2\pi}{3} + 4\pi n < x < \frac{4\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Б $\frac{\pi}{3} + 4\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

В $\frac{3\pi}{2} + 4\pi n < x < \frac{9\pi}{2} + 4\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Г $\frac{\pi}{3} + 4\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

Д $\varnothing$

19.24. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та їх розв'язками (А–Д).

1 $\cos 2x > \frac{1}{2}$

2 $\cos 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

3 $\cos 2x > -\frac{1}{2}$

4 $\cos 2x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$

А $-\frac{3\pi}{8} + \pi n < x < \frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

Б $\frac{3\pi}{8} + \pi n < x < \frac{5\pi}{8} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

В $\frac{\pi}{12} + \pi n < x < \frac{11\pi}{12} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

Г $-\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

Д $-\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

19.25. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та їх розв'язками (А–Д).

1 $\operatorname{tg} 4x > 1$

2 $\operatorname{tg} 4x < -\sqrt{3}$

3 $\operatorname{tg} 4x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$

4 $\operatorname{tg} 4x < \sqrt{3}$

А $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} < x < \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}, n \in \boldsymbol{Z}$

Б $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} < x < \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}, n \in \boldsymbol{Z}$

В $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4} < x < -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}, n \in \boldsymbol{Z}$

Г $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4} < x < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \boldsymbol{Z}$

Д $-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4} < x < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \boldsymbol{Z}$

19.26. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та їх розв'язками (А–Д).

1 $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} > \sqrt{3}$

2 $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} < \frac{1}{\sqrt{3}}$

3 $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} > -1$

4 $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} < -\sqrt{3}$

А $\frac{\pi}{2} + 3\pi n < x < 3\pi(n+1), n \in \boldsymbol{Z}$

Б $3\pi n < x < \frac{9\pi}{4} + 3\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

В $3\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 3\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

Г $\pi(3n+1) < x < 3\pi(n+1), n \in \boldsymbol{Z}$

Д $\frac{5\pi}{2} + 3\pi n < x < 3\pi(n+1), n \in \boldsymbol{Z}$

19.27. Установити відповідність між нерівностями (1–4) та їх розв'язками (А–Д).

1 $\cos^2 x - \sin^2 x > -\frac{1}{\sqrt{2}}$

2 $\cos x \cos 3x - \sin x \sin 3x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

3 $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x < -\frac{1}{2}$

4 $\sin^2 x > \frac{1}{4}$

А $\frac{\pi}{8} + \pi n < x < \frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

Б $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

В $-\frac{3\pi}{8} + \pi n < x < \frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

Г $\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{11\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}, n \in \boldsymbol{Z}$

Д $\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$

Розв'яжіть завдання 19.28–19.33. Відповідь запишіть десятковим дробом.

19.28. Розв'язати нерівність $\sin\left(\frac{3}{4}x+\frac{\pi}{9}\right)\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$. У відповідь записати найменший додатний цілий розв'язок нерівності.

19.29. Розв'язати нерівність $2\sin^2 x-5\sin x+2<0$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок нерівності на проміжку $[0;\ 2\pi]$.

19.30. Розв'язати нерівність $\cos 2x+\cos x\geq 0$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок нерівності на проміжку $[0;\ 2\pi]$.

19.31. Розв'язати нерівність $2\sin^4 2x\geq\sin^2 2x$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок нерівності на проміжку $[0;\ 2\pi]$.

19.32. Розв'язати нерівність $\sqrt{3}\sin x+\cos x<1$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності на проміжку $[0;\ 2\pi]$.

19.33. Розв'язати нерівність $\arcsin\frac{1}{x}+\arccos\frac{1}{x}<2$. У відповідь записати найменший додатний розв'язок нерівності.

Тема 20. Системи рівнянь

Якщо завдання полягає у відшуканні спільних розв'язків кількох рівнянь, то кажуть, що треба розв'язати *систему рівнянь*. Наприклад, $\begin{cases}5x-2y=3;\\x+y=15\end{cases}$ — система двох лінійних рівнянь із двома невідомими. *Розв'язком* системи рівнянь називають такий набір значень невідомих, який задовольняє кожне з рівнянь системи. Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що система не має розв'язків.

Дві системи рівнянь називають *рівносильними*, якщо множини їх розв'язків збігаються. Справедливі такі твердження:

1. Якщо рівняння системи замінити рівносильним йому рівнянням, то отримаємо систему, рівносильну даній.

2. Якщо одне рівняння системи замінити його почастинною сумою з іншим, то отримаємо систему, рівносильну даній.

Основними способами розв'язування систем рівнянь є графічний, спосіб підстановки і додавання.

Графічний спосіб

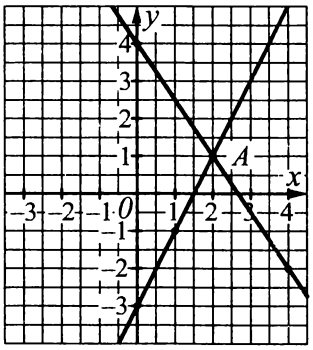
Щоб розв'язати систему рівнянь графічно, слід в одній системі координат побудувати графіки кожного з рівнянь і знайти спільні точки цих графіків. Координати точок перетину будуть наближеними розв'язками системи, які можна уточнити перевіркою.

Наприклад, знайти графічним способом розв'язки системи рівнянь $\begin{cases}3x+2y=8;\\2x-y=3.\end{cases}$ Кожне з рівнянь системи є лінійним, тому їхніми графіками є прямі.

$3x+2y=8$		
x	0	4
y	4	–2

$2x-y=3$		
x	0	1
y	–3	–1

Будуємо графіки рівнянь в одній системі координат.



Графіки перетинаються в одній точці — точці $A(2; 1)$. Перевіркою встановлюємо, що $(2; 1)$ — розв'язок системи.

Відповідь. $(2; 1)$.

Спосіб підстановки

Спосіб підстановки полягає в тому, що одне з рівнянь подають у вигляді $y = f(x)$ або $x = g(y)$ (виражають одну змінну через іншу) і підставляють в інше рівняння замість змінної отриманий вираз. У результаті такої підстановки отримують рівняння з однією змінною. Розв'язавши його, підставляють отриманий корінь в інше рівняння системи і визначають значення іншої змінної.

Наприклад, розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}x-y=1;\\x^3-y^3=7.\end{cases}$ Виразимо з першого рівняння системи змінну x через змінну y: $x = 1 + y$ та підставимо одержане значення у друге рівняння системи. Маємо: $(1 + y)^3 -$

$-y^3 = 7$; $1 + 3y + 3y^2 + y^3 - y^3 = 7$; $3y^2 + 3y - 6 = 0$; $y^2 + y - 2 = 0$; $y_1 = -2$, $y_2 = 1$. Підставимо знайдені значення й одержимо: $x_1 = 1 + (-2) = -1$; $x_2 = 1 + 1 = 2$. Отже, розв'язками системи є $(-1; -2)$ і $(2; 1)$.

Відповідь. $(-1; -2)$, $(2; 1)$.

Спосіб додавання

Суть способу додавання полягає в тому, що рівняння системи домножують на такі числа, щоб у них коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами. Тоді, почастинно додавши ці рівняння, отримують алгебраїчне рівняння з однією змінною і т. д.

Наприклад, розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x - 2y = 11; \\ x + y = 7. \end{cases}$ Домножимо друге рівняння на 2 й одержимо: $\left.\begin{cases} 3x - 2y = 11; \\ x + y = 7; \end{cases}\right| \cdot 2$ $\begin{cases} 3x - 2y = 11; \\ 2x + 2y = 14. \end{cases}$ Додамо рівняння системи й результат запишемо другим рівнянням, а перше рівняння перепишемо без змін: $\begin{cases} 3x - 2y = 11; \\ 5x = 25. \end{cases}$ Виконаємо перетворення й підставимо знайдене значення x у перше рівняння: $\begin{cases} 2y = 3x - 11; \\ x = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} 2y = 3 \cdot 5 - 11; \\ x = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2; \\ x = 5. \end{cases}$ Отже, $(5; 2)$ — розв'язок системи.

Відповідь. $(5; 2)$.

Систему алгебраїчних рівнянь часто можна спростити, якщо ввести нові значення для невідомих.

Наприклад, розв'язуючи систему $\begin{cases} \dfrac{1}{2x - y} + y = 2; \\ \dfrac{y}{2x - y} = 1, \end{cases}$ зручно ввести заміну $z = \dfrac{1}{2x - y}$ й одержати систему $\begin{cases} z + y = 2; \\ yz = 1, \end{cases}$ звідки $\begin{cases} y = 1; \\ z = 1. \end{cases}$ Повертаючись до заміни, отримаємо систему рівнянь $\begin{cases} y = 1; \\ \dfrac{1}{2x - y} = 1, \end{cases}$ з якої знайдемо розв'язок вихідної системи — $(1; 1)$.

Відповідь. $(1; 1)$.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x - y = 7; \\ -3x + 4y = -8. \end{cases}$

■ З першого рівняння отримуємо: $y = 2x - 7$. Підставивши замість y в друге рівняння вираз $2x - 7$, отримаємо: $-3x + 4(2x - 7) = -8$; $5x = 20$; $x = 4$.

Тоді $y = 2 \cdot 4 - 7 = 1$. Розв'язок системи рівнянь: $(4; 1)$.

Відповідь. $(4; 1)$. ■

Приклад 2. Нехай $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} \sqrt{25 - 10x + x^2} + y = 4; \\ y - 3x + 11 = 0. \end{cases}$ Знайти добуток $x_0 \cdot y_0$.

■ Спочатку розв'яжемо систему рівнянь: $\begin{cases} \sqrt{25 - 10x + x^2} + y = 4; \\ y - 3x + 11 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{(x - 5)^2} + y = 4; \\ y = 3x - 11; \end{cases}$

$\begin{cases} |x - 5| + 3x - 11 = 4; \\ y = 3x - 11; \end{cases}$ $\begin{cases} |x - 5| + 3x = 15; \\ y = 3x - 11. \end{cases}$ **1.** Нехай $x - 5 \geq 0$, тобто $x \geq 5$. $\begin{cases} x - 5 + 3x = 15; \\ y = 3x - 11; \end{cases}$ $\begin{cases} 4x = 20; \\ y = 3x - 11; \end{cases}$

$\begin{cases} x=5; \\ y=4. \end{cases}$ **2.** Нехай $x-5<0$, тобто $x<5$. $\begin{cases} -x+5+3x=15; \\ y=3x-11; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=10; \\ y=3x-11; \end{cases}$ $x=5$ — не підходить. Отже, $x_0=5, y_0=4$. Тоді $x_0 \cdot y_0 = 5 \cdot 4 = 20$.

Відповідь. 20. ■

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75; \\ 3^y \cdot 5^x = 45. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
(1; 2)	(3; 5)	(2; 1)	інша відповідь	(2; 3)

■ $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75; \\ 3^y \cdot 5^x = 45; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{3^x \cdot 5^y}{3^y \cdot 5^x} = \dfrac{75}{45}; \\ 3^x \cdot 5^y \cdot 3^y \cdot 5^x = 75 \cdot 45; \end{cases}$ $\begin{cases} 3^{x-y} \cdot 5^{y-x} = \dfrac{75}{45}; \\ 3^{x+y} \cdot 5^{x+y} = 5 \cdot 15 \cdot 3 \cdot 15; \end{cases}$ $\begin{cases} 3^{x-y} \cdot \dfrac{1}{5^{x-y}} = \dfrac{5}{3}; \\ 15^{x+y} = 15^3; \end{cases}$ $\begin{cases} \left(\dfrac{3}{5}\right)^{x-y} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-1}; \\ x+y=3; \end{cases}$

$\begin{cases} x-y=-1; \\ x+y=3; \end{cases}$ $2x=2$; $x=1, y=2$.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^4+y^4=17(x+y)^2; \\ xy=2(x+y). \end{cases}$

■ Уведемо заміну $x+y=t$, $xy=z$. Перетворимо ліву частину першого рівняння: $x^4+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-2z^2=(x^2+2xy+y^2-2xy)^2-2z^2=((x+y)^2-2z)^2-$ $-2z^2=(t^2-2z)^2-2z^2=t^4-4t^2z+2z^2$. Тоді одержимо: $\begin{cases} t^4-4t^2z+2z^2=17t^2; \\ z=2t; \end{cases}$ звідки перше рівняння можна переписати так: $t^4-2t^2 \cdot 2t+2 \cdot (2t)^2=17t^2$; $t^4-8t^3-9t^2=0$; $t^2(t^2-8t-9)=0$, яке має розв'язки $t_1=0$, $t_2=-1$, $t_3=9$. Із рівності $z=2t$ маємо, що $z_1=0$, $z_2=-2$, $z_3=18$. Тоді одержуємо три системи:

1) $\begin{cases} x+y=0; \\ xy=0, \end{cases}$ звідки розв'язком є (0; 0); 2) $\begin{cases} x+y=-1; \\ xy=-2, \end{cases}$ звідки розв'язками є (1; –2) і (–2; 1);

3) $\begin{cases} x+y=9; \\ xy=18, \end{cases}$ звідки розв'язками є (3; 6) і (6; 3).

Відповідь. (0; 0), (1; –2), (–2; 1), (3; 6), (6; 3). ■

Приклад 5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^{x-2y}=36; \\ 4(x-2y)+\log_6 x=9. \end{cases}$

■ Прологарифмуємо перше рівняння системи за основою 6, врахувавши, що $x>0$, а значить, $x^{x-2y}>0$ й одержимо: $\begin{cases} (x-2y)\log_6 x=2; \\ x-2y=\dfrac{1}{4}(9-\log_6 x). \end{cases}$ Увівши заміну $t=\log_6 x$, одержимо: $\begin{cases} (x-2y) \cdot t=2; \\ x-2y=\dfrac{1}{4}(9-t). \end{cases}$

Далі маємо: $\dfrac{1}{4}(9-t)t=2$; $t^2-9t+8=0$; $t_1=1$, $t_2=8$.

Отже, $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_6 x=1;\\ x-2y=\frac{1}{4}(9-\log_6 x);\end{cases}\\ \begin{cases}\log_6 x=8;\\ x-2y=\frac{1}{4}(9-\log_6 x);\end{cases}\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=6;\\ 6-2y=\frac{1}{4}(9-1);\end{cases}\\ \begin{cases}x=6^8;\\ 6^8-2y=\frac{1}{4}(9-8);\end{cases}\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=6;\\ y=2;\end{cases}\\ \begin{cases}x=6^8;\\ y=\frac{4\cdot 6^8-1}{2}.\end{cases}\end{array}\right.$

Відповідь. (6; 2), $\left(6^8;\frac{4\cdot 6^8-1}{2}\right)$. ■

Приклад 6. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}10^{1+\lg(x+y)}=50;\\ \lg(x-y)+\lg(x+y)=2-\lg 5.\end{cases}$

■ Прологарифмуємо перше рівняння системи й одержимо: $\begin{cases}\big(1+\lg(x+y)\big)\lg 10=\lg 50+\lg 10;\\ \lg\big((x-y)(x+y)\big)=2-\lg 5;\end{cases}$

$\begin{cases}1+\lg(x+y)=\lg 5+1;\\ \lg\big((x-y)(x+y)\big)=2-\lg 5;\end{cases}$ $\begin{cases}\lg(x+y)=\lg 5;\\ \lg\big((x-y)(x+y)\big)=\lg\frac{10^2}{5};\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=5;\\ (x-y)(x+y)=20;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=5;\\ 5(x-y)=20;\end{cases}$

$\begin{cases}x+y=5;\\ x-y=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=5;\\ 2x=9;\end{cases}$ $\begin{cases}x=4{,}5;\\ y=0{,}5.\end{cases}$

Відповідь. (4,5; 0,5).

Приклад 7. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2};\\ x^2-y^2=3.\end{cases}$

■ Уведемо заміну $z=\frac{y}{x}$ й одержимо: $\begin{cases}\frac{1}{z}+z=\frac{5}{2};\\ x^2-y^2=3;\end{cases}$ $\begin{cases}2z^2-5z+2=0;\\ x^2-y^2=3;\end{cases}$ $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}z_1=0{,}5;\\ z_2=2;\end{array}\right.\\ x^2-y^2=3;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{y}{x}=0{,}5;\\ x^2-y^2=3;\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{y}{x}=2;\\ x^2-y^2=3.\end{cases}\end{array}\right.$

Розглянемо першу систему: $\begin{cases}\frac{y}{x}=0{,}5;\\ x^2-y^2=3;\end{cases}$ $\begin{cases}y=0{,}5x;\\ x^2-(0{,}5x)^2=3;\end{cases}$ $\begin{cases}y=0{,}5x;\\ 0{,}75x^2=3;\end{cases}$ $\begin{cases}y=0{,}5x;\\ x^2=4;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=2;\\ y_1=1;\end{cases}\\ \begin{cases}x_2=-2;\\ y_2=-1.\end{cases}\end{array}\right.$ Для другої системи матимемо: $\begin{cases}\frac{y}{x}=2;\\ x^2-y^2=3;\end{cases}$ $\begin{cases}y=2x;\\ x^2-4x^2=3;\end{cases}$ $\begin{cases}y=2x;\\ -3x^2=3;\end{cases}$ $\varnothing$.

Отже, розв'язками системи є (–2; –1), (2; 1).

Відповідь. (–2; –1), (2; 1).

Приклад 8. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}|x-1|+|y-2|=1;\\ y=3-|x-1|.\end{cases}$

■ Розкриємо модулі $|x-1|$ і $|y-2|$.

1. Нехай $x-1\ge 0$; $y-2\ge 0$. Тоді матимемо систему: $\begin{cases}x-1\ge 0;\\ y-2\ge 0;\\ x-1+y-2=1;\\ y=3-(x-1);\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge 1;\\ y\ge 2;\\ x+y=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge 1;\\ y\ge 2;\\ y=4-x;\end{cases}$

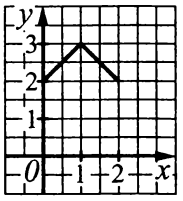
$\begin{cases}1\le x\le 2;\\ y=4-x.\end{cases}$

2. Нехай $x-1\le 0$; $y-2\ge 0$. Тоді матимемо систему: $\begin{cases}x-1\le 0;\\ y-2\ge 0;\\ -(x-1)+y-2=1;\\ y=3+x-1;\end{cases}$ $\begin{cases}x\le 1;\\ y\ge 2;\\ y=x+2;\end{cases}$ $\begin{cases}0\le x\le 1;\\ y=x+2.\end{cases}$

3. Нехай $x-1\ge 0$; $y-2\le 0$. Тоді матимемо систему: $\begin{cases}x-1\ge 0;\\ y-2\le 0;\\ x-1-y+2=1;\\ y=3-(x-1);\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge 1;\\ y\le 2;\\ x-y=0;\\ x+y=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge 1;\\ y\le 2;\\ x=2;\\ y=2;\end{cases}$ (2; 2).

4. Нехай $x-1\le 0$; $y-2\le 0$. Тоді матимемо систему: $\begin{cases}x-1\le 0;\\ y-2\le 0;\\ -x+1-y+2=1;\\ y=3+x-1;\end{cases}$ $\begin{cases}x\le 1;\\ y\le 2;\\ x+y=2;\\ -x+y=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x\le 1;\\ y\le 2;\\ x=0;\\ y=2;\end{cases}$ (0; 2).

Загальний розв'язок системи зручно зобразити графічно.



■

Завдання 20.1–20.23 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

20.1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}x+3y=14;\\ 2y-x=6\end{cases}$ і знайти добуток компонентів розв'язку.

А	Б	В	Г	Д
16	20	8	$1\frac{1}{5}$	$13\frac{1}{3}$

20.2. Дано систему рівнянь $\begin{cases}x+y=3;\\ 2x-3y=-4.\end{cases}$ Яке утвориться рівняння, якщо з першого рівняння виразити змінну y через x, і отриманий вираз підставити у друге рівняння замість y?

А	Б	В	Г	Д
$5x+3=-4$	$3x-9=-4$	$5x-3=-4$	$5x+9=-4$	$5x-9=-4$

20.3. Знайти суму компонентів $x_0 + y_0 + z_0$ розв'язку системи рівнянь $\begin{cases} x+y=-2; \\ y+z=-11; \\ x+z=1. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
–6	–12	–18	–24	–3

20.4. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x+4y=-20, \\ 5x+2y=-10. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
(3; 4)	(0; –5)	(7; 9)	(2; –4)	(1; –7,5)

20.5. Знайти середнє арифметичне для значень чисел x та y, які є розв'язками системи рівнянь $\begin{cases} 3x+2y=7; \\ -x+3y=16. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
3	2	1	4	3,5

20.6. Знайти компонент x_0 розв'язку $(x_0; y_0)$ системи рівнянь $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=4; \\ \frac{1}{x}-\frac{3}{y}=9. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
3	$\frac{1}{3}$	147	91	$1\frac{6}{7}$

20.7. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=5; \\ x^2-2y^2=-7? \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	чотири	жодного

20.8. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} \lvert x-3\rvert-y=0; \\ xy-4=0? \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	чотири	жодного

20.9. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x-y=16; \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \end{cases}$ і вказати добуток компонентів її розв'язку.

А	Б	В	Г	Д
34	128	64	15	225

20.10. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3^{x+y}=27; \\ 4^{x-y}=0{,}25 \end{cases}$ і вказати компонент x_0 її розв'язку $(x_0; y_0)$.

А	Б	В	Г	Д
0	–1	1	2	–2

20.11. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}\lg(x+y)=2;\\ \lg(x-y)=1\end{cases}$ і вказати компонент y_0 її розв'язку $(x_0; y_0)$.

А	Б	В	Г	Д
35	110	90	55	45

20.12. Знайти суму компонентів розв'язку системи рівнянь $\begin{cases}\lg x+\lg y=\lg 2;\\ x^2+y^2=5.\end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
–3	3	$\sqrt{7}$	9	7

20.13. Яка з наведених систем за будь-яких значень p має єдиний розв'язок?

А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases}2y=x;\\ y=\frac{x}{2}+p\end{cases}$	$\begin{cases}\frac{x}{2}+y=3;\\ x+2y=p\end{cases}$	$\begin{cases}x-2y=5;\\ 2x-4y=p\end{cases}$	$\begin{cases}x+2y=3;\\ x-y=p\end{cases}$	$\begin{cases}x-3y=5;\\ 6y-2x=p\end{cases}$

20.14. За якого значення a система рівнянь $\begin{cases}2x-y=5;\\ x+ay=2\end{cases}$ не має розв'язків?

А	Б	В	Г	Д
0,5	–0,5	–1	2,5	10

20.15. За якого значення a система рівнянь $\begin{cases}3x+y=-15;\\ -x-ay=5\end{cases}$ має безліч розв'язків?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	3	–3	–1

20.16. За яких значень a і b система рівнянь $\begin{cases}6x+by=5a;\\ 5ax-6y=b\end{cases}$ має розв'язок (–1; 2)?

А	Б	В	Г	Д
$a=2$, $b=2$	$a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$	$a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$	$a=-2$, $b=-2$	$a=-1$, $b=2$

20.17. Скільки розв'язків системи рівнянь $\begin{cases}x^2-2xy+y^2=4;\\ x^2+xy=4\end{cases}$ містять нульовий компонент?

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	чотири	жодного

20.18. Знайти $|x-y|$, якщо $\begin{cases}x^2-xy=79,\\ y^2-xy=2.\end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
8	9	$\sqrt{77}$	7	81

20.19. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} |x|-|y|=0; \\ x^2-4x=0? \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	більше, ніж три	жодного

20.20. За якого значення a система рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=4; \\ x-y=a \end{cases}$ має єдиний розв'язок?

А	Б	В	Г	Д
$a=3$	$a=2\sqrt{3}$	$a=-2\sqrt{2}$ або $a=2\sqrt{2}$	$a=-2\sqrt{3}$ або $a=2\sqrt{3}$	$a=-\sqrt{2}$ або $a=\sqrt{2}$

20.21. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} xy=6; \\ yz=8; \\ zx=12? \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	чотири	жодного

20.22. За якого значення k пряма $y=kx+2$ проходить через точку перетину прямих $x+y=5$ і $x-y=1$?

А	Б	В	Г	Д
–2	–1	0	1	2

20.23. За якого значення a система рівнянь $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1\frac{1}{2}; \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-\frac{1}{2}; \\ ax+y=13 \end{cases}$ має розв'язок?

А	Б	В	Г	Д
–2	–3	4	5	6

Завдання 20.24–20.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

20.24. Установити відповідність між системами рівнянь (1–4) та кількістю їх розв'язків (А–Д).

1 $\begin{cases} x+2y=4; \\ 1{,}5x+3y=6 \end{cases}$

2 $\begin{cases} 2x+3y=10; \\ 4x+6y=7 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 2x+3y=7; \\ 4x+5y=19 \end{cases}$

4 $\begin{cases} |x|-y=3; \\ |x|+y=3 \end{cases}$

А жодного
Б один
В два
Г три
Д безліч

20.25. Установити відповідність між системами рівнянь (1–4) та першими компонентами x_0 розв'язків $(x_0; y_0)$ цих систем (А–Д).

1 $\begin{cases} x+y=20; \\ x-y=14 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x+y=19; \\ 2x-y=5 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x+y=16; \\ x-2y=4 \end{cases}$

4 $\begin{cases} x-3y=1; \\ x+y=13 \end{cases}$

А 8
Б 10
В 12
Г 14
Д 17

20.26. Установити відповідність між системами рівнянь (1–4) та рівняннями (А–Д), які утворюються з цих систем при їх розв'язуванні способом підстановки.

1 $\begin{cases} x-y=1; \\ xy=20 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x+y=1; \\ xy=-20 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x-y=1; \\ xy=-20 \end{cases}$

4 $\begin{cases} x+y=1; \\ xy=20 \end{cases}$

А $y^2+20y=0$
Б $y^2+y+20=0$
В $y^2+y-20=0$
Г $y^2-y+20=0$
Д $y^2-y-20=0$

20.27. Установити відповідність між системами рівнянь (1–4) та першими компонентами x_0 розв'язків $(x_0; y_0)$ цих систем (А–Д).

1 $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{5}{y}=\frac{1}{6}; \\ \frac{1}{x}-\frac{5}{y}=-\frac{1}{12} \end{cases}$

2 $\begin{cases} \sqrt{x}+3\sqrt{y}=13; \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=1 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 3^{x-y}=81; \\ 2^{x+\frac{y}{2}}=128 \end{cases}$

4 $\begin{cases} \log_2(x+y)=4; \\ \log_2(x-y)=3 \end{cases}$

А 6
Б 12
В 16
Г 20
Д 24

20.28. Установити відповідність між системами рівнянь (1–4) та кількістю їх розв'язків (А–Д).

1 $\begin{cases} xy = 1; \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

2 $\begin{cases} xy = 1; \\ x - y = 0 \end{cases}$

3 $\begin{cases} xy = 1; \\ x + y = 0 \end{cases}$

4 $\begin{cases} xy = 0; \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$

А жодного
Б один
В два
Г три
Д чотири

Розв'яжіть завдання 20.29–20.44. Відповідь запишіть десятковим дробом.

20.29. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x + 5y = 12; \\ 3x - 4y = -5. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.30. Вказати значення параметра a, за якого система $\begin{cases} ax + 3y = 9, \\ 12x + ay = 18 \end{cases}$ має безліч розв'язків.

20.31. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 7; \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.32. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3; \\ x^3 + y^3 = 9. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.33. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - xy = 6; \\ y^2 - xy = 3. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.34. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1, \\ 2x^2 + 5xy - y^2 = 17. \end{cases}$ У відповідь записати найбільше значення x із розв'язків системи.

20.35. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{3}{2x+y} + \dfrac{1}{2x-y} = \dfrac{2}{5}; \\ \dfrac{7}{2x+y} + \dfrac{2}{2x-y} = \dfrac{3}{5}. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.36. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1; \\ y(x+2) = 40. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.37. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2\cdot 3^x - 4^y = 14; \\ 3^x + 4^y = 13. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.38. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 40; \\ \lg(x-y) + \lg(x+y) = 3\lg 2. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.39. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y+1} = 10; \\ \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{y+1} = 16. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.40. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} xy = 1; \\ yz = 2; \\ zx = 8. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0 + z_0$, де $(x_0; y_0; z_0)$ — розв'язок системи.

20.41. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 4xy - \dfrac{x}{y} = 30; \\ 3xy + \dfrac{2x}{y} = 28. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.42. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 0; \\ x^2 - 3xy + y^2 = -1. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.43. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \log_8(xy) = 3\log_8 x \cdot \log_8 y; \\ 4\log_8 \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_8 x}{\log_8 y}. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + \sqrt{2}\, y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.44. За якого значення a сума $x + y$ набуває найменшого значення, якщо $\begin{cases} 2x + 3y = 2a^2 - 12a + 8; \\ 3x - 2y = 3a^2 + 8a + 12? \end{cases}$

Тема 21. Арифметична та геометрична прогресії

Послідовністю називають функцію, задану на множині всіх натуральних чисел або на множині перших n натуральних чисел. Число a_1 називають *першим членом* послідовності, a_n — n-м членом (читають: a енне), а натуральне число n — його *номером*. Ми розглядатимемо лише послідовності, елементами яких є числа. Їх називають *числовими послідовностями*.

Послідовності позначають (a_n), (b_n), (c_n), ... і записують: (a_n): a_1, a_2, a_3, ... Наприклад, розглянемо послідовність (a_n): 2; 4; 6; 8; ... — послідовність парних натуральних чисел. У ній $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = 8$, ... Член послідовності $a_2 = 4$ є попереднім до члена $a_3 = 6$ і наступним за членом $a_1 = 2$.

Арифметична прогресія

Арифметичною прогресією називають послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, утворюється додаванням до попереднього члена одного і того самого числа. Це число називають *різницею арифметичної прогресії* і позначають d. Отже, якщо (a_n): a_1; a_2; ...; a_n; ... — арифметична прогресія, то $a_2 = a_1 + d$; $a_3 = a_2 + d$; ..., тобто для будь-якого натурального n виконується рівність $a_{n+1} = a_n + d$. Наприклад: а) послідовність (a_n): –8; –1; 6; 13; ... є арифметичною прогресією, перший член якої дорівнює $a_1 = -8$, а різниця — $d = 7$; б) 4; 7; 10; 13; 16; 19 — скінченна арифметична прогресія, у якій $d = 3$; –4; –11; –18; –25; ... — нескінченна арифметична прогресія, у якій $d = -7$; 3; 3; 3; 3; ... — нескінченна арифметична прогресія, у якій $d = 0$.

Арифметична прогресія має такі властивості:

Властивість 1. Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох сусідніх з ним членів. Тобто якщо a_1; a_2; a_3; a_4; ... — арифметична прогресія, то $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$; $a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}$; ...; $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$. Правильно й навпаки: послідовність, у якій будь-який член, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох сусідніх з ним членів, є арифметичною прогресією. Наприклад, знайти невідомі члени арифметичної прогресії (a_n): –11; a_2; –21; –26; a_5; –36. $a_1 = -11$, $a_3 = -21$. Тоді $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{-11 - 21}{2} = -16$; $a_5 = \frac{a_4 + a_6}{2} = \frac{-26 - 36}{2} = -31$;

Властивість 2. Сума будь-яких двох членів скінченної арифметичної прогресії, які рівновіддалені від її крайніх членів, дорівнює сумі крайніх членів цієї прогресії. Тобто якщо (a_n): a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6 — арифметична прогресія, то $a_1 + a_6 = a_2 + a_5 = a_3 + a_4$. Наприклад, знайти суму середніх членів арифметичної прогресії (a_n): 5; 7; ...; 19. Середніми членами цієї прогресії є a_4 і a_5. Тоді $a_4 + a_5 = a_1 + a_8 = 5 + 19 = 24$.

Формула n-го члена арифметичної прогресії має вигляд

$$a_n = a_1 + d(n-1),$$

де a_1 — перший член прогресії, d — різниця, n — порядковий номер члена прогресії.

Наприклад: а) нехай задано арифметичну прогресію (a_n), у якій $a_1 = 3{,}2$, $d = 0{,}3$, потрібно знайти a_{10}. Запишемо формулу n-го члена арифметичної прогресії $a_n = a_1 + d(n-1)$. Тоді маємо: $a_{10} = a_1 + 9d = 3{,}2 + 9 \cdot 0{,}3 = 5{,}9$; б) знайти п'ятий член арифметичної прогресії (a_n), якщо її восьмий член дорівнює 24, а різниця — 3. Оскільки $a_n = a_1 + d(n-1)$, то $a_5 = a_1 + 4d$. Знайдемо a_1: $a_8 = a_1 + 7d$, звідки $a_1 = a_8 - 7d = 24 - 7 \cdot 3 = 3$. Тоді $a_5 = 3 + 4 \cdot 3 = 15$.

Для обчислення *суми членів арифметичної прогресії* використовують такі формули:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n;$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Наприклад, знайти суму десяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), у якій $a_1 = -4$, $d = 2$. За другою формулою знаходимо: $S_{10} = \frac{2 \cdot (-4) + 2 \cdot (10-1)}{2} \cdot 10 = 50$.

Геометрична прогресія

Геометричною прогресією називають послідовність, перший член якої відмінний від нуля, а інші утворюються множенням попереднього члена на одне й те саме число, відмінне від нуля. Це число називають *знаменником геометричної прогресії* і позначають q. Отже, якщо (b_n): b_1; b_2; b_3; ...; b_n; ... — геометрична прогресія, то для будь-якого натурального n виконується рівність: $b_{n+1} = b_n \cdot q$. Знаменник геометричної прогресії дорівнює частці від ділення будь-якого її члена, починаючи з другого, на попередній, тобто: $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \ldots = \frac{b_{n+1}}{b_n} = q$. Якщо (b_n) — геометрична прогресія, то її рекурентна формула має вигляд: $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$. Наприклад: а) послідовність (b_n): 1; 3; 9; 27; ... є геометричною прогресією, перший член якої дорівнює $b_1 = 1$, а знаменник — $q = 3$; б) 3; 1; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{27}$ — скінченна геометрична прогресія, у якій $q = \frac{1}{3}$; 5; –10; 20; –40; ... — нескінченна геометрична прогресія, у якій $q = -2$; 7; 7; 7; 7; ... — нескінченна геометрична прогресія, у якій $q = 1$.

Геометрична прогресія має такі властивості:

Властивість 1. Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку двох сусідніх з ним членів. Отже, якщо (b_n): b_1; b_2; ...; b_n; ... — геометрична прогресія, то $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$, $b_3^2 = b_2 \cdot b_4$ тощо. Правильно й навпаки: якщо в деякій послідовності відмінних від нуля чисел квадрат будь-якого числа, починаючи з другого, дорівнює добутку двох сусідніх з ним чисел, то ця послідовність є геометричною прогресією. Якщо всі члени геометричної прогресії (b_n) є додатними числами, то з рівності $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ випливає $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$. Кожний член такої прогресії, починаючи з другого, є середнім геометричним двох сусідніх з ним членів. Наприклад, знайти сьомий член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_6 = 3$, $b_8 = 27$. За описаною вище властивістю геометричної прогресії маємо: $b_7^2 = b_6 \cdot b_8$; $b_7^2 = 3 \cdot 27 = 81$; $b_7 = \pm 9$. Отже, $b_7 = 9$ або $b_7 = -9$.

Властивість 2. Добутки членів скінченної геометричної прогресії, рівновіддалених від її крайніх членів, однакові й дорівнюють добутку її крайніх членів. Тобто якщо (b_n): b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 — скінченна геометрична прогресія, то $b_1 \cdot b_6 = b_2 \cdot b_5 = b_3 \cdot b_4$. Наприклад, знайти сьомий член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_6 = -36$, $b_8 = -4$. За описаною вище властивістю геометричної прогресії маємо: $b_7^2 = b_6 \cdot b_8$; $b_7^2 = (-36) \cdot (-4) = 144$; $b_7 = \pm 12$. Отже, $b_7 = 12$ або $b_7 = -12$.

Формула n-го члена геометричної прогресії має вигляд:

$$b_n = b_1 q^{n-1},$$

де b_1 — перший член прогресії, q — її знаменник, n — порядковий номер члена прогресії.

Наприклад, між числами 3 і 48 вставити такі три числа, щоб вони разом з даними числами утворювали геометричну прогресію (b_n). Нехай (b_n): 3; b_2; b_3; b_4; 48 — дана геометрична прогресія. Використавши формулу $b_n = b_1 q^{n-1}$ й урахувавши, що $b_1 = 3$, $b_5 = 48$, складемо та розв'яжемо рівняння: $48 = 3 \cdot q^4$; $q^4 = 16$; $q = \pm 2$. Якщо $q = 2$, то $b_2 = 3 \cdot 2 = 6$, $b_3 = 6 \cdot 2 = 12$, $b_4 = 12 \cdot 2 = 24$. Якщо $q = -2$, то $b_2 = 3 \cdot (-2) = -6$, $b_3 = (-6) \cdot (-2) = 12$, $b_4 = 12 \cdot (-2) = -24$. Одержали прогресії: 3; 6; 12; 24; 48 або 3; –6; 12; –24; 48.

Для обчислення *суми членів геометричної прогресії* (b_n), де b_1 — перший член, b_n — n-й член, q — її знаменник, $q \neq 1$, n — кількість членів, використовують такі формули:

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1 - q}, q \neq 1;$$

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} \text{ або } S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1.$$

Якщо $q = 1$, то $S_n = n \cdot b_1$ — формула суми n перших членів геометричної прогресії, знаменник якої дорівнює 1.

Наприклад, знайти суму перших чотирьох членів геометричної прогресії, перший член якої $b_1 = \frac{1}{40}$, а знаменник — $q = \frac{1}{3}$. За формулою $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ маємо: $S_n = \frac{\frac{1}{40} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^4\right)}{1 - \frac{1}{3}} =$

$= \frac{1}{40} \cdot \frac{80}{81} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{27}$.

Нескінченна геометрична прогресія

У прогресіях $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{4^2}; \frac{1}{4^3}; \ldots; \frac{1}{4^{n-1}}; \ldots, 1; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3^2}; -\frac{1}{3^3}; \ldots; \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}; \ldots$ зі зростанням номера n модулі їхніх членів необмежено зменшуються, наближуючись до нуля. Прогресії такого виду називають нескінченно спадними. Геометричну прогресію називають *нескінченно спадною*, якщо модуль її знаменника менший за одиницю, тобто $|q| < 1$.

Сумою нескінченно спадної геометричної прогресії (b_n) називають число, до якого прямує сума її перших n членів за необмеженого збільшення n. Формула *суми нескінченно спадної геометричної прогресії* має вигляд:

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Наприклад, знайти суму членів послідовності $2; 1; \frac{1}{2}; \ldots$. Задана послідовність є нескінченною геометричною прогресією, у якій перший член дорівнює 2, а знаменник — $\frac{1}{2}$. Тоді сума членів прогресії дорівнює: $S = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$.

Приклад 1. Послідовність (a_n) задана формулою n-го члена $a_n = 2n^2 + 1$. Знайти: a_3, a_5, a_9.

■ $a_3 = 2 \cdot 3^2 + 1 = 19$; $a_5 = 2 \cdot 5^2 + 1 = 51$; $a_9 = 2 \cdot 9^2 + 1 = 163$.

Відповідь. 19; 51; 163. ■

Приклад 2. Числова послідовність (a_n) задано формулою n-го члена $a_n = (n-1)(n+4)$. Чи є членом цієї послідовності число: **а)** 150; **б)** 8?

■ **а)** Розв'яжемо рівняння: $(n-1)(n+4) = 150$, де $n \in N$; $n^2 + 3n - 154 = 0$; $n_1 = 11$, $n_2 = -14$ — не задовольняє умови задачі. Отже, число 150 є членом послідовності;

б) розв'яжемо рівняння: $(n-1)(n+4) = 8$; $n^2 + 3n - 12 = 0$; $n_1 = \frac{-3+\sqrt{57}}{2}$, $n_2 = \frac{-3-\sqrt{57}}{2}$, $n_1 \notin N$, $n_2 \notin N$. Отже, число 8 не є членом послідовності.

Відповідь. **а)** Так, **б)** ні. ■

Приклад 3. Записати для арифметичної прогресії (a_n): $-38; -34; -30; \ldots$ формулу n-го члена.

■ Оскільки $a_1 = -38$, $a_2 = -34$, то $d = a_2 - a_1 = -34 - (-38) = 4$. Формула n-го члена арифметичної прогресії (a_n): $a_n = -38 + 4(n-1) = 4n - 42$.

Відповідь. $a_n = 4n - 42$. ■

Приклад 4. Знайти різницю і п'ятий член арифметичної прогресії (a_n): **а)** 9,8; 11; 12,2; 13,4 ...; **б)** $\sqrt{3}-7$; $\sqrt{3}-4$; $\sqrt{3}-1$; $\sqrt{3}+2$; ... .

■ **а)** $d=a_2-a_1=11-9{,}8=1{,}2$; $a_4=13{,}4$; $a_5=a_4+d=13{,}4+1{,}2=14{,}6$;

б) $d=a_4-a_3=\sqrt{3}+2-(\sqrt{3}-1)=3$; $a_4=\sqrt{3}+2$; $a_5=a_4+d=\sqrt{3}+2+3=\sqrt{3}+5$.

Відповідь. **а)** 14,6; **б)** $\sqrt{3}+5$. ■

Приклад 5. Між числами 2,5 і 4 вставити два таких числа, щоб вони разом з даними утворювали арифметичну прогресію (a_n).

■ Маємо прогресію (a_n): 2,5; a_2; a_3; 4. Використавши формулу $a_n=a_1+d(n-1)$ й урахувавши, що $a_1=2{,}5$; $a_4=4$, складемо та розв'яжемо рівняння: $2{,}5+3d=4$; $3d=1{,}5$; $d=0{,}5$. Тоді $a_2=2{,}5+0{,}5=3$; $a_3=3+0{,}5=3{,}5$.

Відповідь. 3; 3,5. ■

Приклад 6. Знайти суму всіх трицифрових чисел, кратних 4, та менших за 250.

А	Б	В	Г	Д
124	4712	174	6612	348

■ Вказані числа утворюють арифметичну прогресію, перший член якої $a_1=100$, різниця $d=4$. За формулою n-го члена одержимо: $a_n=100+4(n-1)=4n+96$.

Щоб знайти кількість членів прогресії, складемо та розв'яжемо нерівність: $4n+96<250$; $n<38{,}5$. Отже, потрібно знайти суму 38 перших членів арифметичної прогресії. Знаходимо: $S_n=\dfrac{2\cdot 100+4\cdot 37}{2}\cdot 38=6612$.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 7. Шість чисел утворюють арифметичну прогресію (a_n). Сума перших трьох її членів дорівнює –24, а сума трьох останніх дорівнює 12. Знайти ці числа.

■ Урахувавши, що $S_3=-24$, $S_6=-24+12=-12$, складемо і розв'яжемо систему:

$$\begin{cases}\dfrac{2a_1+2d}{2}\cdot 3=-24,\\ \dfrac{2a_1+5d}{2}\cdot 6=-12;\end{cases}\quad\begin{cases}a_1+d=-8,\\ 2a_1+5d=-4;\end{cases}\quad\begin{cases}2a_1+2d=-16;\\ 2a_1+5d=-4;\end{cases}$$

$-3d=-12$; $d=4$. Тоді: $a_1=-8-4=-12$;

$a_2=-12+4=-8$; $a_3=-8+4=-4$; $a_4=-4+4=0$; $a_5=0+4=4$; $a_6=4+4=8$.

Відповідь. –12; –8; –4; 0; 4; 8. ■

Приклад 8. Щоб заасфальтувати ділянку завдовжки 117 м, використовують два котки. Перший коток встановили на одному кінці ділянки, другий — на протилежному. Працювати вони почали одночасно. За першу хвилину перший коток пройшов 1 м, за кожну наступну хвилину він проходив на 0,5 м більше, ніж за попередню. Другий коток за кожну хвилину проходив 6 м. Через скільки хвилин обидва котки зустрінуться?

■ Нехай обидва котки зустрінуться через x хв, тоді другий коток пройде до зустрічі шлях, що дорівнює $6x$ м, а перший пройде шлях, який можна виразити за допомогою суми членів арифметичної прогресії, де $a_1=1$, $n=x$, $d=\dfrac{1}{2}$. $S_n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n=\dfrac{2+\frac{1}{2}(x-1)}{2}\cdot x=\dfrac{4+x-1}{4}\cdot x=\dfrac{3x+x^2}{4}$. Увесь шлях дорівнює 117 м. Отже, маємо квадратне рівняння $6x+\dfrac{3x+x^2}{4}=117$. $x^2+27x-468=0$, звідки $x_1=12$, $x_2=-39$ — не задовольняє умову задачі. Отже, обидва котки зустрінуться через 12 хв.

Відповідь. 12 хв. ■

Приклад 9. Знайти знаменник та четвертий член геометричної прогресії (b_n): 4; –6; 9; … .

■ $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$; $b_4 = b_3 \cdot q = 9 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{2} = -13{,}5$.

Відповідь. $-\frac{3}{2}$; –13,5. ■

Приклад 10. За яких значень x числа 5^{5x}, $10^{\frac{3x^2+3}{4}}$ і 32^x будуть послідовними членами геометричної прогресії (b_n)? У відповідь записати добуток цих значень.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

■ За властивістю 1 геометричної прогресії маємо: $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$. Тоді: $\left(10^{\frac{3x^2+3}{4}}\right)^2 = 5^{5x} \cdot 32^x$;

$10^{\frac{3x^2+3}{2}} = 5^{5x} \cdot 2^{5x}$; $10^{\frac{3x^2+3}{2}} = 10^{5x}$; $\frac{3x^2+3}{2} = 5x$; $3x^2 - 10x + 3 = 0$; $x_1 = 3$; $x_2 = \frac{1}{3}$. Тоді $x_1 \cdot x_2 =$

$= 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 11. Знайти чотири числа, що утворюють геометричну прогресію (b_n), у якій сума крайніх членів дорівнює 27, а добуток середніх — 72.

■ Маємо геометричну прогресію (b_n): b_1; b_2; b_3; b_4, у якій $b_1 + b_4 = 27$, $b_2 \cdot b_3 = 72$. Оскільки $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_4}{b_3}$, то $b_2 b_3 = b_1 b_4 = 72$. Складемо і розв'яжемо систему: $\begin{cases} b_1 + b_4 = 27, \\ b_1 \cdot b_4 = 72. \end{cases}$ Звідки $b_1 = 3$, $b_4 = 24$ або $b_1 = 24$, $b_4 = 3$. Маємо дві прогресії: 1) 3; b_2; b_3; 24, 2) 24; b_2; b_3; 3. Знайдемо b_2 і b_3 в кожному з випадків.

1) Використавши формулу n-го члена геометричної прогресії, одержимо: $b_4 = b_1 q^3$; $3 \cdot q^3 = 24$; $q^3 = 8$; $q = 2$. Тоді $b_2 = 3 \cdot 2 = 6$; $b_3 = 6 \cdot 2 = 12$. Маємо прогресію 3; 6; 12; 24.

2) $b_4 = b_1 q^3$; $24q^3 = 3$; $q^3 = \frac{1}{8}$; $q = \frac{1}{2}$. Маємо прогресію: 24; 12; 6; 3.

Відповідь. 3; 6; 12; 24 або 24; 12; 6; 3. ■

Приклад 12. З бактерії за 30 хвилини утворюється дві, кожна з яких за 30 хвилини знову ділиться навпіл тощо. Скільки бактерій буде в організмі з однієї через добу?

А	Б	В	Г	Д
2^{30}	2^{48}	2^{10}	60	30

■ Число бактерій збільшується удвічі через кожні півгодини. Якщо зафіксувати кількість бактерій щопівгодини, то одержимо послідовність: 1; 2; 2^2; 2^3; …; 2^{n-1}. Ця послідовність є геометричною прогресією. Потрібно визначити, скільки бактерій утвориться з однієї бактерії через 24 год (48 разів по півгодини), тобто потрібно знайти 49-й член прогресії. Маємо $b_1 = 1$, $q = 2$, $n = 49$. Тоді за формулою $b_1 = b_1 q^{n-1}$ маємо: $b_{49} = 1 \cdot 2^{49-1} = 2^{48}$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 13. Знайти третій член нескінченної геометричної прогресії (b_n), сума якої дорівнює $\frac{8}{5}$, а другий член — $-\frac{1}{2}$.

■ За умовою складаємо та розв'язуємо систему: $\begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = \frac{8}{5}, \\ b_1 q = -\frac{1}{2}. \end{cases}$ Поділивши почленно друге рівняння на перше, отримаємо $q(1-q) = -\frac{5}{16}$ або $q^2 - q - \frac{5}{16} = 0$. Звідки маємо $q_1 = -\frac{1}{4}$, $q_2 = \frac{5}{4}$. Значення q_2 не задовольняє умову $|q| < 1$. Отже, $q = -\frac{1}{4}$. Тоді $b_3 = b_2 q = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$.

Відповідь. $\frac{1}{8}$. ■

Приклад 14. Перший, п'ятий та одинадцятий члени арифметичної прогресії (a_n) утворюють геометричну прогресію (b_n). Запиши шість перших членів арифметичної прогресії, якщо $a_1 = 24$.

■ Нехай $a_1 = 24$ — перший член арифметичної прогресії, d — різниця прогресії. Тоді $a_5 = 24 + 4d$, $a_{11} = 24 + 10d$. (b_n): b_1; b_2; b_3; ... — геометрична прогресія. За умовою, $b_1 = 24$. $b_2 = a_5 = 24 + 4d$, $b_3 = a_{11} = 24 + 10d$. За властивістю геометричної прогресії $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$. Маємо: $(24 + 4d)^2 = 24(24 + 10d)$; $24^2 + 8 \cdot 24 \cdot d + 16d^2 = 24^2 + 10 \cdot 24 \cdot d$; $16d^2 - 2 \cdot 24 \cdot d = 0$; $16d(d - 3) = 0$. $d = 0$ або $d = 3$. Отже, можливі два випадки:

1) $d = 0$, $a_1 = 24$, тоді маємо арифметичну прогресію: 24; 24; 24; 24; 24; 24.

2) $d = 3$, $a_1 = 24$, тоді маємо арифметичну прогресію: 24; 27; 30; 33; 36; 39.

Відповідь. 24; 24; 24; 24; 24; 24 або 24; 27; 30; 33; 36; 39. ■

Завдання 21.1–21.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

21.1. Знайти тридцять перший член арифметичної прогресії 3; 5,5; 8; ...

А	Б	В	Г	Д
85,5	83	80,5	78	73,5

21.2. В арифметичній прогресії (a_n) $a_1 = -2{,}7$; $a_{16} = 1{,}8$. Знайти різницю прогресії.

А	Б	В	Г	Д
0,5	0,2	0,4	–0,4	0,3

21.3. Ламана містить 14 відрізків. Кожний її відрізок, починаючи з другого, на 2 см більший від попереднього. Знайти довжину найменшого з відрізків, якщо найбільший з них дорівнює 29 см.

А	Б	В	Г	Д
2 см	2,5 см	3 см	3,5 см	4 см

21.4. В арифметичній прогресії $a_1 = 3$, $a_{75} = 299$. Знайти a_{50}.

А	Б	В	Г	Д
90	99	190	199	203

21.5. В арифметичній прогресії тридцять членів. Знайти суму всіх членів прогресії, якщо перший її член дорівнює –12, а останній — 75.

А	Б	В	Г	Д
1305	945	2610	835	1890

21.6. Знайти суму перших тринадцяти членів арифметичної прогресії –8; –5; –2; ...

А	Б	В	Г	Д
140	120	130	240	260

21.7. Третій і сьомий члени арифметичної прогресії відповідно дорівнюють 11 і 23. Знайти суму 10-ти перших членів цієї прогресії.

А	Б	В	Г	Д
85	35	185	175	370

21.8. Записати формулу для обчислення n-го члена геометричної прогресії 4; 12; 36; ...

А	Б	В	Г	Д
$b_n = 3 \cdot 4^{n-1}$	$b_n = 4 \cdot 8^{n-1}$	$b_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$	$b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$	$b_n = 4 \cdot 3^n$

21.9. Записати формулу для обчислення суми n перших членів геометричної прогресії 2; 6; 18; ...

А	Б	В	Г	Д
$2n$	$3^{n+1} - 7$	$3n - 1$	$2^n + 1$	$3^n - 1$

21.10. $17 + 17^2 + 17^3 + ... + 17^{20} = ...$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{16 \cdot (17^{20} - 1)}{17}$	$\frac{17 \cdot (17^{19} - 1)}{16}$	$\frac{17 \cdot (17^{20} - 1)}{16}$	$\frac{17^{20} - 1}{16}$	$\frac{17^{21} - 1}{16}$

21.11. Знайти суму нескінченно спадної геометричної прогресії $3; -\frac{3}{2}; \frac{3}{4}; -\frac{3}{8}; ...$

А	Б	В	Г	Д
2	3	6	2,5	1

21.12. Обчислити суму $21^{-1} + 21^{-2} + 21^{-3} = ...$

А	Б	В	Г	Д
0,1	0,05	0,01	0,2	0,02

21.13. (a_n) — арифметична прогресія, в якої $a_1 = 9$, $a_{10} = 27$. Знайти a_{15}.

А	Б	В	Г	Д
Не можна визначити	41	39	47	37

21.14. В арифметичній прогресії (a_n) $a_8 = 6$. Знайти S_{15}.

А	Б	В	Г	Д
180	84	96	90	не можна визначити

21.15. Сума восьмого і двадцятого членів арифметичної прогресії дорівнює 48. Знайти чотирнадцятий член прогресії.

А	Б	В	Г	Д
96	24	26	22	не можна визначити

21.16. (a_n) — арифметична прогресія. Знайти суму перших її десяти членів, якщо $a_4 = 10$ і $a_7 = 19$.

А	Б	В	Г	Д
145	290	155	390	310

21.17. Знайти суму натуральних чисел від 40 до 200 включно.

А	Б	В	Г	Д
19280	19200	19320	38400	38640

21.18. Знайти знаменник нескінченно спадної геометричної прогресії, якщо її перший член $b_1 = \frac{1}{101}$, а сума — $\frac{1}{100}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{101}$	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{300}$

21.19. Вираз $1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - a^7 + a^8 - a^9$, де $a \neq 1$, тотожно дорівнює виразу ...

А	Б	В	Г	Д
$\frac{a^{10}-1}{a-1}$	$\frac{a^{10}+1}{a+1}$	$\frac{a^{10}-1}{a+1}$	$\frac{1-a^{10}}{a+1}$	$\frac{1-a^9}{a+1}$

21.20. У пробірці міститься три клітини, які розмножуються поділом навпіл. Скільки утвориться клітин після n-го поділу?

А	Б	В	Г	Д
$2 \cdot 3^n$	$2 \cdot 3^{n-1}$	$3 + 2^n$	$3 \cdot 2^{n-1}$	$3 \cdot 2^n$

21.21. Вкладник вніс до банку a гривень під 10% річних. Скільки грошей буде на рахунку вкладника через n років?

А	Б	В	Г	Д
$1{,}1^n a$	$1{,}1a^n$	$(1 + 0{,}1^n)a$	$(1 + 1{,}1^n)a$	$0{,}1a^n$

21.22. $11+101+1001+10001+\underbrace{100...001}_{n} = ...$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{10^{n+1}+n-10}{9}$	$\frac{10^{n+2}+9n-1}{9}$	$\frac{10^{n+2}-10}{9}$	$\frac{10^{n+1}-10}{9}$	$\frac{10^{n+2}+10n-1}{9}$

Завдання 21.23–21.33 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

21.23. Установити відповідність між послідовностями (1–4) та їхніми можливими властивостями (А–Д).

1 Арифметична прогресія
2 Не прогресія
3 Геометрична прогресія ($|q| > 1$)
4 Нескінченна геометрична прогресія ($|q| < 1$)

А $S_n = \frac{n^2 + 13n}{2}$
Б $S = \frac{a_1}{1-q}$
В $S_n = 3n + 2$
Г $a_n = 2^n$
Д $b_n = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$

21.24. Установити відповідність між арифметичними прогресіями (a_n) (1–4), заданими двома членами, та їх різницями (А–Д).

1 $a_1 = -1, a_2 = 3$
2 $a_1 = -30, a_5 = -6$
3 $a_1 = 13, a_4 = 1$
4 $a_1 = 17, a_{11} = -3$

А –2
Б –4
В 2
Г 4
Д 6

21.25. Установити відповідність між арифметичними прогресіями (a_n) (1–4), заданими двома членами, та формулами n-го члена (А–Д).

1 $a_1 = 2, a_3 = 12$
2 $a_2 = -11, a_5 = -20$
3 $a_3 = 18, a_7 = 38$
4 $a_4 = -23, a_6 = -33$

А $a_n = 5 + 3n$
Б $a_n = 3 + 5n$
В $a_n = -5 - 3n$
Г $a_n = -3 - 5n$
Д $a_n = -3 + 5n$

21.26. Установити відповідність між арифметичними прогресіями (a_n) (1–4), заданими двома членами, та їх десятим членом (А–Д).

1 $a_1 = -9, a_3 = -23$
2 $a_1 = -2, a_7 = 16$
3 $a_1 = -5, a_{13} = -29$
4 $a_1 = -1, a_{14} = 51$

А $a_{10} = 25$
Б $a_{10} = 35$
В $a_{10} = -45$
Г $a_{10} = -23$
Д $a_{10} = -72$

21.27. Установити відповідність між арифметичними прогресіями (a_n) (1–4), заданими двома членами, та формулами сум n перших її членів (А–Д).

1 $a_1 = 5, a_2 = 9$
2 $a_1 = -5, a_3 = -13$
3 $a_1 = 7, a_4 = 13$
4 $a_1 = -11, a_5 = -19$

А $S_n = n^2 + 6n$
Б $S_n = -n^2 - 10n$
В $S_n = -2n^2 - 3n$
Г $S_n = 2n^2 + 3n$
Д $S_n = -n^2 + 10n$

21.28. Установити відповідність між арифметичними прогресіями (a_n) (1–4), заданими двома членами, та сумами 10 перших її членів (А–Д).

1 $a_1 = 7, a_2 = 9$
2 $a_1 = -7, a_2 = -9$
3 $a_1 = -3, a_3 = 1$
4 $a_1 = 3, a_3 = -1$

А –160
Б –60
В 0
Г 60
Д 160

21.29. Установити відповідність між геометричними прогресіями (a_n) (1–4), заданими двома членами, та їх знаменниками (А–Д).

1 $b_1 = -2, b_4 = -54$
2 $b_2 = -6, b_5 = 162$
3 $b_1 = 32, b_4 = 4$
4 $b_3 = -24, b_6 = 3$

А –3
Б –0,5
В $-\frac{1}{3}$
Г 0,5
Д 3

21.30. Установити відповідність між геометричними прогресіями (a_n) (1–4), заданими двома членами, та формулами n-го члена (А–Д).

1 $b_1 = 4, b_4 = 108$
2 $b_1 = 2, b_4 = -54$
3 $b_2 = -6, b_5 = 48$
4 $b_2 = 6, b_5 = \frac{81}{32}$

А $b_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$
Б $b_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$
В $b_n = 4 \cdot (-3)^{n-1}$
Г $b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$
Д $b_n = 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

21.31. Установити відповідність між геометричними прогресіями (a_n) (1–4), заданими двома першими членами, та формулами суми n перших їх членів (А–Д).

1 $b_1 = 4, b_2 = 8$
2 $b_1 = -4, b_2 = -2$
3 $b_1 = 12, b_2 = -24$
4 $b_1 = \frac{3}{4}, b_2 = -\frac{3}{8}$

А $S_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{2}$
Б $S_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}$
В $S_n = 2^{n+2} - 4$
Г $S_n = 2^{-n+3} - 8$
Д $S_n = 2 \cdot (-2)^{n+1} + 4$

21.32. Установити відповідність між нескінченними спадними геометричними прогресіями (a_n) (1–4), заданими двома першими членами, та їх сумами (А–Д).

1 $b_1 = 6, b_2 = 1$
2 $b_1 = 25, b_2 = -5$
3 $b_1 = \frac{2}{3}, b_2 = -\frac{1}{3}$
4 $b_1 = \frac{3}{7}, b_2 = \frac{6}{49}$

А $20\frac{5}{6}$
Б 0,6
В 3,6
Г 7,2
Д $\frac{4}{9}$

21.33. Установити відповідність між заданими виразами (1–4) та їх сумами (А–Д).

1 $1+a^2+a^4+a^6+a^8+a^{10}$, де $a \neq 1$

2 $1-a+a^2-a^3+a^4+a^5-a^6$, де $a \neq 1$

3 $a^2+a^4+a^6+a^8+a^{10}+a^{12}$, де $a \neq 1$

4 $a-a^2+a^3-a^4+a^5-a^6$, де $a \neq -1$

А $\dfrac{a^7+1}{a+1}$

Б $\dfrac{a^{14}-a^2}{a^2-1}$

В $\dfrac{a-a^7}{a+1}$

Г $\dfrac{a-a^7}{a-1}$

Д $\dfrac{1-a^{12}}{1-a^2}$

Розв'яжіть завдання 21.34–21.46. Відповідь запишіть десятковим дробом.

21.34. Знайти найбільший від'ємний член арифметичної прогресії (a_n), у якої $a_1 = 101$, $d = -7$.

21.35. Знайти суму S членів арифметичної прогресії (a_n) з десятого до сорокового включно, якщо $a_1 = -10$, $d = 2$. У відповідь записати $S : 100$.

21.36. Із двох точок, відстань між якими дорівнює 155 м, одночасно починають рухатися назустріч одне одному два тіла. Перше тіло рухається рівномірно зі швидкістю 8 м/с, а друге тіло за першу секунду пройшло 3 м, а кожної наступної секунди проходить на 1 м більше, ніж за попередню. Через скільки секунд тіла зустрінуться?

21.37. Знайти суму S усіх трицифрових натуральних чисел, які діляться на число 7 без остачі. У відповідь записати $S : 100$.

21.38. Знайти найбільше значення x, за яких числа $x - 1$, $2x - 1$ і $x^2 - 5$, записані в указаному порядку, утворюють арифметичну прогресію.

21.39. Визначити, за яких значень x три числа $\lg 2$, $\lg(3^x - 3)$ і $\lg(3^x + 9)$, узяті в заданій послідовності, утворюють арифметичну прогресію.

21.40. Знайти різницю арифметичної прогресії, якщо сума перших її 100 членів на 50 більша від суми ста наступних.

21.41. Інфузорії-туфельки розмножуються поділом на дві частини. Скільки утвориться інфузорій із п'яти після семи поділів?

21.42. (x_n) — нескінченна спадна геометрична прогресія, у якої $x_1 = 3$, $q = \dfrac{1}{3}$. Знайти суму її членів з непарними номерами.

21.43. У посудині міститься 1000 л повітря. Кожний рух поршня розріджувального насоса видаляє з посудини 0,1 частини повітря. Скільки літрів повітря залишиться в посудині після п'яти рухів поршня?

21.44. Спростити рівняння функції $y = x^4 + \frac{x^4}{1+x^4} + \frac{x^4}{(1+x^4)^2} + \frac{x^4}{(1+x^4)^3} + \ldots$ та знайти її значення, якщо $x = 3$.

21.45. Знайти перші п'ятдесят членів двох арифметичних прогресій 2; 7; 12; ... і 3; 10; 17;..., які однакові в обох прогресіях та обчислити їх суму S. У відповідь записати S : 100.

21.46. Числа m, n і p, відмінні від нуля та записані в заданій послідовності, утворюють геометричну прогресію, а числа $m + n$, $n + p$ і $p + m$, записані в заданій послідовності, — арифметичну прогресію. Знайти знаменник геометричної прогресії, відмінний від 1.

Тема 22. Елементарні функції та їхні властивості

Поняття функції

Змінну y називають функцією від змінної x, якщо *кожному* значенню змінної x відповідає *одне* певне значення змінної y. При цьому змінну x називають *незалежною змінною*, або *аргументом*, а змінну y — *залежною змінною*, або *функцією* (від аргументу x).

Якщо змінна y є функцією від аргументу x, то записують: $y = f(x)$ (читають: y дорівнює f від x). Значення функції для $x = x_0$ позначають через $f(x_0)$. Так, якщо функцію задано формулою $y = 2x - 3$, то можна записати: $f(x) = 2x - 3$. Тоді, наприклад, $f(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$, $f(2{,}5) = 2 \cdot 2{,}5 - 3 = 2$.

Область визначення і множина значень функції

Множину значень, яких набуває незалежна змінна (аргумент), називають *областю визначення* функції; множину значень, яких набуває залежна змінна (функція), називають *областю значень* функції.

Область визначення функції $y = f(x)$ позначають $D(f)$ або $D(y)$, а область значень — $E(f)$ або $E(y)$.

Якщо вираз $f(x)$ є многочленом, то областю визначення функції $y = f(x)$ є множина всіх дійсних чисел; якщо $f(x)$ — раціональний дріб, то областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, крім тих значень x, для яких знаменник дробу дорівнює нулю; якщо функція задана формулою $y = \sqrt{f(x)}$, то областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, для яких виконується нерівність $f(x) \geq 0$.

Наприклад, розглянемо функцію $y = \frac{5}{x-4}$. Вираз $\frac{5}{x-4}$ має зміст для всіх значень x, крім $x = 4$. Тому областю визначення цієї функції є множина всіх дійсних чисел, крім $x = 4$, тобто $D(y) = (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$.

Графіком функції називають фігуру, яка складається з усіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють усім значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції.

Нулі функції. Проміжки знакосталості

Розглянемо функцію $y = f(x)$, графік якої зображено на рисунку. Якщо $x = -1$, $x = 4$ або $x = 6$, то значення функції дорівнює нулю. Такі значення аргументу x називають *нулями функції*.

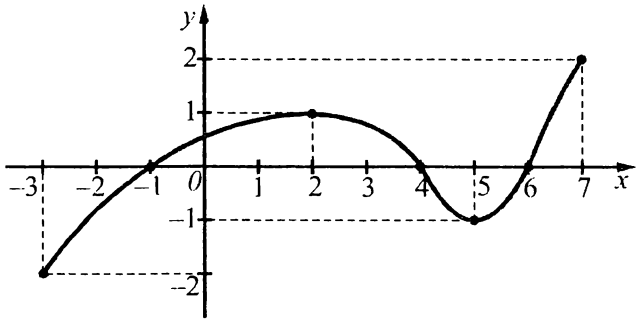


Рис. 1

Щоб знайти нулі функції $y = f(x)$, потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 0$. Нулі функції розбивають її область визначення на *проміжки знакосталості* — проміжки, на яких функція набуває значень одного знака.

Наприклад, нулем функції $y = x - 2$ є лише одне значення x: $x - 2 = 0$; $x = 2$; нулями функції $y = x^2 - 2x$ є числа 0 та 2.

Зростання, спадання функції

Розглянемо графік функції $y = f(x)$ на рисунку 1. На проміжку $[-3; 2]$ графік «іде вгору»: якщо збільшувати значення x із цього проміжку, то відповідні значення функції збільшуватимуться. Наприклад, візьмемо значення аргументу $x_1 = -3$ і $x_2 = -1$, тоді $x_2 > x_1$. Оскільки $f(x_1) = f(-3) = -2$, а

$f(x_2) = f(-1) = 0$, то $f(x_2) > f(x_1)$. Більшому значенню аргументу (x_2) відповідає більше значення функції ($f(x_2)$). Кажуть, що на проміжку $[-3; 2]$ функція $y = f(x)$ *зростає* (або *є зростаючою*). Такою ж вона є й на проміжку $[5; 7]$.

На проміжку $[2; 5]$ графік функції $y = f(x)$ «іде вниз»: якщо збільшувати значення аргументу, то відповідні значення функції зменшуватимуться. Кажуть, що на цьому проміжку функція $y = f(x)$ *спадає* (або *є спадною*).

Якщо функція зростає на всій області визначення, то її називають *зростаючою функцією*; якщо ж функція спадає на всій області визначення, то її називають *спадною функцією*.

Наприклад, на рисунку 2 зображено графік функції, областю визначення якої є проміжок $[-1; 5]$. Ця функція є зростаючою, бо вона зростає на всій області визначення. Функція, графік якої зображено на рисунку 3, є спадною, бо вона спадає на всій області визначення — проміжку $[-1; 5]$.

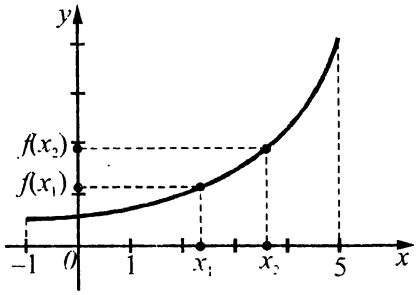


Рис. 2

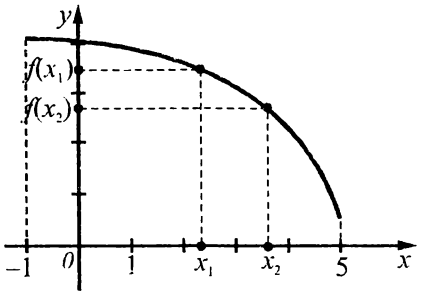


Рис. 3

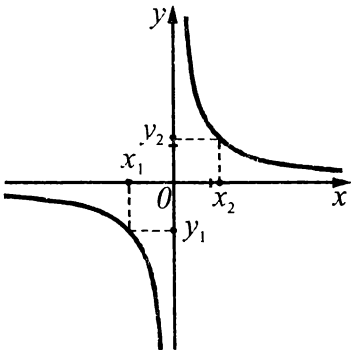


Рис. 4

Зростаючими, наприклад, є функції $y = 2x$, $y = \sqrt{x}$, а спадними — функції $y = -2x$, $y = -x$. Функція $y = f(x)$, графік якої зображено на рисунку 1, є ні зростаючою, ні спадною. Вона лише зростає або спадає на окремих проміжках.

Парні та непарні функції

Розглянемо функцію $f(x) = x^2$, її графік зображено на рисунку 5. Оскільки для будь-якого значення x виконується рівність $(-x)^2 = x^2$, то $f(-x) = f(x)$. Функцію $f(x) = x^2$ називають *парною*.

Функцію $y = f(x)$ називають *парною*, якщо для будь-якого значення x з області її визначення значення $-x$ також належить області визначення і виконується рівність $f(-x) = f(x)$.

Область визначення парної функції симетрична відносно початку координат, бо разом із точкою x вона містить і точку $-x$.

Графік парної функції симетричний відносно осі y (див., наприклад, рис. 5). Тому для побудови графіка парної функції досить побудувати частину графіка для $x \geq 0$, а потім симетрично відобразити цю частину відносно осі y.

На рисунку 6 зображено графік функції $f(x) = x^3$. Оскільки для будь-якого значення x виконується рівність $(-x)^3 = -(x^3)$, то $f(-x) = -f(x)$. Функцію $f(x) = x^3$ називають *непарною*.

Функцію $y = f(x)$ називають *непарною*, якщо для будь-якого значення x з області її визначення значення $-x$ теж належить області визначення і виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.

Розглянемо функцію $f(x) = 2x + 3$. Область її визначення — множина всіх дійсних чисел — симетрична відносно початку координат. Для цієї функції $f(-x) = -2x + 3$. Рівності $f(-x) = f(x)$ і $f(-x) = -f(x)$ не виконуються для всіх значень x, наприклад, для $x = 1$ ($f(1) = 5$; $f(-1) = 1$; $f(-1) \neq f(1)$ і $f(-1) \neq -f(1)$). Ця функція є ні парною, ні непарною; функція $f(x) = \sqrt{x}$, де $x \geq 0$, також є ні парною, ні непарною, бо область визначення функції (проміжок $[0; +\infty)$) не симетрична відносно початку координат.

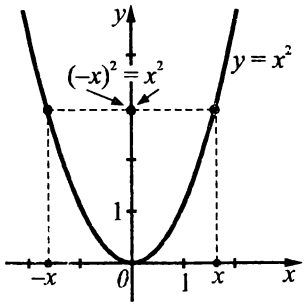


Рис. 5

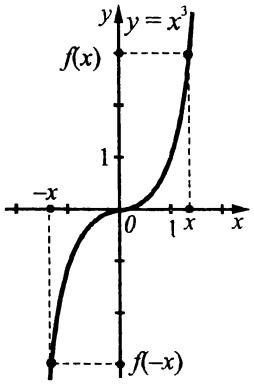


Рис. 6

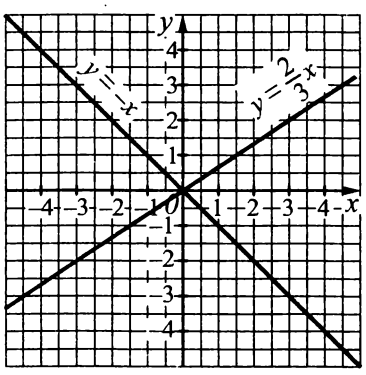
Область визначення та графік непарної функції симетричні відносно початку координат. Тому для побудови графіка непарної функції досить побудувати частину графіка для $x \geq 0$, а потім симетрично відобразити цю частину відносно початку координат.

Періодичність функції

Функцію $y = f(x)$ називають *періодичною*, якщо існує таке число $T > 0$, що для будь-якого числа x із області визначення функції виконується рівність $f(x \pm T) = f(x)$. Число T називають *періодом функції*. Найменше додатне число, яке є періодом функції називають *найменшим додатним періодом*, або *основним періодом* цієї функції, і позначають T_0. Наприклад, основним періодом функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$ є число 2π, а функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = \operatorname{ctg} x$ — π.

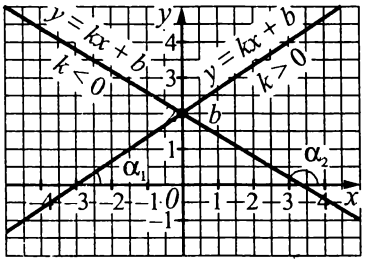
Пряма пропорційність $y = kx$ ($k \neq 0$)

Функцію, задану формулою $y = kx$ ($k \neq 0$), де x та y — змінні, k — число, називають *прямою пропорційністю*. Число k називають *коефіцієнтом пропорційності*. Графіком прямої пропорційності є пряма, яка проходить через початок координат під кутом α ($k = \operatorname{tg}\alpha$). Коефіцієнт k називають також *кутовим коефіцієнтом прямої*. Для побудови прямої достатньо знати дві точки. Оскільки графік прямої пропорційності проходить через початок координат, то достатньо знайти ще одну точку.



Лінійна функція $y = kx + b$ ($k \neq 0$)

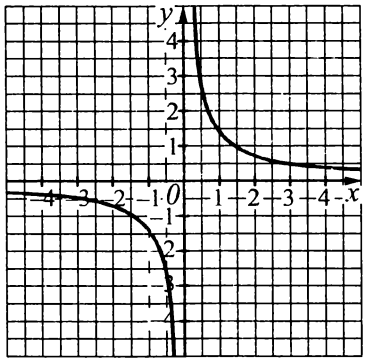
Функцію, задану формулою $y = kx + b$, де x та y — змінні, k і b — числа, називають *лінійною функцією*. Число k називають *кутовим коефіцієнтом прямої*. Графіком лінійної функції є пряма, яка проходить під кутом α ($k = \operatorname{tg}\alpha$) до осі абсцис.



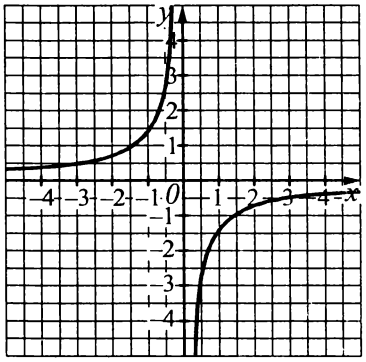
Пряма $y = kx + b$ перетинає вісь ординат у точці $(0; b)$ і вісь абсцис у точці $\left(-\frac{b}{k}; 0\right)$.

Обернена пропорційність $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$

Функцію, задану формулою $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$, де x та y — змінні, k — число, називають *оберненою пропорційністю*. Графіком функції $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ є *гіпербола*, частини графіка — *вітки гіперболи*. Графік не перетинає осей координат.



$y = \frac{k}{x}$ $(k > 0)$



$y = \frac{k}{x}$ $(k < 0)$

Область визначення функції: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Множина значень функції: $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

Квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

Функцію, задану формулою $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, де x та y — змінні, a, b і c — числа $(a \neq 0)$, називають *квадратичною функцією*. Графіком функції $y = ax^2 + bx + c$ є *парабола* з вершиною у точці $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$, де $D = b^2 - 4ac$. Віссю симетрії параболи є пряма $x = -\frac{b}{2a}$, яка паралельна до осі y.

Область визначення функції: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

Якщо $a < 0$, то вітки параболи напрямлені вниз і значення $-\frac{D}{4a}$ є найбільшим значенням функції, тобто $E(y) = \left(-\infty; \frac{-D}{4a}\right]$; якщо $a > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору і значення $-\frac{D}{4a}$ є найменшим значенням функції, тобто $E(y) = \left[-\frac{D}{4a}; +\infty\right)$.

Якщо $D < 0$, то парабола не перетинає осі абсцис; якщо $D = 0$, то парабола дотикається до осі x у вершині; якщо $D > 0$, то парабола перетинає вісь x у точках $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ і $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

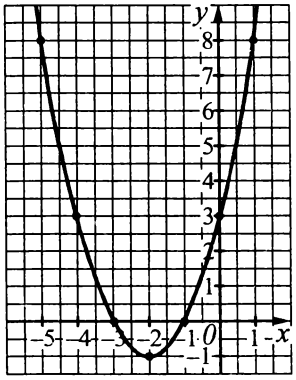
Парабола перетинає вісь y в точці з координатами $(0; c)$.

Наприклад, побудувати графік функції $y = x^2 + 4x + 3$. Оскільки $a = 1 > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору, $b = 4$, $c = 3$. $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$ — парабола перетинає вісь x у двох точках. Вершина параболи має координати: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$; $y_0 = -\frac{D}{4a} = -\frac{4}{4 \cdot 1} = -1$. Точки перетину з віссю x: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 - 2}{2 \cdot 1} = -\frac{6}{2} = -3$; $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 + 2}{2 \cdot 1} = -\frac{2}{2} = -1$. Точка перетину з віссю y: $(0; 3)$.

Знайдемо значення функції для кількох цілих значень x, близьких до абсциси вершини:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
y	8	3	0	-1	0	3	8

Тоді графік має вигляд:



Приклад 1. Функцію задано формулою $f(x) = \frac{1}{3}(2x + 1)$. Знайти $f(-5)$.

А	Б	В	Г	Д
3	-1	1	-3	$3\frac{2}{3}$

■ $f(-5) = \frac{1}{3}(2 \cdot (-5) + 1) = \frac{1}{3}(-10 + 1) = \frac{1}{3} \cdot (-9) = -3$.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 2. Вказати проміжки, на яких функція $f(x) = -5x + 15$ набуває від'ємних значень.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 3)$	$(3; +\infty)$	$(-\infty; -3)$	$(-3; +\infty)$	$\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$

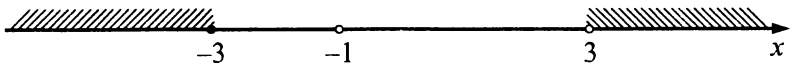
■ Функція набуває від'ємних значень на тих проміжках, де $f(x) < 0$. Розв'яжемо нерівність: $-5x + 15 < 0$; $-5x < -15$; $x > 3$; $x \in (3; +\infty)$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 3. Знайти область визначення функції $y=\sqrt{|x|-3}+\dfrac{x^2+4}{(x-1)^2-4}$. У відповідь записати суму найменшого додатного і найбільшого від'ємного цілих значень цієї області.

■ Для того, щоб знайти область визначення функції, необхідно розв'язати таку систему: $\begin{cases}|x|-3\geq 0; & (1)\\ (x-1)^2-4\neq 0. & (2)\end{cases}$ Розглянемо (1): $|x|-3\geq 0$; $|x|\geq 3$; $\left[\begin{array}{l}x\geq 3;\\ x\leq -3;\end{array}\right.$ $x\in(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$. Розглянемо (2):

$(x-1)^2-4\neq 0$; $(x-1)^2\neq 4$; $\left[\begin{array}{l}x-1\neq 2;\\ x-1\neq -2;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x\neq 3;\\ x\neq -1.\end{array}\right.$



Отже, $x\in(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

Найбільше від'ємне ціле значення дорівнює –3, найменше ціле додатне значення — 4, а їх сума дорівнює $-3+4=1$.

Відповідь. 1. ■

Приклад 4. Вказати проміжок, якому належать нулі функції $y=x^3+2x^2-x-2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;0)$	$(-5;3)$	$[-2;1)$	$(-2;+\infty)$	$[0;1]$

■ Щоб знайти нулі функції, потрібно розв'язати рівняння $x^3+2x^2-x-2=0$; $x^2(x+2)-(x+2)=0$; $(x+2)(x^2-1)=0$; $\left[\begin{array}{l}x=-2;\\ x=-1;\\ x=1.\end{array}\right.$ Числа –2; –1 і 1 належать проміжку (–5; 3).

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 5. За якого значення параметра c графік функції $y=\log_2(x+c)$ проходить через точку (2; 3)?

А	Б	В	Г	Д
7	4	1	6	4,5

■ $x=2$; $y=3$. $\log_2(2+c)=3$; $2+c=2^3$; $c=8-2$; $c=6$.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 6. Знайти множину значень функції $y=\sin x-3$.

А	Б	В	Г	Д
$[-4;-2]$	$[-10;4]$	$[2;4]$	$(-\infty;+\infty)$	$[-3;3]$

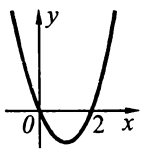
■ За властивістю функції $y=\sin x$, множиною її значень є $[-1;1]$, тобто $-1\leq\sin x\leq 1$. Додамо до всіх частин подвійної нерівності число –3 й отримаємо: $-1-3\leq\sin x-3\leq 1-3$; $-4\leq\sin x-3\leq -2$. Отже, множиною значень функції $y=\sin x-3$ є проміжок $[-4;-2]$.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 7. Знайти область визначення функції $f(x)=\log_{0,5}(2x-x^2)$.

А	Б	В	Г	Д
$(0;2)$	$(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$	інша відповідь	$(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$	$[0;2)$

■ За властивістю логарифмічної функції областю визначення функції $f(x) = \log_{0,5}(2x - x^2)$ є усі значення x, які задовольняють умову $2x - x^2 > 0$. Розв'яжемо утворену нерівність: $2x - x^2 > 0$; $x^2 - 2x < 0$; $x(x - 2) < 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. $x \in (0; 2)$.



Відповідь. **А.** ■

Приклад 8. Яке з наведених чисел входить до множини значень функції $y = 2^x + 4$?

А	Б	В	Г	Д
5	жодне з чисел не входить	3	4	0

■ Знайдемо множину значень функції $y = 2^x + 4$. Оскільки $0 < 2^x < +\infty$, то $4 < 2^x + 4 < +\infty$. Тому множиною значень функції $y = 2^x + 4$ є $y \in (4; +\infty)$. З указаних у відповідях чисел у проміжок $(4; +\infty)$ входить лише число 5.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 9. Графіку функції, заданої формулою $y = \begin{cases} \frac{4}{x}, & \text{якщо } x > 0; \\ -\frac{4}{x}, & \text{якщо } x < 0, \end{cases}$ належать точки $A(-2; a)$, $B(2; b)$, $C\left(\frac{1}{2}; c\right)$. Знайти a, b і c. У відповідь записати їхню суму.

■ $A(-2; a)$: $-2 < 0$, тому точка належить частині графіка функції $y = -\frac{4}{x}$, якщо $x < 0$. Маємо: $y = -\frac{4}{-2} = 2$. Отже, $a = 2$;

$B(2; b)$: $2 > 0$, тому точка належить частині графіка функції $y = \frac{4}{x}$, якщо $x > 0$. Маємо: $y = \frac{4}{2} = 2$. Отже, $b = 2$;

$C\left(\frac{1}{2}; c\right)$: $\frac{1}{2} > 0$, тому точка належить частині графіка функції $y = \frac{4}{x}$, якщо $x > 0$. Маємо: $y = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$. Отже, $c = 8$.

Сума знайдених значень дорівнює: $2 + 2 + 8 = 12$.

Відповідь. 12. ■

Приклад 10. Функція спадає, якщо $x < 0$. Вкажіть найменше з чисел.

А	Б	В	Г	Д
$f\left(-\frac{3}{8}\right)$	$f\left(-\frac{7}{10}\right)$	$f\left(-\frac{3}{4}\right)$	$f\left(-\frac{3}{5}\right)$	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$

■ Оскільки функція спадна, то більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції. Найменше із запропонованих чисел відповідає найбільшому значенню аргументу.

Відповідь. **А.** ■

Завдання 22.1–22.29 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

22.1. Знайти область визначення функції $y = \lg\left(x^2 - 6x + 8\right)$.

А	Б	В	Г	Д
R	$(-\infty; 2]\cup[4; +\infty)$	$(-\infty; 2)\cup(4; +\infty)$	$(2; 4)$	$(-\infty; 2)\cup(2; 4)\cup$ $\cup(4; +\infty)$

22.2. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{5^{2x-3} - 1}$.

А	Б	В	Г	Д
$(1{,}5; +\infty)$	$[2; +\infty)$	$[1{,}5; +\infty)$	$[5; +\infty)$	$[3; +\infty)$

22.3. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{\dfrac{x-4}{x+1}}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1)\cup(-1; +\infty)$	$(-1; +\infty)$	$(-1; 4)$	$(-\infty; -1)\cup(4; +\infty)$	$(-\infty; -1)\cup[4; +\infty)$

22.4. Яка з множин є областю визначення функції $y = \sqrt[4]{-\log_3 x + 1}$?

А	Б	В	Г	Д
$[0; 3]$	$[0; 4]$	$[-3; 3)$	$(-\infty; 3]$	$(0; 3]$

22.5. Вказати область визначення функції $y = \sqrt{\left(x^2 + 2\right)\left(2 + \log_5 \dfrac{1}{x}\right)}$.

А	Б	В	Г	Д
$(2; 5]$	$(0; 2]$	$(0; 25]$	$(2; +\infty)$	$(-2; +\infty)$

22.6. Знайти множину значень функції $y = -x^2 + 4x - 5$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1]$	$(-\infty; -1]$	$[1; +\infty)$	$(-\infty; 5]$	$[-5; +\infty)$

22.7. Обчислити відстань від початку координат до вершини параболи $y = -x^2 + 10x - 13$.

А	Б	В	Г	Д
5	13	12	17	10

22.8. Знайти множину значень функції $y = -2\cos x + 5$.

А	Б	В	Г	Д
$[-1; 1]$	$[2; 5]$	$[-2; -5]$	$[3; 7]$	R

22.9. Знайти множину значень функції $y = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2$.

А	Б	В	Г	Д
[–1; 1]	[–5; 1]	[1; 3]	[–5; –2]	[–3; 3]

22.10. Знайти множину значень функції $y = 3 - 2\sin 5x$.

А	Б	В	Г	Д
[1; 5]	[2; 4]	[3; 5]	[1; 3]	[–1; 1]

22.11. Дано функцію $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Знайти $f(x + 1)$.

А	Б	В	Г	Д
$f(x+1) = \frac{x}{x+2}$	$f(x+1) = \frac{2}{1+x}$	$f(x+1) = -\frac{x}{x+2}$	$f(x+1) = \frac{1+x}{1-x}$	$f(x+1) = -\frac{2}{1+x}$

22.12. Яка з наведених функцій є парною?

А	Б	В	Г	Д
$y = x^3 + x$	$y = x^6 + 3x$	$y = x^2 + \lvert x\rvert$	$y = \frac{x}{x-1}$	$y = \sin x + \operatorname{tg} x$

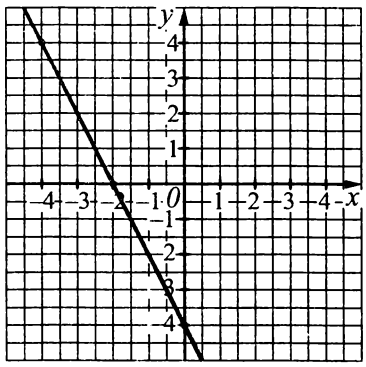
22.13. Яка з наведених функцій є непарною?

А	Б	В	Г	Д
$y = x + \lvert x\rvert$	$y = \sin^2 x$	$y = \frac{x^2}{x-1}$	$y = \sqrt[3]{\lvert x\rvert}$	$y = \sqrt[3]{x}$

22.14. Функція $f(x)$ — парна, а функція $g(x)$ — непарна. $f(-7) = -11$, $g(5) = -2$. Обчислити $2f(-7) - 3g(-5)$.

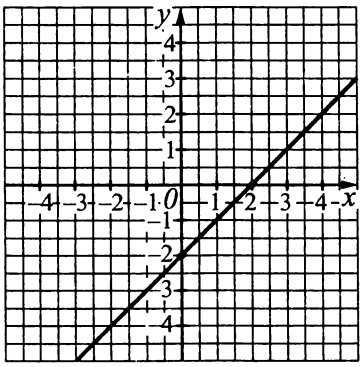
А	Б	В	Г	Д
–28	–16	28	16	29

22.15. Ескіз графіка якої з наведених функцій зображено на рисунку?



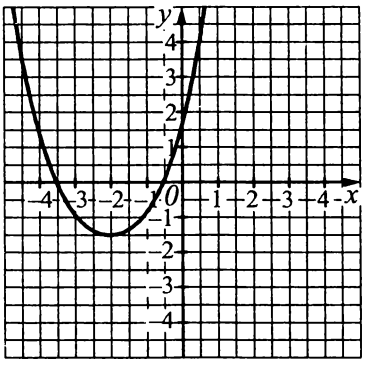
А	Б	В	Г	Д
$y = -2x + 4$	$y = 2x - 4$	$y = 2x + 4$	$y = -2x - 4$	$y = -4x - 4$

22.16. За ескізом графіка $y = ax + b$ вказати знаки параметрів a і b.



А	Б	В	Г	Д
$a > 0, b > 0$	$a > 0, b < 0$	$a < 0, b > 0$	$a < 0, b < 0$	$a > 0, b = 0$

22.17. За ескізом графіка функції $y = ax^2 + bx + c$ знайти значення параметрів a, b і c.



А	Б	В	Г	Д
$a > 0, b > 0, c > 0$	$a > 0, b > 0, c < 0$	$a > 0, b < 0, c < 0$	$a > 0, b < 0, c > 0$	$a < 0, b < 0, c < 0$

22.18. За яких значень a парабола $y = 9x^2 - 12x + 35a$ має з віссю абсцис дві точки перетину?

А	Б	В	Г	Д
$a = \frac{4}{35}$	$a < \frac{4}{35}$	$a > \frac{4}{35}$	$a < \frac{18}{35}$	$a < \frac{16}{35}$

22.19. Вказати функцію, в якої основний період дорівнює π.

А	Б	В	Г	Д
$y = \sin(x + \pi)$	$y = \cos(2x + 1)$	$y = \operatorname{tg}(3x + \pi)$	$y = \operatorname{ctg}(4x + 2)$	$y = \pi$

22.20. Знайти основний період функції $y = \cos^2 6x$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2\pi}{3}$	3π	$\frac{\pi}{3}$	6π	$\frac{\pi}{6}$

22.21. Знайти основний період функції $y = 2\cos\frac{x}{3} + 3\operatorname{tg}\frac{x}{8}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{24}$	6π	24π	8π	функція неперіодична

22.22. Вказати функцію, обернену до функції $y = 4x - 1$.

А	Б	В	Г	Д
$y=\frac{x+1}{4}$	$y=\frac{1}{4x-1}$	$y=\frac{x}{4}+1$	$y = 4x + 1$	$y = -4x + 1$

22.23. Вказати функцію, обернену до функції $y = x^2 - 2$, $x \in [0; +\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
$y=\frac{1}{x^2-2}$	$y=\sqrt{x}-2$	$y=\sqrt{x}+2$	$y=-\sqrt{x+2}$	$y=\sqrt{x+2}$

22.24. Вказати складену функцію $y = f(g(x))$, якщо $g(x)=\frac{1}{x}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

А	Б	В	Г	Д
$y=\frac{x^2}{x^2+1}$	$y = x^2 + 1$	$y=\frac{x}{x^2+1}$	$y=\frac{x^2+1}{x}$	$y=\frac{x^2+1}{x^2}$

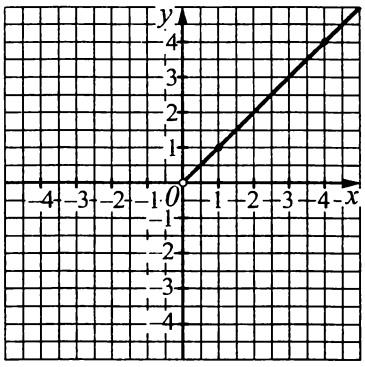
22.25. Вказати складену функцію $y = f(g(x))$, якщо $g(x)=\sqrt{x+1}$, $f(x)=x^2-1$.

А	Б	В	Г	Д
$y=\left(x^2-1\right)\sqrt{x+1}$, $D(y) = [-1; +\infty)$	$y = x$, $D(y) = (-\infty; +\infty)$	$y=\sqrt{x}$, $D(y) = [0; +\infty)$	$y=\sqrt{x^2}$, $D(y) = (-\infty; +\infty)$	$y = x$ $D(y) = [-1; +\infty)$

22.26. Знайти множину значень функції $y = 5^{\sin x}$.

А	Б	В	Г	Д
$(0; +\infty)$	R	$[-5; 5]$	$\left[\frac{1}{5}; 5\right]$	$[-1; 1]$

22.27. Графік якої з наведених функцій зображено на рисунку?



А	Б	В	Г	Д
$y=\frac{x^2}{x}$	$y=\sqrt{x^2}$	$y=10^{\lg x}$	$y=\left(\sqrt{x}\right)^2$	$y = \lvert x\rvert$

22.28. Знайти множину значень функції $y=\dfrac{1}{1+x^2}$.

А	Б	В	Г	Д
R	$(0;+\infty)$	$(0;1]$	$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\left[0;\frac{1}{2}\right)$

22.29. Знайти найбільше ціле значення функції $y=25\cdot 3^{\cos 4x\cos 3x+\sin 4x\sin 3x-2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{25}{3}$	0	75	8	–1

Завдання 22.30–22.40 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

22.30. Установити відповідність між функціями (1–4) та областями їх визначення (А–Д).

1 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x+2}{x-1}$

2 $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+2}}$

3 $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-1}}$

4 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x-1}{x+2}}$

А $(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$

Б $(-2;1)$

В $(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$

Г $(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$

Д $(-\infty;-2)\cup[1;+\infty)$

22.31. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми областями визначення (А–Д).

1 $y=\sqrt{\dfrac{5+x}{x-1}}$

2 $y=\lg\dfrac{5-x}{x-1}$

3 $y=\sqrt{\dfrac{5-x}{x-1}}$

4 $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{5-x}}$

А (1; 5)

Б [1; 5]

В [1; 5)

Г $(-\infty;-5]\cup(1;+\infty)$

Д (1; 5]

22.32. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми множинами значень (А–Д).

1 $y=\sqrt{x^2+9}+1$

2 $y=2^x-4$

3 $y=-x^2+4x-8$

4 $y=-3^x+4$

А $(-\infty;-4)$

Б $(-\infty;-4]$

В $(-\infty;4)$

Г $[4;+\infty)$

Д $(-4;+\infty)$

22.33. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми множинами значень (А–Д).

1 $y = 2\arcsin x$

2 $y = 2\arccos x$

3 $y = 2\operatorname{arctg} x$

4 $y = 2\operatorname{arcctg} x$

А $(-\pi; \pi)$

Б $[-\pi; \pi]$

В $(0; \pi)$

Г $(0; 2\pi)$

Д $[0; 2\pi]$

22.34. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх найменшими додатними періодами (А–Д).

1 $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

2 $y = \operatorname{ctg} 2x$

3 $y = \cos\frac{x}{2}$

4 $y = \sin 2x$

А $\frac{\pi}{4}$

Б $\frac{\pi}{2}$

В π

Г 2π

Д 4π

22.35. Установити відповідність між функціями (1–4) та оберненими до них функціями (А–Д).

1 $y = 3x$

2 $y = \frac{3}{x}$

3 $y = -3x$

4 $y = -\frac{x}{3}$

А $y = \frac{3}{x}$

Б $y = -\frac{3}{x}$

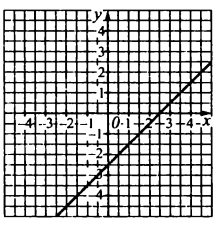
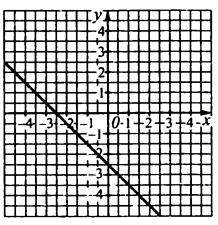
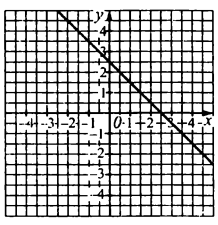
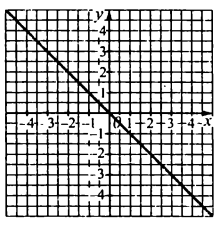
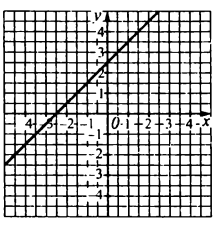
В $y = -3x$

Г $y = \frac{x}{3}$

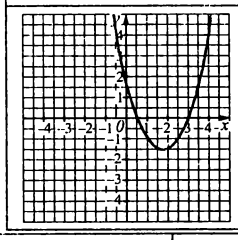
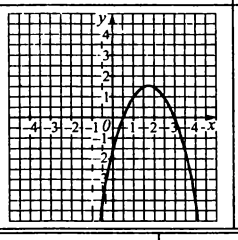
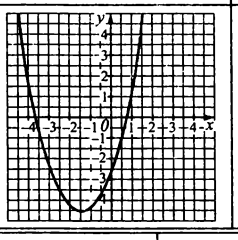
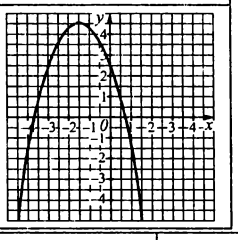
Д $y = -\frac{x}{3}$

22.36. Дано лінійну функцію $y = ax + b$. Установити відповідність між знаками коефіцієнтів a й b (1–4) та ескізами графіків (А–Д).

1	2	3	4
$a > 0, b > 0$	$a > 0, b < 0$	$a < 0, b > 0$	$a < 0, b < 0$

А	Б	В	Г	Д
				

22.37. Дано квадратичну функцію $y = ax^2 + bx + c$. Установити відповідність між ескізами графіків функцій (1–4) та знаками коефіцієнтів a, b і c (А–Д).

1	2	3	4
			

А	Б	В	Г	Д
$a > 0, b > 0, c > 0$	$a > 0, b > 0, c < 0$	$a > 0, b < 0, c > 0$	$a < 0, b < 0, c > 0$	$a < 0, b > 0, c < 0$

22.38. Установити відповідність між функціями (1–4) та проміжками їх зростання (А–Д).

1 $y = x^2 - 3$
2 $y = (x - 3)^2$
3 $y = -x^2 + 3$
4 $y = -(x + 3)^2$

А $(-\infty; 0]$
Б $[0; +\infty)$
В $(-\infty; -3]$
Г $[-3; +\infty)$
Д $[3; +\infty)$

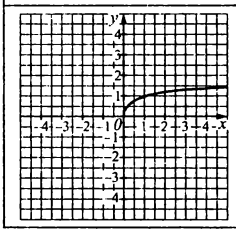
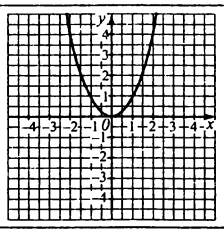
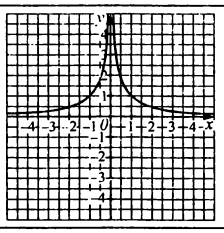
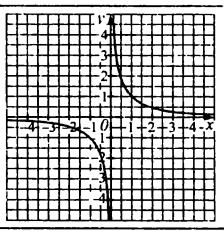
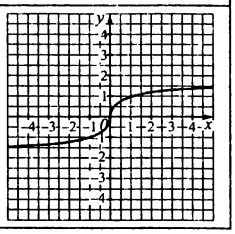
22.39. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх парністю (А–Д).

1 $y = 0$
2 $y = x^3 + \operatorname{tg} x$
3 $y = x^4 - \sin x$
4 $y = x^5 \sin x$

А на парність не досліджується
Б парна
В непарна
Г ні парна, ні непарна
Д парна і непарна

22.40. Установити відповідність між функціями (1–4) та ескізами їх графіків (А–Д).

1	2	3	4
$y = \sqrt[5]{x}$	$y = \frac{1}{x^5}$	$y = \frac{1}{x^4}$	$y = \sqrt[4]{x}$

А	Б	В	Г	Д
				

Розв'яжіть завдання 22.41–22.53. Відповідь запишіть десятковим дробом.

22.41. Знайти область визначення функції $y = \dfrac{\sqrt{5 - x^2 - 4x}}{3 - x}$. У відповідь записати кількість цілих значень аргументу в області визначення.

22.42. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{\log_{0,3} \dfrac{x-1}{x+5}}$. У відповідь записати найменше ціле значення аргументу.

22.43. Знайти область визначення функції $y=\log_{x+4}\left(9-8x-x^2\right)$. У відповідь записати кількість цілих значень аргументу з області визначення.

22.44. Знайти область визначення функції $y=\sqrt{\dfrac{(x+4)(3-x)}{\lg\left(x^2+1\right)}}$. У відповідь записати кількість цілих значень аргументу з області визначення.

22.45. Знайти область визначення функції $y=\arcsin\dfrac{x-5}{6}-\lg\left(x^2-10x+24\right)$. У відповідь записати кількість цілих значень аргументу з області визначення.

22.46. Знайти область визначення функції $y=\arccos\dfrac{x-4}{x}$. У відповідь записати найменше значення аргументу.

22.47. Знайти область значень функції $y=3\sin^2x+2\cos^2x$. У відповідь записати кількість цілих значень функції.

22.48. Скільки різних цілих значень набуває функція $f(x)=\sqrt{8\left(\sin^2 2x+\cos^2 2x-2\sin 2x\cos 2x\right)}$?

22.49. Знайти найменший додатний період T_0 функції $y=\sin x+\cos\dfrac{x}{3}+\sin\dfrac{x}{5}$. У відповідь записати значення $T_0:\pi$.

22.50. Знайти нулі функції $y=\ln^2(x^2-3x-9)+\sqrt{x^3-8x-8}$.

22.51. Знайти область визначення функції $f(x)=\sqrt{\log_{x-2}\left(x^2-8x+15\right)}$. У відповідь записати кількість натуральних чисел, які не належать області визначення функції.

22.52. За якого найбільшого значення параметра a функція $f(x)=\ln\left(\sqrt{a^2+x^2}-x\right)$ буде непарною?

22.53. За яких значень параметра a число π є періодом функції $f(x)=\dfrac{\cos x}{a+\sin x}$?

Тема 23. Побудова графіків функцій методом геометричних перетворень

Якщо відомий графік функції $y = f(x)$, то шляхом його перетворення можна отримати графіки низки інших функцій.

Графік функції $y = f(x) \pm a$, де $a > 0$

Нехай x_1 належить області визначення функції $y = f(x)$, тоді $f(x_1)$ і $f(x_1) + a$ є значеннями відповідно функцій $y = f(x)$ і $y = f(x) + a$ у цій точці. Тоді точка $A_1(x_1; f(x_1))$ належить графіку функції $y = f(x)$, а точка $A_1'(x_1; f(x_1) + a)$ — графіку функції $y = f(x) + a$. Але точку $A_1'(x_1; f(x_1) + a)$ можна одержати перенесенням точки A_1 угору на відстань a одиниць, якщо $a > 0$, або вниз на відстань $|a|$, якщо $a < 0$. Оскільки вибрана точка x_1 — довільна точка з області визначення функцій, то аналогічно можна одержати будь-яку точку графіка функції $y = f(x) + a$ з графіка функції $y = f(x)$.

Узагалі, *графік функції $y = f(x) + a$, де $a > 0$, можна одержати із графіка функції $y = f(x)$ за допомогою паралельного перенесення вздовж осі y на a одиниць угору, якщо $a > 0$, і на a одиниць униз, якщо $a < 0$.*

Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік функції $y = f(x) + 4$. Оскільки $4 > 0$, то для побудови графіка функції $y = f(x) + 4$ достатньо перенести графік функції $y = f(x)$ на 4 одиниці вгору (див. рис. 1).

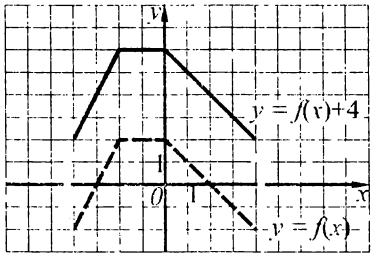
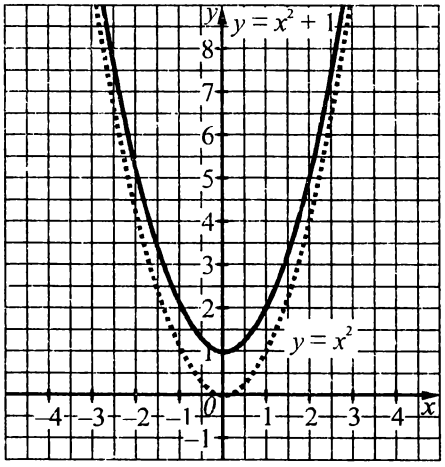


Рис. 1

Наприклад, побудувати графік функції $y = x^2 + 1$. Будуємо графік функції $y = x^2$ і паралельно переносимо графік вгору на 1 одиницю вздовж осі y (оскільки $1 > 0$). Одержуємо графік функції $y = x^2 + 1$ (див. рис.).



Графік функції $y = f(x \pm b)$, де $b > 0$

Нехай x_1 належить області визначення функції $y = f(x)$ і $y_1 = f(x_1)$. Знайдемо значення y_2 функції $y = f(x + b)$ у точці $x_1 - b$. Одержимо: $y_2 = f((x_1 - b) + b) = f(x_1) = y_1$. Отже, значення функції $y = f(x + b)$ відносно значення функції $y = f(x)$ зміщується на відстань $|b|$ праворуч, якщо $b > 0$, або ліворуч, якщо $b < 0$.

Узагалі, *графік функції* $y = f(x + b)$, *можна одержати із графіка функції* $y = f(x)$ *за допомогою паралельного перенесення вздовж осі* x *на* b *одиниць праворуч, якщо* $b < 0$, *і на* b *одиниць ліворуч, якщо* $b > 0$.

Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік функції $y = f(x + 3)$. Оскільки $3 > 0$, то для побудови графіка функції $y = f(x + 3)$ достатньо перенести графік функції $y = f(x)$ на 3 одиниці ліворуч (див. рис. 2).

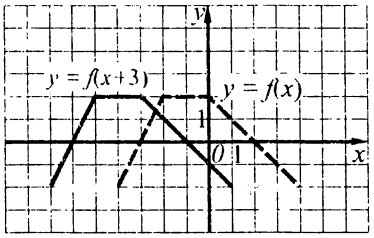
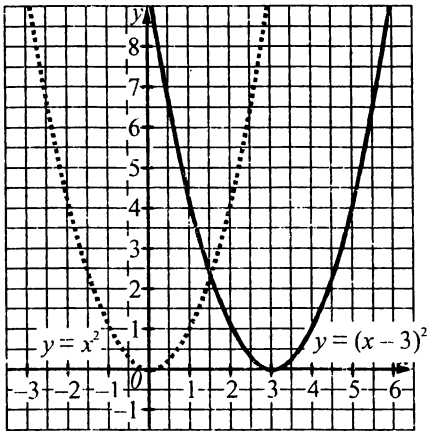


Рис. 2

Наприклад, побудувати графік функції $y = (x - 3)^2$. Будуємо графік функції $y = x^2$ і паралельно переносимо графік праворуч на 3 одиниці вздовж осі x (оскільки $-3 < 0$). Одержуємо графік функції $y = (x - 3)^2$ (див. рис.).



Графік функції $y = f(x + a) + b$

Щоб побудувати графік функції $y = f(x + a) + b$, необхідно послідовно виконати два паралельних перенесення графіка функції $y = f(x)$ (див. розглянуті вище випадки) або виконати одне паралельне перенесення графіка функції $y = f(x)$ на вектор $\overrightarrow{(-a; b)}$.

Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік функції $y = f(x + 3) - 5$. Оскільки $3 > 0$, $-5 < 0$, то для побудови графіка функції $y = f(x + 3) - 5$ достатньо перенести графік функції $y = f(x)$ на 3 одиниці ліворуч і 5 одиниць вниз (див. рис. 3).

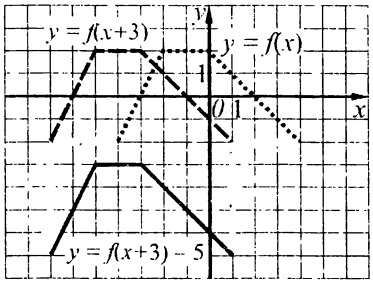
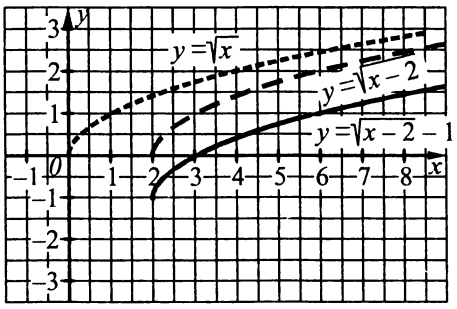


Рис. 3

Наприклад, побудувати графік функції $y = \sqrt{x - 2} - 1$. Будуємо графік функції $y = \sqrt{x}$ і паралельно переносимо графік праворуч на 2 одиниці вздовж осі x (оскільки $-2 < 0$), одержуючи графік функції

$y = \sqrt{x-2}$; паралельно переносимо отриманий графік униз на 1 одиницю вздовж осі y й одержуємо графік функції $y = \sqrt{x-2} - 1$ (див. рис.).



Графік функції $y = -f(x)$

Щоб побудувати графік функції $y = -f(x)$, необхідно симетрично відобразити графік функції $y = f(x)$ відносно осі абсцис.

Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік функції $y = -f(x)$. Симетрично відображаємо графік відносно осі x (див. рис. 4).

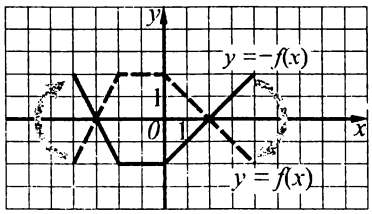
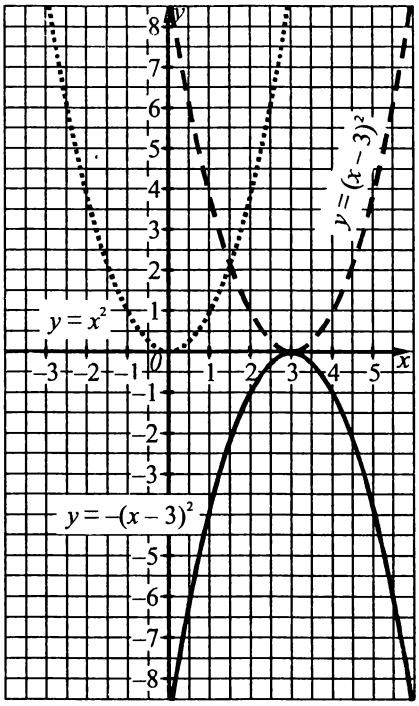


Рис. 4

Наприклад, побудувати графік функції $y = -(x-3)^2$. Будуємо графік функції $y = x^2$; паралельно переносимо графік праворуч на 3 одиниці вздовж осі x (оскільки $-3 < 0$) й одержуємо графік функції $y = (x-3)^2$; відображаємо одержаний графік симетрично відносно осі x й одержуємо графік функції $y = -(x-3)^2$ (див. рис.).



Графік функції $y = f(-x)$

Щоб побудувати графік функції $y = f(-x)$, необхідно симетрично відобразити графік функції $y = f(x)$ відносно осі ординат.

Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік функції $y = f(-x)$. Симетрично відображаємо графік відносно осі y (див. рис. 5).

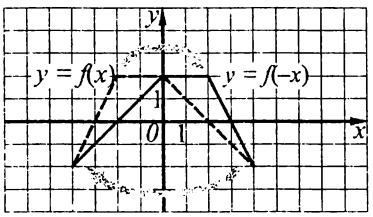
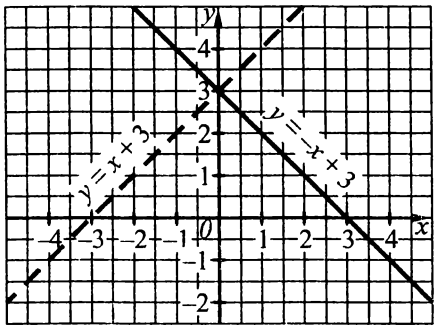


Рис. 5

Наприклад, побудувати графік функції $y = -x + 3$. Будуємо графік функції $y = x + 3$ і відображаємо одержаний графік симетрично відносно осі y й одержуємо графік функції $y = -x + 3$ (див. рис.).

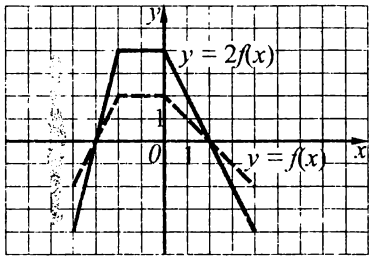


Графік функції $y = cf(x)$

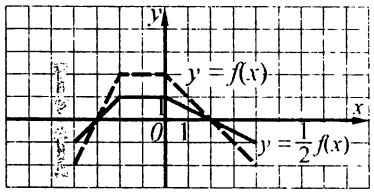
Щоб побудувати графік функції $y = cf(x)$, необхідно виконати розтяг графіка функції $y = f(x)$ від осі абсцис у c разів, якщо $c > 1$, або стиск до осі абсцис у $\frac{1}{c}$ разів, якщо $0 < c < 1$.

Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Побудувати графіки функцій: а) $y = 2f(x)$; б) $y = \frac{1}{2}f(x)$.

а) Оскільки $2 > 1$, то виконуємо розтяг удвічі від осі x, (див. рис. 6 а); б) оскільки $0 < \frac{1}{2} < 1$, то для побудови графіка функції $y = \frac{1}{2}f(x)$ виконаємо стиск графіка функції $y = f(x)$ до осі x (див. рис. 6 б).



а)

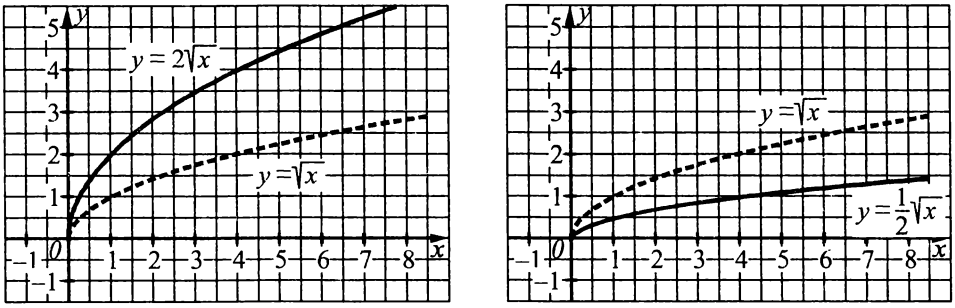


б)

Рис. 6

Наприклад, побудувати графіки функцій: а) $y = 2\sqrt{x}$; б) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$. Будуємо графік функції $y = \sqrt{x}$. а) Виконуємо розтяг графіка функції $y = \sqrt{x}$ удвічі від осі x й одержуємо графік функції

$y = 2\sqrt{x}$; б) виконуємо стиск графіка функції $y = \sqrt{x}$ удвічі до осі x й одержуємо графік функції $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ (див. рис.).



Графік функції $y = |f(x)|$

За означенням модуля числа маємо:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } f(x) \geq 0; \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) < 0. \end{cases}$$

Отже, якщо $f(x) \geq 0$, то значення функцій $y = |f(x)|$ та $y = f(x)$ однакові, якщо $f(x) < 0$, то значення цих функцій є протилежними числами. Тому графік функції $y = |f(x)|$ можна одержати так: будуємо графік функції $y = f(x)$ і ту його частину, яка розташована нижче від осі x, симетрично відображаємо відносно цієї осі.

Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік функції $y = |f(x)|$. Ту частину графіка функції $y = f(x)$, яка розміщена над віссю x, у тому числі точки перетину графіка з віссю абсцис, залишаємо без змін, а ту частину, яка розміщена під віссю абсцис, симетрично відображаємо відносно цієї осі (див. рис. 7).

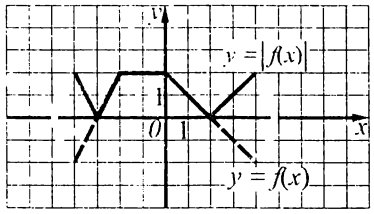
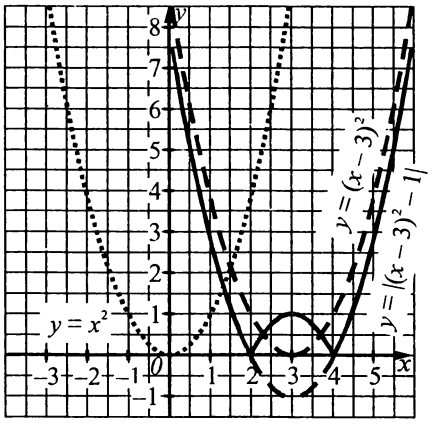


Рис. 7

Наприклад, побудувати графік функції $y = |(x - 3)^2 - 1|$. Будуємо графік функції $y = x^2$; паралельно переносимо графік праворуч на 3 одиниці вздовж осі x (оскільки $-3 < 0$) й одержуємо графік функції $y = (x - 3)^2$; паралельно переносимо отриманий графік униз на 1 одиницю вздовж осі y й одержуємо графік функції $y = (x - 3)^2 - 1$; відображаємо симетрично відносно осі x ту частину графіка, яка міститься під віссю, й одержуємо графік функції $y = |(x - 3)^2 - 1|$ (див. рис.).



Графік функції $y = f(|x|)$

Функція $y = f(|x|)$ — парна ($f(|-x|) = f(|x|)$). Тому достатньо побудувати графік функції $y = f(|x|)$ для $x \geq 0$ і симетрично відобразити його відносно осі ординат.

Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік функції $y = f(|x|)$. Ту частину графіка функції $y = f(x)$, яка розміщена праворуч осі y, у тому числі точки перетину графіка з віссю ординат, залишаємо без змін, а ту частину, яка розміщена ліворуч від абсцис, замінюємо симетричною до розташованої праворуч частини відносно осі ординат (див. рис. 8).

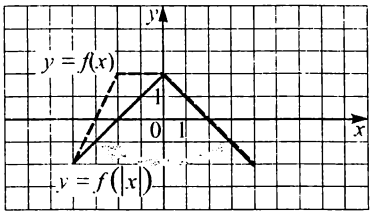
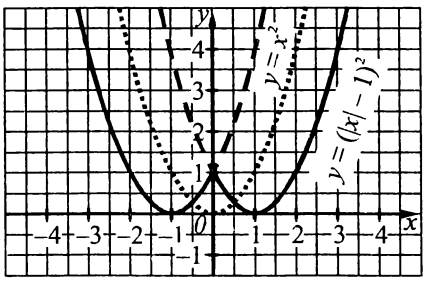


Рис. 8

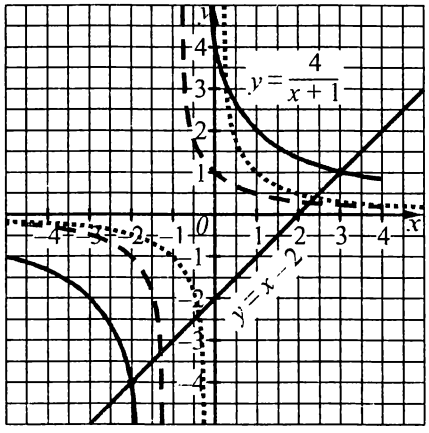
Наприклад, побудувати графік функції $y = (|x| - 1)^2$. Будуємо графік функції $y = x^2$; паралельно переносимо графік ліворуч на 1 одиницю вздовж осі x й одержуємо графік функції $y = (x - 1)^2$; залишаємо ту частину графіка, яка відповідає невід'ємним значенням x; симетрично відображаємо відносно осі y частину отриманого графіка для невід'ємних x й одержуємо графік функції $y = (|x| - 1)^2$.



Графічний метод розв'язування рівнянь

Часто, використовуючи побудову графіків функцій методом геометричних перетворень, зручно розв'язувати деякі види рівнянь. Для цього рівняння $f(x) = 0$ зводять до рівняння виду $g(x) = h(x)$, будують графіки рівнянь $y = g(x)$ і $y = h(x)$ та знаходять точки перетину цих рівнянь. Абсциси точок перетину є наближеними значеннями коренів рівняння, за якими, якщо це можливо, встановлюють корені.

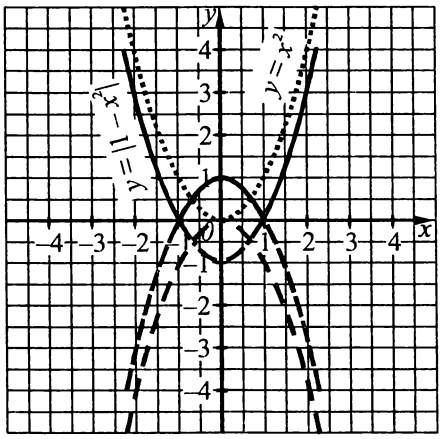
Наприклад, розв'язати рівняння $\frac{4}{x+1} = x - 2$. Будуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{4}{x+1}$ і $y = x - 2$ та знаходимо абсциси точок їх перетину.



З рисунка видно, що $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Перевіркою встановлюємо, що $x_1 = 3$ і $x_2 = -2$ — корені рівняння.

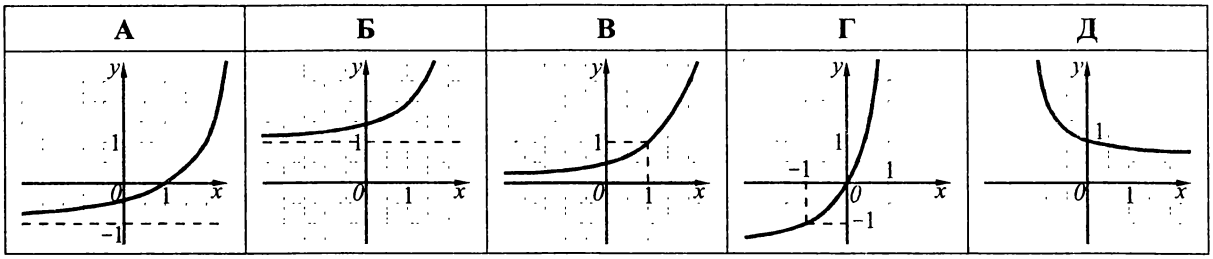
У деяких випадках за допомогою методу геометричних перетворень зручно розв'язувати рівняння з параметрами.

Наприклад, знайти всі значення параметра a, для яких рівняння $|1 - x^2| = a$ має три корені. Будуємо графік функції $y = x^2$; симетрично відображаємо одержаний графік відносно осі x й одержуємо графік функції $y = -x^2$; паралельно переносимо отриманий графік угору на 1 одиницю вздовж осі y й одержуємо графік функції $y = 1 - x^2$; симетрично відображаємо відносно осі x ту частину отриманого графіка, яка міститься під віссю x, й одержуємо графік функції $y = |1 - x^2|$.



Рівняння $|1 - x^2| = a$ матиме три корені, якщо $a = 1$ (графіки функцій $y = |1 - x^2|$ і $y = 1$ перетинаються у трьох точках).

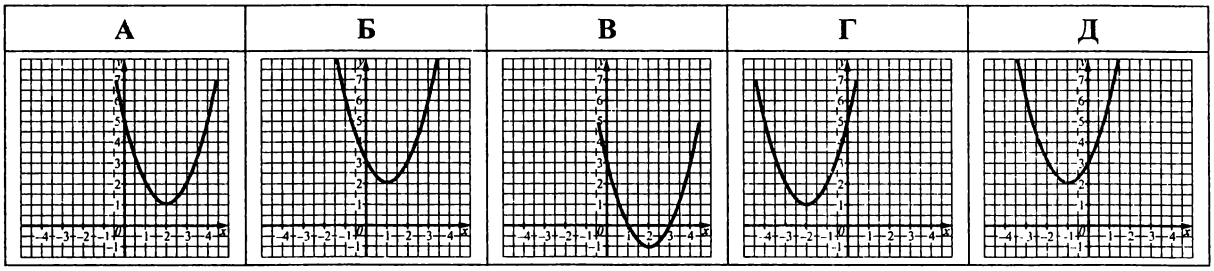
Приклад 1. Серед наведених графіків указати графік функції $y = 2^{x-1} - 1$.



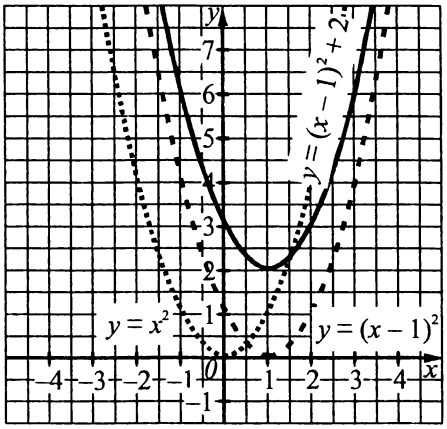
■ Це графік функції $y = 2^x$, зміщений на 1 одиницю праворуч відносно осі y та опущений на 1 одиницю вниз відносно осі x.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 2. Серед наведених графіків указати графік функції $y = (x - 1)^2 + 2$.

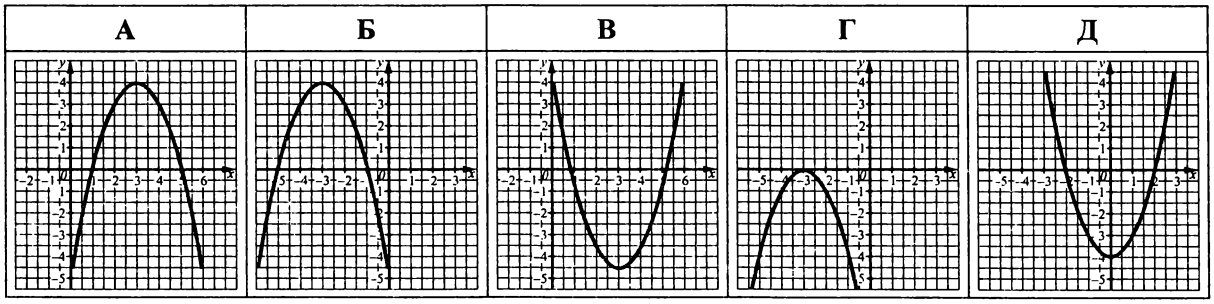


■ Будуємо графік функції $y = x^2$; переносимо графік праворуч на 1 одиницю вздовж осі x й одержуємо графік функції $y = (x - 1)^2$; паралельно переносимо одержаний графік угору на 2 одиниці вздовж осі y й одержуємо графік функції $y = (x - 1)^2 + 2$.

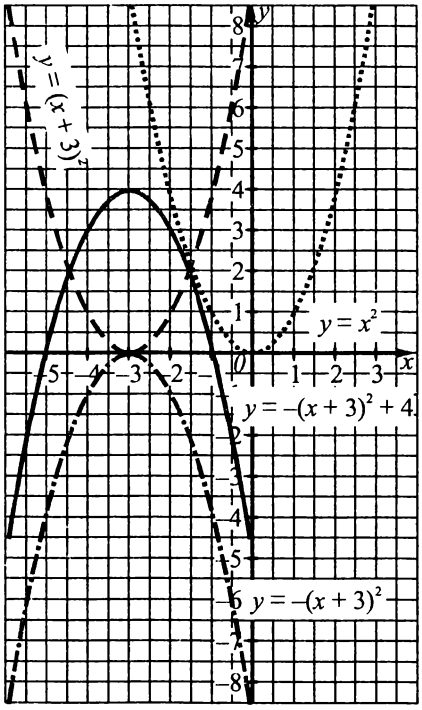


Відповідь. **Б.** ■

Приклад 3. Серед наведених графіків указати графік функції $y = -(x + 3)^2 + 4$.

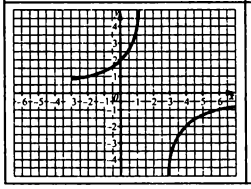
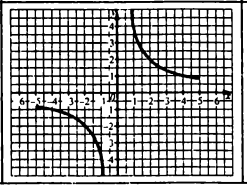
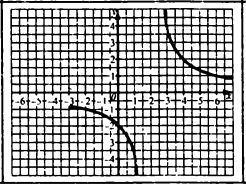
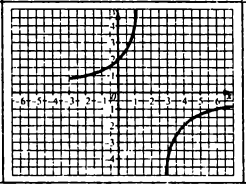
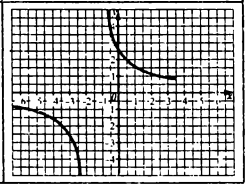


■ Будуємо графік функції $y = x^2$; паралельно переносимо графік ліворуч на 3 одиниці й одержуємо графік функції $y = (x + 3)^2$; відображаємо отриманий графік симетрично відносно осі x й одержуємо графік функції $y = -(x + 3)^2$; паралельно переносимо отриманий графік угору на 4 одиниці й одержуємо графік функції $y = -(x + 3)^2 + 4$.

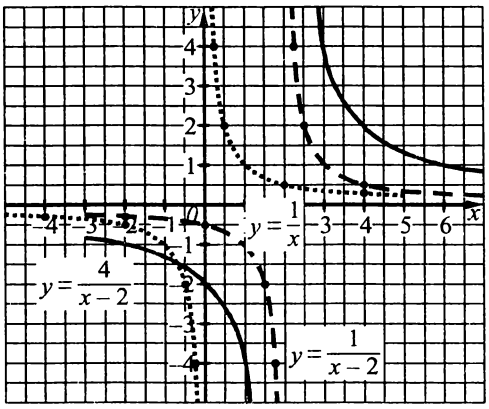


Відповідь. **Б.** ■

Приклад 4. Серед наведених графіків указати графік функції $y=\dfrac{4}{x-2}$.

А	Б	В	Г	Д
				

■ Будуємо графік функції $y=\dfrac{1}{x}$; паралельно переносимо графік праворуч на 2 одиниці вздовж осі x й одержуємо графік функції $y=\dfrac{1}{x-2}$; розтягуємо отриманий графік у 4 рази від осі x й одержуємо графік функції $y=\dfrac{4}{x-2}$.

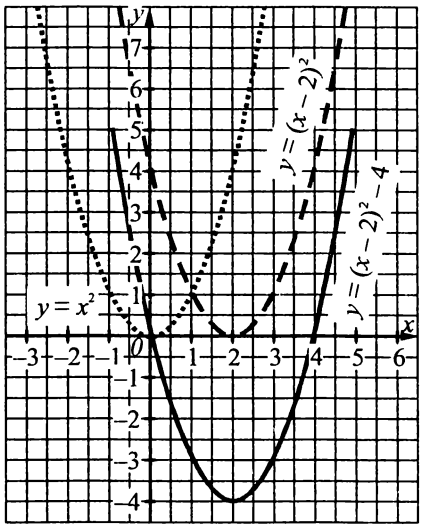


Відповідь. **В.** ■

Приклад 5. Користуючись методом геометричних перетворень, побудувати графік функції $y=(x-2)^2-4$ та знайти проміжки її зростання.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;2]$	$[0;4]$	$[2;+\infty)$	$[4;+\infty)$

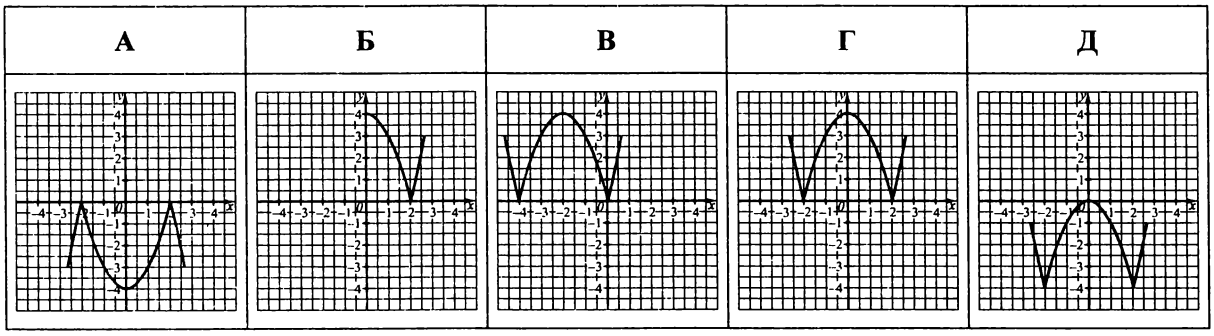
■ Будуємо графік функції $y=x^2$; паралельно переносимо графік праворуч на 2 одиниці й одержуємо графік функції $y=(x-2)^2$; паралельно переносимо отриманий графік униз на 4 одиниці й одержуємо графік функції $y=(x-2)^2-4$.



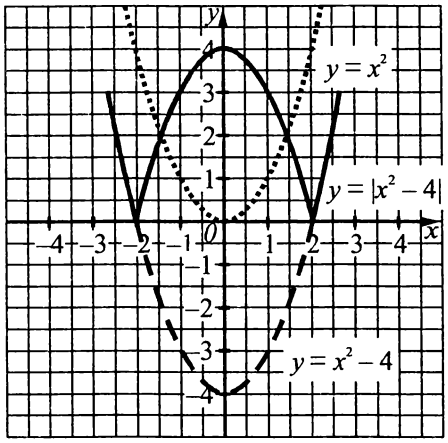
Функція зростає на проміжку $[2; +\infty)$.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 6. Серед наведених графіків указати графік функції $y = |x^2 - 4|$.

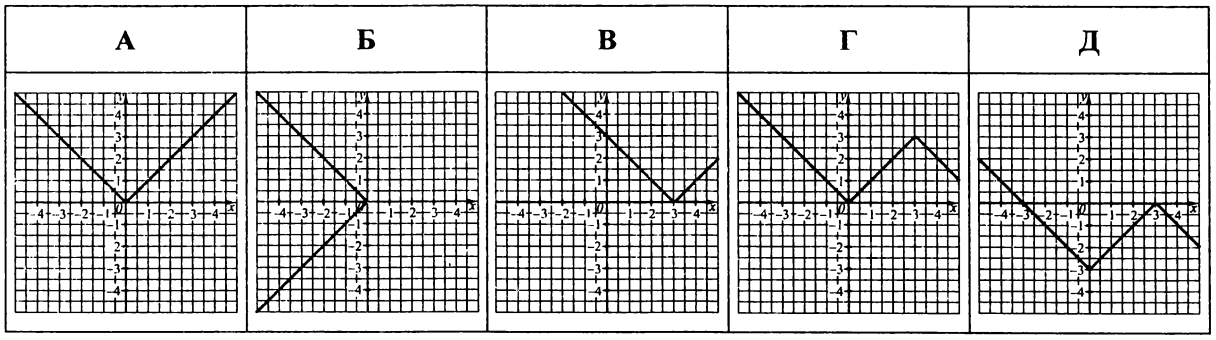


■ Будую графік функції $y = x^2$; паралельно переношу графік униз на 4 одиниці вздовж осі y й одержую графік функції $y = x^2 - 4$; симетрично відображаю відносно осі x ту частину отриманого графіка, яка міститься під віссю x, й одержую графік функції $y = |x^2 - 4|$.

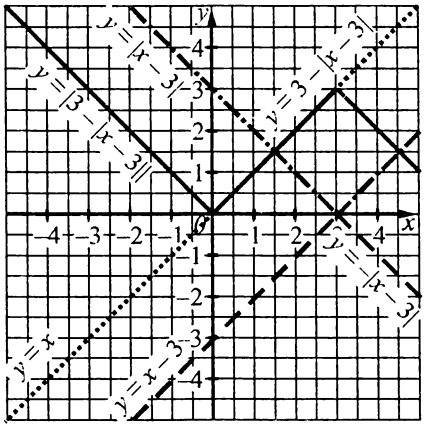


Відповідь. **Г.** ■

Приклад 7. Серед наведених графіків указати графік функції $y = |3 - |x - 3||$.



■ Будуємо графік функції $y = x$; паралельно переносимо графік праворуч на 3 одиниці й одержуємо графік функції $y = x - 3$; симетрично відображаємо відносно осі x ту частину отриманого графіка, яка міститься під віссю x, й одержуємо графік функції $y = |x - 3|$; симетрично відображаємо відносно осі x отриманий графік й одержуємо графік функції $y = -|x - 3|$; паралельно переносимо графік угору на 3 одиниці й одержуємо графік функції $y = 3 - |x - 3|$; симетрично відображаємо відносно осі x ту частину отриманого графіка, яка міститься під віссю x, й одержуємо графік функції $y = |3 - |x - 3||$.

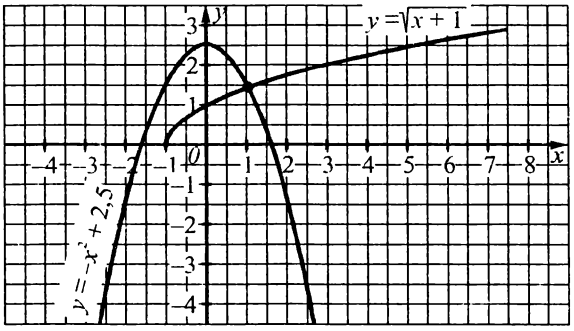


Відповідь. **Г.** ■

Приклад 8. Користуючись графічним методом, встановити кількість коренів рівняння $\sqrt{x+1} = -x^2 + 2{,}5$.

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	чотири	рівняння коренів не має

■ Будуємо графіки функцій $y = \sqrt{x+1}$ та $y = -x^2 + 2{,}5$.

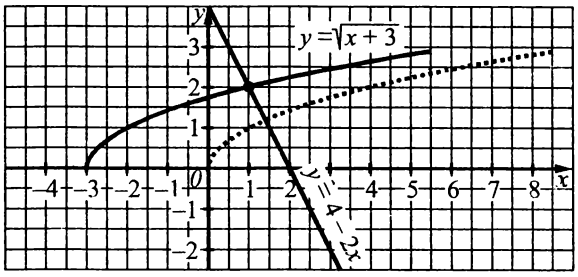


Дане рівняння має один корінь, бо графіки перетинаються лише в одній точці.
Відповідь. **А.** ■

Приклад 9. Користуючись графічним методом, розв'язати рівняння $\sqrt{x+3} = 4 - 2x$.

А	Б	В	Г	Д
5	2	1	3,5	–1

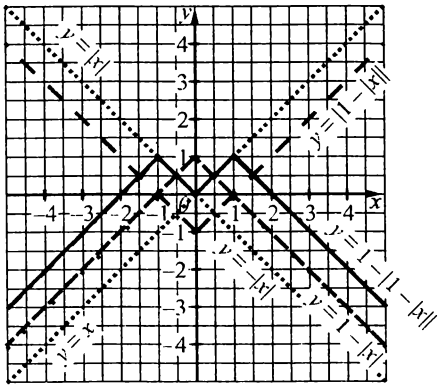
■ $\sqrt{x+3} = 4 - 2x$. Будуємо графіки функцій $y = \sqrt{x+3}$ і $y = 4 - 2x$ та знаходимо абсцису точки їх перетину.



$x = 1$. Перевіркою встановлюємо, що $x = 1$ — корінь рівняння
Відповідь. **В.** ■

Приклад 10. Скільки коренів має рівняння $1 - |1 - |x|| = a$? У відповідь записати кількість коренів, якщо $0 < a < 1$.

■ Будуємо графік функції $y = |x|$; симетрично відображаємо його відносно осі x графік й одержуємо графік функції $y = -|x|$; паралельно переносимо отриманий графік угору на 1 одиницю вздовж осі y й одержуємо графік функції $y = 1 - |x|$; симетрично відображаємо відносно осі x ту частину отриманого графіка, яка міститься під віссю x, й одержуємо графік функції $y = |1 - |x||$; симетрично відображаємо відносно осі x графік й одержуємо графік функції $y = -|1 - |x||$; паралельно переносимо графік угору на 1 одиницю й одержуємо графік функції $y = 1 - |1 - |x||$. Будуємо графік рівняння $y = a$.



Якщо $a < 0$, то рівняння має два корені; якщо $a = 0$, то рівняння має три корені; якщо $0 < a < 1$, то рівняння має чотири корені; якщо $a = 1$, то рівняння має 2 корені; якщо $a > 1$ — коренів немає.

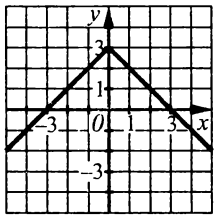
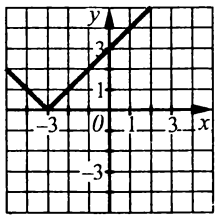
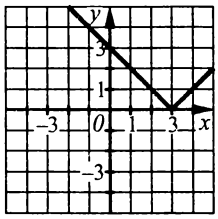
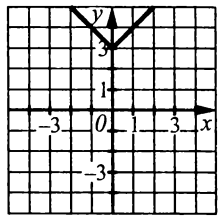
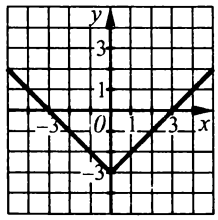
Відповідь. 4. ■

Завдання 23.1–23.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

23.1. Вказати формулу функції, графік якої отримують із графіка $y = \frac{1}{x}$ у результаті його паралельного перенесення в додатному напрямі осі y на 5 одиниць.

А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{1}{x+5}$	$y = \frac{1}{x-5}$	$y = \frac{1}{x} - 5$	$y = \frac{1}{x} + 5$	$y = \frac{5}{x}$

23.2. На якому з рисунків зображено графік функції $y = |x| - 3$?

А	Б	В	Г	Д
				

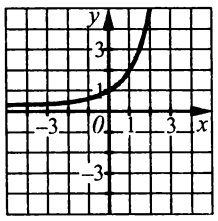
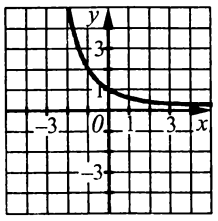
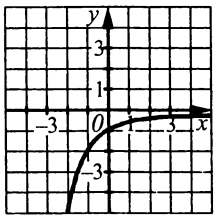
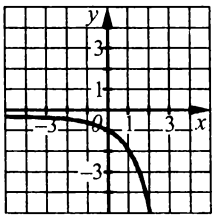
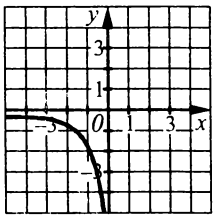
23.3. Вказати формулу функції, графік якої отримують із графіка $y = \cos x$ у результаті його стискування до осі x утричі.

А	Б	В	Г	Д
$y = 3\cos x$	$y = \frac{1}{3}\cos x$	$y = \cos 3x$	$y = \cos\frac{x}{3}$	$y = \frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}$

23.4. Областю значень функції $y=f(x)$ є проміжок $[-4; 16]$. Знайти область значень функції $y=\frac{1}{4}f(x)$.

А	Б	В	Г	Д
$[-16; 64]$	$[4; 4]$	$[-1; 4]$	$[-4; 16]$	не можна визначити

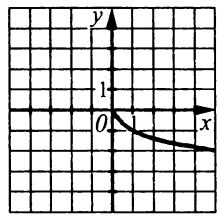
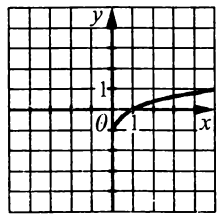
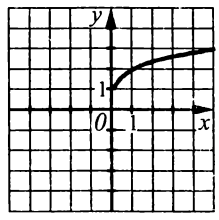
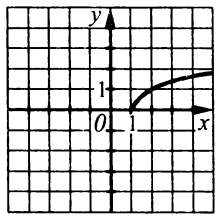
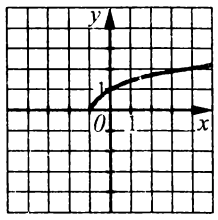
23.5. На якому з рисунків зображено графік функції $y=-2^x$?

А	Б	В	Г	Д
				

23.6. Вказати формулу функції, графік якої отримують із графіка функції $y=x^3$ у результаті його паралельного перенесення в додатному напрямі осі x на 4 одиниці.

А	Б	В	Г	Д
$y=(x-4)^3$	$y=(x+4)^3$	$y=x^3-4$	$y=x^3+4$	$y=4x^3$

23.7. На якому з рисунків зображено графік функції $y=\sqrt{x+1}$?

А	Б	В	Г	Д
				

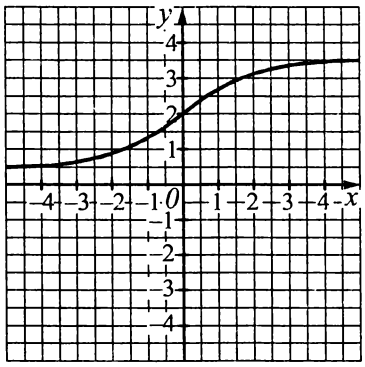
23.8. Вказати формулу функції, графік якої отримують із графіка функції $y=\sin x$ у результаті його розтягування від осі y у 8 разів?

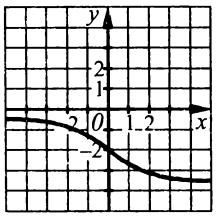
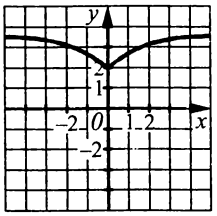
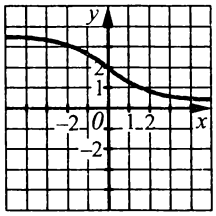
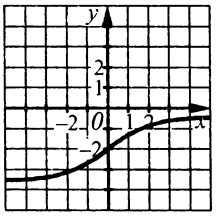
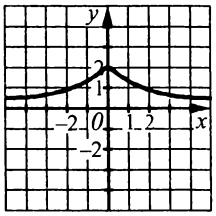
А	Б	В	Г	Д
$y=\frac{1}{8}\sin x$	$y=8\sin x$	$y=\sin\frac{x}{8}$	$y=\sin 8x$	$y=\sin x+8$

23.9. Областю визначення функції $y=f(x)$ є проміжок $[-4; 6]$. Знайти область визначення функції $y=f(2x)$.

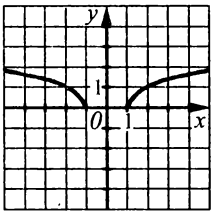
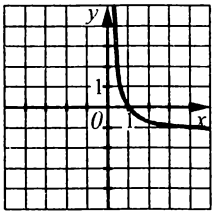
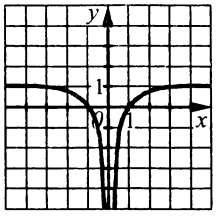
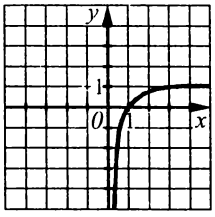
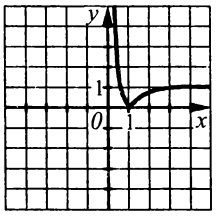
А	Б	В	Г	Д
$[-8; 12]$	$[-2; 3]$	$[-4; 3]$	$[-2; 8]$	не можна визначити

23.10. На рисунку зображено ескіз графіка функції $y = f(x)$. На якому з рисунків зображено ескіз графіка функції $y = f(-x)$?

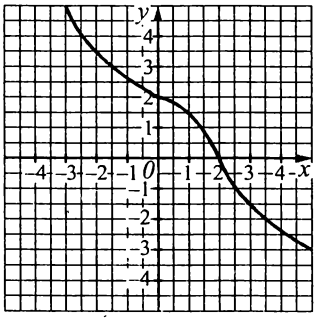


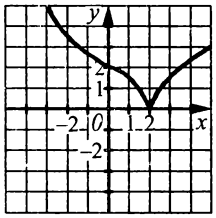
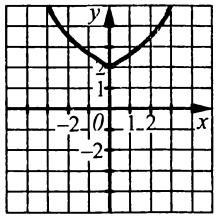
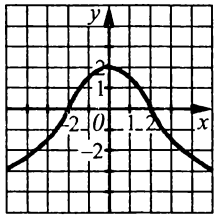
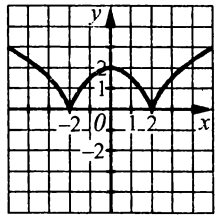
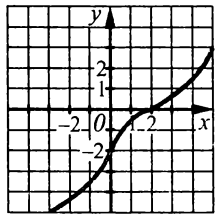
А	Б	В	Г	Д
				

23.11. На якому з рисунків зображено графік функції $y = |\log_2 x|$?

А	Б	В	Г	Д
				

23.12. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$. На якому з рисунків зображено графік функції $y = f(|x|)$?



А	Б	В	Г	Д
				

23.13. Графік функції $y = x^3$ зсунули ліворуч на 4 одиниці й відобразили симетрично відносно осі x. Графік якої функції отримали в результаті таких перетворень?

А	Б	В	Г	Д
$y = -(x-4)^3$	$y = -(x+4)^3$	$y = (-x)^3 - 4$	$y = (-x)^3 + 4$	$y = (x+4)^3$

23.14. Областю значень функції $y = f(x)$ є проміжок $[-2; 2]$. Знайти область значень функції $y = 4f(x) - 3$.

А	Б	В	Г	Д
$[-20; -4]$	$[-2; 2]$	$[-3{,}5; -2{,}5]$	$[-11; 5]$	$[0; 5]$

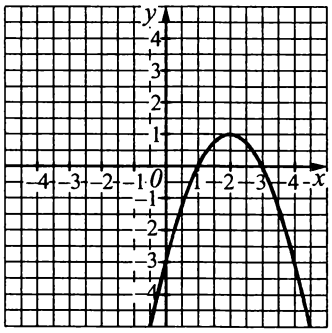
23.15. У результаті яких послідовних перетворень із графіка функції $y = f(x)$ можна отримати графік функції $y = f(2x + 6)$?

А	Б	В	Г	Д
стиском до осі y удвічі й паралельним перенесенням ліворуч на 6 одиниць	розтягом від осі y удвічі й паралельним перенесенням ліворуч на 6 одиниць	стиском до осі y удвічі й паралельним перенесенням ліворуч на 3 одиниці	стиском до осі y удвічі й паралельним перенесенням праворуч на 3 одиниці	розтягом від осі y удвічі й паралельним перенесенням ліворуч на 3 одиниці

23.16. Областю визначення функції $y = f(x)$ є проміжок $[0; 2]$. Знайти область визначення функції $y = f\left(\frac{x}{2} - 4\right)$.

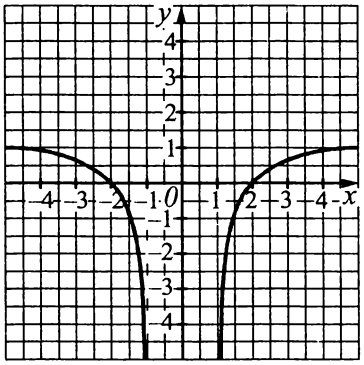
А	Б	В	Г	Д
$[-4; -2]$	$[4; 5]$	$[-8; -4]$	$[4; 8]$	$[8; 12]$

23.17. Ескіз графіка якої з наведених функцій зображено на рисунку?



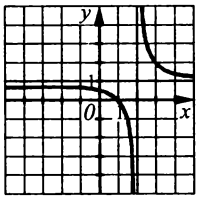
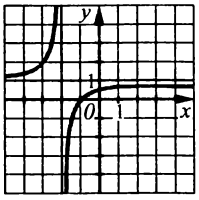
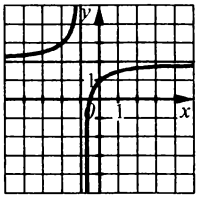
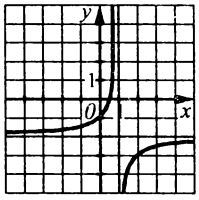
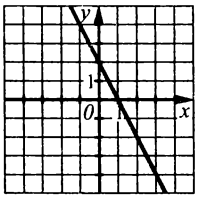
А	Б	В	Г	Д
$y = (x+2)^2 + 1$	$y = -(x-2)^2 + 1$	$y = -(x-2)^2 - 1$	$y = (-x-2)^2 + 1$	$y = -(x-2)^2 - 1$

23.18. Ескіз графіка якої з наведених функцій зображено на рисунку?

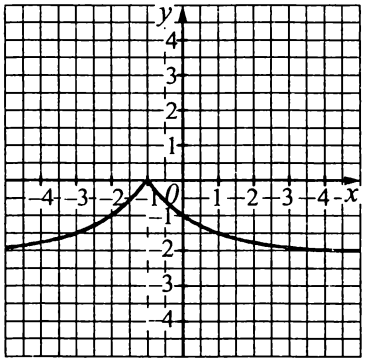


А	Б	В	Г	Д
$y = \lvert\ln(x-1)\rvert$	$y = \lvert\ln(x+1)\rvert$	$y = \ln(\lvert x\rvert + 1)$	$y = \ln(\lvert x\rvert - 1)$	$y = \ln(\lvert x\rvert - 2)$

23.19. На якому з рисунків зображено графік функції $y = \dfrac{x-1}{x-2}$?

А	Б	В	Г	Д
				

23.20. Ескіз графіка якої з наведених функцій зображено на рисунку?

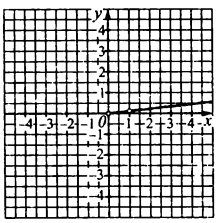
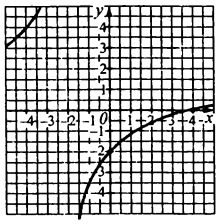
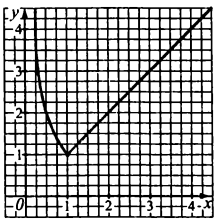
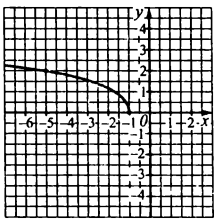
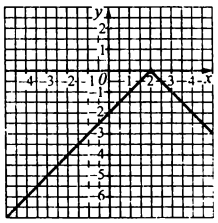


А	Б	В	Г	Д
$y = \sqrt{\lvert x\rvert + 1}$	$y = \sqrt{\lvert x\rvert - 1}$	$y = -\sqrt{\lvert x+1\rvert}$	$y = -\sqrt{\lvert x\rvert + 1}$	$y = -\sqrt{x+1}$

Завдання 23.21–23.32 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

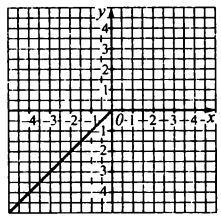
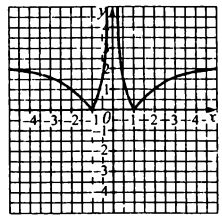
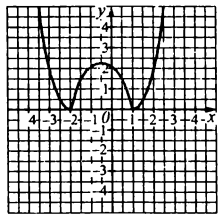
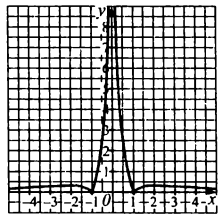
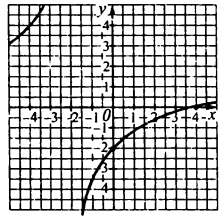
23.21. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх графіками (А–Д).

1	2	3	4
$y = \dfrac{x-4}{x+2}$	$y = 3^{\frac{1}{\log_x 3}-2}$	$y = \sqrt{-1-x}$	$y = -\lvert x-2\rvert$

А	Б	В	Г	Д
				

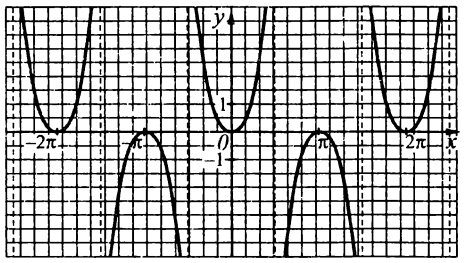
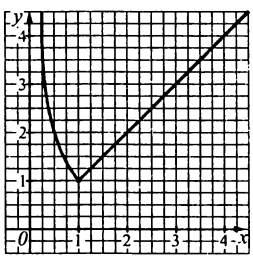
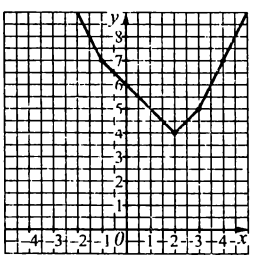
23.22. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх графіками (А–Д).

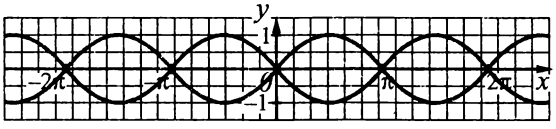
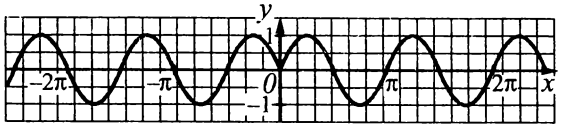
1	2	3	4
$y=\dfrac{x-\lvert x\rvert}{2}$	$y=x^2-2\lvert x\rvert-8$	$y=\lvert -x^2-x+2\rvert$	$y=\lvert\log_2\lvert x\rvert\rvert$

А	Б	В	Г	Д
				

23.23. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх графіками (А–Д).

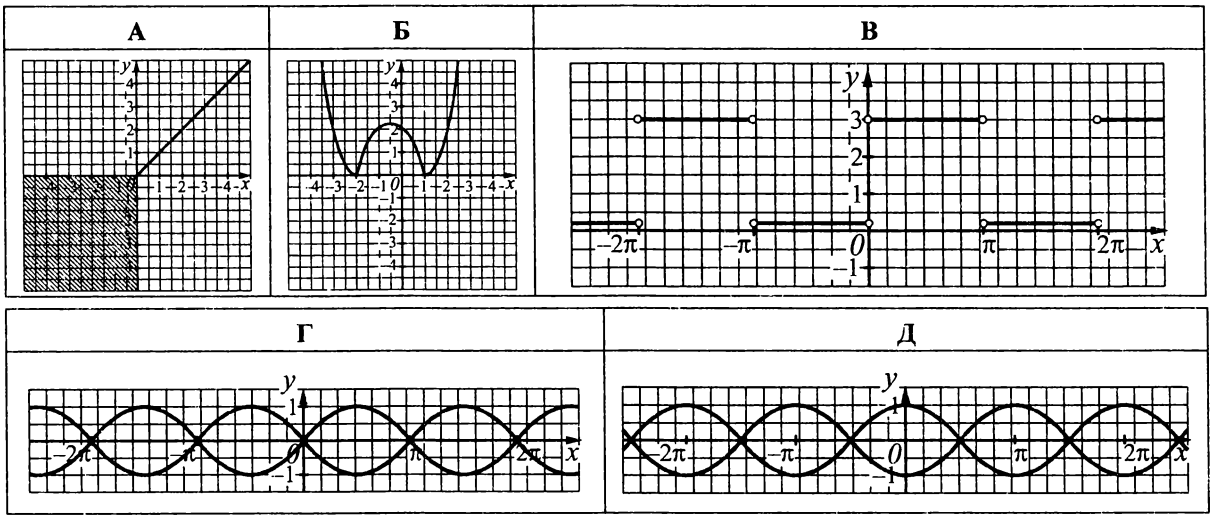
1	2	3	4
$y=\dfrac{\lvert x\rvert}{x}\sin 2x$	$y=\lvert x+1\rvert+\lvert x-2\rvert+\lvert x-3\rvert$	$y=3^{\lvert\log_3 x\rvert}$	$y=\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$

А	Б	В
		

Г	Д
	

23.24. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх графіками (А–Д).

1	2	3	4
$y=3^{\frac{\sin x}{\lvert\sin x\rvert}}$	$x+\lvert x\rvert=y+\lvert y\rvert$	$\lvert y\rvert=\lvert\sin x\rvert$	$\lvert y\rvert=\lvert\cos x\rvert$



23.25. Задано функцію $y = f(x)$ з множиною значень $[-2; 5]$. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми множинами значень (А–Д).

1 $y = f(x) + 2$	**А** $[0; 5]$
2 $y = -f(x)$	**Б** $[-4; 10]$
3 $y = 2f(x)$	**В** $[2; 5]$
4 $y = \lvert f(x)\rvert$	**Г** $[0; 7]$
	Д $[-5; 2]$

23.26. Задано функцію $y = \varphi(x)$ з областю визначення $[-4; 10]$. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми областями визначення (А–Д).

1 $y = \varphi(x + 4)$	**А** $[-4; 10]$
2 $y = \varphi(x - 4)$	**Б** $[0; 14]$
3 $y = \varphi(x) + 5$	**В** $[4; 18]$
4 $y = \varphi(x - 5) - 3$	**Г** $[1; 15]$
	Д $[-8; 6]$

23.27. Задано функцію $y = h(x)$ з областю визначення $[-2; 6]$. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми областями визначення (А–Д).

1 $y = h\left(\frac{x}{2}\right)$	**А** $[0; 6]$
	Б $[-6; 2]$
2 $y = h(2x)$	**В** $[-4; 12]$
3 $y = h(-x)$	**Г** $[-6; 6]$
4 $y = h(\lvert x\rvert)$	**Д** $[-1; 3]$

23.28. Установити відповідність між геометричними перетвореннями графіка функції $y = \sin x$ (1–4) та функціями, одержаних у результаті цих перетворень (А–Д).

1 Графік функції $y = \sin x$ паралельно перенесли вздовж осі x на 3 одиниці ліворуч	**А** $y = \sin 3x$
2 Графік функції $y = \sin x$ паралельно перенесли вздовж осі y на 3 одиниці вниз	**Б** $y = \frac{1}{3}\sin x$
3 Графік функції $y = \sin x$ стиснули до осі x утричі	**В** $y = \sin(x - 3)$
4 Графік функції $y = \sin x$ стиснули до осі y утричі	**Г** $y = \sin(x + 3)$
	Д $y = \sin x - 3$

23.29. Установити відповідність між геометричними перетвореннями графіка функції $y = \cos x$ (1–4) та функціями, одержаних у результаті цих перетворень (А–Д).

1 Графік функції $y = \cos x$ симетрично відобразили відносно осі x

2 Графік функції $y = \cos x$ симетрично відобразили відносно осі y

3 Частину графіка функції $y = \cos x$, яка лежить вище від осі x і на самій осі, залишили без змін, а частину, яка лежить нижче від осі x, відобразили симетрично відносно цієї осі

4 Першу частину графіка функції $y = \cos x$, яка лежить праворуч від осі y і на самій осі, залишили без змін, а другу частину замінили симетричною до першої відносно осі y

А $y = |\cos x|$

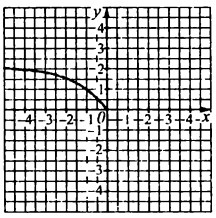
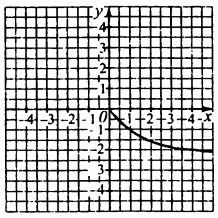
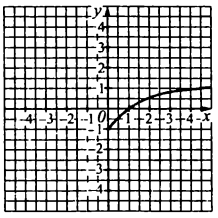
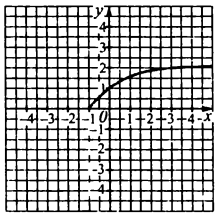
Б $y = |\cos|x||$

В $y = \cos|x|$

Г $y = \cos(-x)$

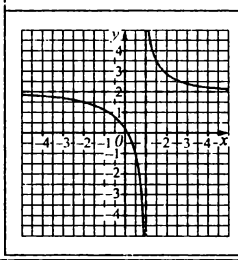
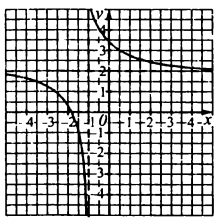
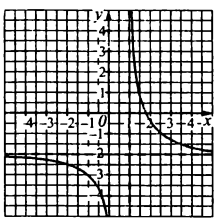
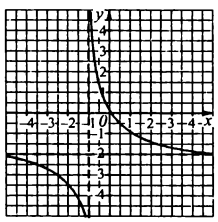
Д $y = -\cos x$

23.30. Установити відповідність між графіками функцій (1–4) та їх формулами (А–Д).

1	2	3	4
			

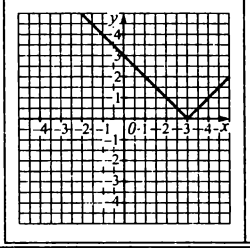
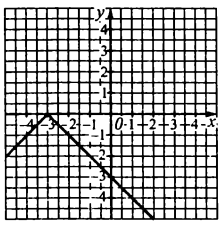
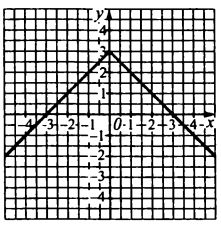
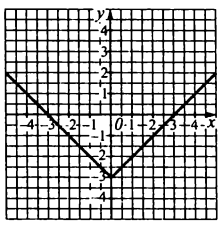
А	Б	В	Г	Д
$y = \sqrt{x} - 1$	$y = \sqrt{x-1}$	$y = \sqrt{x+1}$	$y = \sqrt{-x}$	$y = -\sqrt{x}$

23.31. Установити відповідність між графіками функцій (1–4), утворених із графіка функції $y = \dfrac{1}{x}$, та їх формулами (А–Д).

1	2	3	4
			

А	Б	В	Г	Д
$y = \dfrac{1}{x+1} + 2$	$y = \dfrac{1}{x-1} - 2$	$y = \dfrac{1}{x-1} + 2$	$y = \dfrac{1}{x-2} + 1$	$y = \dfrac{1}{x+1} - 2$

23.32. Установити відповідність між графіками функцій (1–4), утворених із графіка функції $y = |x|$, та відповідними формулами (А–Д).

1	2	3	4
			

А	Б	В	Г	Д
$y = \|x + 3\|$	$y = -\|x\| + 3$	$y = \|x - 3\|$	$y = -\|x + 3\|$	$y = \|x\| - 3$

Тема 24. Похідна функції, її геометричний і механічний зміст

Границя функції

Розглянемо функцію $f(x) = x - 1$ і точку $x_0 = 1$. Якщо значення аргументу x прямують до числа 1 (позначають $x \to 1$), то відповідні їм значення функції $f(x)$ прямують до числа 0 (позначають $f(x) \to 0$). По-іншому: якщо значення аргументу усе ближче знаходяться до числа 1, то відповідні їх значення функції $f(x)$ усе менше відрізняються від числа 0. У цьому випадку кажуть, що число 0 є границею функції $f(x)$ у точці 1, і відповідно записують $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$ або $\lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$. Для границь функції справедливими є всі твердження для границь послідовностей.

Наприклад: $\lim\limits_{x\to 3} 8 = 8$; $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2\right) = 3\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 3\cdot 2^2 = 12$; $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2 - 3x + 2\right) = \lim\limits_{x\to 3} x^2 - 3\lim\limits_{x\to 3} x + \lim\limits_{x\to 3} 2 =$

$= 3^2 - 3\cdot 3 + 2 = 2$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-1)} = \dfrac{2+2}{2-1} = 4.$

Неперервність функції

Функцію $y = f(x)$ називають *неперервною* у точці x_0, якщо вона визначена в деякому околі цієї точки і при $x \to x_0$ границя функції дорівнює значенню функції у цій точці, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в кожній точці деякої множини $M \subset R$, то кажуть, що вона неперервна на всій множині M. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на $D(f)$, то таку функцію називають неперервною.

Справедливою є *теорема*: Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ неперервні в точці x_0, то в цій точці неперервними є й функції $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x)\cdot g(x)$ і $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (якщо $g(x) \neq 0$).

Похідна функції

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай x_0 — фіксована точка з області визначення функції f. Якщо x — довільна точка області визначення функції $y = f(x)$ така, що $x \neq x_0$, то різницю $x - x_0$ називають *приростом аргументу функції* $y = f(x)$ у точці x_0 і позначають Δx (читають «*дельта ікс*»). Отже, $\Delta x = x - x_0$, звідки $x = x_0 + \Delta x$. Кажуть, що *аргумент одержав приріст* Δx *у точці* x_0. Якщо аргумент одержав приріст Δx у точці x_0, то значення функції змінилося на величину $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Цю величину називають *приростом функції* $y = f(x)$ *у точці* x_0 і позначають Δf.

Наприклад, знайти приріст функції $y = x^3$ у точці x_0, який відповідає приросту аргументу Δx. Одержимо: $\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

Похідною функції $y = f(x)$ у точці x називають границю (якщо вона існує) відношення приросту функції $\Delta f(x)$ до приросту аргументу Δx, якщо приріст аргументу прямує до нуля:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Похідну функції позначають y' або $f'(x)$. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну, то функцію називають *диференційованою*. Відшукання похідної функції f називають *диференціюванням*.

Наприклад, користуючись означенням, знайти похідну функції $y = \sqrt{x}$. Маємо: $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Таблиця похідних елементарних функцій

1. $(C)' = 0$, C — константа.
2. $(x)' = 1$.
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$.
4. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.
5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
6. $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.
7. $(e^x)' = e^x$.
8. $(a^x)' = a^x \ln a$.
9. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
10. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.
11. $(\sin x)' = \cos x$.
12. $(\cos x)' = -\sin x$.
13. $(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
14. $(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Правила диференціювання

Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ диференційовані, C — деяка константа, то диференційованими будуть також функції $y = Cf(x)$, $y = f(x) \pm g(x)$, $y = f(x) \cdot g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, до того ж справедливими є рівності:

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x);$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x);$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}.$$

Наприклад: а) $(3x^4)' = 3 \cdot (x^4)' = 3 \cdot 4x^{4-1} = 12x^3$; б) $(2x + \sqrt{x})' = (2x)' + (\sqrt{x})' = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

в) $(x^2 \cdot \sin x)' = (x^2)' \cdot \sin x + (\sin x)' \cdot x^2 = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$;

г) $\left(\frac{3x+1}{4x^2-3}\right)' = \frac{(3x+1)'(4x^2-3) - (4x^2-3)'(3x+1)}{(4x^2-3)^2} = \frac{3(4x^2-3) - 8x(3x+1)}{(4x^2-3)^2} = \frac{12x^2 - 9 - 24x^2 - 8x}{(4x^2-3)^2} =$

$= \frac{-12x^2 - 8x - 9}{(4x^2-3)^2}$.

Похідна складеної функції

Якщо значенням аргументу функції f є значення функції g, то кажуть, що задано складену функцію $y = f(g(x))$. Наприклад, нехай задано функції $f(t) = 3t + 1$, $t(x) = \cos x$, тоді $f(t) = f(t(x)) = 3t(x) + 1 = 3 \cdot \cos x + 1$. Отже, можна сказати, що $y = 3\cos x + 1$ задає складену функцію $y = f(g(x))$.

Похідну складеної функції обчислюють за формулою

$$(f(g(x)))' = f'(g) \cdot g'(x).$$

Наприклад, знайти похідну функції $\left((2x+1)^4\right)' = 4(2x+1)^3 \cdot (2x+1)' = 4(2x+1)^3 \cdot 2 = 8(2x+1)^3$.

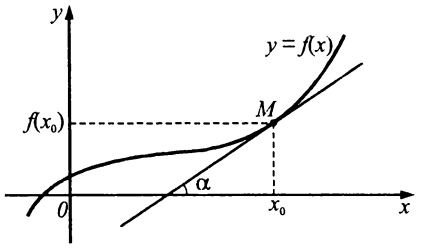
Фізичний зміст похідної

Похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0 виражає швидкість зміни функції або процесу, який ця функція описує, у цій точці. Так, якщо функція $S = S(t)$ описує рух матеріальної точки, тобто залежність пройденої відстані s від часу t, то її похідна задає залежність швидкості v матеріальної точки від часу t: $S'(t) = v(t)$; похідна швидкості $v = v(t)$ за часом є прискоренням: $v'(t) = a(t)$.

Геометричний зміст похідної

Значення похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в цій точці:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$$



Рівняння дотичної до графіка функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0. Тоді до графіка функції у точці з абсцисою x_0 можна провести невертикальну дотичну (див. рис.). Рівняння невертикальної прямої має вигляд $y = kx + b$. Виходячи з геометричного змісту похідної, одержимо: $k = f'(x_0)$. Тоді $y = f'(x_0) \cdot x + b$. Ця пряма проходить через точку $M(x_0; f(x_0))$, тому $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$, звідки $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$. Тоді рівняння дотичної має вигляд: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

Наприклад, скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2 + 3x - 4$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$. Маємо: $f(x_0) = f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 4 = 6$; $f'(x) = 2x + 3$; $f'(x_0) = f'(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$. Підставивши знайдені числові значення у рівняння дотичної, одержимо: $y = 7(x - 2) + 6$; $y = 7x - 8$.

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}-1}$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	–1	3	–3

■

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x-2}-1} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{\left(\sqrt{x-2}-1\right)\left(\sqrt{x-2}+1\right)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{x-2-1} = \lim_{x\to 3}\left(\sqrt{x-2}+1\right) = \sqrt{3-2}+1 = 2.$$

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 2. Яка з послідовностей не має границі?

А	Б	В	Г	Д
$x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$	$x_n = 0{,}99^n$	$x_n = \frac{2n-1}{2n}$	$x_n = \left(\sqrt{3}\right)^n$	усі послідовності мають границі

■ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} 3^n} = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty}(0{,}99)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{100}{99}}\right)^n = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1\frac{1}{99}\right)^n} = 0$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\frac{1}{n}}{2}=1$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1{,}73...)^n$ — члени послідовності можуть стати як завгодно великими. Отже, послідовність границі немає.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 3. Знайти похідну функції $f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{x}{4}$.

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}x$	-1	$\dfrac{\sin\frac{x}{4}}{\cos\frac{x}{4}}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{4\cos^2\frac{x}{4}}$

■ $f'(x)=\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{4}\right)'=\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{4}}\cdot\left(\dfrac{x}{4}\right)'=\dfrac{1}{4\cos^2\frac{x}{4}}$.

Відповідь. **Д.** ■

Приклад 4. Знайти похідні: **а)** $\left(5x^3+8x-11\right)'$; **б)** $\left(x^2\cos x\right)'$; **в)** $\left(\sin\left(3x^2\right)\right)'$; **г)** $\left(\sqrt{6x^4+1}\right)'$.

■ **а)** $\left(5x^3+8x-11\right)'=\left(5x^3\right)'+(8x)'-11'=5\left(x^3\right)'+8(x)'-0=15x^2+8$;

б) $\left(x^2\cos x\right)'=\left(x^2\right)'\cos x+(\cos x)'x^2=2x\cos x+(-\sin x)x^2=2x\cos x-x^2\sin x$;

в) $\left(\sin\left(3x^2\right)\right)'=\cos\left(3x^2\right)\cdot\left(3x^2\right)'=\cos\left(3x^2\right)\cdot 6x=6x\cos\left(3x^2\right)$.

г) $\left(\sqrt{6x^4+1}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{6x^4+1}}\cdot\left(6x^4+1\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{6x^4+1}}\cdot 24x^3=\dfrac{12x^3}{\sqrt{6x^4+1}}$. ■

Приклад 5. Знайти $f'(3)$, якщо $f(x)=(2x+1)^3$.

А	Б	В	Г	Д
300	294	280	264	147

■ $f'(x)=\left((2x+1)^3\right)'=3(2x+1)^2\cdot(2x+1)'=3(2x+1)^2\cdot 2=6(2x+1)^2$. Якщо $x=3$, то: $f'(3)=6(2\cdot 3+)^2=$ $=6\cdot 7^2=6\cdot 49=294$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 6. Знайти $f'(0{,}75)$, якщо $f(x)=5e^{4x-3}-8$.

А	Б	В	Г	Д
$20e$	20	10	7	5

■ $f'(x)=(5e^{4x-3}-8)'=5(e^{4x-3})'=5\cdot e^{4x-3}\cdot(4x-3)'=5\cdot e^{4x-3}\cdot 4=20e^{4x-3}$. Якщо $x=0{,}75$, то $f'(0{,}75)=20e^{4\cdot 0{,}75-3}=20e^0=20$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 7. Знайти $f'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, якщо $f(x)=4\cos\frac{5x}{2}-7x+3$.

А	Б	В	Г	Д
–2	–3	3	4	2

■ $f'(x)=\left(4\cos\frac{5x}{2}-7x+3\right)'=-4\sin\frac{5x}{2}\cdot\left(\frac{5x}{2}\right)'-7=-4\sin\frac{5x}{2}\cdot\frac{5}{2}-7=-10\sin\frac{5x}{2}-7.$

$f'\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-10\sin\left(\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)-7=10\sin\frac{5\pi}{6}-7=10\cdot\frac{1}{2}-7=-2.$

Відповідь. **А.** ■

Приклад 8. Вказати функцію, для якої рівняння $3x-y-2=0$ є рівнянням дотичної до її графіка в точці $A(1;\,1)$.

А	Б	В	Г	Д
$y=x^3$	$y=\sin x$	$y=\frac{2}{x-1}$	$y=x^2$	$y=(x-1)^2$

■ Функції $y=\sin x$, $y=\frac{2}{x-1}$, $y=(x-1)^2$ не проходять через точку $A(1;\,1)$, тому вони не можуть мати дотичної у цій точці. Для функції $y=x^3$ маємо: $y'=3x^2$; $y'(1)=3$. За формулою дотичної $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$ отримаємо: $y-1=3(x-1)$; $3x-y-2=0$ — рівняння дотичної. Для функції $y=x^2$: $y'=2x$; $y'(1)=2$. Кутовий коефіцієнт дотичної $k=2$ не збігається з кутовим коефіцієнтом прямої $y=3x-2$.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 9. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної, яку проведено до графіка функції $y=5x^2-3x+2$ в точці з абсцисою $x_0=2$.

А	Б	В	Г	Д
16	інша відповідь	0,3	0	19

■ Скористаємося властивістю, що $k=y'(x_0)$. Отримуємо: $y'=(5x^2-3x+2)'=10x-3$. $k=y'(2)=10\cdot2-3=17$.

Серед числових значень запропонованих відповідей відповіді 17 немає, тому правильною є відповідь, позначена літерою **Б** — «Інша відповідь».

Приклад 10. Обчислити тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції $f(x)=x-\frac{1}{3x^2}$ у точці з абсцисою $x_0=\frac{1}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
19	4	$1\frac{2}{9}$	–17	0,5

■ $f'(x)=\left(x-\frac{1}{3x^2}\right)'=\left(x-\frac{1}{3}x^{-2}\right)'=1+\frac{2}{3}x^{-3}=1+\frac{2}{3x^3}$. Тоді $\operatorname{tg}\alpha=f'\left(\frac{1}{3}\right)=1+\frac{2}{3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3}=1+\frac{2\cdot27}{3\cdot1}=1+18=19.$

Відповідь. **А.** ■

Приклад 11. Обчислити ординату точки графіка функції $y = 2x^2 - 3x + 1$, у якій дотична до цього графіка паралельна до прямої $y = 3x + 7$.

А	Б	В	Г	Д
–1	1,5	1	3	10

■ Оскільки дотична до графіка функції паралельна до прямої $y = 3x + 7$, то кутові коефіцієнти дотичної $y = k_1x + b_1$ і функції $y = 3x + 7$ рівні, тобто $k_1 = 3$. Отже, $f'(x_0) = k_1 = 3$. Знайдемо $f'(x) = (2x^2 - 3x + 1)' = 4x - 3$; $f'(x_0) = 4x_0 - 3$; $4x_0 - 3 = 3$; $x_0 = 1{,}5$. Знайдемо y_0 — ординату точки графіка функції $y = 2x^2 - 3x + 1$: $y_0 = 2 \cdot (1{,}5)^2 - 3 \cdot 1{,}5 + 1 = 4{,}5 - 4{,}5 + 1 = 1$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 12. Знайти, у який момент часу прискорення рухомої точки дорівнюватиме 2 см/с^2, якщо точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 3t^2 + 9\ln t + 7$, де $x(t)$ — шлях у сантиметрах, t — час у секундах.

А	Б	В	Г	Д
1 с	1,5 с	2 с	2,5 с	5 с

■ Знайдемо похідну функції $x(t)$: $x'(t) = (3t^2 + 9\ln t + 7)' = 6t + 9 \cdot \frac{1}{t} = 6t + \frac{9}{t}$. Отже, $v(t) = 6t + \frac{9}{t}$.

Знайдемо прискорення $a(t) = v'(t) = \left(6t + \frac{9}{t}\right)' = 6 - \frac{9}{t^2}$. За умовою, $a(t) = 2$ см/с^2. Маємо рівняння: $6 - \frac{9}{t^2} = 2$; $4t^2 = 9$; $t^2 = \frac{9}{4}$. Врахувавши, що $t > 0$, маємо: $t = 1{,}5$ (с).

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 13. Тіло рухається прямолінійно за законом $S(t) = t^2 + t + 4$, де S — відстань у метрах, t — час у секундах. Знайти: 1) початкову швидкість тіла; 2) швидкість тіла через 3 с після початку руху; 3) прискорення тіла.

■ $v(t) = S'(t) = \left(t^2 + t + 4\right)' = 2t + 1$.

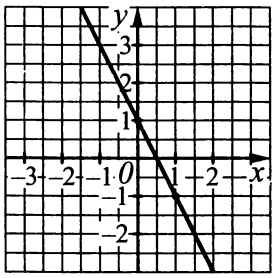
1) Початкова швидкість — це швидкість, якщо $t = 0$ с. Тому $v_0 = v(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ (м/с).

2) $v(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ (м/с).

3) $a(t) = v'(t) = \left(2t + 1\right)' = 2$. Отже, прискорення, з яким рухається тіло, дорівнює 2 м/с^2. ■

Приклад 14. Вказати функцію, дотичну до графіка якої у точці $x = 1$ зображено на рисунку.

А	Б	В	Г	Д
$y = 3x - 4$	$y = x^2 - 2$	$y = x^3 - 2x$	$y = x^2 - 2x$	$y = -x^2$



■ Графік дотичної $y = kx + b$ проходить через точки (0; 1) і (1; –1). Знайдемо значення k та b: $\begin{cases} 1 = k \cdot 0 + b; \\ -1 = k \cdot 1 + b; \end{cases} \begin{cases} b = 1; \\ k = -2. \end{cases}$ Рівняння дотичної має вигляд: $y = -2x + 1$. З іншого боку, $k = f'(t)$, тобто $f'(1) = -2$. Знайдемо $f'(1)$ для кожної із запропонованих функцій:

А $y' = (3x - 4)' = 3$; $y'(1) = 3$

Б $y' = (x^2 - 2)' = 2x$; $y'(1) = 2 \cdot 1 = 2$

В $y' = (x^3 - 2x)' = 3x^2 - 2$; $y'(1) = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$

Г $y' = (x^2 - 2x)' = 2x - 2$; $y'(1) = 2 \cdot 1 - 2 = 0$

Д $y' = (-x^2)' = -2x$; $y'(1) = -2 \cdot 1 = -2$

Отже, $f'(1) = -2$ відповідає функція $y = -x^2$. $y(1) = -1^2 = -1$. Рівняння дотичної до функції $y = -x^2$ має вигляд: $y + 1 = -2(x - 1)$; $y = -2x + 1$.

Відповідь. **Д.** ■

Завдання 24.1–24.27 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

24.1. $(x^6 + 3x^2 - x + 3)' = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{x^7}{7} + x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x$	$6x^5 + 6x$	$6x^5 + 6x - 1$	$6x^5 + 6x - 3$	$\frac{x^7}{7} + x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x + 1$

24.2. $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x}\right)' = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{3}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{3}{x^4} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{3x^2} + 2\sqrt{x}$	$\frac{3}{x^4} + \frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{3x^2} + \frac{\sqrt{x}}{2}$

24.3. $\left(\frac{1}{8}\cos x - 3\operatorname{tg} x\right)' = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$-8\sin x - \frac{3}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{8}\sin x - \frac{3}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{8}\sin x - \frac{3}{\sin^2 x}$	$-\frac{1}{8}\sin x - 3\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{8}\sin x - \frac{3}{\cos^2 x}$

24.4. Знайти похідну функції $y = 5\sin 7x - 7x^2 + 7$.

А	Б	В	Г	Д
$5\cos 7x - 14x$	$35\cos 7x - 7x$	$35\cos 7x - 14x$	$7\cos 7x - 7x + 7$	$5\cos 7x - 7x$

24.5. Знайти похідну функції $y = \ln(2x) + 2x^3 - 3$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{x} + 6x^2 - 3x$	$\frac{1}{2x} + 6x^2 - 3$	$\frac{1}{2x} + 6x^2$	$\frac{1}{x} + 6x^2$	$\frac{2}{x} + 6x^2$

24.6. $\left(x^5 \cdot 7^x\right)' = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$5x^4 \cdot 7^x + x^5 \cdot 7^x \lg 7$	$5x^4 \cdot 7^x \ln 7$	$5x^4 \cdot 7^x \lg 7$	$5x^4 \cdot 7^x + x^5 7^x \cdot \ln 7$	$5x^4 + 7^x \ln 7$

24.7. $\left(\frac{\ln x}{x^4}\right)' = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\frac{1}{x}x^4 - 4x^3\ln x}{x^8}$	$\frac{\frac{1}{x}}{4x^3}$	$\frac{\ln x}{4x^3}$	$\frac{\frac{1}{x}x^4 - 4x^3\ln x}{x^4}$	$\frac{\frac{1}{x}x^4 - 4x^3\ln x}{4x^3}$

24.8. $\left(e^{3x+5}\right)' = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{3}e^{3x+5}$	$3e^x$	$(3x+5)e^{3x+5}$	$3e^{3x+5}$	e^{3x+5}

24.9. Знайти похідну функції $y = \cos 3x$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{18}$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$

24.10. Знайти кут, який утворює з додатним напрямом осі x дотична до графіка функції $y = \frac{1}{4}x^4$ у точці $x_0 = -1$.

А	Б	В	Г	Д
30°	45°	120°	135°	150°

24.11. Рівняння дотичної до кривої $y = 2x^2 - 4x - 1$ має вигляд: $y = 8x - 19$. Визначити абсцису точки дотику.

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	–4	8

24.12. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = x^3$ у точці (2; 8).

А	Б	В	Г	Д
$y + 8 = 12(x + 2)$	$y - 8 = \frac{1}{12}(x - 2)$	$y - 8 = x - 2$	$y - 8 = 8(x - 2)$	$y - 8 = 12(x - 2)$

24.13. На кривій $f(x) = x^2 - x + 1$ Знайти точку, в якій дотична до кривої паралельна до прямої $3x - y - 1 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
(2; 3)	(0; 3)	(0; 1)	2	3

24.14. Знайти усі значення параметра a, за яких числа x_1, $\sqrt{a^2+3}$, x_2 утворюють геометричну прогресію, якщо x_1 та x_2 — абсциси точок графіка функції $f(x) = x^3 + 7x^2 + (2 - 9a)x$, у яких дотичні до графіка нахилені до осі абсцис під кутом 135°.

А	Б	В	Г	Д
–1	1	0	0; 1	–1; 0

24.15. Знайти миттєву швидкість точки, яка рухається за законом $s(t)=\frac{1}{3}t^3+4t+1$ (s — шлях у метрах, t — час у секундах) через 3 с після початку руху.

А	Б	В	Г	Д
12 м/с	13 м/с	14 м/с	15 м/с	16 м/с

24.16. Тіло рухається за законом $s(t)=t^2-4\sqrt{t}$. Знайти швидкість тіла в момент $t_0=4$.

А	Б	В	Г	Д
5	4,75	12	7	7,875

24.17. Обчислити $f'(x)$, якщо $f(x)=\sin 5+e^3$.

А	Б	В	Г	Д
$\cos 5+3e^2$	$\sin 5+e^3$	$\cos 5$	0	$3e^2$

24.18. Обчислити $f'(x)$, якщо $f(x)=\ln\cos x^2$.

А	Б	В	Г	Д
$-2x\operatorname{tg}x^2$	$-\operatorname{tg}x^2$	$\frac{2x}{\cos x^2}$	$-2\operatorname{tg}x^2$	$2x\operatorname{tg}x^2$

24.19. Обчислити $f'(x)$, якщо $f(x)=\sin^2(2x+0{,}5)$.

А	Б	В	Г	Д
$2(2x+0{,}5)\cos^2 x\times$ $\times(2x+0{,}5)$	$2\cos(4x+1)$	$-2\cos(4x+1)$	$2\sin(4x+1)$	$-2\sin(4x+1)$

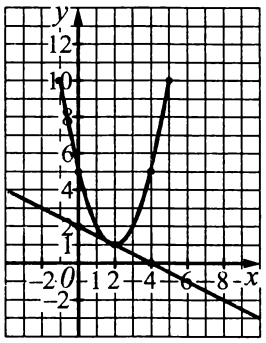
24.20. Обчислити значення похідної функції $y=(3x+1)^3\cdot\cos^3(x^2+2x+1)+\pi^3$ у точці $x_0=-1$.

А	Б	В	Г	Д
36	12	–12	0	$36+\pi^3$

24.21. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $s(t)=2{,}5t^2-15t$, s — шлях у метрах, t — час у секундах. Через який час від початку руху ця точка зупинилася?

А	Б	В	Г	Д
1 с	2 с	3 с	3,5 с	4 с

24.22. На рисунку зображено графік функції і дотичну до нього в точці з абсцисою x_0. Знайти значення $f'(x_0)$.



А	Б	В	Г	Д
5	–2	2	0,5	–0,5

24.23. Дано функцію $y = |3x + 2|$. У якій точці функція не має похідної?

А	Б	В	Г	Д
2	–2	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{2}$	похідна існує в будь-якій точці $x_0 \in R$

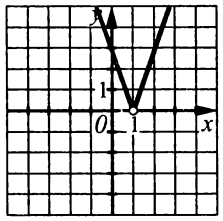
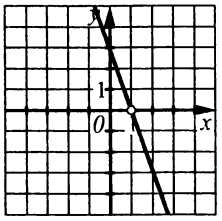
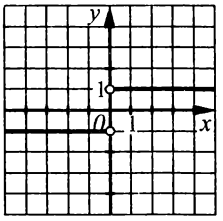
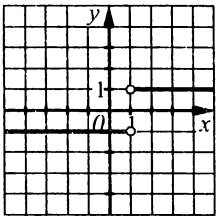
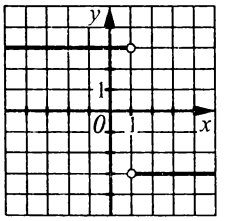
24.24. Обчислити похідну функції $y = |2x - 5|$ на проміжку $(-\infty; 0]$.

А	Б	В	Г	Д
2,5	5	–5	2	–2

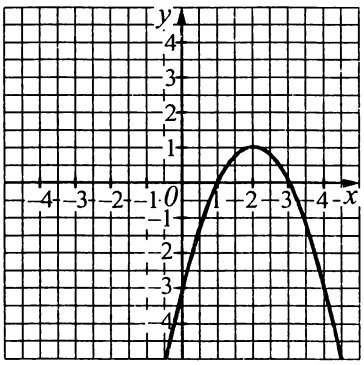
24.25. $f(x) = x(x - 1)(x - 2)...(x - 19)(x - 20)$. Знайти $f'(0)$.

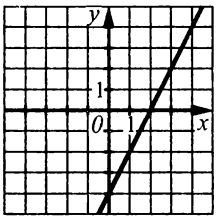
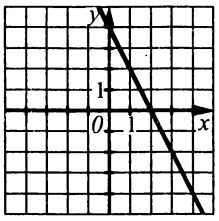
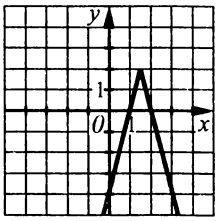
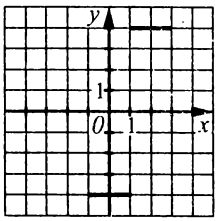
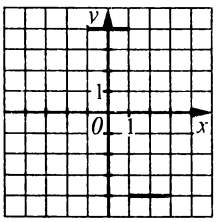
А	Б	В	Г	Д
–20!	20!	0	1	20

24.26. На якому з рисунків побудовано графік похідної функції $y = |1 - x|$?

А	Б	В	Г	Д
				

24.27. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$. Серед наведених графіків вказати графік функції $y = f'(x)$.



А	Б	В	Г	Д
				

Завдання 24.28–24.38 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

24.28. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми похідними (А–Д).

1 $f(x)=\sin(2x+3)$
2 $f(x)=2\cos(x+3)$
3 $f(x)=\sin^2(x+3)$
4 $f(x)=\operatorname{tg}2x$

А $f'(x)=-2\sin(x+3)$
Б $f'(x)=\sin 2(x+3)$
В $f'(x)=2\sin(2x+3)$
Г $f'(x)=2\cos(2x+3)$
Д $f'(x)=\dfrac{2}{\cos^2 2x}$

24.29. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми похідними (А–Д).

1 $f(x)=2\sin^2(3x-4)+\cos x$
2 $f(x)=2\sin(3x-4)\cdot\cos x$
3 $f(x)=\dfrac{2\sin(3x-4)}{\cos x}$
4 $f(x)=\operatorname{tg}(3x-4)\cdot\cos x$

А $f'(x)=\dfrac{3\cos x-0{,}5\sin(6x-8)\cdot\sin x}{\cos^2(3x-4)}$
Б $f'(x)=6\sin(6x-8)-\sin x$
В $f'(x)=\dfrac{6\cos(3x-4)\cdot\cos x+2\sin(3x-4)\cdot\sin x}{\cos^2 x}$
Г $f'(x)=-2\cos(3x-4)\cdot\sin x$
Д $f'(x)=6\cos(3x-4)\cdot\cos x-2\sin(3x-4)\cdot\sin x$

24.30. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми похідними (А–Д).

1 $y=\dfrac{x}{3}+5$
2 $y=5-\dfrac{x}{3}$
3 $y=3+5x$
4 $y=5-3x$

А $y'=-3$
Б $y'=5$
В $y'=-\dfrac{1}{3}$
Г $y'=-5$
Д $y'=\dfrac{1}{3}$

24.31. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми похідними (А–Д).

1 $y=\sin 5+e^5$
2 $y=\sin 5x+e^5$
3 $y=\sin 5+e^{5x}$
4 $y=\sin 5x+e^{5x}$

А $y'=5(\cos 5x+e^{5x})$
Б $y'=\cos 5x$
В $y'=5e^{5x}$
Г $y'=5\cos 5x$
Д $y'=0$

24.32. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми похідними (А–Д).

1 $y=4x^4-\dfrac{2}{x^2}$
2 $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{1}{2x^2}$
3 $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{2}{x^2}$
4 $y=4x^4-\dfrac{1}{2x^2}$

А $y'=x^3+\dfrac{1}{x^3}$
Б $y'=x^3-\dfrac{4}{x^3}$
В $y'=16x^3+\dfrac{4}{x^3}$
Г $y'=16x^3+\dfrac{1}{x^3}$
Д $y'=x^3+\dfrac{4}{x^3}$

24.33. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх похідними (А–Д).

1 $y = \cos x \cos 7x - \sin x \sin 7x$
2 $y = \cos x \cos 7x + \sin x \sin 7x$
3 $y = \sin 7x \cos x - \sin x \cos 7x$
4 $y = \sin 7x \cos x + \sin x \cos 7x$

А $y' = 8\cos 8x$
Б $y' = 6\cos 6x$
В $y' = 8\sin 8x$
Г $y' = -8\sin 8x$
Д $y' = -6\sin 6x$

24.34. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх похідними (А–Д).

1 $y = x\sin 3$
2 $y = 3\sin x$
3 $y = \sin x^3$
4 $y = \sin^3 x$

А $y' = 3\sin^2 x \cos x$
Б $y' = \cos 3$
В $y' = 3x^2 \cos x^3$
Г $y' = \sin 3$
Д $y' = 3\cos x$

24.35. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх похідними в точці π (А–Д).

1 $y = \sin\dfrac{x}{3}$
2 $y = \sin 3x$
3 $y = \dfrac{\sin x}{3}$
4 $y = \dfrac{\cos x}{3}$

А -3
Б $-\dfrac{1}{3}$
В 0
Г $\dfrac{1}{6}$
Д 1

24.36. Установити відповідність між залежностями відстані S від часу t руху матеріальних тіл (1–4) та їх швидкостями в момент часу $t = 1$ (А–Д).

1 $S(t) = 8\dfrac{1}{3}t^3 + 5t$
2 $S(t) = 4t + 1$
3 $S(t) = \dfrac{t^2}{3} + 5t$
4 $S(t) = 2t^2 + t$

А 4
Б 5
В $5\dfrac{1}{3}$
Г $5\dfrac{2}{3}$
Д 30

24.37. Установити відповідність між залежностями відстані S від часу t руху матеріальних тіл (1–4) та часом від початку руху до зупинки тіла (А–Д).

1 $S(t) = \dfrac{t^3}{3} - t$
2 $S(t) = \dfrac{t^4}{4} - t^3 + 2$
3 $S(t) = \dfrac{t^5}{5} - t^3 + 4$
4 $S(t) = t^2 - t$

А $\dfrac{1}{2}$
Б 1
В $\sqrt{3}$
Г 3
Д 4

24.38. Установити відповідність між функціями (1–4) та тангенсами кутів, які утворюють дотичні, проведені до графіків функцій у точці з абсцисою $x = 0$ з додатним напрямком осі x (А–Д).

1 $y = e^{2x}$	**А** 0
2 $y = 2\sin 4x$	**Б** 1
3 $y = 8\cos x$	**В** 2
4 $y = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$	**Г** 4
	Д 8

Розв'яжіть завдання 24.39–24.51. Відповідь запишіть десятковим дробом.

24.39. Обчислити значення похідної функції $y = \sqrt{\operatorname{tg} 6x}$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{24}$.

24.40. Обчислити значення похідної функції $y = (2x^2 - 1)\ln^2 x$ у точці $x_0 = 1$.

24.41. Знати похідну функції $y = \sqrt[4]{1 + \cos^3 x}$ у точці $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.

24.42. Знати похідну функції $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ у точці $x_0 = 1$.

24.43. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = 5x^2 - 2x$, яка утворює з додатним напрямом осі x кут 135°. У відповідь записати абсцису точки дотику.

24.44. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = e^{5x+1}$, яка паралельна до прямої $y = 5x - 8$. У відповідь записати абсцису точки дотику.

24.45. За яких від'ємних значень a пряма $y = ax - 5$ дотикається до кривої $y = 3x^2 - 4x - 2$?

24.46. Пряма $y = -\frac{3}{4}x + C$ є дотичною до лінії, заданої рівнянням $y = 0{,}5x^4 - x$. Знайти абсцису точки дотику.

24.47. Знайти тангенс додатного кута, під якими парабола $y = x^2 + 2x - 8$ перетинає вісь абсцис.

24.48. Обчислити площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$. У відповідь записати наближене значення площі з точністю до 0,01.

24.49. Знати похідну функції $y = \sqrt{6 + 6\cos^2 x^2}$ у точці $x_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. У відповідь записати $\frac{f'(x_0)}{\sqrt{\pi}}$.

24.50. Скласти рівняння прямої, не паралельної до осі абсцис, яка проходить через точку $M\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ і дотикається до графіка функції $y = 2 - \frac{x^2}{2}$. У відповідь записати абсцису точки дотику.

24.51. За якого значення параметра a пряма $y = \frac{x}{2}$ дотикається до кривої $y = \sqrt{x} - a$?

Тема 25. Застосування похідної для дослідження функцій

Якщо для всіх x з проміжку $(a; b)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$, то на цьому проміжку функція *зростає*. Якщо ж для всіх x з проміжку $(a; b)$ виконується нерівність $f'(x) < 0$, то на цьому проміжку функція *спадає*. Проміжки зростання та спадання функції називають *проміжками монотонності*.

Щоб *дослідити функцію $f(x)$ на монотонність*, слід:

1) знайти її похідну $f'(x)$;

2) знайти критичні точки функції ($f'(x) = 0$ або $f'(x)$ не існує);

3) визначити знак похідної функції на кожному з проміжків, на які критичні точки розбивають область визначення функції;

4) визначити проміжки зростання та спадання функції (якщо $f'(x) > 0$, то на проміжку функція зростає, якщо ж $f'(x) < 0$ — спадає).

Наприклад, з'ясувати, чи зростає функція $f(x) = 4\sqrt{x} + 6x$ на проміжку $(0; +\infty)$. Знайдемо похідну функції: $f'(x) = \left(4\sqrt{x} + 6x\right)' = \frac{2}{\sqrt{x}} + 6$. Оскільки ОДЗ — $x \in (0; +\infty)$ і $\frac{2}{\sqrt{x}} + 6 > 0$, то функція $f(x)$ зростає на проміжку $(0; +\infty)$.

Максимуми й мінімуми функції

Кажуть, що функція $y = f(x)$ має в точці x_0 *максимум* (*мінімум*), якщо існує такий δ-окіл точки x_0 $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, що для всіх x з цього околу, відмінних від x_0, виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$. Точки максимуму й мінімуму називають *точками екстремуму*. Значення функції в точках максимуму й мінімуму називають *екстремумами* (максимами й мінімумами) функції.

Точки області визначення, у яких похідна функції дорівнює нулю або не існує, називають *критичними*.

Достатня умова екстремуму. Якщо похідна функції $y = f(x)$ перетворюється в нуль у точці x_0 і при переході через цю точку у напрямку зростання x змінює знак з «+» («–») на «–» («+»), то в точці x_0 функція має максимум (мінімум). Якщо ж при переході через точку x_0 похідна функції не змінює знака, то в цій точці функція $y = f(x)$ екстремуму не має (має перегин).

Наприклад, задано функцію $y = x^2$. Тоді $y' = (x^2)' = 2x$. У точці $x = 0$ дана функція має мінімум, оскільки $f'(0) = 0$ і похідна змінює знак з «–» на «+».

Щоб *дослідити функцію на екстремум*, потрібно:

1) знайти критичні точки функції;

2) перевірити, чи змінює знак похідна функції при переході через критичну точку;

3) обчислити значення максимуму y_{max} або мінімуму y_{min}.

Наприклад, знайти точки екстремуму функції $f(x) = x^3 - 3x^2 + 18$. Обчислимо похідну функції: $f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 18)' = 3x^2 - 6x$. Знайдемо критичні точки функції: $f'(x) = 0$; $3x^2 - 6x = 0$; $x(3x - 6) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Дослідимо знак похідної в околах критичних точок.

Оскільки при переході через точку $x = 0$ похідна змінює знак з «+» на «–», то ця точка є точкою максимуму; при переході через точку $x = 2$ похідна змінює знак з «–» на «+», тому ця точка є точкою мінімуму.

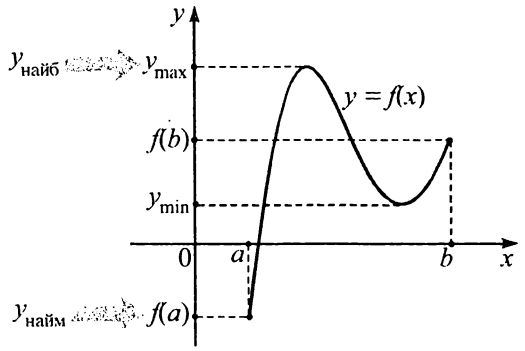
Відповідь. $x_{max} = 0$; $x_{min} = 2$.

Щоб *знайти найбільше та найменше значення* неперервної на відрізку $[a; b]$ функції, потрібно:

1) знайти всі критичні точки функції на інтервалі $(a; b)$;

2) обчислити значення функції у кожній критичній точці та на кінцях відрізка;

3) вибрати найбільше та найменше з отриманих чисел (див. рис.).



При дослідженні функцій поряд з першою похідною використовують другу похідну, за допомогою якої досліджують характер опуклості (вгнутості) функцій.

Якщо для всіх $x \in (a; b)$ виконується нерівність $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$), то графік функції $f(x)$ є *вгнутим* (*опуклим*) на даному проміжку.

Асимптоти

Пряму $x = a$ називають *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. Наприклад, пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою графіка функції $y = \frac{1}{x}$, оскільки $\lim\limits_{x \to +0} \frac{1}{x} = \infty$.

Пряму $y = b$ називають *горизонтальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ або $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$. Наприклад, пряма $y = 0$ є горизонтальною асимптотою графіка функції $y = \frac{1}{x^2 - 1}$, оскільки $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0$.

Дослідження функції

Повне дослідження функції на побудову на її основі графіка функції можна виконувати за такою схемою:

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність, непарність, періодичність.
3. Знайти проміжки зростання, спадання та екстремуми функції.
4. Знайти асимптоти графіка функції.
5. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат та проміжки знакосталості функції.
6. Використовуючи результати дослідження й обчисливши ряд контрольних точок, будуємо графік функції.

Наприклад, побудувати графік функції $y = \frac{1}{3}x^3 + 1{,}5x^2 + 2x - 3\frac{5}{6}$.

1. Область визначення функції $D(f) = R$.

2. Функція ні парна, ні непарна, бо $y(-x) = \frac{1}{3}(-x)^3 + 1{,}5(-x)^2 + 2(-x) - 3\frac{5}{6} =$

$= -\frac{1}{3}x^3 + 1{,}5x^2 - 2x - 3\frac{5}{6} \neq -y(x) \neq y(-x)$. Функція неперіодична.

3. $y' = \left(\frac{1}{3}x^3 + 1{,}5x^2 + 2x - 3\frac{5}{6}\right)' = x^2 + 3x + 2$. $x^2 + 3x + 2 = 0$; $x_1 = -2$, $x_2 = -1$. На проміжках $(-\infty; -2)$ і $(-1; +\infty)$ функція зростає, бо $y' > 0$; а на проміжку $(-2; -1)$ функція спадає, бо $y' < 0$. Оскільки в точці

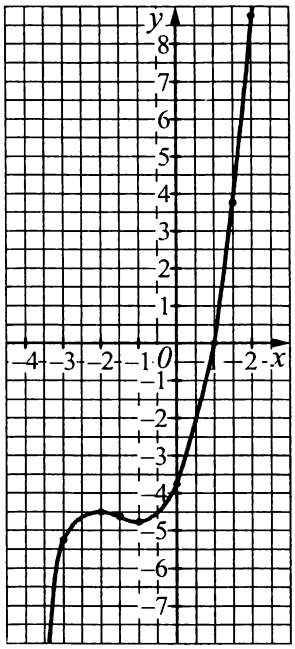
$x = -2$ похідна змінює знак з «+» на «–», тому точка $x = -2$ — точка максимуму, $y_{max} = -4\frac{1}{2}$; в точці $x = -1$ похідна змінює знак з «–» на «+», то точка $x = -1$ — точка мінімуму, $y_{min} = -4\frac{2}{3}$.

4. $y'' = (x^2 + 3x + 2)' = 2x + 3$. Тоді на проміжку $(-1{,}5; +\infty)$ $y'' > 0$, тому графік на цьому проміжку вгнутий, а на проміжку $(-\infty; -1{,}5)$ $y'' < 0$, тому графік на цьому проміжку опуклий. Точка $\left(-\frac{3}{2}; -4\frac{7}{12}\right)$ є точкою перегину.

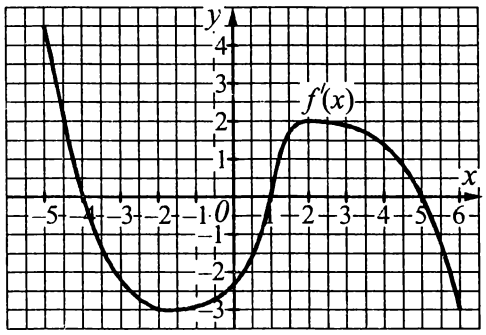
5. Асимптот функція не має.

6. Графік перетинає вісь y в точці $\left(0; -3\frac{5}{6}\right)$, бо $f(0) = \frac{1}{3}\cdot 0^3 + 1{,}5\cdot 0^2 + 2\cdot 0 - 3\frac{5}{6} = -3\frac{5}{6}$. Підбором встановлюємо, що $x = 1$ — корінь рівняння $\frac{1}{3}x^3 + 1{,}5x^2 + 2x - 3\frac{5}{6} = 0$. Тоді $\frac{1}{3}x^3 + 1{,}5x^2 + 2x - 3\frac{5}{6} = (x-1)\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{11}{6}x + \frac{23}{6}\right)$, звідки одержуємо, що це єдиний корінь. Отже, графік перетинає вісь x у точці (1; 0). На проміжку $(-\infty; 1)$ функція $f(x) < 0$, а на проміжку $(1; +\infty)$ — $f(x) > 0$.

7. Будуємо графік функції.



Приклад 1. На рисунку зображено графік похідної функції $f(x)$, яка диференційована на R. Указати проміжки зростання та спадання функції $f(x)$.



■ З графіка маємо, що $f'(x) > 0$ на проміжках $(-\infty; -4)$ та $(1; 5)$. Отже, функція $f(x)$ зростає на кожному з цих проміжків. Оскільки на проміжках $(-4; 1)$ та $(5; +\infty)$ виконується нерівність $f'(x) < 0$, то на цих проміжках функція $f(x)$ спадає.

Відповідь. Зростає на проміжках $(-\infty; -4)$ та $(1; 5)$ і спадає на проміжках $(-4; 1)$ та $(5; +\infty)$. ■

Приклад 2. Яка з указаних функцій є зростаючою на всій області визначення?

А	Б	В	Г	Д
$f(x) = 0{,}4^x$	$f(x) = x^2$	$f(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$	$f(x) = 3$	зростаючої функції немає

■ $f(x) = 0{,}4^x$, $0 < 0{,}4 < 1$, функція спадна; $f(x) = x^2$, функція спадна, якщо $x \le 0$; $f(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$, $\sqrt{3} > 1$, функція зростаюча; $f(x) = 3$ — ні зростаюча, ні спадна.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 3. Дослідити на монотонність та екстремум функцію $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5$.

■ $y' = \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5\right)' = x^2 - 6x$. Знайдемо критичні точки, прирівнявши похідну до нуля: $y' = 0$; $x^2 - 6x = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 6$. Критичні точки — 0 та 6 — розбивають область визначення на три проміжки: $(-\infty; 0)$, $(0; 6)$, $(6; +\infty)$. Визначимо, який знак має похідна функції на кожному з проміжків. Для цього виберемо довільне число з проміжку $(-\infty; 0)$, наприклад, –10, і обчислимо відповідне значення похідної функції: $y'(-10) = (-10)^2 - 6 \cdot (-10) = 160 > 0$. Тобто на проміжку $(-\infty; 0)$ похідна функції набуває лише додатних значень. Виконавши аналогічні обчислення, визначимо знак похідної на інших проміжках. Результати обчислень подамо таблицею:

x	$(-\infty; 0)$	$(0; 6)$	$(6; +\infty)$
y'	+	–	+

Оскільки на проміжках $(-\infty; 0)$ та $(6; +\infty)$ похідна набуває додатних значень, то функція на цих проміжках зростає. На проміжку (0; 6) похідна від'ємна, тому функція на ньому спадає.

Оскільки при переході через точку 0 похідна функції змінює знак з «+» на «–», то $x = 0$ — точка максимуму. Максимум функції дорівнює: $y_{max} = y(0) = 5$. При переході через точку 6 похідна функції змінює знак з «–» на «+». Тому $x = 6$ — точка мінімуму. Мінімум функції дорівнює: $y_{min} = y(6) = -31$. ■

Приклад 4. Знайти проміжки зростання (спадання) функції $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$.

■ Знайдемо область визначення функції: $x^2-x-2\geq 0$; $x\in(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$. Похідна функції $f(x)$ дорівнює: $f'(x)=\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)'=\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$. Функція $f(x)$ зростає, якщо $f'(x)>0$, тому $\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}>0$, тобто $\begin{cases}2x-1>0;\\ x^2-x-2>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x>0{,}5;\\ \left[\begin{array}{l}x<-1;\\ x>2,\end{array}\right.\end{cases}$ $x>2$. Отже, функція зростає на проміжку $(2;+\infty)$.

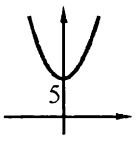
Аналогічно, функція спадає, якщо $f'(x)<0$, тому $\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}<0$, тобто $\begin{cases}2x-1<0;\\ x^2-x-2>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x<0{,}5;\\ \left[\begin{array}{l}x<-1;\\ x>2,\end{array}\right.\end{cases}$ $x<-1$. Отже, функція спадає на проміжку $(-\infty;-1)$.

Слід зазначити, що в точках $x=-1$ і $x=2$ функція $f(x)$ неперервна, але не диференційована. ■

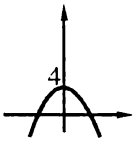
Приклад 5. Яка з указаних функцій має максимум у точці $x_0=0$?

А	Б	В	Г	Д
$y=7x^2+5$	$y=2x^3-7$	$y=-3x^2+4$	$y=\dfrac{2x}{x+2}$	$y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

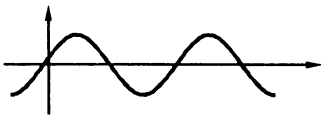
■ **а)** Функція $y=7x^2+5$ — не має максимуму взагалі (рис. а); **б)** $y=2x^3-7$ — не має максимуму взагалі; **в)** $y=-3x^2+4$ — має максимум у точці $x_0=0$, бо $y'=-6x$; $y'=0$; $-6x=0$; $x=0$ (рис. в); **г)** $y=\dfrac{2x}{x+2}$ — не має максимуму взагалі; **д)** $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ — не має екстремуму в точці $x_0=0$ (рис. д).



а)



в)



д)

Відповідь. **В.** ■

Приклад 6. Знайти найбільше значення функції $f(x)=\dfrac{x^2+8}{x-1}$ на відрізку $[-3;0]$.

■ $f'(x)=\left(\dfrac{x^2+8}{x-1}\right)'=\dfrac{\left(x^2+8\right)'\cdot(x-1)-(x-1)'\cdot\left(x^2+8\right)}{(x-1)^2}=\dfrac{2x\cdot(x-1)-1\cdot\left(x^2+8\right)}{(x-1)^2}=$

$=\dfrac{2x^2-2x-x^2-8}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}$. $f'(x)=0$; $\dfrac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}=0$; $x^2-2x-8=0$; $x_1=-2$; $x_2=4$. Порівняємо значення $f(-3), f(-2), f(0)$. $f(-3)=\dfrac{(-3)^2+8}{-3-1}=\dfrac{17}{-4}=-4\dfrac{1}{4}$; $f(-2)=\dfrac{(-2)^2+8}{-2-1}=\dfrac{12}{-3}=-4$; $f(0)=\dfrac{0^2+8}{0-1}=\dfrac{8}{-1}=-8$.

Найбільше значення $f(-2)=-4$. ■

Приклад 7. Побудувати графік функції $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$.

1. Область визначення функції $D(f)=R$.

2. Функція непарна, бо $y(-x)=\dfrac{2(-x)^3}{(-x)^2+1}=\dfrac{-2x^3}{x^2+1}=-\dfrac{2x^3}{x^2+1}=-y(x)$, неперіодична. Звідси маємо, що дослідження функції достатньо провести для $x\geq 0$.

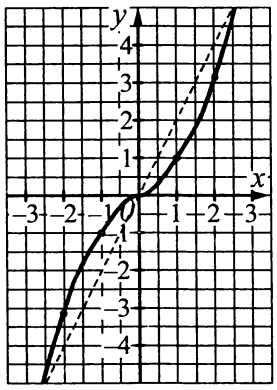
3. $y' = \dfrac{6x^2\left(x^2+1\right)-2x^3\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{6x^4+6x^2-4x^4}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{2x^4+6x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$. Якщо $x > 0$, то $y' > 0$. Отже, на проміжку $(0; +\infty)$ функція зростає.

4. Графік проходить через початок координат, бо $y(0) = 0$.

5. Знайдемо кілька точок, які належать графіку:

x	–2	–1	0	1	2
y	–3,2	–1	0	1	3,2

6. Будуємо графік функції на проміжку $[0; +\infty)$. Використавши симетрію відносно початку координат, будуємо графік на проміжку $(-\infty; 0)$.



Завдання 25.1–25.24 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

25.1. Визначити проміжок зростання функції $y = x^2 - 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$[1; +\infty)$	$(-\infty; -1)$	$(-\infty; 0]$

25.2. Знайти проміжки зростання функції $y = f(x)$, якщо $f'(x) = (x - 1)(x - 5)$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -5]\cup[1; +\infty)$	$[-5; -1]$	$[1; -5]$	$(-\infty; 1]\cup[5; +\infty)$	$(-\infty; -5]$

25.3. Знайти проміжки спадання функції $y = \varphi(x)$, якщо $\varphi'(x) = (x + 2)(x - 1)^2(x - 3)$.

А	Б	В	Г	Д
$[-3; 2]$	$(-\infty; -3]$ і $[-1; 2]$	$(-\infty; -2]$ і $[1; 3]$	$(-\infty; -2]$ і $[3; +\infty)$	$[-2; 3]$

25.4. Знайти проміжки зростання функції $y = x^2e^x$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; -2]$ і $[0; +\infty)$	$[-2; 0]$	$(-\infty; 0]$ і $[2; +\infty)$	$[0; 2]$

25.5. Знайти проміжки спадання функції $y = \sin^2 x$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi+\pi n\right]$, $n \in Z$	$\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right]$, $n \in Z$	$[\pi+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n]$, $n \in Z$	$\left[\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right]$, $n \in Z$	$(-\infty;\ +\infty)$

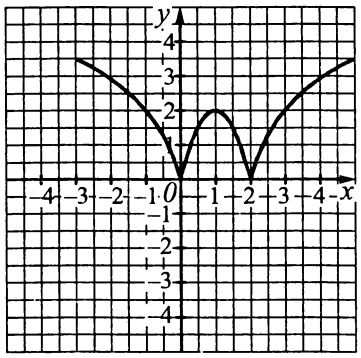
25.6. Серед наведених функцій вибрати ту, яка є зростаючою на множині дійсних чисел.

А	Б	В	Г	Д
$y = -x^7$	$y = \cos^2 x$	$y = \ln(x^2 + 1)$	$y = e^{x^3} z$	$y = e^{\lvert x\rvert}$

25.7. Серед наведених функцій вибрати ту, в якої проміжком спадання є проміжок $[0; +\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{1}{x^2+1}$	$y = xe^x$	$y = \ln(x^3 + 1)$	$y = e^{x^5}$	$y = e^{x^2}$

25.8. Скільки критичних точок має функція $y = f(x)$, зображена на рисунку?



А	Б	В	Г	Д
Одну	дві	три	чотири	більше, ніж чотири

25.9. Знайти критичні точки функції $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.

А	Б	В	Г	Д
0	–3 і –1	–3 і 1	1 і 3	–1 і 3

25.10. Вказати критичні точки функції $y = x(x - 4)^3$.

А	Б	В	Г	Д
0; 4	4	1; 4	3	1

25.11. Знайти критичну точку функції $y = 2x^2 - 4x$.

А	Б	В	Г	Д
–1	1	4	0	2

25.5. Знайти проміжки спадання функції $y = \sin^2 x$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi+\pi n\right]$, $n \in Z$	$\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right]$, $n \in Z$	$[\pi+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n]$, $n \in Z$	$\left[\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right]$, $n \in Z$	$(-\infty;\ +\infty)$

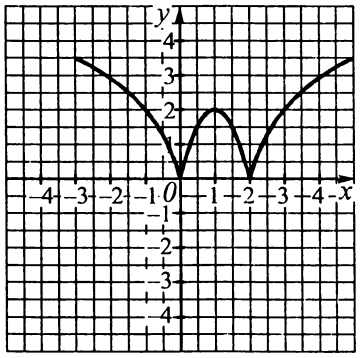
25.6. Серед наведених функцій вибрати ту, яка є зростаючою на множині дійсних чисел.

А	Б	В	Г	Д
$y = -x^7$	$y = \cos^2 x$	$y = \ln(x^2 + 1)$	$y = e^{x^3} z$	$y = e^{\lvert x\rvert}$

25.7. Серед наведених функцій вибрати ту, в якої проміжком спадання є проміжок $[0;\ +\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{1}{x^2+1}$	$y = xe^x$	$y = \ln(x^3 + 1)$	$y = e^{x^5}$	$y = e^{x^2}$

25.8. Скільки критичних точок має функція $y = f(x)$, зображена на рисунку?



А	Б	В	Г	Д
Одну	дві	три	чотири	більше, ніж чотири

25.9. Знайти критичні точки функції $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.

А	Б	В	Г	Д
0	–3 і –1	–3 і 1	1 і 3	–1 і 3

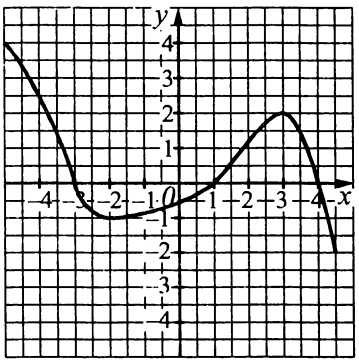
25.10. Вказати критичні точки функції $y = x(x-4)^3$.

А	Б	В	Г	Д
0; 4	4	1; 4	3	1

25.11. Знайти критичну точку функції $y = 2x^2 - 4x$.

А	Б	В	Г	Д
–1	1	4	0	2

25.17. Вказати проміжки зростання функції $y = \varphi(x)$ на відрізку $[-5; 5]$, якщо на рисунку зображено графік функції $y = \varphi'(x)$.

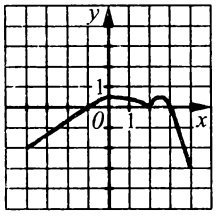
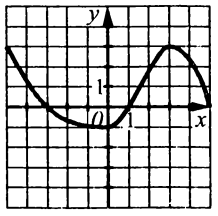
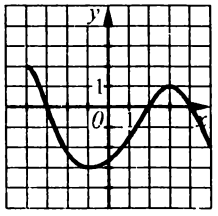
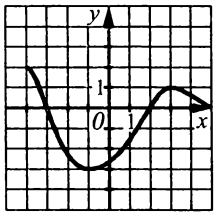
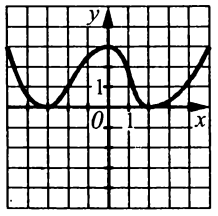


А	Б	В	Г	Д
$[-2; 3]$	$[-1; 2]$	$[-2; 1]$ і $[4; 5]$	$[1; 3]$	$[-5; -3]$ і $[1; 4]$

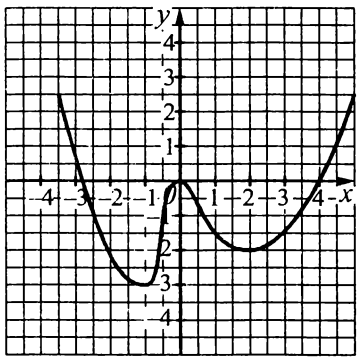
25.18. Функція $y = f(x)$ визначена на множині дійсних чисел; -3 і 2 — нулі функції. Зміну знаків похідної функції подано в таблиці.

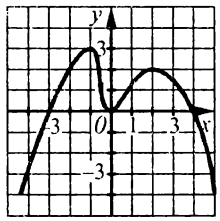
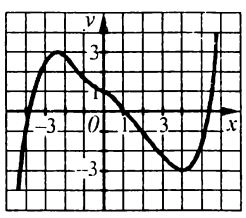
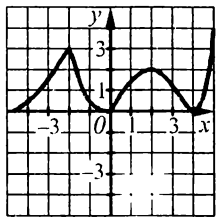
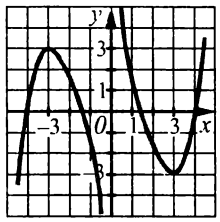
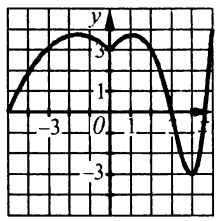
$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 3)$	3	$(3; +\infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(-1) = 0$	$f'(x) > 0$	$f'(3) = 0$	$f'(x) < 0$

Який з наведених графіків може бути графіком функції $y = f(x)$?

А	Б	В	Г	Д
				

25.19. На рисунку зображено графік функції $y = f'(x)$. Який з наведених графіків може бути графіком функції $y = f(x)$?



А	Б	В	Г	Д
				

25.20. Знайти точку, в якій функція $y = x\ln x$ набуває найменшого значення.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e}$	1	e	e^2

25.21. Знайти точку максимуму функції $y = \frac{\ln x}{x}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{e}$	$\sqrt{e}$	1	e	e^2

25.22. За яких значень a функція $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + ax$ має критичні точки, але не має точок екстремумів?

А	Б	В	Г	Д
–1	–1 і 1	1	–4 і 4	4

25.23. За яких значень a точка 5 є точкою мінімуму функції $y = f(x)$, якщо $f'(x) = (x - 5)(x - a)$?

А	Б	В	Г	Д
$a \geq 5$	$a = 5$	$a > 5$	$a \leq 5$	$a < 5$

25.24. За яких значень a точка 3 є точкою максимуму функції $y = \frac{x^3}{3} - \frac{a+3}{2}x^2 + 3ax$?

А	Б	В	Г	Д
$a = 3$	$a \geq 3$	$a \leq 3$	$a < 3$	$a > 3$

Завдання 25.25–25.35 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

25.25. Установити відповідність між функціями (1–4) та їхніми властивостями (А–Д).

1 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 2)$

2 $y = 2^{|x|} + 2$

3 $y = 2^x + 2$

4 $y = -3x^2 + 7x - 14$

А зростаюча на всій області визначення

Б спадна на всій області визначення

В має максимальне значення

Г має найменше значення

Д періодична

25.26. Установити відповідність між похідними $f'(x)$ функцій (1–4) та проміжками спадання відповідних їм функцій $f(x)$ (А–Д).

1 $f'(x) = (x + 1)(x - 5)$

2 $f'(x) = (x + 1)(5 - x)$

3 $f'(x) = (x + 1)^2(x - 5)$

4 $f'(x) = (x + 1)(x - 5)^2$

А $(-\infty; -1]$

Б $(-\infty; 5]$

В $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$

Г $[-5; 1]$

Д $[-1; 5]$

25.27. Установити відповідність між похідними $f'(x)$ функцій (1–4) та проміжками зростання відповідних їм функцій $f(x)$ (А–Д).

1 $f'(x) = (x+3)(x-4)$
2 $f'(x) = (x+3)(4-x)$
3 $f'(x) = (x+3)^2(x-4)$
4 $f'(x) = (x+3)(x-4)^2$

А $[4; +\infty)$
Б $[-3; +\infty)$
В $(-\infty; -3]\cup[4; +\infty)$
Г $[-3; 4]$
Д $[-4; 3]$

25.28. Установити відповідність між функціями (1–4) та проміжками спадання цих функцій (А–Д).

1 $y = -3x^5 - 4x$
2 $y = x^4 - 2x^2$
3 $y = e^{x^2-2x+3}$
4 $y = e^x - x$

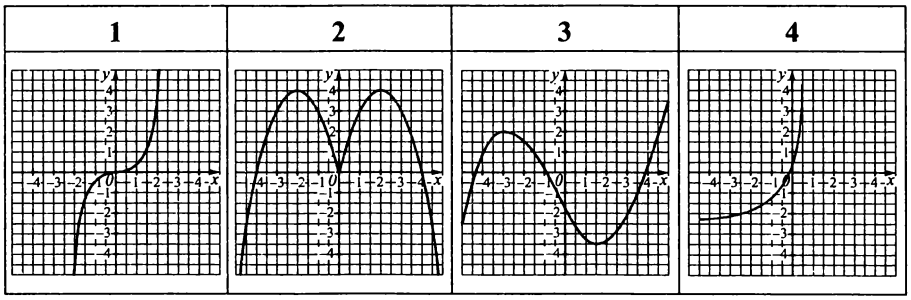
А $(-\infty; 1]$
Б $(-\infty; 0]$
В $(-\infty; -1]\cup[0; 1]$
Г $[0; +\infty)$
Д $(-\infty; +\infty)$

25.29. Установити відповідність між функціями (1–4) та проміжками зростання цих функцій (А–Д).

1 $y = 3x - x^2$
2 $y = \sqrt{1-x^2}$
3 $y = x - \ln x$
4 $y = e^x + x - 1$

А $(-\infty; +\infty)$
Б $[-1; 0]$
В $(-\infty; 0]\cup[1; +\infty)$
Г $[1; +\infty)$
Д $(-\infty; 1{,}5]$

25.30. Установити відповідність між ескізами графіків функцій (1–4) та кількістю критичних точок цих функцій (А–Д).



А	Б	В	Г	Д
Жодної	одна	дві	три	чотири

25.31. Установити відповідність між функціями (1–4) та їх критичними точками (А–Д).

1 $y = x^5 - 5x$
2 $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$
3 $y = e^{x^2+2x}$
4 $y = \sqrt{1-x^2}$

А 1
Б –1
В 0
Г 0; 2
Д –1; 1

25.32. Установити відповідність між похідними $f'(x)$ функцій (1–4) та точками максимуму функцій $f(x)$ (А–Д).

1 $f'(x) = x(x+2)(x-4)$
2 $f'(x) = x^2(x+2)(x-4)$
3 $f'(x) = x(x+2)(4-x)$
4 $f'(x) = x^2(x+2)(4-x)$

А –2
Б 4
В –2; 4
Г –4
Д 0

25.33. Установити відповідність між похідними $f'(x)$ функцій (1–4) та точками мінімуму функцій $f(x)$ (А–Д).

1 $f'(x) = (x+3)(x-1)(x-5)$
2 $f'(x) = (x+3)(x-1)^2(x-5)$
3 $f'(x) = (x+3)(x-1)(5-x)$
4 $f'(x) = (x+3)(x-1)^2(5-x)$

А 5
Б 1
В –3
Г –1
Д –3; 5

25.34. Установити відповідність між функціями (1–4) та точками максимуму цих функцій (А–Д).

1 $y = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$
2 $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$
3 $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$
4 $y = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$

А 0
Б 1
В –1
Г –1; 0
Д –1; 1

25.35. Установити відповідність між функціями (1–4) та точками мінімуму цих функцій (А–Д).

1 $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2$
2 $y = -\frac{x^4}{4} + 2x^2$
3 $y = \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3}$
4 $y = -\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3}$

А 0
Б 2
В –2; 2
Г –2; 0
Д –2

Розв'яжіть завдання 25.36–25.45. Відповідь запишіть десятковим дробом.

25.36. Знайти проміжки спадання функції $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 5$. У відповідь записати додатну абсцису середини одного з проміжків спадання.

25.37. Знайти проміжки спадання функції $y = \frac{3x + x^2}{x - 1}$. У відповідь записати додатну абсцису середини одного з проміжків спадання.

25.38. Знайти найбільше значення функції $y = -2x^3 + 6x^2 + 9$ на відрізку $[0; 3]$.

25.39. Число 64 подати у вигляді добутку двох додатних множників так, щоб сума їхніх квадратів була найменшою. У відповідь записати найменшу суму квадратів знайдених множників.

25.40. Прямокутну ділянку землі, яка прилягає до стіни будинку, потрібно обгородити парканом завдовжки 160 метрів. Знайти довжину прямокутника в метрах, за якої площа ділянки буде найбільшою.

25.41. Визначити висоту в метрах відкритого басейну із квадратним дном, об'єм якого дорівнює 32 $м^3$, такого, щоб на облицювання його стін і дна витрати на матеріал, були найменшими.

25.42. За якого найменшого цілого значення a функція $y = x^3 + 3x^2 + ax - 1$ не має критичних точок?

25.43. За якого від'ємного значення b один із екстремумів функції $y = 2x^3 - 3x^2 + b$ дорівнює -1?

25.44. За якого найбільшого значення a функція $y = xe^x$ є спадною на проміжку $[a - 5; a + 3]$?

25.45. Знайти, за яких значень параметра a сума кубів коренів рівняння $6x^2 + 6(a - 1)x - 5a + 2a^2 = 0$ буде найбільшою.

Тема 26. Первісна. Інтеграл

Функцію $F(x)$ називають *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку X, якщо для довільного $x \in X$ справедлива рівність $F'(x) = f(x)$. Наприклад, оскільки $(x^3)' = 3x^2$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$, то $F(x) = x^3$ є первісною функції $f(x) = 3x^2$ на R.

Основна властивість первісної

Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на проміжку X, то функція $f(x)$ має безліч первісних, і всіх їх можна задати формулою $F(x) + C$, де C — довільне число. Наприклад, первісною для функції $f(x) = 4x^3$, є функція $F(x) = x^4$, оскільки $\left(x^4\right)' = 4x^3$. Первісними для функції $f(x) = 4x^3$ є також функції $F(x) = x^4 + 6$, $F(x) = x^4 + 50{,}1$, $F(x) = x^4 - 1$ і взагалі, $F(x) = x^4 + C$, де C — довільне число.

Сукупність усіх первісних для функції $f(x)$ на проміжку X називають *невизначеним інтегралом* функції на цьому проміжку і позначають $\int f(x)dx = F(x) + C$. Наприклад, $\int \cos x dx = \sin x + C$.

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\int F'(x)dx = F(x) + C$.

2. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

3. $\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$.

Таблиця інтегралів

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

3. $\int \sqrt{x}dx = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + C$.

4. $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C$.

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

6. $\int e^x dx = e^x + C$.

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

9. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C$.

10. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C$.

При обчисленні інтегралів підінтегральну функцію зводять до однієї з табличних. Наприклад, знайти інтеграл $\int \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$. Виконаємо перетворення: $\int \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{3}}dx = \dfrac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C = 1{,}5\sqrt[3]{x^2} + C$.

Якщо підінтегральна функція $f(x)$ не може бути безпосередньо перетворена до однієї з табличних, то можна використати метод заміни змінної чи інтегрування за частинами.

Наприклад, знайти $\int \cos(3x+6)dx$. Введемо позначення $t = 3x + 6$, звідки $x = \dfrac{1}{3}t - 2$. Тоді $dx = d\left(\dfrac{1}{3}t - 2\right) = \dfrac{1}{3}dt$. Одержимо: $\int \cos(3x+6)dx = \int \cos t \cdot \dfrac{1}{3}dt = \dfrac{1}{3}\int \cos t dt = \dfrac{1}{3}\sin t + C = \dfrac{1}{3}\sin(3x+6) + C$.

Згідно методу інтегрування частинами, $\int uv'dx = uv - \int vu'dx$, де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ — диференційовані функції. Наприклад, знайти $\int x\ln x dx$. Уведемо позначення: $u = \ln x$, $v' = x$. Звідси $u' = \frac{1}{x}$, $v = \int v'dx = \int xdx = \frac{x^2}{2}$. Отже, $\int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C =$

$= \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$

На рис. 1 а) зображена криволінійна трапеція, обмежена графіком функції $y = f(x)$ і прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$. Площу криволінійної трапеції обчислюють за формулою $S = F(b) - F(a)$, де F — будь-яка первісна функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

Різницю $F(b) - F(a)$ називають *визначеним інтегралом* функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$ і позначають $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

При обчисленні визначеного інтеграла $F(b) - F(a)$ позначають $F(x)\Big|_a^b$. Рівність $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$ називають *формулою Ньютона — Лейбніца*.

Слід враховувати, що якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ мають первісні на проміжку $[a; b]$, то справедливі рівності:

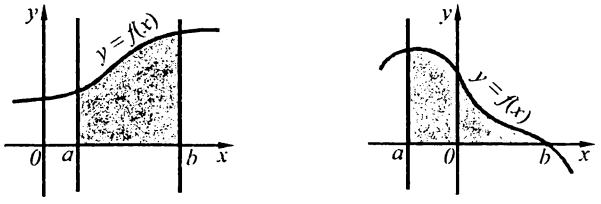
1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$
2. $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
3. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$
4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

Наприклад, обчислити $\int_1^5 (2x+6)dx$. Маємо: $\int_1^5 (2x+6)dx = \int_1^5 2xdx + \int_1^5 6dx = \big(x^2 + 6x\big)\Big|_1^5 = 5^2 + 6\cdot 5 -$

$-\big(1^2 + 6\cdot 1\big) = 48.$

Відповідь. 48.

Формула площі криволінійної трапеції запишеться так: $S = \int_a^b f(x)dx$, якщо $f(x) \geq 0$ (рис. 1).



а) б)

Рис. 1

Наприклад, знайти площу фігури, обмеженої лініями: $y = x^2 - 4x - 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$. Фігура, обмежена заданими лініями, є криволінійною трапецією (рис. 2). Функція $y = x^2 - 4x - 1$ на відрізку

[0; 3] набуває від'ємних значень, тому площа фігури дорівнює модулю відповідного визначеного інтеграла:

$$S=\left|\int_0^3\left(x^2-4x-1\right)dx\right|=\left|\frac{x^3}{3}-2x^2-x\right|_0^3\Bigg|=\left|9-18-3-0\right|=12.$$

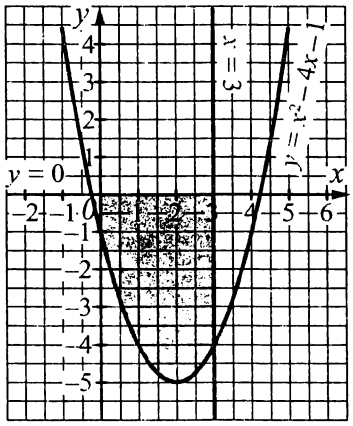


Рис. 2

Як і у випадку невизначеного інтеграла, при обчисленні визначеного інтеграла використовують безпосереднє інтегрування, та методи заміни змінної й інтегрування частинами.

Наприклад, обчислити $\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\ln^2 x dx$. Оскільки функція $\ln^2 x$ є неперервною на проміжку $[e; e^2]$ і $\ln x$ має неперервну похідну $\frac{1}{x}$ на цьому відрізку, то, використовуючи заміну змінної $t=\ln x$, одержимо нові межі інтегрування: якщо $x_1=e$, то $t_1=\ln e=1$; якщо ж $x_2=e^2$, то $t_2=\ln e^2=2$. Таким чином, $\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\ln^2 x dx=\int_1^2 t^2 dt=\frac{t^3}{3}\Big|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$.

Відповідь. $2\frac{1}{3}$.

Наприклад, обчислити $\int_0^1 x\cdot 2^x dx$. Позначимо $u=x$, $v'=2^x$. Тоді $u'=1$, $v=\frac{2^x}{\ln 2}$. Отже, $\int_0^1 x\cdot 2^x dx=$

$$=x\cdot 2^x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{2^x}{\ln 2}dx=1\cdot 2-0-\frac{1}{\ln 2}\int_0^1 2^x dx=2-\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{2^x}{\ln 2}\Bigg|_0^1=2-\frac{1}{\ln^2 2}\left(2^1-2^0\right)=2-\frac{1}{\ln^2 2}.$$

Нехай $y=f(x)$ і $y=g(x)$ — неперервні на проміжку $[a; b]$ функції і для всіх $x\in[a; b]$ виконується нерівність $f(x)\geq g(x)$. Тоді площу фігури, зображеної на рисунку 3, обчислюють за формулою:

$$S=\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx.$$

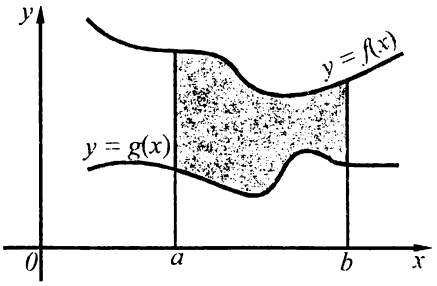
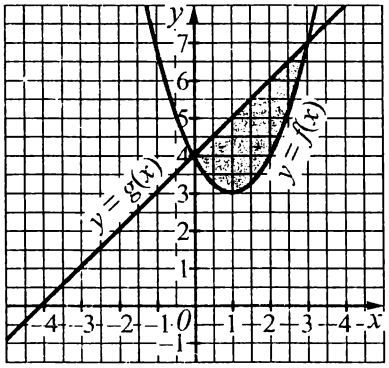


Рис. 3

Наприклад, знайти площу фігури, обмеженої функціями $f(x) = x^2 - 2x + 4$ і $g(x) = x + 4$. Побудуємо фігуру, площу якої слід знайти. Знайдемо точки перетину графіків заданих функцій: $x^2 - 2x + 4 = x + 4$; $x^2 - 3x = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Графіки заданих функцій перетинаються у точках з абсцисами $x = 0$ і $x = 3$. Оскільки $g(x) > f(x)$, то площа фігури дорівнює: $S = \int_0^3 \big(g(x) - f(x)\big)dx = \int_0^3 \big(x + 4 - x^2 + 2x - 4\big)dx =$

$$= \int_0^3 \big(-x^2 + 3x\big)dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \left(\frac{3}{2}\cdot 9 - \frac{27}{3}\right) - \left(\frac{3}{2}\cdot 0 - \frac{0}{3}\right) = 4{,}5.$$



Відповідь. 4,5.

Об'єм тіла, утвореного від обертання криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, де $x \in [a; b]$, навколо осі x, обчислюють за формулою: $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$ (рис. 4).

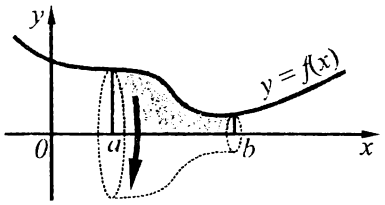
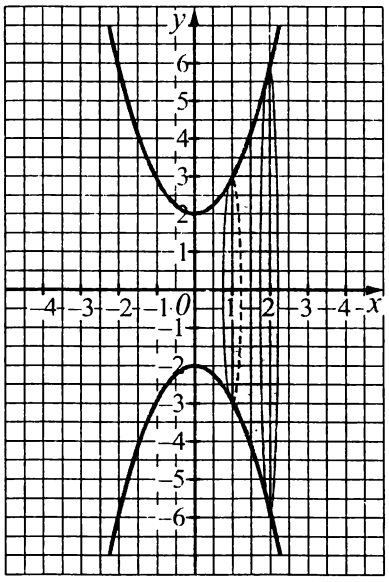


Рис. 4

Наприклад, знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 2$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$. Побудуємо фігуру, об'єм якої слід знайти.



$$V=\pi\int_1^2 f^2(x)dx=\pi\int_1^2 (x^2+2)^2dx=\pi\int_1^2 (x^4+4x^2+4)dx=\pi\left(\frac{x^5}{5}+4\cdot\frac{x^3}{3}+4x\right)\Big|_1^2=$$

$$=\pi\left[\left(\frac{32}{5}+4\cdot\frac{8}{3}+8\right)-\left(\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{3}+4\right)\right]=\frac{293\pi}{15}.$$

Приклад 1. Знайти первісну $F(x)$ функції $f(x)=\sin x$.

■ Оскільки $(-\cos x)'=\sin x$ на проміжку $(-\infty;+\infty)$, то $F(x)=-\cos x$ є однією з первісних. Загальний вигляд первісної функції має вигляд $F(x)=-\cos x+C$. ■

Приклад 2. Знайти первісну функції $f(x)=3x^2$, графік якої проходить через точку (2; 10).

■ Оскільки $(x^3)'=3x^2$, то загальний вигляд первісної є $F(x)=x^3+C$. Знайдемо значення C. За умовою, $F(2)=10$. Тому $2^3+C=10$; $C=2$. Таким чином, первісна функції $f(x)=3x^2$, яка проходить через точку (2; 10), має вигляд $F(x)=x^3+2$. ■

Приклад 3. Знайти невизначений інтеграл: **а)** $\int\left(4x^3-6\right)dx$; **б)** $\int\left(3\cos x+\frac{10}{x}\right)dx$.

■ **а)** $\int\left(4x^3-6\right)dx=4\int x^3dx-6\int dx=4\cdot\frac{x^4}{4}-6\cdot x+C=x^4-6x+C$.

б) $\int\left(3\cos x+\frac{10}{x}\right)dx=3\int\cos xdx+10\int\frac{dx}{x}=3\sin x+10\ln|x|+C$.

Відповідь. **а)** x^4-6x+C; **б)** $3\sin x+10\ln|x|+C$. ■

Приклад 4. Знайти невизначений інтеграл $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$.

■ Врахуємо, що $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$. Тоді $\int\cos^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1+\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos x)dx=\frac{1}{2}(x+\sin x)+C$.

Відповідь. $\frac{1}{2}(x+\sin x)+C$. ■

Приклад 5. Знайти невизначений інтеграл $\int x\sin xdx$.

■ Проінтегруємо частинами, припустивши, що $u=x$, $v'=\sin x$. Тоді $u'=1$, $v=-\cos x$. Маємо: $\int x\sin xdx=x\cdot(-\cos x)-\int(-\cos x)dx=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x+C$.

Відповідь. $-x\cos x+\sin x+C$. ■

Приклад 6. Знайти невизначений інтеграл $\int\sqrt{x^2+3x+1}(2x+3)dx$.

■ Використаємо метод заміни змінної, позначивши $t=x^2+3x+1$, звідки $t'=2x+3$. Тоді $\int\sqrt{x^2+3x+1}(2x+3)dx=\int\sqrt{t}dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\left(x^2+3x+1\right)^{\frac{3}{2}}+C$.

Відповідь. $\frac{2}{3}\left(x^2+3x+1\right)^{\frac{3}{2}}$. ■

Приклад 7. Знайти визначений інтеграл $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)dx$.

■ $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)dx=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\sin^2\frac{x}{2}dx=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{1-\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}dx-\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\cos x dx\right]=$

$=\frac{1}{2}\left[x\Big|_{\pi/6}^{\pi/4}-\sin x\Big|_{\pi/6}^{\pi/4}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}-\left(\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{\pi}{24}-\frac{\sqrt{2}-1}{4}=\frac{\pi-6\sqrt{2}+6}{24}.$

Відповідь. $\frac{\pi-6\sqrt{2}+6}{24}$. ■

Приклад 8. Знайти визначений інтеграл $\int\limits_0^1(2x-1)^6\,dx$.

■ Уведемо заміну: $t=2x-1$, тоді $t'=2$. Якщо $x=0$, то $t=-1$; якщо $x=1$, то $t=1$. Отже,

$\int\limits_0^1(2x-1)^6\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1(2x-1)^6\cdot 2dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 t^6dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^7}{7}\Big|_{-1}^1=\frac{1}{2}\left(\frac{1^7}{7}-\frac{(-1)^7}{7}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{7}.$

Відповідь. $\frac{1}{7}$. ■

Приклад 9. Знайти визначений інтеграл $\int\limits_1^e\ln x dx$.

■ Використаємо інтегрування частинами, прийнявши, що $u=\ln x$, $v'=1$, звідки $u'=\frac{1}{x}$, $v=x$. Маємо: $\int\limits_1^e\ln x dx=(\ln x\cdot x)\Big|_1^e-\int\limits_1^e\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)dx=(\ln e\cdot e-\ln 1\cdot 1)-\int\limits_1^e dx=e-x\Big|_1^e=e-(e-1)=1.$

Відповідь. 1. ■

Приклад 10. Знайти визначений інтеграл $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\sin 2x\sin x\,dx$.

■ $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\sin 2x\sin x\,dx=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{1}{2}(\cos(2x-x)-\cos(2x+x))dx=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x)dx=\frac{1}{2}\sin x\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}-$

$-\frac{1}{2}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\cos 3x\cdot\frac{1}{3}\cdot 3dx=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{6}\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\cos 3x\cdot 3dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{6}\sin 3x\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}=$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\left(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}(0-1)=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3\sqrt{3}-1}{12}.$

Відповідь. $\frac{3\sqrt{3}-1}{12}$. ■

Приклад 11. Установити відповідність між визначеними інтегралами (1–4) та їхніми числовими значеннями (А–Д).

1 $\int_1^3 \left(x^2+2\right)dx$	**А** $\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{48}$
2 $\int_1^e \frac{3}{x}dx$	**Б** 3
3 $\int_{\pi/8}^{\pi/6} \sin^2 2x \cos 2x\, dx$	**В** $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{8}$
4 $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin x \cos x\, dx$	**Г** $\frac{1}{8}$
	Д $12\frac{2}{3}$

1. $\int_1^3 \left(x^2+2\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\Big|_1^3 = \frac{3^3}{3}+6-\frac{1}{3}-2 = 12\frac{2}{3} \rightarrow$ **Д**

2. $\int_1^e \frac{3}{x}dx = 3\int_1^e \frac{1}{x}dx = 3\ln|x|\Big|_1^e = 3(\ln e - \ln 1) = 3 \rightarrow$ **Б**

3. $\int_{\pi/8}^{\pi/6} \sin^2 2x \cos 2x\, dx$. Уведемо заміну $t = \sin 2x$, тоді $dt = 2\cos 2x dx$ і $\cos 2x dx = \frac{dt}{2}$. Обчислимо нові межі інтегрування: якщо $x = \frac{\pi}{8}$, то $t = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; якщо $x = \frac{\pi}{6}$, то $t = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Таким чином,

$$\int_{\pi/8}^{\pi/6} \sin^2 2x \cos 2x\, dx = \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} t^2 \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} t^2 dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{6}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right) = \frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{48} \rightarrow \textbf{А}$$

4. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin x \cos x\, dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{2}\cdot 2\sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin 2x dx$. Уведемо позначення: $t = 2x$, тоді $x = \frac{t}{2}$, $dx = \frac{dt}{2}$. Якщо $x = \frac{\pi}{6}$, то $t = \frac{\pi}{3}$; якщо $x = \frac{\pi}{4}$, то $t = \frac{\pi}{2}$. Отже, $\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin t \frac{dt}{2} = \frac{1}{4}\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin t dt =$

$$= \frac{1}{4}(-\cos t)\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = -\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4}\left(0-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \rightarrow \textbf{Г}$$

Відповідь.

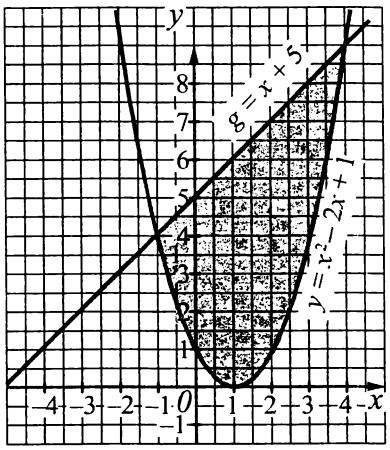
	А	Б	В	Г	Д
1					☒
2		☒			
3	☒				
4				☒	

■

Приклад 12. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 2x + 1$, $g = x + 5$.

■ Розв'язавши рівняння $x^2 - 2x + 1 = x + 5$; $x^2 - 3x - 4 = 0$; $x_1 = 4$, $x_2 = -1$, знаходимо абсциси точок перетину графіків даних функцій (межі інтегрування): 4 і –1. На відрізку $[-1; 4]$ $g(x) \geq y(x)$ (див. рис. 4). Тому площа фігури, обмеженої графіками даних функцій дорівнює:

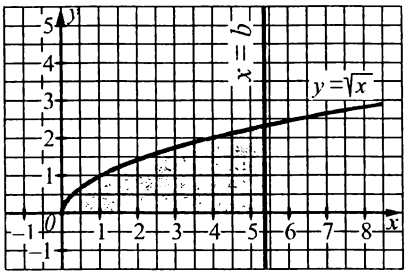
$$S = \int_{-1}^{4} \left(x+5-\left(x^2-2x+1\right)\right)dx = \int_{-1}^{4} \left(-x^2+3x+4\right)dx = \left(-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+4x\right)\Big|_{-1}^{4} = 20\frac{5}{6}.$$



■

Приклад 13. За яких значень b площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = b$ дорівнює 18?

■

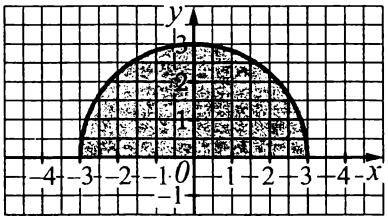


$S = \int\limits_0^b \sqrt{x}\,dx = \int\limits_0^b x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^b = \frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}}$. За умовою, $S = 18$. Отже, $\frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}} = 18$; $b^{\frac{3}{2}} = 27$; $b = 27^{\frac{2}{3}}$; $b = 9$.

Відповідь. 9. ■

Приклад 14. Обчислити значення визначеного інтеграла $\int\limits_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,dx$.

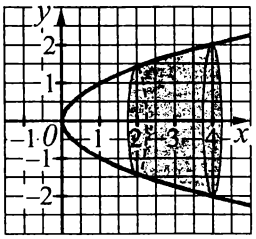
■ Значення визначеного інтеграла $\int\limits_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,dx$ можна розглядати якф площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{9 - x^2}$, $x = -3$, $x = 3$. Перетворимо функцію $y = \sqrt{9 - x^2}$. Піднесемо обидві частини $y = \sqrt{9 - x^2}$ до квадрату, врахувавши, що $y \geq 0$ і $-3 \leq x \leq 3$. Одержимо: $y^2 = 9 - x^2$; звідси $x^2 + y^2 = 9$. Це є рівняння півкола з центром у точці (0; 0) і радіусом $R = 3$. Отже, досить знайти площу відповідного півкруга: $\int\limits_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\,dx = S = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 3^2 = \frac{9\pi}{2} = 4{,}5\pi$.



■

Приклад 15. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі абсцис фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 2$ і $x = 4$.

■ $V = \pi\int\limits_2^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi\int\limits_2^4 x dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_2^4 = \pi(8-2) = 6\pi.$



Відповідь. 6π. ■

Завдання 26.1–26.23 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

26.1. Знайти загальний вигляд первісних для функції $f(x) = x^{10} - x^8 + x + 13$.

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = 10x^9 - 8x^7 + 1 + C$	$F(x) = \frac{x^{11}}{11} - \frac{x^9}{9} + \frac{x^2}{2} + 13x + C$	$F(x) = \frac{x^{11}}{11} - \frac{x^9}{9} + \frac{x^2}{2} + 13 + C$	$F(x) = 11x^{11} - 9x^9 + 2x^2 + 13x + C$	$F(x) = -\frac{x^{11}}{11} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^2}{2} - 13x + C$

26.2. Знайти загальний вигляд первісних для функції $f(x) = -4\cos x$.

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = -4\sin x + C$	$F(x) = 4\sin x + C$	$F(x) = -4\cos x + C$	$F(x) = 4\cos x + C$	$F(x) = -16\cos x + C$

26.3. Яка з функцій задовольняє рівняння $f'(x) = \frac{10}{\sin^2 x}$?

А	Б	В	Г	Д
$f(x) = 10\operatorname{tg} x$	$f(x) = -10\operatorname{ctg} x$	$f(x) = -10\operatorname{tg} x$	$f(x) = -\frac{1}{10}\operatorname{ctg} x$	$f(x) = 10\operatorname{ctg} x$

26.4. Для функції $f(x) = \sin x$ знайти первісну $F(x)$, графік якої проходить через точку $O(0; 0)$.

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = \sin x$	$F(x) = \cos x$	$F(x) = \cos x + 1$	$F(x) = 1 - \cos x$	$F(x) = \cos x - 1$

26.5. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 x^{20} dx$.

А	Б	В	Г	Д
19	21	20	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{21}$

26.6. Обчислити $\int_0^1 (x^2 - 4x)dx$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	$-\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$

26.7. Обчислити $\int_0^1 2x^5 dx$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{4}$

26.8. $\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}dx = ...$

А	Б	В	Г	Д
$2\cos x\Big\|_0^{\pi}$	$-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\Big\|_0^{\pi}$	$\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\Big\|_0^{\pi}$	$-2\cos\frac{x}{2}\Big\|_0^{\pi}$	$2\cos\frac{x}{2}\Big\|_0^{\pi}$

26.9. Обчислити: $80\left(\sqrt{3}+1\right)\int_{\frac{\pi}{20}}^{\frac{\pi}{10}} \sin\left(10x+\frac{\pi}{3}\right)dx$.

А	Б	В	Г	Д
0,8	$\frac{1-\sqrt{3}}{20}$	–0,8	8	–8

26.10. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 2t + 1$. Знайти закон руху тіла $S(t)$, якщо $S(1) = 3$.

А	Б	В	Г	Д
$S(t) = t^2 + t + 3$	$S(t) = t^2 + t$	$S(t) = t^2 + t + 1$	$S(t) = t^2 + t + 2$	$S(t) = t^2 + t - 1$

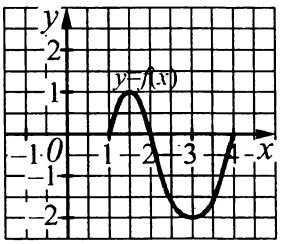
26.11. Вказати інтеграл для обчислення площі фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 0$ і $x = 2$.

А	Б	В	Г	Д
$\int_0^4 x^2 dx$	$\int_0^2 \left(x^2 - x\right)dx$	$\int_0^2 2xdx$	$\int_0^2 \frac{x^3}{3}dx$	$\int_0^2 x^2 dx$

26.12. Вказати формулу для обчислення площі S фігури, обмеженої лініями $y = x^2$ і $y = x$.

А	Б	В	Г	Д
$S = \int_0^1 \left(x^2 - x\right)dx$	$S = \int_0^1 \left(x^2 + x\right)dx$	$S = \int_0^1 \left(x - x^2\right)dx$	$S = \int_0^1 x^2 dx$	$S = \int_0^1 xdx$

26.13. Вказати формулу для обчислення площі фігури, зображеної на рисунку.



А	Б	В	Г	Д
$S=\int_1^4 f(x)dx$	$S=2\int_1^4 f(x)dx$	$S=\int_1^2 f(x)dx-\int_2^4 \lvert f(x)\rvert dx$	$S=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx$	$S=\int_1^2 f(x)dx-\int_2^4 f(x)dx$

26.14. Знайти загальний вигляд первісних для функції $f(x) = \cos^2 x$.

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = -\sin^2 x + C$	$F(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C$	$F(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$	$F(x)=\frac{x}{2}+\sin 2x+C$	$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x+C$

26.15. Обчислити інтеграл $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$.

А	Б	В	Г	Д
3	1,5	6	2	0,75

26.16. Використовуючи геометричний зміст інтеграла, обчислити $\int_{-4}^{4} \sqrt{16-x^2}\,dx$.

А	Б	В	Г	Д
8	16	8π	16π	32π

26.17. Вказати формулу для обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, утвореної лініями $y=\sqrt{\cos x}$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{4}$.

А	Б	В	Г	Д
$V=\pi\sin x\Big\vert_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$	$V=\pi\cos x\Big\vert_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$	$V=\frac{\pi}{2\sqrt{\cos x}}\Big\vert_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$	$V=\pi\sqrt{\cos x}\Big\vert_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$	$V=\pi\sqrt{\sin x}\Big\vert_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$

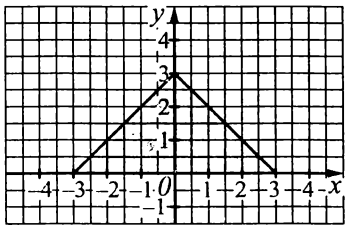
26.18. Вказати первісну функцію для функції $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$.

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = \operatorname{ctg}^2 x + C$	$F(x) = \operatorname{tg} x - x$	$F(x) = \operatorname{ctg} x - x$	$F(x) = \operatorname{ctg} x + x$	$F(x) = \operatorname{tg} x + x$

26.19. Вказати формулу для обчислення площі фігури, обмеженої частинами параболи $y = x^2 - 4$ й осі абсцис.

А	Б	В	Г	Д
$S = \int_{-4}^{4} (x^2 - 4)\,dx$	$S = \int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\,dx$	$S = -\int_{-2}^{2} \left(\frac{x^3}{3} - 4x\right) dx$	$S = -\int_{-4}^{4} (x^2 - 4)\,dx$	$S = -\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\,dx$

26.20. Вказати формулу для обчислення площі трикутника, заштрихованого на рисунку.



А	Б	В	Г	Д
$S = \int_{-3}^{3} (\lvert x\rvert - 3)\,dx$	$S = \int_{-3}^{3} (\lvert x\rvert + 3)\,dx$	$S = \int_{-3}^{3} (3 - \lvert x\rvert)\,dx$	$S = \int_{-3}^{3} \lvert 3 - x\rvert\,dx$	$S = \int_{-3}^{3} \lvert x + 3\rvert\,dx$

26.21. Серед наведених інтегралів вказати той, значення якого найменше.

А	Б	В	Г	Д
$\int_0^1 dx$	$\int_0^1 x\,dx$	$\int_0^1 x^2\,dx$	$\int_0^1 x^3\,dx$	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

26.22. Обчислити інтеграл $\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x\,dx$.

А	Б	В	Г	Д
-4π	4π	-2π	2π	0

26.23. Яка з наведених функцій є первісною для функції $y = 2|x|$?

А	Б	В	Г	Д
$y = x^2$	$y = \lvert x^2\rvert$	$y = -x^2$	$y = x\lvert x\rvert$	$y = -x\lvert x\rvert$

Завдання 26.24–26.32 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

26.24. Установити відповідність між визначеними інтегралами (1–4) та їхніми числовими значеннями (А–Д).

1 $\int_0^1 2x^3 dx$

2 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x\, dx$

3 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos x\, dx$

4 $\int_0^1 (x+1)dx$

А $\frac{1}{2}$

Б $\frac{1}{4}$

В 2

Г $1\frac{1}{2}$

Д 1

26.25. Установити відповідність між функціями $f(x)$ (1–4) та їх первісними $F(x)$ (А–Д).

1 $f(x) = x^3$

2 $f(x) = \frac{1}{x^3}$

3 $f(x) = 6x$

4 $f(x) = \frac{6}{x}$

А $F(x) = 3x^2 + C$

Б $F(x) = 6\ln x + C$

В $F(x) = \frac{6}{x^2} + C$

Г $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$

Д $F(x) = -\frac{1}{2x^2} + C$

26.26. Установити відповідність між функціями $f(x)$ (1–4) та їх первісними $F(x)$ (А–Д).

1 $f(x) = \cos\frac{x}{4} + \sin 4x$

2 $f(x) = \cos 4x + \sin\frac{x}{4}$

3 $f(x) = \frac{1}{4}\cos\frac{x}{4} + 4\sin 4x$

4 $f(x) = 4\cos 4x + \frac{1}{4}\sin\frac{x}{4}$

А $F(x) = \sin\frac{x}{4} - \cos 4x + C$

Б $F(x) = \sin 4x - \cos\frac{x}{4} + C$

В $F(x) = 16\sin 4x - \frac{1}{16}\cos\frac{x}{4} + C$

Г $F(x) = 4\sin\frac{x}{4} - 4\cos\frac{x}{4} + C$

Д $F(x) = 4\sin\frac{x}{4} - \frac{1}{4}\cos 4x + C$

26.27. Установити відповідність між функціями (1–4), заданими на відрізку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, та їх первісними (А–Д) на цьому відрізку.

1 $f(x)=\operatorname{tg}x$

2 $f(x)=\operatorname{ctg}x$

3 $f(x)=\dfrac{2}{\sin 2x}$

4 $f(x)=-\dfrac{2}{\sin 2x}$

А $F(x)=\ln\operatorname{tg}x+C$

Б $F(x)=\ln\operatorname{ctg}x+C$

В $F(x)=\ln\sin x+C$

Г $F(x)=-\ln\sin x+C$

Д $F(x)=-\ln\cos x+C$

26.28. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх розв'язками (А–Д) — функціями, які задовольняють рівняння.

1 $f'(x)=\dfrac{4}{\cos^2 4x}$

2 $f'(x)=\dfrac{16}{\cos^2 4x}$

3 $f'(x)=-\dfrac{32\cos 4x}{\sin^3 4x}$

4 $f'(x)=\dfrac{4}{\sin^2 4x}$

А $f(x)=\dfrac{4}{\sin^2 4x}+C$

Б $f(x)=\dfrac{4}{\cos^2 4x}+C$

В $f(x)=4\operatorname{tg}4x+C$

Г $f(x)=-\operatorname{ctg}4x+C$

Д $f(x)=\operatorname{tg}4x+C$

26.29. Установити відповідність між визначеними інтегралами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\int\limits_0^1 x^3dx$

2 $\int\limits_0^1 x^2dx$

3 $\int\limits_0^1 xdx$

4 $\int\limits_0^1 \dfrac{xdx}{5}dx$

А $\dfrac{1}{10}$

Б $\dfrac{1}{5}$

В $\dfrac{1}{4}$

Г $\dfrac{1}{3}$

Д $\dfrac{1}{2}$

26.30. Установити відповідність між визначеними інтегралами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\int\limits_0^2 e^{\frac{x}{2}}dx$

2 $\int\limits_0^2 \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{2}dx$

3 $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} e^{2x}dx$

4 $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{e^{2x}}{2}dx$

А $\dfrac{e}{4}-\dfrac{1}{4}$

Б $\dfrac{e}{2}-\dfrac{1}{2}$

В $e-1$

Г $2e-2$

Д $4e-4$

26.31. Установити відповідність між визначеними інтегралами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx$

2 $\int\limits_{0}^{\pi} \sin 2x dx$

3 $\int\limits_{0}^{\pi} \cos\frac{x}{2} dx$

4 $\int\limits_{-\pi}^{0} \sin x dx$

А –2

Б –1

В 0

Г 1

Д 2

26.32. Установити відповідність між лініями, заданими рівняннями (1–4), та об'ємами тіл (А–Д), утворених у результаті обертання цих ліній навколо осі x.

1 $y = \sqrt{x}$, де $x \in [-2; 2]$

2 $y = \sqrt{\sin x}$, де $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

3 $y = \frac{1}{\cos x}$, де $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

4 $y = \frac{1}{\sin x}$, де $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$

А $0{,}5\pi$

Б π

В $1{,}5\pi$

Г $\sqrt{3}\pi$

Д 4π

Розв'яжіть завдання 26.33–26.42. Відповідь запишіть десятковим дробом.

26.33. Точка рухається прямолінійно з прискоренням $a(t) = 12t^2 + 4$. Знайти закон руху $S(t)$ точки, якщо в момент часу $t = 1$ с її швидкість дорівнювала 10 м/с, а $S(1) = 12$ м. У відповідь записати $S(3)$.

26.34. Обчислити інтеграл $12\int\limits_{2}^{3} \frac{1-x^4}{1-x} dx$.

26.35. Обчислити інтеграл $3\int\limits_{4}^{7} \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$.

26.36. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = 8x - 6x^2$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$, $y = 0$.

26.37. Обчислити площу фігури, обмежену лініями $y = 6 - 2x$, $y = 6 + x - x^2$.

26.38. Обчислити з точністю до 0,01 площу фігури, обмежену лініями $y = x^2$, $y = x^3$.

26.39. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $f(x) = 8 - 0{,}5x^2$, дотичною до нього в точці $x = -2$ і прямою $x = 1$.

26.40. Знайти об'єм V тіла обертання, утвореного при обертанні навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y=\sqrt{x}$ і $y=x$. У відповідь записати $\frac{3V}{\pi}$.

26.41. Знайти найменше значення інтеграла $\int_0^a \cos\frac{x}{2}dx$, $a\in R$.

26.42. Знайти меншу з площ кожної з фігур, на які пряма $y=x+4$ ділить фігуру, обмежену лініями $y=\frac{1}{2}x^2$ і $y=8$.

Тема 27. Елементи комбінаторики

Множини

Поняття множини належить до основних понять математики. Йому не дають означення.

Множину вважають заданою, якщо вказано властивість, яку мають усі її елементи і не мають жодні інші об'єкти. Наприклад, множина учнів даного класу, множина дерев у даному саду, множина парних чисел.

Кожний об'єкт, який входить до множини, називають *елементом* цієї множини. Множину, яка не містить жодного елемента, називають *порожньою* множиною.

Множини позначають великими буквами латинського алфавіту, а їхні елементи — малими літерами латинського алфавіту. Порожню множину позначають символом «∅». Запис $a \in A$ означає, що елемент a належить множині A, а запис $b \notin A$ означає, що елемент b не належить множині A.

Множини бувають скінченні та нескінченні. Наприклад, множина літер українського алфавіту скінченна. Для скінченної множини A через $m(A)$ позначають число її елементів. Число елементів порожньої множини дорівнює 0. Множина натуральних чисел, множина простих чисел, множина точок прямої — нескінченні множини.

Іноді множину записують, вказуючи на властивість кожного її елемента: $B = \{x | P(x)\}$. Наприклад, $A = \left\{ x \middle| x = \underset{k \in Z}{5k} \right\}$ — множина всіх цілих чисел, кратних 5.

Якщо кожний елемент множини A є елементом множини B, то множину A називають *підмножиною* множини B. Позначають: $A \subset B$ або $B \supset A$. Кожна множина є підмножиною сама собі: $A \subset A$. Порожня множина є підмножиною будь-якої множини: $\varnothing \subset A$.

Дві множини називають *рівними*, якщо вони складаються з однакових елементів. Наприклад, A — множина коренів рівняння $x^2 = 36$, B — множина коренів рівняння $|x| = 6$. Тоді $A = \{-6; 6\}$ і $B = \{-6; 6\}$. Отже, множини A та B рівні ($A = B$).

Перерізом (*добутком*) множин A та B називають множину C, яка складається з усіх тих і лише тих елементів, які належать кожній з даних множин. Позначають: $C = A \cap B$. Якщо $x \in C$, то $x \in A$ і $x \in B$, і навпаки, якщо $x \in A$ і $x \in B$, то $x \in C$. На рисунку 1 затушована частина відповідає множині $C = A \cap B$.

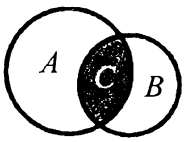


Рис. 1

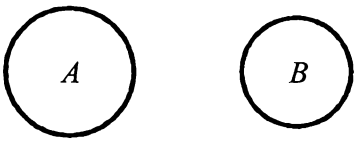


Рис. 2

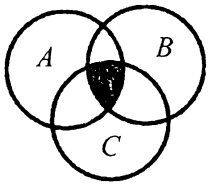


Рис. 3

Якщо множини A та B не мають спільних елементів, то перерізом цих множин є порожня множина (рис. 2): $A \cap B = \varnothing$. Наприклад, якщо A, B і C — множини учнів класу, які розв'язали відповідно задачу з алгебри, з геометрії, з хімії, то перерізом цих трьох множин є множина учнів класу, які розв'язали всі три задачі (рис. 3).

Об'єднанням (*сумою*) множин A та B називають множину C, яка складається з усіх тих і лише тих елементів, які належать хоча б одній із множин A або B. Позначають: $C = A \cup B$. Якщо $x \in C$, то $x \in A$ або $x \in B$, і навпаки, якщо $x \in A$ або $x \in B$, то $x \in C$.

Наприклад, об'єднанням множин гострокутних, тупокутних і прямокутних трикутників є множина всіх трикутників. На рис. 4 об'єднанням множин A та B є заштрихована множина. Якщо множини A та B мають спільні елементи, то кожен з них входить до об'єднання лише один раз.

Різницею двох множин A та B називають таку множину C, яка складається лише з усіх тих елементів множини A, які не належать множині B. Позначають: $C = A \setminus B$ або $C = A - B$.

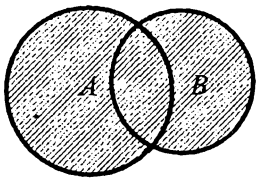


Рис. 4

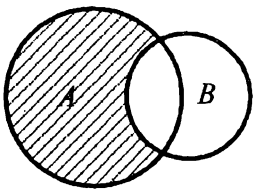


Рис. 5

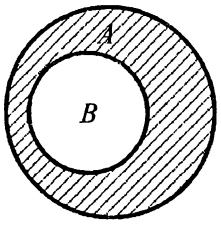


Рис. 6

На рис. 5 заштрихована множина C — різниця множин A та B.

Якщо множини A та B такі, що $B \subset A$, то множину C, яка містить лише усі елементи множини A, які не належать множині B, називають *доповненням* множини B до множини A.

На рис. 6 заштрихована частина — доповнення множини B до множини A: $C_A B$. Тоді $C \cup B = A$ і $C \cap B = \varnothing$. Доповнення множини B до множини A позначають ще й так: $\overline{B}$. Тоді $B \cup \overline{B} = A$, $B \cap \overline{B} = \varnothing$.

Комбінаторика

Задачі, у яких доводиться відповідати на запитання: скількома різними способами можна виконати те, що вимагається, називають *комбінаторними*.

Скінченні впорядковані множини — це скінченні множини, для яких суттєвим є порядок розміщення їх елементів. Для позначення впорядкованих множин використовують круглі дужки. Наприклад, $(a; b; c)$, $(1; 5; 9)$ — скінченні впорядковані множини. Множини $(1; 5; 9)$ і $(9; 5; 1)$ є різними впорядкованими множинами.

Добуток n перших натуральних чисел називають *n-факторіалом*:

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0; 1, \\ n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1, & n > 1. \end{cases}$$

Наприклад, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ (читають: «П'ять факторіал дорівнює сто двадцять»).

Таблиця деяких факторіалів:

$1! = 1$	$6! = 720$	
$2! = 1 \cdot 2 = 2$	$7! = 5040$	***Увага!***
$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$	$8! = 40320$	*За означенням,*
$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$	$9! = 362880$	$0! = 1$
$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$	$10! = 3628800$	

Перестановками з n елементів (P_n) називають будь-які впорядковані множини, кожна з яких містить усі n цих елементів, і які відрізняються одна від одної лише порядком розміщення елементів. Кількість усеможливих перестановок з n елементів обчислюють за формулою: $P_n = n!$. Наприклад, з елементів множини $A = \{3; 8; 5\}$ можна утворити перестановки $(5; 8; 3)$, $(5; 3; 8)$, $(3; 8; 5)$, $(3; 5; 8)$, $(8; 3; 5)$, $(8; 5; 3)$, усього $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (перестановок).

Розміщеннями (A_m^n), утвореними з множини m різних елементів по n елементів ($n \le m$, $n > 0$), називають будь-які впорядковані підмножини цієї множини, які містять n елементів. Розміщення відрізняються одне від одного або елементами, або порядком розташування елементів. Кількість усеможливих розміщень з m елементів по n обчислюють за формулою $A_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!}$.

Кількість розміщень з m елементів по n може бути обчислена за формулами:

$A_m^1 = m$,

$A_m^2 = m(m-1)$,

$A_m^3 = m(m-1)(m-2)$,

$A_m^4 = m(m-1)(m-2)(m-3)$,

.....

$A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1))$, $m \neq 0$, $m \leq n$, тобто кількість можливих розміщень з m елементів по n дорівнює добутку n послідовних чисел натурального ряду, найбільшим з яких є m. Наприклад, $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$, $A_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

Комбінацією з n елементів по m (C_m^n) називають n-елементну підмножину m-елементної множини ($n \leq m$). Кількість усеможливих комбінацій з m елементів по n обчислюють за формулою $C_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!n!}$. Справедлива й формула $C_m^n = \dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}$.

Комбінації мають такі властивості:

1. $C_m^n = C_m^{m-n}$ — властивість індексів.

Ця властивість дає можливість спростити визначення числа комбінацій у випадку, якщо $n > \dfrac{1}{2}m$.

Наприклад, $C_{30}^{28} = C_{30}^{30-28} = C_{30}^2 = \dfrac{30 \cdot 29}{1 \cdot 2} = 435$.

2. $C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^m = 2^m$.

Правило суми. Якщо елемент A можна вибрати m способами, а елемент B — n способами, то вибір елементу A або елементу B можна здійснити $(m + n)$ способами.

Правило добутку. Якщо елемент A можна вибрати m способами, а після кожного такого вибору елемент B можна вибрати n способами, то вибір пари $(A; B)$ в указаному порядку можна виконати $m \cdot n$ способами.

Приклад 1. Знайти переріз множин: **а)** A та B, якщо $A = \{7; 15; 20; 48; 68\}$, $B = \{12; 15; 18; 20; 88\}$; **б)** C та D, якщо C — множина прямокутників, D — множина ромбів.

■ **а)** $C = A \cap B = \{15; 20\}$; **б)** $P = C \cap D$, P — множина квадратів. ■

Приклад 2. Числовими проміжками задано множини $A = [1; 3]$, $B = [2; 5]$, $C = [3; 8]$, $D = [0; 6]$. Знайти: **а)** $A \cap B$; **б)** $C \cap D$; **в)** $B \cup D$; **г)** $A \cup B$; **д)** $(A \cup D) \cap (B \cup C)$; **е)** $(A \cup B) \cap (B \cup D)$.

■ **а)** $A \cap B = [1; 3] \cap [2; 5] = [2; 3]$;

б) $C \cap D = [3; 8] \cap [0; 6] = [3; 6]$;

в) $B \cup D = [2; 5] \cap [0; 6] = [0; 6]$;

г) $A \cup B = [1; 3] \cup [2; 5] = [1; 5]$;

д) $(A \cup D) \cap (B \cup C) = ([1; 3] \cup [0; 6]) \cap ([2; 5] \cup [3; 8]) = [0; 6] \cap [2; 8] = [2; 6]$;

е) $(A \cup B) \cap (B \cup D) = [1; 3] \cup [2; 5]) \cap ([2; 5] \cup [0; 6]) = [1; 5] \cap [0; 6] = [1; 5]$. ■

Приклад 3. Знайти різницю множин A та B, якщо: **а)** $A = \{3; 4; 13; 20; 25\}$, $B = \{13; 20\}$; **б)** $A = \{7; 8; 9\}$, $B = \{2; 3\}$; **в)** $A = \{3; 6\}$, $B = \{3; 6; 13\}$.

■ **а)** $C = A \setminus B = \{3; 4; 25\}$;

б) $C = A \setminus B = \{7; 8; 9\}$;

в) $C = A \setminus B = \varnothing$. ■

Приклад 4. Скільки семицифрових чисел, кратних 5, можна скласти з цифр 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, щоб цифри в числі не повторювались.

■ Щоб число, складене із заданих цифр, ділилось на 5, необхідно і достатньо, щоб цифра 5 була на останньому місці. Решта — шість цифр — можуть розміщуватися в будь-якому порядку на місцях,

що залишились. Отже, шукана кількість семицифрових чисел, кратних 5, дорівнює числу перестановок із 6 елементів, тобто $P = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

Відповідь. 720. ■

Приклад 5. На книжковій полиці розміщують 20 томів енциклопедії. Скількома способами їх можна розмістити так, щоб томи 12 і 13 не стояли поруч?

■ Усього книги можна розмістити 20! способами. Том 12 і 13 можна поставити поряд P_2 = способами. Усі інші 18 томів разом з цією парою можна розмістити P_{19} способами. Тоді за правилом добутку є $2 \cdot P_{19}$ таких способів. Отже, шукане число дорівнює $P_{20} - 2 \cdot P_{19} = 20! - 2 \cdot 19! = 20 \cdot 19! - 2 \cdot 19! = (20 - 2) \cdot 19! = 18 \cdot 19!$.

Відповідь. $18 \cdot 19!$ способів. ■

Приклад 6. Обчислити: **а)** $\frac{P_{12} - 10P_9}{P_{10}}$; **б)** $\frac{P_k}{P_{k-3}}$.

■ **а)** $\frac{P_{12} - 10P_9}{P_{10}} = \frac{12! - 10 \cdot 9!}{10!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10! - 10!}{10!} = \frac{10!(12 \cdot 11 - 1)}{10!} = 131;$

б) $\frac{P_k}{P_{k-3}} = \frac{k!}{(k-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-3)(k-2)(k-1)k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-3)} = (k-2)(k-1)k.$

Відповідь. **а)** 131; **б)** $(k-2)(k-1)k$. ■

Приклад 7. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, якщо цифри не повторюються?

■ Маємо розміщення із 7 елементів по 4: $A_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

Відповідь. 840. ■

Приклад 8. Розв'язати рівняння: **а)** $A_x^5 = 18A_{x-2}^4$; **б)** $A_{x-1}^2 = 20$.

■ **а)** $A_x^5 = 18A_{x-2}^4$, $x \geq 5$, $x - 2 \geq 4$. Отже, $x \geq 6$, $x \in N$.

$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 18(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$;

$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) - 18(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = 0$;

$(x-2)(x-3)(x-4)(x(x-1) - 18(x-5)) = 0$.

Оскільки $x \geq 6$, то $x \neq 2$, $x \neq 3$, $x \neq 4$. Отже, маємо:

$x^2 - x - 18x + 90 = 0$; $x^2 - 19x + 90 = 0$; $x_1 = 10$, $x_2 = 9$. x_1 і x_2 задовольняють умову $x \geq 6$, $x \in N$.

Отже, корені рівняння — 10 і 9.

б) $x - 1 \geq 2$, $x \geq 3$, $x \in N$.

$A_{x-1}^2 = 20$; $(x-1)(x-2) = 20$; $x^2 - 3x - 18 = 0$; $x_1 = -3$, $x_2 = 6$.

$x_1 = -3$ не задовольняє умову $x \geq 3$. Отже, $x = 6$ — корінь рівняння.

Відповідь. **а)** 9; 10; **б)** 6. ■

Приклад 9. Скількома різними способами з класу, в якому навчається 24 учні, можна вибрати 4 учні для чергування?

■ Різними будуть ті групи учнів, які відрізнятимуться хоча б однією особою, порядок у групі не істотний. Отже, маємо справу з кількістю комбінацій із 24 елементів по 4: $C_{24}^4 = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 10626$ способів вибрати учнів для чергування.

Відповідь. 10626 способів. ■

Приклад 10. Множина M складається з трьох елементів: {■; ▲; ●}. Знайти P_3; A_3^2; C_3^2.

■ Усеможливих перестановок цієї множини існує $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$:

{■, ▲, ●}, {■, ●, ▲}, {▲, ■, ●}, {▲, ●, ■}, {●, ■, ▲}, {●, ▲, ■}.

Розміщень з множини M по два елементи існує $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 6$:

{■, ▲}, {■, ●}, {▲, ■}, {▲, ●}, {●, ■}, {●, ▲}.

Комбінацій з множини M по два елементи існує $C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$:

{■, ▲}, {■, ●}, {▲, ●}. ■

Приклад 11. Скільки п'ятизначних чисел, не кратних п'яти, можна скласти з цифр 3, 4, 5, 6, 7 без повторень цифр у кожному з них?

А	Б	В	Г	Д
96	156	120	5	24

■ Усіх таких чисел, разом з кратними 5, є P_5: $P_5 = 5!$. Для чисел, кратних 5, цифра 5 є останньою цифрою. Таких чисел є $P_4 = 4!$. Отже, шуканих чисел є $5! - 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (5-1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 96$.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 12. Із 8 чоловіків і 6 жінок потрібно утворити таку комісію, щоб до її складу входило 2 чоловіки і 3 жінки. Скількома способами це можна зробити?

■ C_8^2 — кількість способів утворення чоловічої частини комісії; C_6^3 — кількість способів утворення жіночої частини комісії. За правилом добутку: $C_8^2 \cdot C_6^3 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 560$ — способів утворення комісії.

Відповідь. 560 способами. ■

Приклад 13. Спростити вираз $\frac{P_{2x+1}}{A_{2x-1}^{n-1} \cdot P_{2x-n}}$.

■ Використаємо формулу $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$, тоді $A_{2x-1}^{n-1} = \frac{(2x-1)!}{((2x-1)-(n-1))!} = \frac{(2x-1)!}{(2x-n)!}$. Урахувавши, що x та n можуть набувати лише натуральних значень і те, що $(2x-n) \in N$, одержимо:

$$\frac{P_{2x+1}}{A_{2x-1}^{n-1} \cdot P_{2x-n}} = \frac{(2x+1)! \cdot \cancel{(2x-n)!}}{(2x-1)! \cdot \cancel{(2x-n)!}} = \frac{(2x+1)!}{(2x-1)!} = \frac{(2x+1) \cdot 2x \cdot \cancel{(2x-1)!}}{\cancel{(2x-1)!}} = 2x(2x+1).$$

Відповідь. $2x(2x+1)$. ■

Приклад 14. Розв'язати рівняння $\frac{A_{x+2}^{n+2} \cdot P_{x-n}}{P_x} = 110$.

■ Виконаємо перетворення лівої частини рівняння:

$$\frac{A_{x+2}^{n+2} \cdot P_{x-n}}{P_x} = \frac{(x+2)!(x-n)!}{((x+2)-(n+2))! \cdot x!} = \frac{(x+2)!(x-n)!}{(x-n)! \cdot x!} = \frac{(x+2)!}{x!} = \frac{(x+2)(x+1) \cdot \cancel{x!}}{\cancel{x!}} = (x+2)(x+1).$$

Урахувавши, що x та n можуть набувати лише натуральних значень і те, що $(x-n) \in N$, одержимо: $(x+2)(x+1) = 110$; $x^2 + 3x - 108 = 0$; $x_1 = -12$, $x_2 = 9$. $x_1 = -12$ не задовольняє умову. Отже, $x = 9$, якщо $n \in N$ і $n < 9$; рівняння не має коренів, якщо $n \in N$ і $n \geq 9$.

Відповідь. 9, якщо $n \in N$ і $n < 9$; $\varnothing$, якщо $n \in N$ і $n \geq 9$. ■

Приклад 15. Розв'язати рівняння: **а)** $\frac{C_{2x}^{x+1}}{C_{2x+1}^{x-1}} = 0{,}6$; **б)** $C_{20}^{x} = C_{20}^{3x-12}$.

■ **а)** $C_{2x}^{x+1} = C_{2x}^{2x-(x+1)} = C_{2x}^{x-1} = \frac{(2x)!}{(x-1)!(2x-(x-1))!} = \frac{(2x)!}{(x-1)!(x+1)!}$. $C_{2x+1}^{x-1} = \frac{(2x+1)!}{(x-1)!(x+2)!}$. Врахувавши, що x може набувати лише натуральних значень і $2x > x + 1$; $x > 1$, одержимо:

$$\frac{C_{2x}^{x+1}}{C_{2x+1}^{x-1}} = \frac{(2x)!}{(x-1)!(x+1)!} : \frac{(2x+1)!}{(x-1)!(x+2)!} = \frac{(2x)!\,\cancel{(x-1)!}\,(x+2)!}{\cancel{(x-1)!}\,(x+1)!(2x+1)!} = \frac{\cancel{(2x)!}\,\cancel{(x+1)!}\,(x+2)}{\cancel{(x+1)!}\,(2x+1)\,\cancel{(2x)!}} = \frac{x+2}{2x+1}.$$

Тоді: $\frac{x+2}{2x+1} = 0{,}6$. Отже, $5x + 10 = 6x + 3$, $x = 7$;

б) $C_{20}^{x} = C_{20}^{3x-12}$. Врахувавши, що x може набувати лише натуральних значень і $x < 20$; $3x - 12 < 20$; $x < 10\frac{2}{3}$, одержимо:

1. $x = 3x - 12$, $x = 6$.
2. $x + 3x - 12 = 20$, $4x = 32$, $x = 8$.

$x = 6$ і $x = 8$ задовольняють умови задачі. Отже, корені рівняння — 6 і 8.

Відповідь. **а)** 7; **б)** 6; 8. ■

Завдання 27.1–27.24 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

27.1. Є 5 різних олівців і 7 різних ручок. Скількома різними способами можна утворити набір з однієї ручки й одного олівця?

А	Б	В	Г	Д
7! + 5!	5^7	7^5	5 · 7	7 + 5

27.2. У їдальні є 3 перші страви, 5 других і 2 треті страви. Скількома способами можна скласти з них обід?

А	Б	В	Г	Д
17	10	30	15	11

27.3. Скількома способами можна скласти список з 8 учнів?

А	Б	В	Г	Д
8^2	8^8	8	1 + 2 + 3 + ... + 8	1 · 2 · 3 · ... · 8

27.4. Скількома способами можна з 30 учнів вибрати трьох чергових?

А	Б	В	Г	Д
P_{30}	30 · 3	30 + 29 + 28	A_{30}^3	C_{30}^3

27.5. Із класу, в якому навчається 18 учнів, вибирають трьох делегатів на шкільну конференцію. Скількома способами це можна зробити?

А	Б	В	Г	Д
4896	2448	816	1224	1632

27.6. Скількома способами можна розсадити 6 учнів за круглим столом?

А	Б	В	Г	Д
720	36	120	5040	60

27.7. Скільки чотирицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 3, 5, 7 і 9, якщо цифри в числі не повторюються?

А	Б	В	Г	Д
A_5^4	C_5^4	P_5	P_4	4^5

27.8. Скільки існує звичайних правильних дробів, у яких чисельники і знаменники прості числа — 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 і 23?

А	Б	В	Г	Д
19	18	144	72	36

27.9. Скількома способами групу із 15 осіб можна розділити на дві групи так, щоб в одній було 11 осіб, а в іншій — 4?

А	Б	В	Г	Д
C_{15}^4	A_{15}^{11}	A_{11}^4	$A_{15}^{11} - P_4$	$C_{15}^{11} \cdot C_{15}^4$

27.10. Скільки існує різних телефонних номерів, які містять п'ять цифр?

А	Б	В	Г	Д
5!	1 + 2 + 3 + 4 + 5	5^5	9^5	10^5

27.11. Скільки існує різних телефонних номерів, які містять сім цифр і не починаються з нуля?

А	Б	В	Г	Д
9!	9^7	10^7	$9 \cdot 10^6$	10!

27.12. Скільки є чисел, кратних числу 5, серед п'ятицифрових чисел, складених з цифр 1, 3, 5, 7 і 9 без повторення?

А	Б	В	Г	Д
3!	A_5^4	C_5^4	5!	4!

27.13. Скільки існує точок у координатному просторі, координати яких є цілими одноцифровими додатними числами?

А	Б	В	Г	Д
3^{10}	3^9	9^3	10^3	A_9^3

27.14. Скільки існує шестицифрових чисел, усі цифри в яких непарні?

А	Б	В	Г	Д
5^6	6^5	5!	6!	A_6^5

27.15. Скільки чотирицифрових чисел, кратних 5, у яких усі цифри різні, можна записати, використовуючи цифри 5, 6, 7, 8 і 9?

А	Б	В	Г	Д
120	60	6	24	720

27.16. З п'яти різних томів прози і шести різних томів віршів потрібно вибрати 2 томи прози і 4 томи віршів. Скількома способами можна це зробити?

А	Б	В	Г	Д
A_4^6	$A_5^2 \cdot C_6^4$	$C_5^2 \cdot C_6^4$	$A_5^2 \cdot A_6^4$	$C_5^2 + C_6^4$

27.17. Збори з 20 осіб обирають голову, секретаря і трьох членів редакційної комісії. Скількома способами можна це зробити?

А	Б	В	Г	Д
$C_{20}^2 \cdot C_{18}^3$	$A_{20}^2 \cdot C_{18}^3$	$A_{20}^2 \cdot A_{18}^3$	$A_{20}^2 + A_{18}^3$	$A_{20}^2 + A_{18}^3$

27.18. Автомобільний номер складається з двох букв (усього використовують 30 букв) і чотирьох цифр (використовують усі 10 цифр). Скільки існує таких номерів?

А	Б	В	Г	Д
$30^2 \cdot 4^{10}$	$2^{30} \cdot 10^4$	$2^{30} \cdot 4^{10}$	$30^4 \cdot 10^2$	$30^2 \cdot 10^4$

27.19. У шкільному розкладі на понеділок є шість різних уроків, серед них є алгебра та геометрія. Скількома способами можна скласти розклад уроків на цей день, щоб уроки математики були поруч?

А	Б	В	Г	Д
C_6^2	P_5	P_6	$P_5 \cdot P_2$	A_6^2

27.20. Скільки п'ятицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4 і 5 без повторення, щоб парні цифри не були поруч?

А	Б	В	Г	Д
P_5	$P_4 \cdot P_2$	$P_5 - P_4 \cdot P_2$	$P_4 - P_3 \cdot P_2$	$P_3 \cdot P_2$

27.21. Скількома способами 5 хлопчиків і 5 дівчаток можуть зайняти в театрі в одному ряді місця з 1 по 10 так, щоб хлопчики сиділи на непарних місцях, а дівчатка — на парних?

А	Б	В	Г	Д
$5! \cdot 5!$	$10!$	$5!$	$10! \cdot 5!$	$5! + 5!$

27.22. Поїзд, у якому їдуть 300 пасажирів, робить k зупинок. Скількома способами можуть вийти пасажири на цих зупинках?

А	Б	В	Г	Д
$300k$	300^k	k^{300}	$300 + k$	$300k!$

27.23. У ліфт 12-поверхового будинку зайшло на першому поверсі 10 осіб. Скількома способами вони можуть вийти з ліфта?

А	Б	В	Г	Д
12^{11}	10^{11}	10^{12}	12^{10}	11^{10}

27.24. У стандартному вигляді розкладу бінома $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^5$ вказати коефіцієнт біля x.

А	Б	В	Г	Д
40	80	20	240	160

Завдання 27.25–27.33 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

27.25. Установити відповідність між задачами (1–4) та відповідями до них (А–Д).

1 Скількома способами можна вибрати двох чергових із шести учнів класу?

2 Скількома способами можна вибрати із 6 учнів класу голову зборів і секретаря?

3 Скількома способами можна вишикувати в ряд 6 учнів класу?

4 Із коробки з шістьма різнокольоровими олівцями навмання беруть один олівець, малюють ним і ставлять на місце, потім знову навмання беруть один олівець, малюють ним і ставлять на місце. Скільки різних розмальовок може утворитись?

А $\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}$

Б $6\cdot 5$

В $6+5+4+3+2+1$

Г 6^2

Д $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

27.26. Установити відповідність між виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 $\frac{10!}{8!}$

2 $\frac{5!}{2}$

3 $4\cdot 4!-4^2$

4 $3!+4!$

А 30

Б 40

В 60

Г 80

Д 90

27.27. Установити відповідність між позначеннями кількостей сполук (1–4) та виразами, за якими їх обчислюють (А–Д).

1 A_n^k

2 C_n^k

3 $\frac{P_k}{P_n}$

4 A_n^{n-k}

А $\frac{n!}{(n-k)!}$

Б $k!\cdot n!$

В $\frac{n!}{k!}$

Г $\frac{k!}{n!}$

Д $\frac{n!}{(n-k)!k!}$

27.28. Установити відповідність між заданими позначеннями кількостей сполук (1–4) та їх числовими значеннями (А–Д).

1 C_5^2

2 A_5^2

3 C_{30}^{29}

4 P_4

А 36

Б 30

В 24

Г 20

Д 10

27.29. Установити відповідність між записами (1–4) та їх доповненнями (А–Д) до правильних тверджень.

1 Якщо є 5 видів конвертів без марок та 4 види марок, то вибір конверта та марки можна здійснити ... способами

2 Якщо на тарілці є 6 різних груш і 3 різних яблука, то вибір одного фрукту можна здійснити ... способами

3 Якщо на полиці є 12 різних підручників з алгебри, 6 різних підручників з геометрії та 7 різних підручників з фізики, то вибір одного підручника з математики можна здійснити ... способами

4 Якщо на вершину гори веде 5 доріг, то вийти на гору й опуститися з неї можна ... способами

А 9
Б 18
В 20
Г 25
Д 72

27.30. Установити відповідність між записами (1–4) та їх доповненнями (А–Д) до правильних тверджень.

1 Множину $\{a, b, c\}$ можна впорядкувати ... способами

2 Із множини $\{a, b, c, d\}$ можна утворити ... упорядкованих пар елементів

3 Із множини $\{a, b, c, d, e\}$ можна утворити ... чотириелементних множин

4 Із множини $\{a, b, c, d, e, f\}$ можна утворити ... невпорядкованих пар елементів

А 5
Б 6
В 10
Г 12
Д 15

27.31. Установити відповідність між множинами (1–4), заданими характеристичними властивостями, та кількістю елементів у цих множинах (А–Д).

1 Множина трицифрових чисел, у яких усі цифри різні

2 Множина трицифрових чисел, які утворені з цифр 1, 2, 3. ..., 8, 9 і в яких усі цифри різні

3 Множина чотирицифрових чисел, у яких усі цифри різні й які утворені з непарних цифр

4 Множина чотирицифрових чисел, які утворені з парних цифр і в яких усі цифри різні

А 96
Б 120
В 504
Г 576
Д 648

27.32. Установити відповідність між рівняннями (1–4) та їх коренями (А–Д).

1 $A_{x+2}^2 = 110$

2 $C_{x-1}^2 = 55$

3 $C_{x+2}^2 = 45$

4 $A_{x-1}^2 = 72$

А 12
Б 11
В 10
Г 9
Д 8

27.33. Установити відповідність між виборами об'єктів (1–4) та записами (А–Д) кількості можливих способів їх виконання.

1 З 10 осіб вибирають голову, секретаря і 4 членів комісії

2 Для формування посилки необхідно вибрати два підручники з алгебри з 10 різних або 4 підручники з геометрії з 8 різних

3 Для складання коду необхідно вибрати з 10 літер дві різні або з 8 цифр чотири різні

4 Для складання номера автомобіля необхідно вибрати з 10 літер дві різні з 8 цифр чотири різні

А $A_{10}^2 + A_8^4$

Б $C_{10}^2 + C_8^2$

В $C_{10}^2 + C_8^4$

Г $A_{10}^2 \cdot A_8^4$

Д $A_{10}^2 \cdot C_8^4$

Розв'яжіть завдання 27.34–27.46. Відповідь запишіть десятковим дробом.

27.34. Обчислити $15 \cdot \frac{6!}{A_{10}^7}\left(C_7^5 + C_7^3\right)$.

27.35. Розв'язати рівняння $C_{x-3}^2 = 21$.

27.36. Знайти коефіцієнт четвертого члена розкладу степеня двочлена $(x^2 - y)^6$.

27.37. Знайти коефіцієнт п'ятого члена розкладу степеня двочлена $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^9$.

27.38. Скільки всього існує трицифрових чисел, у яких усі цифри різні й непарні?

27.39. Скільки трицифрових чисел, кратних 3, можна записати, використовуючи лише цифри 1, 2, 3, 4, 5 і 6, якщо в цих числах цифри можуть повторюватися?

27.40. Із цифр 1, 2, 3, 4 і 5 складають різні п'ятицифрові числа, які не містять однакових цифр. Скільки серед цих чисел є таких, які не починаються з числа 45?

27.41. У чемпіонаті області з футболу грає 7 команд. Скількома способами можуть розподілитися місця в турнірній таблиці, якщо відомо, що команди «Нива» і «Вимпел» посядуть перші два місця?

27.42. В одного учня 6 різних книжок з математики, а в іншого — 7. Скількома способами можна обміняти 3 книжки першого учня на 3 книжки другого учня?

27.43. Знайти член розкладу степеня двочлена $\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^{12}$, який не залежить від x.

27.44. Скількома способами можна розташувати на полиці 3 чорні, 2 сині і 3 червоні кулі?

27.45. З 10 різних троянд і 8 різних жоржин потрібно скласти букет, у якому повинно бути не менше 8 троянд і 7 жоржин. Скількома способами це можна зробити?

27.46. Серед членів шахового гуртка 2 дівчинки і 7 хлопчиків. Для участі в змаганнях необхідно скласти команду з чотирьох осіб, у яку обов'язково повинна увійти хоча б одна дівчина. Скількома способами можна це зробити?

Тема 28. Початки теорії ймовірностей та елементи статистики

Теорія ймовірностей — наука, яка вивчає закономірності масових однорідних випробувань. До основних понять теорії ймовірностей належать поняття стохастичного експерименту та події.

Експеримент (дослід, випробування) називають *стохастичним*, якщо за виконання певної сукупності умов його можна повторювати необмежену кількість разів і результати якого наперед не можна передбачити. Результат стохастичного експерименту — це *подія*.

Випробування — це умови, в результаті яких відбувається (або не відбувається) подія. Наприклад: 1) підкидання монети — випробування, поява «герба» — подія; 2) покупка білетів лотереї — випробування, поява виграшу на певний білет — подія.

Якщо випадковий експеримент проведено n разів і в $n(A)$ випадків відбулася подія A, то число $n(A)$ називається *частотою* події A. *Відносною* частотою випадкової події називають відношення числа появи цієї події до загального числа проведених експериментів $\frac{n(A)}{n}$.

Неможливою називають подію, яка внаслідок даного випробування не може відбутися.

Вірогідною називають подію, яка внаслідок даного випробування обов'язково має відбутися.

Випадковою називають подію, яка може відбутися або не відбутися під час здійснення певного випробування (таблиця 1).

Таблиця 1

Випробування	Подія	Вид події
Підкидаємо гральний кубик	На верхній грані з'явиться число 10	Неможлива
Підкидаємо гральний кубик	На верхній грані з'являється число, менше від 7	Вірогідна
Підкидаємо гральний кубик	На верхній грані з'являється число, менше від 5	Випадкова

Імовірністю випадкової події називають відношення кількості подій, які сприяють цій події, до кількості всіх подій під час певного випробування. $P(A)=\frac{m}{n}$; $P(A)$ — імовірність появи події A, n — загальна кількість елементарних подій, m — кількість елементарних подій, які сприяють події A.

Імовірність вірогідної події U приймають як таку, яка дорівнює 1, оскільки для вірогідної події $m = n$: $P(U) = \frac{m}{n} = 1$.

Імовірність неможливої події (її часто позначають $\varnothing$) дорівнює 0, бо для неможливих подій число m елементарних подій, які сприяють їм, дорівнює нулю: $P(\varnothing) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$.

Якщо A — випадкова подія, то ймовірність її появи задовольняє умову $0 < P(A) < 1$, бо в цьому випадку $0 < m < n$. Імовірність будь-якої події B задовольняє умову $0 \le P(B) \le 1$.

Класична ймовірність має обмежену область застосування через те, що ймовірність випадкової події у багатьох реальних випадках наперед визначити неможливо. У таких випадках для наближеного визначення ймовірності події використовують її статистичне означення. Нехай n — кількість усіх випробувань в окремій серії випробувань, $n(A)$ — кількість тих випробувань, за яких відбудеться подія A. $W = \frac{n(A)}{n}$ — відносна частота події A в даній серії випробувань або статистична частота появи події A. Наприклад: а) відділ механічного контролю виявив чотири нестандартних деталі ($n(A) = 4$) у партії з 97 ($n = 97$) випадково вибраних деталей. Статистична частота W появи нестандартних деталей дорівнює: $W = \frac{n(A)}{n} = \frac{4}{97}$; б) по мішені зроблено 25 пострілів ($n = 25$), до того ж було зареєстровано 19 влучень ($n(A) = 19$). Статистична частота W влучання у ціль дорівнює: $W = \frac{n(A)}{n} = \frac{19}{25}$.

У різних серіях випробувань відповідні частоти $\frac{n(A)}{n}$ для великих n практично збігаються, коливаючись біля деякого постійного значення $P(A)$, яке називають *статистичною ймовірністю події*. У першому прикладі $P(A) \approx \frac{4}{97}$, у другому — $P(A) \approx \frac{19}{25}$.

Для значної кількості випробувань статистична частота буде близькою до імовірності події A:

$$W = \frac{n(A)}{n} \to P(A) \text{ або } P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}.$$

Наприклад, багаторазово проводились досліди підкидання монети, у яких підраховувалася кількість появи герба. Результати деяких дослідів наведено в таблиці 2.

Таблиця 2

Число підкидань	Число появи герба	Відносна частота
4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Тут відносні частоти мало відрізняються від числа 0,5, до того ж що більше дослідів, то менше відхилення.

У теорії ймовірностей розрізняють прості та складені події.

Складеною називатимемо подію, поява якої залежить від появи інших подій, які називатимемо простими. Наприклад, під час кидання двох кубиків випало 11 очок. Ця подія є складеною, бо вона складається з різних можливостей для двох простих подій: 1) на першому кубику випало 5, а на другому — 6 очок; 2) на першому кубику випало 6, а на другому — 5 очок.

Сумою подій A та B називають подію C, яка полягає у виконанні під час одиничного випробування події A або події B, або обох подій разом (хоча б однієї з них). Наприклад, подія A — влучення в ціль з першого пострілу, подія B — влучення з другого пострілу. Тоді $C = A + B$ — подія, яка означає влучення у ціль із двох пострілів хоча б одного разу. Позначають суму подій: $C = A + B$ або $C = A \cup B$.

Події називають *сумісними* в даному випробуванні, якщо поява однієї з них не виключає можливості появи інших (не обов'язково одночасно). Наприклад, три стрільці стріляють у мішень. Розглянемо випадкові події: A — перший стрілець влучив у мішень, B — другий стрілець влучив у мішень, C — третій стрілець влучив у мішень. A, B, C — сумісні випадкові події.

Події називають *попарно несумісними* в даному випробуванні, якщо поява однієї з них виключає появу інших подій у тому ж випробуванні. Наприклад, з ящика з деталями виймають одну деталь. Поява стандартної деталі виключає появу нестандартної деталі. Події «взяли стандартну деталь» і «взяли нестандартну деталь» — дві попарно несумісні події.

Теорема про ймовірність суми двох несумісних подій (теорема додавання). Імовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій: $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Подію $\overline{A}$ називають *протилежною* до події A, якщо вона відбувається тоді й тільки тоді, коли не відбувається подія A. Якщо A — деяка подія, то протилежну їй подію позначають $\overline{A}$. Наприклад: а) влучення в ціль під час вистрілу і промах — протилежні події. Якщо A — влучення, то $\overline{A}$ — промах; б) з ящика з деталями вибирають деталь. Подія A — вибрали стандартну деталь і $\overline{A}$ — вибрали нестандартну деталь. Події A та $\overline{A}$ — протилежні.

З теореми додавання випливають такі наслідки:

1. Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несумісні, то $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

2. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює 1, тобто $P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1$; $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right)$.

Якщо ймовірність однієї з протилежних подій позначити через p, а іншої — через q, то $p + q = 1$.

Добутком двох подій A та B називають подію C, яка полягає у здійсненні під час одиничного випробування події A і події B. Добуток позначають $C = AB$ або $C = A \cap B$.

Дві події називають *залежними*, якщо ймовірність появи однієї з них залежить від того, відбулася чи не відбулася інша подія. Наприклад, у коробці лежить 80 деталей: 50 стандартних і 30 нестандартних. З ящика навмання беруть одну деталь і не повертають її назад. Якщо вийняли стандартну деталь (подія A), то імовірність появи стандартної деталі при другому випробуванні (подія B) дорівнює $P(B) = \frac{49}{79}$. Якщо в першому випробуванні вийнята нестандартна деталь, то ймовірність $P(B)$ дорівнює $P(B) = \frac{50}{79}$. Отже, ймовірність появи події B залежить від того, відбулася чи не відбулася подія A. Події A і B — залежні.

Подію B називають *незалежною* від події A, якщо поява події A не змінює ймовірності появи події B.

Умовною імовірністю події A, залежної від події B, називають імовірність, обчислену для події A в припущенні, що подія B вже відбулася. Позначають $P_B(A)$. Наприклад, нехай в урні є дві білі й одна чорна кульки. Дві особи виймають навмання з урни по одній кульці. Розглянемо події: A — поява білої кулі у першої особи; B — поява білої кулі у другої особи. Імовірність події B до того, поки невідомо про подію A, дорівнює $\frac{2}{3}$. Якщо ж стало відомо, що подія A відбулася, то ймовірність події B дорівнюватиме $\frac{1}{2}$. Якщо ж подія A не відбудеться, то ймовірність події B (друга особа взяла білу кульку) дорівнює $\frac{2}{2} = 1$. Отже, ймовірність події B залежить від події A і є умовною. Умовну ймовірність події B за умови, що подія A вже відбулася, обчислюють за формулою $P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, $P(A) \neq 0$. (1)

Імовірність події AB (обидві особи взяли білі кульки) можна обчислити за класичним означенням імовірності, врахувавши, що всеможливих варіантів є три (*бб*, *бч*, *чб*), а сприяє настанню події AB лише один варіант (*бб*). Тому $P(AB) = \frac{1}{3}$, $P(A) = \frac{2}{3}$, отже, $P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$.

З формули (1) слідує: $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$.

Оскільки подія BA не відрізняється від події AB і $P(BA) = P(B) \cdot P_B(A)$, то одержимо: $P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$.

Імовірність появи добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Взаємно незалежними називають такі випробування, у яких імовірність результату кожного з них не залежить від того, які результати має чи матиме решта випробувань. Наприклад, кілька послідовних виймань кульок з урни, в якій міститься 12 зелених і 9 синіх кульок є незалежними випробуваннями за умови, що вийняту кульку щоразу повертають назад до урни. Якщо кульку не повертати, то випробування будуть залежними.

Якщо виконують n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A відбувається з імовірністю p і не відбувається з імовірністю q, то ймовірність того, що подія A відбудеться m разів, визначається за формулою:

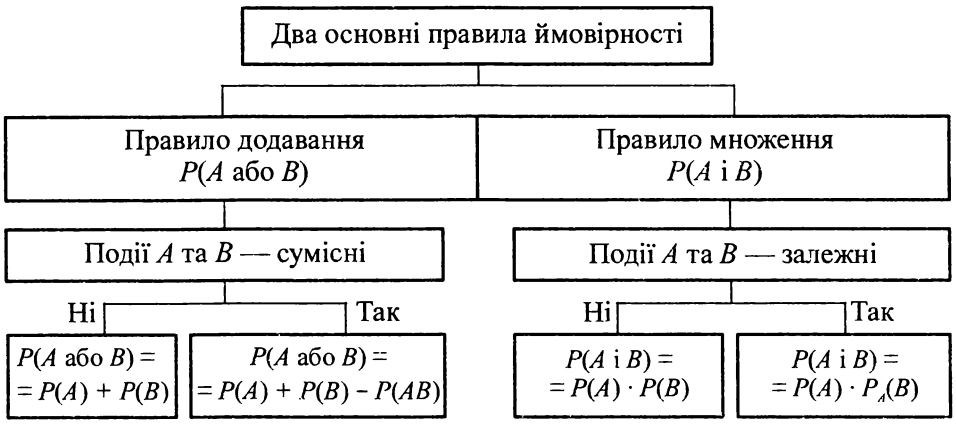
$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} \quad \text{— } \textit{формула Бернуллі.}$$

Відомо, що $C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(m-1))}{m(m-1)...2\cdot 1}$, або $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, тому формула Бернуллі може мати вигляд: $P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$.

Інколи замість символу $P_{m,n}$ використовують символ $P_n(m)$. Тоді формула Бернуллі матиме вигляд:

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

При застосуванні теореми додавання і множення, які дають змогу простіше визначати шукану ймовірність події, корисно пам'ятати два основних правила ймовірностей.



Елементи статистики

Статистикою називають науку, яка збирає, обробляє і вивчає різні дані, пов'язані з масовими явищами, процесами та подіями.

Усю сукупність, з якої роблять вибір одиниць спостереження, називають *генеральною*. Наприклад, зі 100 деталей для спостереження вибирають 10. 100 деталей — генеральна сукупність.

Сукупність одиниць, дібраних для вибіркового спостереження, називають *вибіркою*. Для того щоб за вибіркою можна було судити про властивості генеральної сукупності, вибірка має бути представницькою (репрезентативною).

Якщо у вибірці присутні всі значення випадкової величини в тих самих пропорціях, що й у генеральній сукупності, то цю вибірку називають *репрезентативною* (від французького *représentatif* — представницький). Нехай, наприклад, потрібно утворити вибірку з генеральної сукупності великого обсягу, якою є виготовлені заводом трактори. Кожному трактору присвоюють номер, який заносять до таблиці. Якщо у вибірці має бути 30 тракторів, то з таблиці навмання вибирають 30 чисел і трактори з відповідними номерами підпадають під проведення контролю. Після того як вибірка утворена, всі її об'єкти обстежують щодо властивості, яку досліджують, і в результаті отримують дані, які досліджують. Оскільки номери у таблиці (а значить і відповідні трактори) вибрані випадково, то репрезентативність вибірки буде забезпеченою.

Обробка результатів спостережень, яка полягає, наприклад, у тому, що отримані наслідки спостережень розташовують у порядку неспадання, називають *ранжуванням* дослідних даних, а одержаний при цьому ряд чисел називають *ранжированим рядом*. Наприклад, відділ технічного контролю заводу виміряв глибину пазів у 20 однотипних деталях. Одержали такий результат (у см): 2,1; 3; 1; 1; 2; 3; 1; 1; 2,2; 3; 1; 2,1; 3,2; 2,2; 3; 2,3; 1; 2; 2; 3,3. Такий ряд не дозволяє судити про закономірності, закладені в розподілених даних. Розташуємо дані ряду в порядку неспадання. Одержимо ранжирований ряд: 1; 1; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 2,1; 2,1; 2,2; 2,2; 2,3; 3; 3; 3; 3; 3,2; 3,3. Можемо зробити висновок, що 6 деталей мають глибину пазу 1 см, 3 деталі — 2 см, 2 деталі — 2,1 см і т. д. Тепер легше встановити: на-

вколо якої величини групується більшість показників; які є відхилення від цієї величини; яка загальна картина розподілу.

Числове значення кількісної ознаки заданого члена статистичної сукупності називають *варіантою*. Позначають: x_i, де i — індекс варіанти. Варіантами у наведеному вище прикладі є: 1; 2; 2,1; 2,2; 2,3; 3; 3,2; 3,3.

Частота — це число, яке показує, скільки разів трапляється кожна варіанта. Позначають n_i, де i — індекс варіанти. Загальна сума частот дорівнює: $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$. Частотами у наведеному вище прикладі є: $n_1 = 6$; $n_2 = 3$; $n_3 = 2$; $n_4 = 2$; $n_5 = 1$; $n_6 = 4$; $n_7 = 1$; $n_8 = 1$.

Гістограмою називають послідовність стовпців, кожний з яких спирається на один розрядний інтервал завширшки $h = x_{i+1} - x_i$, а висота його H обчислюється за формулою $H = \frac{n_i}{h}$. Наприклад, у таблиці 3 подано розподіл кількості робітників за кількістю виготовлених ними деталей за зміну.

Таблиця 3

Кількість деталей, шт. (x_i)	***Кількість робітників, осіб (n_i)***
20–25	80
25–30	116
30–35	350
35–40	120
40–45	60
45–50	50
Усього	776

За даними таблиці 3 на рисунку 1 зображена гістограма. $h = x_{i+1} - x_i = 25 - 20 = 5$. $H_1 = \frac{80}{5} = 16$; $H_2 = \frac{116}{5} = 23{,}2$; $H_3 = \frac{350}{5} = 70$; $H_4 = \frac{120}{5} = 24$; $H_5 = \frac{60}{5} = 12$; $H_6 = \frac{50}{5} = 10$.

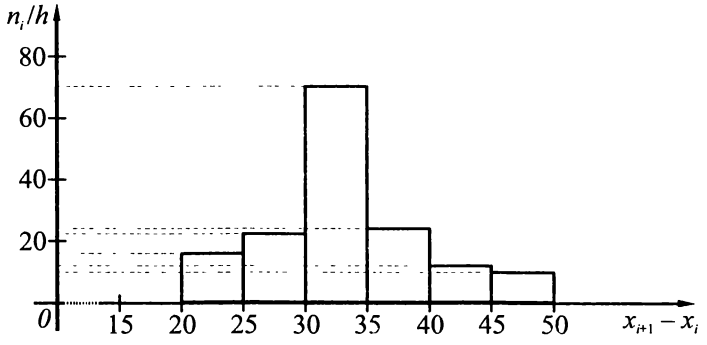


Рис. 1

Полігоном частот називають ламану, відрізки якої сполучають точки $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, ..., $(x_k; n_k)$, де x_i — варіанти, n_i — частоти (або частотності).

Для побудови полігону частот на осі абсцис відкладають варіанти x_i, а на осі ординат — відповідні їм частоти n_i. Точки $(x_i; n_i)$ сполучають відрізками прямих. Наприклад, графічне зображення розподілу цивільних справ у суді за терміном їх розгляду (за таблицею 4) ілюструє полігон розподілу, зображений на рисунку 2.

Таблиця 4

Термін розгляду, міс.	*Кількість справ, шт.*
1	7
2	8
3	6
4	5

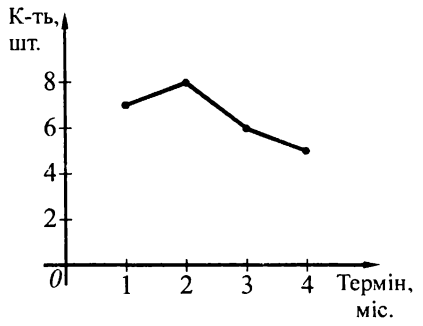


Рис. 2

При оцінюванні даних за розподілом частот використовують моду, медіану та середні значення.

Модою називають значення ознаки варіанти, яке трапляється найчастіше в даному ряді розподілу. Позначають: M_0. Наприклад, за результатами написання контрольної роботи учні отримали такі бали: 5 балів — 2 учні; 6 балів — 3 учні; 7 балів — 8 учнів; 8 балів — 10 учнів; 9 балів — 2 учні; 10 балів — 4 учні; 11 балів — 3 учні; 12 балів — 2 учні. Модальним номером є 8 балів, оскільки він має найбільшу чисельність — 10 учнів. Отже, $Mo = 8$.

У групі значень 2; 4; 4; 4; 5; 7; 7; 10; 10; 10 модами є $Mo = 4$, $Mo = 10$.

Медіаною вибірки називають число, яке поділяє навпіл упорядковану (у порядку зростання чи спадання ознаки) сукупність усіх значень вибірки. Позначають *Me*.

Наприклад, медіана групи значень 5, 7, 11, 13, 19 буде 11. $Me = 11$.

Медіана групи значень 3, 4, 8, 16, 17, 19 дорівнює 12 ((8 + 16) : 2 = 12). $Me = 12$.

Середнім значенням (*середнім арифметичним*) називають таке число $\bar{x}$, яке отримують діленням суми всіх даних вибірки $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ на кількість цих даних n: $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$. Відхиленням l_i кожного значення x_i від середнього арифметичного $\bar{x}$ називають різницю між цим значенням і середнім арифметичним, тобто $l_i = x_i - \bar{x}$. Відхилення може бути як додатним, так і від'ємним.

Середнє геометричне m_c для n додатних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ визначають за формулою $m_c = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$.

Дисперсією D називають середнє арифметичне суми квадратів усіх відхилень випадкової величини: $D = \dfrac{l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2}{n}$.

Середнє квадратичне відхилення σ дорівнює кореню квадратному із дисперсії: $\sigma = \sqrt{D}$.

Приклад 1. З колоди, яка містить 36 карт, навмання витягають одну карту. Яка ймовірність того, що вибраною картою є туз?

■ Нехай подія A — «вибрана карта — туз». Оскільки в колоді є 4 тузи, то настанню події A сприяють 4 випадки вибору карти. Усіх можливих випадків є 36. Тому $P(A) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$. ■

Приклад 2. В урні є 5 синіх, 7 червоних і 10 білих кульок однакового розміру та маси. Кульки перемішують і навмання виймають одну. Яка ймовірність того, що вийнята кулька буде білого кольору?

■ Нехай A — подія, яка полягає в тому, що навмання вийнята кулька буде білого кольору. Усього є кульок (випадків), $n = 5 + 7 + 10 = 22$, а випадків, які сприяють події A, — 10, $m = 10$. $P(A) = \frac{m}{n}$.

Отже, $P(A) = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}$.

Відповідь. $\frac{5}{11}$. ■

Приклад 3. З п'яти букв, написаних на картках, складене слово «пісня». Хлопчик перемішав картки і потім навмання їх склав. Яка ймовірність того, що він знову складе слово «пісня»?

■ Нехай A — подія, яка полягає в тому, що хлопчик складе слово «пісня». Усього може бути 5! елементарних подій (маємо перестановки з п'яти елементів), $n = 5!$. З них один випадок сприяє події A, $m = 1$. $P(A) = \frac{m}{n}$. Отже, $P(A) = \frac{1}{5!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{120}$.

Відповідь. $\frac{1}{120}$. ■

Приклад 4. В учня є 20 зошитів. Серед них — 5 у лінійку, а решта — в клітинку. Яка ймовірність того, що серед шести випадково вибраних зошитів усі будуть у клітинку?

■ Нехай подія A — «усі 6 вибраних зошитів є зошитами у клітинку». Оскільки учень має $20 - 5 = 15$ зошитів у клітинку, то сприяють настанню події A число комбінацій з 15 по 6. Усіх можливих варіантів вибору шести зошитів із двадцяти існує C_{20}^6. Тому ймовірність настання події A дорівнює:

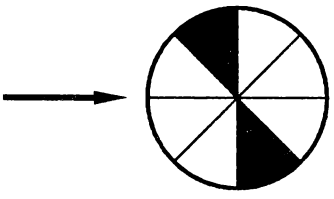
$$P(A) = \frac{C_{15}^6}{C_{20}^6} = \frac{\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{6!}}{\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{6!}} \approx 0{,}13 . \blacksquare$$

Приклад 5. Набираючи номер телефону, дівчинка забула дві останні цифри і, пам'ятаючи тільки те, що ці цифри різні, набрала їх навмання. Яка ймовірність того, що номер набраний правильно?

■ Нехай подія A — номер набрано правильно. Дві останні цифри можна набрати A_{10}^2 способами. Тоді кількість можливих подій — $n = A_{10}^2$. Події A сприяє тільки одна з них, $m = 1$. Отже, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{45}$.

Відповідь. $\frac{1}{45}$. ■

Приклад 6. З якою ймовірністю круг, зображений на рисунку, який обертається навколо свого центру, зупиниться «чорним» сектором навпроти стрілки?



■ Оскільки вертушка поділена на 8 рівних секторів, з яких 2 зафарбовані у чорний колір, то відношення довжин дуг і шукана ймовірність дорівнюватимуть: $P = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Відповідь. $\frac{1}{4}$. ■

Приклад 7. Світлана й Олександр домовились зустрітись у центральному парку з 12 год до 13 год. Той, хто прийде першим, чекає другого протягом 30 хв, після чого йде з парку. Яка ймовірність того, що вони зустрінуться?

■ Позначимо час приходу в парк Світлани через x, а Олександра через y (для зручності виражатимемо час у хвилинах, які пройшли після 12 год). Очевидно, що $0 \le x \le 60$; $0 \le y \le 60$.

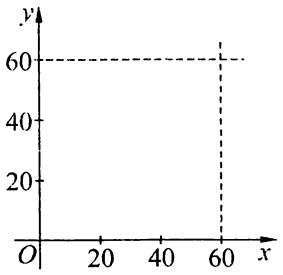


Рис. 3

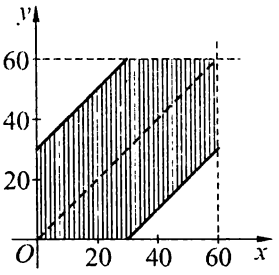


Рис. 4

Кожна точка $(x; y)$ квадрата (рис. 3) — це один з можливих випадків (подія). Експеримент завершиться зустріччю, якщо виконається умова $|x - y| \le 30$. Множина таких точок заштрихована на рис. 4.

Знайдемо площу заштрихованої частини квадрата:

$$S = 60^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 30 = 3600 - 900 = 2700.\ S_{\text{кв.}} = 60^2 = 3600.$$

Шукану ймовірність зустрічі знаходимо як відношення площі частини квадрата, яка сприяє зустрічі, до площі всього квадрата: $P = \frac{2700}{3600} = \frac{3}{4}$.

Відповідь. $\frac{3}{4}$. ■

Приклад 8. Імовірність того, що перший баскетболіст зробить влучний кидок, становить 0,8, а другий — 0,85. Яка ймовірність того, що, виконавши по одному кидку, обидва спортсмени влучать у кошик?

■ Нехай подія A — «перший баскетболіст зробив влучний кидок», а подія B — «другий баскетболіст зробив влучний кидок». Події A та B незалежні. Тому ймовірність виконання кожної з них дорівнює $P(AB) = 0{,}8 \cdot 0{,}85 = 0{,}68$. ■

Приклад 9. У коробці є 30 курчат: 17 білих, 9 рябих та 4 чорних. Яка ймовірність того, що навмання вибране курча не чорне?

■ Нехай подія A — «вибране курча не чорне». Тоді протилежна подія $\overline{A}$ — «вибране курча чорне». Імовірність події $\overline{A}$ дорівнює $P(\overline{A}) = \frac{4}{17+9+4} = \frac{2}{15}$. Тоді ймовірність події A дорівнює: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}$.

Відповідь. $\frac{13}{15}$. ■

Приклад 10. Мисливець стріляє у мішень, поділену на чотири області. Імовірність влучення в першу область дорівнює 0,29, у другу — 0,23, у третю — 0,4. Знайти ймовірність того, що мисливець влучить у першу або в другу, або у третю область.

■ Нехай D — подія, ймовірність якої потрібно знайти, A — мисливець влучить у першу область, B — мисливець влучить у другу область, C — мисливець влучить у третю область. Події A, B і C — несумісні, тому за теоремою про ймовірність суми несумісних подій маємо: $P(D) = P(A) + P(B) + P(C)$; $P(D) = 0{,}29 + 0{,}23 + 0{,}4 = 0{,}92$.

Відповідь. 0,92. ■

Приклад 11. Імовірність того, що біатлоніст не влучить у мішень становить 0,2. Знайти ймовірність того, що п'ять пострілів поспіль будуть влучними.

■ Нехай події A_i — «i-й постріл біатлоніста — влучний» (i = 1; 2; 3; 4; 5), подія A — «біатлоністу вдалася серія із п'яти влучних пострілів». За умовою, $P(A_i) = 1 - 0,2 = 0,8$. Оскільки події A_i — незалежні, то ймовірність події A дорівнює:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) \cdot P(A_5) = 0,8^5 = 0,32678 \approx 33\%.$$

Відповідь. ≈33%. ■

Приклад 12. Імовірність того, що Оленка розв'яже задачу, дорівнює 0,8, а ймовірність того, що її розв'яже Остап — 0,7. Знайти імовірність того, що задачу не розв'яже жоден з учнів.

А	Б	В	Г	Д
0,06	0,3	0,2	0,56	0,44

■ Імовірність того, що Оленка не розв'яже задачу, дорівнює 1 – 0,8 = 0,2;
імовірність того, що Остап не розв'яже задачу, дорівнює 1 – 0,7 = 0,3;
Імовірність того, що задачу не розв'яжуть Оленка й Остап, дорівнює 0,2 · 0,3 = 0,06.
Відповідь. **А.** ■

Приклад 13. У токаря є 13 конусних і 17 циліндричних деталей. Він навмання взяв одну деталь, а потім іншу. Знайди ймовірність того, що перша деталь конусна, а друга — циліндрична.

■ Нехай A — перша деталь конусна, а друга — циліндрична; B — перша деталь конусна; C — друга деталь циліндрична. $P(B) = \frac{13}{30}$. Імовірність того, що друга деталь циліндрична, обчислимо за умови, що перша взята деталь є конусною: $P_B(C) = \frac{17}{29}$. Тоді $P(A) = P(B) \cdot P_B(C) = \frac{13}{30} \cdot \frac{17}{29} = \frac{221}{870}$.

Відповідь. $\frac{221}{870}$. ■

Приклад 14. Кожен із трьох робітників виготовив по 15 деталей. Під час перевірки виявилося, що серед деталей, виготовлених першим, другим і третім робітником окремо, стандартних деталей було 12, 10 і 11 відповідно. У кожного робітника навмання взяли по одній деталі. Яка ймовірність того, що всі три взяті деталі будуть стандартними?

■ Нехай A — усі три взяті деталі будуть стандартними; B — навмання взята деталь у першого робітника є стандартною; C — навмання взята деталь у другого робітника є стандартною; D — навмання взята деталь у третього робітника є стандартною. $P(B) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$; $P(C) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$; $P(D) = \frac{11}{15}$.

Події B, C і D — незалежні в сукупності. $P(A) = P(B) \cdot P(C) \cdot P(D) = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{15} = \frac{88}{225}$.

Відповідь. $\frac{88}{225}$. ■

Приклад 15. Із двох гармат стріляють по цілі. Імовірність влучення у ціль першою і другою гарматою відповідно дорівнюють 0,6 і 0,9. Знайти ймовірність того, що при одному залпі по цілі влучать тільки з однієї гармати.

■ Нехай A_1 — влучення у ціль першою гарматою; A_2 — влучення в ціль другою гарматою; B_1 — відбулася тільки подія A_1; B_2 — відбулася тільки подія A_2.

Поява події B_1 рівносильна появі події $A_1\overline{A_2}$ (відбулася перша подія і не відбулася друга). Поява події B_2 рівносильна появі події $\overline{A_1}A_2$ (не відбулася перша подія і відбулася друга).

Отже, щоб знайти ймовірність появи тільки однієї з подій A_1 й A_2, досить знайти ймовірність появи однієї (не важливо якої) з подій B_1 чи B_2. Події B_1 і B_2 несумісні, тому $P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2) = P(A_1\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}A_2) = 0{,}6(1 - 0{,}9) + (1 - 0{,}6) \cdot 0{,}9 = 0{,}6 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}9 = 0{,}06 + 0{,}36 = 0{,}42$.

Відповідь. 0,42. ■

Приклад 16. У ворота одночасно кидають два м'ячі. Імовірність влучення першого м'яча дорівнює 0,4, а другого — 0,7. Яка ймовірність влучення у ворота хоча б одного з двох м'ячів?

■ Нехай A — у ворота влучив хоча б один з двох м'ячів; A_1 — у ворота влучив перший м'яч; A_2 — у ворота влучив другий м'яч. A_1 і A_2 — події, незалежні в сукупності та сумісні.

$P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2)$;

$P(A_1A_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}28$;

$P(A) = 0{,}4 + 0{,}7 - 0{,}28 = 0{,}82$.

Відповідь. 0,82. ■

Приклад 17. Дано ранжирований ряд урожайності зернових культур у 20 господарствах (у ц з 1 га): 28, 29, 29, 29, 30, 30, 31, 31, 31, 31, 32, 35, 35, 35, 35, 35, 38, 38, 40, 41. Вказати варіанти, частоту та відносну частоту кожної варіанти.

■ Згрупуємо дані по варіантах: $\overbrace{28}$, $\overbrace{29,29,29}$, $\overbrace{30,30}$, $\overbrace{31,31,31,31}$, $\overbrace{32}$, $\overbrace{35,35,35,35,35}$, $\overbrace{38,38}$, $\overbrace{40}$, $\overbrace{41}$. Маємо такі варіанти: $x_1 = 28, x_2 = 29, x_3 = 30, x_4 = 31, x_5 = 32, x_6 = 35, x_7 = 38, x_8 = 40, x_9 = 41$.

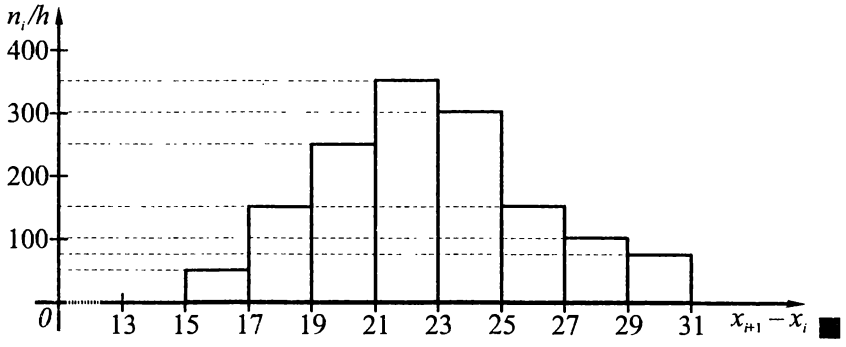
Частоти цих варіант відповідно дорівнюють: $n = 20$, $n_1 = 1$, $n_2 = 3$, $n_3 = 2$, $n_4 = 4$, $n_5 = 1$, $n_6 = 5$, $n_7 = 2$, $n_8 = 1$, $n_9 = 1$, а відносні частоти — $w_1 = \frac{1}{20}$, $w_2 = \frac{3}{20}$, $w_3 = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$, $w_4 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$, $w_5 = \frac{1}{20}$, $w_6 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$, $w_7 = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$, $w_8 = \frac{1}{20}$, $w_9 = \frac{1}{20}$. ■

Приклад 18. З метою вивчення середньої врожайності пшениці на площі 500 000 га проведено вибіркове вимірювання врожайності на полях загальною площею 2850 га. Результати вимірювань подано в таблиці.

Врожайність, ц/га	15–17	17–19	19–21	21–23	23–25	25–27	27–29	29–31
Кількість, га	100	300	500	700	600	300	200	150

За даними таблиці побудуй гістограму врожайності пшениці на площі 2850 га.

■ На осі абсцис відкладаємо врожайність з 1 га (у ц), а на осі ординат — кількість гектарів, поділену на довжину проміжку (17 – 15 = 2).



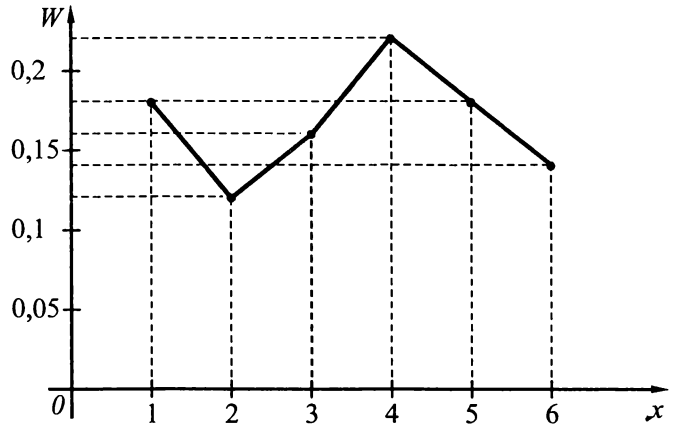
■

Приклад 19. Проведено 50 підкидань грального кубика. Результати випробувань занесені до таблиці.

Кількість очок, яка випала	***Частота***	***Відносна частота***
1	9	$\frac{9}{50}=0{,}18$
2	6	$\frac{6}{50}=0{,}12$
3	8	$\frac{8}{50}=0{,}16$
4	11	$\frac{11}{50}=0{,}22$
5	9	$\frac{9}{50}=0{,}18$
6	7	$\frac{7}{50}=0{,}14$

Побудуй полігон частот випадання певного числа очок.

■ Побудуємо точки, координати яких є парами чисел з дискретного варіаційного ряду (1; 0,18), (2; 0,12) і т. д.



З'єднавши утворені точки відрізками, одержимо полігон частот випадання певного числа очок. ■

Приклад 20. Знайти медіану сукупності даних: **а)** 2,1; 4,8; 1,9; 5,1; 7,3; **б)** 1,5; 2,8; 11,3; 12,1; 4,5; 5,7.

■ **а)** Розмістимо дані сукупності в порядку зростання: 1,9; 2,1; 4,8; 5,1; 7,3. Оскільки $n = 5$ — непарне число, то $Me = 4{,}8$;

б) розмістимо дані сукупності в порядку зростання: 1,5; 2,8; 4,5; 5,7; 11,3; 12,1, $n = 6$ — парне число. $Me = \frac{4{,}5+5{,}7}{2} = \frac{10{,}2}{2} = 5{,}1$.

Відповідь. **а)** 4,8; **б)** 5,1. ■

Приклад 21. Із двох воротарів потрібно вибрати одного для участі в чемпіонаті з футболу. Кількості «взяття» ними м'яча при кожних десяти штрафних ударах під час тренувань подані в таблиці.

Номер тренування		1	2	3	4	5
Кількість «взяття»	*I воротар*	7	8	9	6	8
	II воротар	8	9	8	10	6

Кого з воротарів слід запросити на гру?

■ Знайдемо середню кількість «взяття» м'ячів.

Для першого воротаря: $\overline{x_1} = \frac{7+8+9+6+8}{5} = \frac{38}{5} = 7{,}6.$

Для другого воротаря: $\overline{x_2} = \frac{8+9+8+10+6}{5} = \frac{41}{5} = 8{,}2.$

$\overline{x_2} > \overline{x_1}$. Отже, на чемпіонат слід запросити другого воротаря.

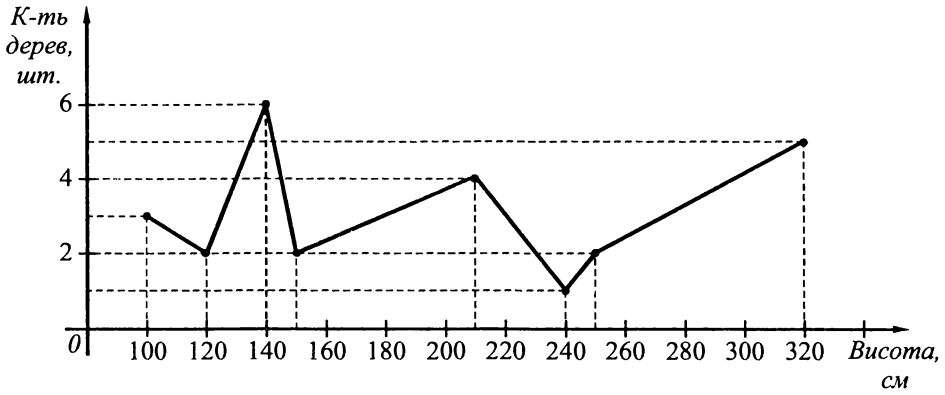
Відповідь. Другого воротаря. ■

Приклад 22. Побудуй закон розподілу дискретного варіаційного ряду й накресли полігон розподілу вимірювання висоти 25 дерев: 140, 210, 320, 150, 140, 210, 210, 120, 100, 140, 320, 150, 100, 210, 250, 240, 320, 140, 100, 250, 320, 140, 320, 120, 140.

■ Розташуємо значення ознаки в неспадному порядку: 100, 100, 100, 120, 120, 140, 140, 140, 140, 140, 140, 150, 150, 210, 210, 210, 210, 240, 250, 250, 320, 320, 320, 320, 320. Знайдемо для кожного значення його частоту і результат занесемо до таблиці.

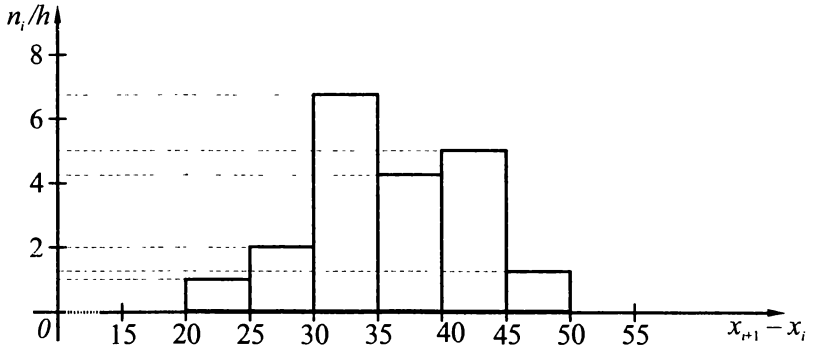
Висота дерева	100	120	140	150	210	240	250	320
Кількість дерев	3	2	6	2	4	1	2	5

На осі абсцис системи координат відкладаємо значення висот дерев, а на осі ординат — відповідні частоти. Будуємо точки, координати яких є парами чисел з дискретного варіаційного ряду: (100; 3), (120; 2) і т. д. З'єднавши утворені точки відрізками, отримаємо полігон розподілу 25 дерев за їхньою висотою (див. рис.).



Приклад 23. За даними таблиці побудуй гістограму врожайності пшениці на різних ділянках посівної площі.

Врожайність, ц/га	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45	45–50
Частина ділянки, %	5	10	33	21	25	6



На рисунку побудована гістограма врожайності пшениці на різних ділянках посівних площ. ■

Завдання 28.1–28.24 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

28.1. У лотереї 10 виграшних квитків і 240 квитків без виграшу. Яка ймовірність виграти в цю лотерею, купивши один квиток?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{25}$

28.2. У ящику з 25 деталей 23 стандартні. Яка ймовірність, що перша навмання взята деталь буде нестандартною?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{23}{25}$	$\frac{25}{23}$	$\frac{25}{2}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{23}$

28.3. З шухляди, у якій лежить 8 червоних, 3 сині та 20 зелених олівців, навмання вийняли один олівець. Яка ймовірність того, що це не зелений олівець?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{31}$	$\frac{8}{31}$	$\frac{20}{31}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{11}{31}$

28.4. Зі слова «математика» навмання вибирають одну літеру. Яка ймовірність того, що виберуть літеру «а»?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{10}$

28.5. Імовірність того, що стрілець одним пострілом влучає у ціль, дорівнює 0,4. Стрілець виконав два постріли. Знайти ймовірність того, що обома пострілами стрілець влучив у ціль.

А	Б	В	Г	Д
0,4	0,8	0,16	1,6	0,6

28.6. Тричі кидають гральний кубик. Яка ймовірність того, що тричі випаде «4»?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{216}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{216}$

28.7. У коробці 10 куль, з них 7 білих. Навмання беруть одну за одною дві кулі, до того ж узяту першу кулю до коробки не повертають. Знайти ймовірність того, що обидві кулі будуть білі.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{7}{10}$	$\frac{49}{100}$	$\frac{42}{90}$	$\frac{49}{90}$	$\frac{42}{100}$

28.8. Стрілець цілює по мішені та влучає в десятку з імовірністю 0,2, а в дев'ятку — з імовірністю 0,3. Виконано один постріл. Яка ймовірність того, що вибито не менше дев'яти очок?

А	Б	В	Г	Д
0,06	0,3	0,6	0,9	0,5

28.9. Імовірність закинути у корзину м'яч для першого хлопчика дорівнює 0,6, а для другого — 0,5. Обидва хлопчики роблять по одному кидку. Яка ймовірність того, що хоча б один з них закине м'яч у корзину?

А	Б	В	Г	Д
1,1	0,3	0,7	0,8	0,2

28.10. При увімкненні запалення двигун починає працювати з імовірністю 0,8. Яка ймовірність того, що двигун почав працювати за другого увімкнення?

А	Б	В	Г	Д
0,16	0,64	0,04	0,8	0,2

28.11. Імовірність виготовлення стандартної деталі дорівнює 0,9. Визначити ймовірність того, що з шести навмання взятих деталей 4 виявляться стандартними.

А	Б	В	Г	Д
$6 \cdot 0{,}9^4$	$0{,}9^4 \cdot 0{,}1^2$	$C_6^4 \cdot 0{,}9^4$	$C_6^4 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^2$	$C_6^4 \cdot 0{,}1^2$

28.12. У коробці є шість однакових занумерованих кубиків. Навмання дістають по одному всі кубики. Яка ймовірність того, що номери вийнятих кубиків з'являтимуться в порядку зростання?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6!}$	$\frac{6}{6!}$	$\frac{1}{12}$

28.13. У ящику 100 деталей, з них 6 пофарбовані. Навмання виймають 2 деталі. Яка ймовірність того, що обидві деталі будуть пофарбовані?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{A_6^2 \cdot A_{100}^2}$	$\frac{1}{C_6^2 \cdot C_{100}^2}$	$\frac{C_6^2}{A_{100}^2}$	$\frac{A_6^2}{A_{100}^2}$	$\frac{C_6^2}{C_{100}^2}$

28.14. Набираючи номер телефону, абонент забув останні дві цифри і, пам'ятаючи, що цифри різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрано потрібні цифри.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{A_{10}^2}$	$\frac{1}{C_{10}^2}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{2 \cdot 10!}$	$\frac{1}{A_9^2}$

28.15. У мішку лежать 20 однакових на дотик куль: 12 білих та 8 чорних. З мішка навмання витягнуто 8 куль. Яка ймовірність того, що рівно 3 з них чорні?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{C_8^3 \cdot C_{20}^5}{C_{20}^8}$	$\frac{C_{20}^8}{C_8^3 \cdot C_{12}^5}$	$\frac{C_8^3 + C_{12}^5}{C_{20}^8}$	$\frac{A_8^3 \cdot A_{12}^5}{A_{20}^8}$	$\frac{C_8^3 \cdot C_{12}^5}{C_{20}^8}$

28.16. В одному класі з 20 учнів є 8 хлопчиків, а в іншому з 25 учнів — 15 хлопчиків. За жеребкуванням вибирають двох учнів з кожного класу. Яка ймовірність того, що з кожного класу виберуть тільки дівчат?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{A_{12}^2}{A_{20}^2} + \frac{C_{10}^2}{A_{25}^2}$	$\frac{A_{12}^2}{A_{20}^2} \cdot \frac{A_{10}^2}{A_{25}^2}$	$\frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} + \frac{C_{10}^2}{C_{25}^2}$	$\frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} \cdot \frac{C_{10}^2}{C_{25}^2}$	$\frac{C_{32}^4}{C_{45}^4}$

28.17. У скриньці є 12 білих і 8 чорних куль. Навмання вибрали 2 кулі. Яка ймовірність того, що вони одного кольору?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{C_{12}^2}{C_{20}^2}\cdot\frac{C_8^2}{C_{20}^2}$	$\frac{C_{12}^2}{C_{20}^2}+\frac{C_8^2}{C_{20}^2}$	$\frac{A_{12}^2}{A_{20}^2}\cdot\frac{A_8^2}{A_{20}^2}$	$\frac{A_{12}^2}{A_{20}^2}+\frac{A_8^2}{A_{20}^2}$	$\frac{2}{C_{20}^1}$

28.18. У ящику лежить 31 деталь першого сорту та 6 деталей другого сорту. Навмання вибирають три деталі. Яка ймовірність того, що хоча б одна з деталей першого сорту?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{C_6^3}{C_{37}^3}$	$1-\frac{C_6^3}{C_{37}^3}$	$\frac{C_{31}^3}{C_{37}^3}$	$1-\frac{C_{31}^3}{C_{37}^3}$	$\frac{A_6^3}{A_{37}^3}$

28.19. Механізм складається з трьох виробів. Імовірність браку при виготовленні першого виробу дорівнює 0,1, другого — 0,2, третього — 0,3. Яка ймовірність браку при виготовленні механізму?

А	Б	В	Г	Д
0,9 + 0,8107 – – 0,9 · 0,8 · 0,7	1 – 0,1 · 0,2 · 0,3	0,1 · 0,2 · 0,3	0,9 · 0,8 · 0,7	1 – 0,9 · 0,8 · 0,7

28.20. У сім'ї троє дітей. Знайти ймовірність того, що серед них є хоча б один хлопчик.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0,875	0,125	0,5

28.21. У результаті експерименту відбуваються рівноможливі події, які виключають одна одну. Ймовірність появи кожної з них дорівнює 0,05. Яка кількість цих подій?

А	Б	В	Г	Д
500	50	20	200	1000

28.22. Куб, усі грані якого пофарбовано, розрізали на 1000 однакових кубиків. Знайти імовірність того, що взятий навмання кубик має дві пофарбовані грані.

А	Б	В	Г	Д
0,69	0,96	0,096	0,5	0,001

28.23. Велосипедист проїхав 20 км зі швидкістю 10 км/год і 15 км — зі швидкістю 5 км/год. Знайти середню швидкість руху велосипедиста.

А	Б	В	Г	Д
7,5км/год	7 км/год	5 км/год	12,5 км/год	8 км/год

28.24. Середнє арифметичне трьох чисел дорівнює 25, а середнє арифметичне шести інших чисел дорівнює 34. Знайти середнє арифметичне усіх дев'яти чисел.

А	Б	В	Г	Д
5	6	30	60	31

Завдання 28.25–28.35 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

28.25. Установити відповідність між завданнями (1–4) та відповідями до них (А–Д).
У коробці є 5 червоних, 5 жовтих, 5 синіх і 5 зелених кульок — усього 20 штук. Яка ймовірність, що навмання вийнята кулька буде ...

1 жовтою	**А** 0,75
2 зеленою або червоною	**Б** 0
3 не жовтою	**В** 0,5
4 фіолетовою	**Г** 1
	Д 0,25

28.26. Установити відповідність між подіями (1–4) та їхніми ймовірностями (А–Д).

1 У ящику є 8 білих і 12 червоних куль. Подія: навмання вийнята куля — біла	**А** 0,9
2 Серед 40 електричних лампочок 4 зіпсованих. Подія: навмання вибрана лампочка — якісна	**Б** 0,8
3 У лотереї 50 білетів, з них 5 — із грошовими виграшами, 15 — з речовими, решта — без виграшу. Подія: вибраний першим білет без виграшу	**В** 0,6
4 У коробці є 11 червоних, 6 синіх, 13 зелених олівців. Подія: навмання взятий олівець не синій	**Г** 0,4
	Д 0,2

28.27. У ящику є 6 червоних, 8 синіх, 12 зелених і 14 білих куль. Установити відповідність між заданими подіями (1–4) та їхніми ймовірностями (А–Д).

1 Перша навмання вийнята куля — червона або біла	**А** $\frac{9}{20}$
2 Перша навмання вийнята куля — червона або зелена	**Б** $\frac{11}{20}$
3 Перша навмання вийнята куля — не червона	**В** $\frac{13}{20}$
4 Перша навмання вийнята куля — не біла	**Г** $\frac{17}{20}$
	Д $\frac{1}{2}$

28.28. Установити відповідність між заданими подіями (1–4) та їхніми ймовірностями (А–Д).

1 Двічі кидають монету. Подія: обидва рази випадає «герб»	**А** $\frac{1}{8}$
2 Двічі кидають гральний кубик. Подія: обидва рази випадає число «4»	**Б** $\frac{1}{27}$
3 У сім'ї троє дітей. Подія: Усі діти — хлопці	**В** $\frac{1}{16}$
4 Хлопчик тричі кидає м'яч у корзину. Імовірність влучити у корзину при одному кидку дорівнює $\frac{1}{3}$. Подія: хлопчик тричі влучив у корзину	**Г** $\frac{1}{36}$
	Д $\frac{1}{4}$

28.29. Установити відповідність між подіями (1–4) та їхніми ймовірностями (А–Д).

1 У коробці є 5 пронумерованих кубиків. Подія: послідовно вийняті кубики будуть впорядковані за зростанням їхніх номерів	**А** $\frac{1}{45}$
2 Дівчинка забула останні дві цифри телефонного номера подруги, але пам'ятає, що вони різні. Подія: при першому наборі був набраний правильний номер	**Б** $\frac{1}{60}$
3 На 7 аркушах паперу написали літери А, Б, В, Г, К, Р, Л. Подія: послідовно взяті три аркуші утворили слово «РАК»	**В** $\frac{1}{90}$
4 На п'яти кулях написані цифри 1, 2, 3, 4 і 5. Подія: послідовно взяті три кулі утворять найбільше трицифрове число	**Г** $\frac{1}{120}$
	Д $\frac{1}{210}$

28.30. Виконали два постріли по мішені. Подія A — влучення при першому пострілі, подія B — влучення при другому пострілі. Установити відповідність між заданими подіями (1–4) та їх виразами (А–Д) через операції над подіями A та B.

1 Жодного разу не влучили	**А** $A \cdot B$
2 Влучили в мішень хоча б одним пострілом	**Б** $\overline{A} \cdot B$
3 З першого пострілу не влучили, а з другого — влучили	**В** $A \cdot \overline{B}$
4 Двічі влучили в мішень	**Г** $\overline{A} \cdot \overline{B}$
	Д $A + B$

28.31. М'яч тричі кидають у баскетбольну корзину. Подія A_1 — м'яч влучив у корзину з першого кидка, подія A_2 — м'яч влучив у корзину з другого кидка, подія A_3 — м'яч влучив у корзину з третього кидка. Установити відповідність між заданими подіями (1–4) та їх виразами (А–Д) через операції над подіями A_1, A_2 та A_3.

1 М'яч не влучив у корзину жодного разу	**А** $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$
2 М'яч хоча б один раз не влучив у корзину	**Б** $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$
3 М'яч хоча б один раз влучив у корзину	**В** $A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$
4 М'яч тричі влучив у корзину	**Г** $A_1 + A_2 + A_3$
	Д $\overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3}$

28.32. Два спортсмени стріляють по одному разу в одну й ту ж ціль. Імовірність влучання у ціль для першого спортсмена дорівнює 0,8, а для другого — 0,7. Установити відповідність між заданими подіями (1–4) та їхніми ймовірностями (А–Д).

1 Перший спортсмен влучив у ціль, а другий — не влучив	**А** 0,94
2 Другий спортсмен влучив у ціль, а перший — не влучив	**Б** 0,56
3 У ціль влучив хоча б один спортсмен	**В** 0,5
4 У ціль влучили обидва спортсмени	**Г** 0,24
	Д 0,14

28.33. У ящику є 12 чорних і 8 білих куль. З нього навмання виймають дві кулі, не повертаючи їх до ящика. Установити відповідність між заданими записами (1–4) та їх доповненнями (А–Д) до правильних тверджень.

1 Імовірність того, що перша вийнята куля буде чорною, дорівнює ...	**А** $\frac{8}{19}$
2 Якщо перша вийнята куля чорна, то ймовірність того, що друга куля чорна, дорівнює ...	**Б** $\frac{11}{19}$
3 Якщо перша вийнята куля чорна. то ймовірність того, що друга куля — біла, дорівнює ...	**В** $\frac{12}{19}$
4 Якщо перша вийнята куля біла, то ймовірність того, що друга куля чорна, дорівнює ...	**Г** $\frac{3}{5}$
	Д $\frac{1}{2}$

28.34. Гральний кубик кидають 10 разів. Установити відповідність між подіями (1–4) та виразами (А–Д) для обчислення їх ймовірностей.

1 Рівно 4 рази випаде число «1»	**А** $C_{10}^4\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^6$
2 Рівно 4 рази випаде парне число	**Б** $C_{10}^4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^6$
3 Рівно 4 рази випаде число, кратне 3	**В** $C_{10}^4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^6$
4 Рівно 4 рази випаде число, більше 2	**Г** $C_{10}^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^6$
	Д $C_{10}^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^6$

28.35. Ряд даних вибірки має вигляд: 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 9. Установити відповідність між заданими статистичними характеристиками ряду даних (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1 Розмах вибірки	**А** 4
2 Мода	**Б** 5
3 Медіана	**В** $5\frac{4}{9}$
4 Середнє значення	**Г** 6
	Д 7

Розв'яжіть завдання 28.36–28.50. Відповідь запишіть десятковим дробом.

28.36. У партії з 10 деталей 7 стандартних. Знайти ймовірність того, що серед 6 взятих навмання деталей виявиться 4 стандартних.

28.37. Підкидають три гральні кубики. Знайти імовірність того, що добуток чисел, які випадуть на верхній грані, буде парним числом.

28.38. Імовірність того, що Петрик розв'яже задачу, дорівнює 0,7, а ймовірність того, що задачу розв'яже Михайлик, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що жоден з них не розв'яже цю задачу.

28.39. Два стрільці намагаються влучити в одну мішень. Імовірність влучення в мішень першим стрільцем дорівнює 0,6, а другим — 0,9. Знайти ймовірність того, що в мішень влучить тільки один з них.

28.40. У кожній із двох партій є 100 деталей. У першій партії є 5 бракованих деталей, а в другій — 4. Навмання вибирають по одній деталі з кожної партії. Яка ймовірність того, що хоча б одна деталь виявиться бракованою?

28.41. У конверті серед 100 карток є потрібна картка. З конверта навмання витягують 10 карток. Яка ймовірність того, що серед вибраних карток є потрібна?

28.42. Серед 20 уболівальників випадковим чином розподіляють 12 квитків на футбол і 8 — на баскетбол. Знайти з точністю до 0,01 ймовірність того, що двоє друзів відвідають одні й ті ж змагання.

28.43. На деякій прямій узято 3 точки, а на паралельній до неї прямій — 4 точки. Навмання вибирають 3 точки. Знайти з точністю до 0,01 ймовірність того, що вони будуть вершинами трикутника.

28.44. В урні 10 куль. Скільки в урні білих куль, якщо ймовірність того, що 3 навмання вибрані кулі будуть білими, дорівнює $\frac{1}{6}$?

28.45. Імовірність хоча б одного влучення в ціль чотирьох пострілів дорівнює 0,9984. Знайти ймовірність влучення у ціль одним пострілом.

28.46. Під час тестування з математики учень має відповісти на 5 запитань. Імовірність того, що він правильно відповість на одне запитання, дорівнює 0,8. Щоб скласти тест, учневі потрібно дати правильну відповідь не менше ніж на 3 запитання. Знайти з точністю до 0,01 ймовірність того, що учень складе тест.

28.47. Монету кидають 6 разів. Знайти з точністю до 0,01 ймовірність того, що випаде більше разів «герб», ніж «число».

28.48. Два гравці по черзі кидають монету. Переможе той, у кого раніше з'явиться «герб». Знайти з точністю до 0,01 ймовірність виграшу для того, хто починає гру.

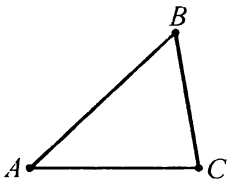
28.49. Імовірність виграшу в грошово-речовій лотереї на кожен квиток дорівнює 0,5. Скільки найменше потрібно купити лотерейних квитків, щоб з імовірністю не менше ніж 0,999 отримати виграш принаймні по одному квитку?

28.50. Імовірність того, що в результаті чотирьох незалежних випробувань подія A настане хоча б один раз, дорівнює 0,8704. Знайти імовірність ненастання події A за одного випробування, якщо вона під час усіх випробувань однакова.

ГЕОМЕТРІЯ

Тема 29. Трикутник

Трикутником називають геометричну фігуру, яка складається із трьох точок, що не лежать на одній прямій, трьох відрізків, які сполучають ці точки, й обмеженої ними частини площини.



Точки A, B і C називають вершинами, а відрізки AB, BC, AC — сторонами трикутника. Трикутник називають і позначають за його вершинами. Трикутник, зображений на рисунку, позначають так: ΔABC (читають: *трикутник ABC*), або ΔBCA, або ΔCAB.

Кути ABC, BAC, ACB — кути трикутника ABC. Їх можна позначати й однією буквою: $\angle B$, $\angle A$, $\angle C$.

Сторони трикутника ABC можна позначати маленькими буквами a, b і c. При цьому дотримуються такого порядку: проти кута A лежить сторона a або BC; проти кута B лежить сторона b або AC; проти кута C лежить сторона c або AB.

Кут B називають кутом, протилежним до сторони AC, а кути A і C — прилеглими до цієї сторони.

Суму довжин усіх сторін трикутника називають його *периметром*:

$$P = a + b + c.$$

Те, що периметр трикутника ABC дорівнює 36 см, коротко записують так: $P_{\Delta ABC} = 36$ см.

Види трикутників

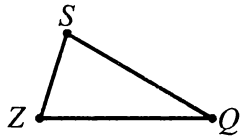
Залежно від довжин сторін трикутники поділяють на такі види: різносторонні, рівнобедрені, рівносторонні.

Трикутник, у якого всі сторони мають різні довжини, називають *різностороннім*.

Трикутник, у якого дві сторони рівні, називають *рівнобедреним*. Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають *бічними сторонами*, а третю його сторону — *основою*.

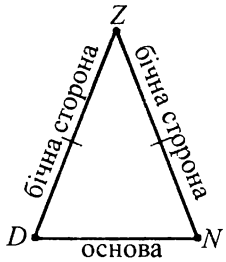
Трикутник, у якого всі сторони рівні, називають *рівностороннім*.

Різносторонній



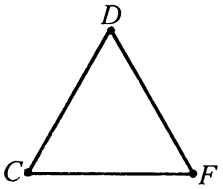
$ZS \neq SQ \neq ZQ$

Рівнобедрений



$ZD = ZN$

Рівносторонній



$CD = DF = CF$

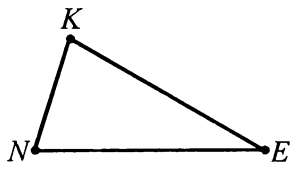
Залежно від міри кутів трикутники поділяють на такі види: гострокутні, прямокутні, тупокутні.

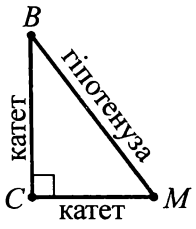
Гострокутним називають трикутник, у якого всі кути гострі.

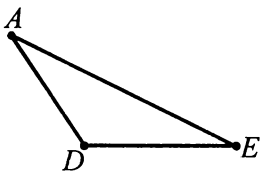
Прямокутним називають трикутник, у якого один з кутів є прямим.

Тупокутним називають трикутник, у якого один з кутів є тупим.

Гострокутний | *Прямокутний* | *Тупокутний*





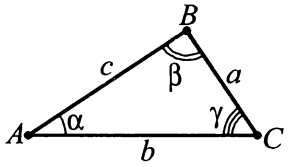


$\angle N < 90°, \angle K < 90°, \angle E < 90°$ | $\angle C = 90°$ | $\angle D > 90°$

Властивості сторін і кутів

Будь-яка сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін і більша за їх різницю:

$$c - b < a < c + b,\ b < c.$$



Щоб перевірити, чи можна з трьох відрізків a, b і c утворити трикутник, досить перевірити, чи буде найдовший з цих відрізків меншим від суми двох інших.

Проти більшої сторони трикутника лежить більший кут: якщо $b > a$, то $\beta > \alpha$; і навпаки, якщо $\beta > \alpha$, то $b > a$; а також, якщо $a = b$, то $\alpha = \beta$.

Периметр трикутника: $P = a + b + c$.

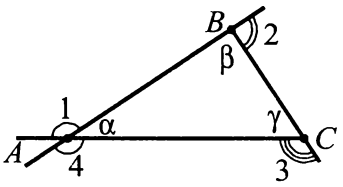
Теорема. *Сума кутів трикутника дорівнює 180°.*

З теореми про суму кутів трикутника випливають такі наслідки:

1) трикутник може мати лише один прямий або тупий кут. Якщо один з кутів трикутника прямий або тупий, то два інші кути — гострі;

2) сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.

Зовнішній кут



Кут, суміжний з кутом трикутника, називають *зовнішнім кутом* трикутника. При кожній вершині є два зовнішніх кути. Наприклад, при вершині A зовнішніми є кути 1 і 4.

Зовнішній кут трикутника більший від кожного кута трикутника, не суміжного з ним.

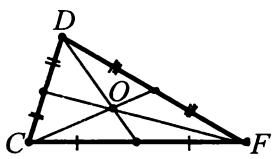
Сума зовнішніх кутів трикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360°$.

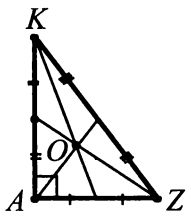
Теорема. Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.

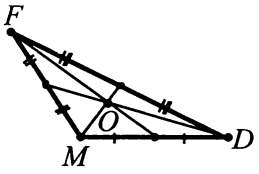
$\angle 1 = \gamma + \beta$. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360°$.

Медіани трикутника

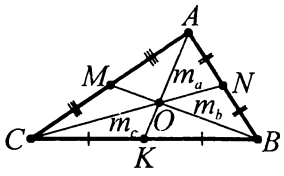
Медіаною трикутника називають відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони. Кожен трикутник — гострокутний, прямокутний і тупокутний — має три медіани. Медіани будь-якого трикутника перетинаються в одній точці, яка міститься усередині трикутника.







$CK = KB$, AK — медіана.



Медіану позначають буквою m. Те, що медіани проведені до сторін a, b і c, відповідно записують так: m_a, m_b і m_c.

Медіани точкою перетину діляться у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини трикутника.

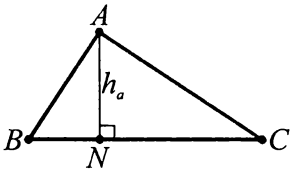
$AO : OK = BO : OM = CO : ON = 2 : 1$.

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}\ ,\ m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}\ ,\ m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}\ .$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Медіана ділить трикутник на два рівновеликі трикутники. *Рівновеликими* називають трикутники, які маю рівні площі.

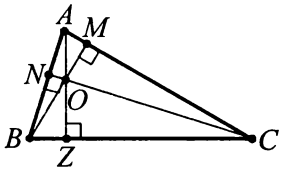
Висоти трикутника

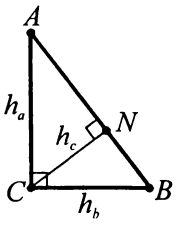


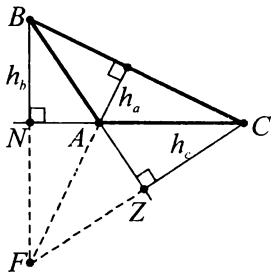
Висотою трикутника називають перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, яка містить його протилежну сторону. Кожен трикутник має три висоти.

$AN \perp BC$, AN — висота.

h_a — висота, проведена з вершини A. Висоти трикутника або їх продовження перетинаються в одній точці. У гострокутному трикутнику точка O перетину висот розміщена всередині трикутника; у прямокутному (точка C) — у вершині прямого кута; у тупокутному (точка F) — поза трикутником.





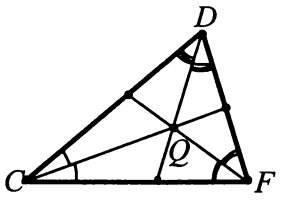


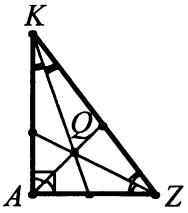
$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

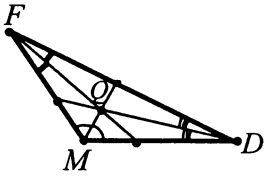
Будь-яку висоту трикутника можна знайти за формулами $h_a = c\sin\beta$, $h_a = \frac{2S}{a}$, де S — площа трикутника.

Бісектриси трикутника

Бісектрисою трикутника називають відрізок бісектриси кута трикутника, який сполучає його вершину з точкою на протилежній стороні трикутника. Кожний трикутник має три бісектриси. Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці, яка міститься усередині трикутника.

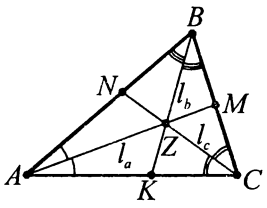




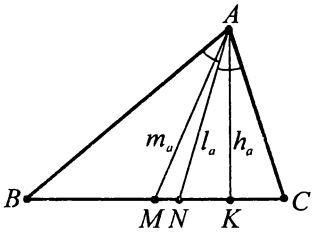


$\angle ABK = \angle CBK$, $AM = l_a$ — бісектриса кута A.

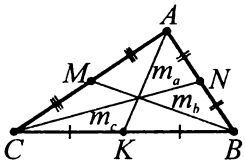
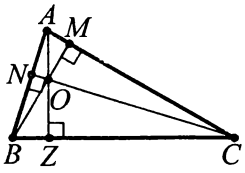
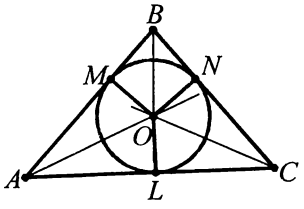
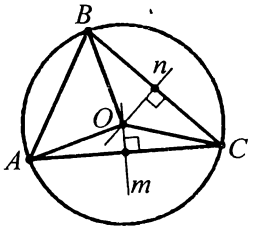
Властивість бісектриси трикутника. Бісектриса поділяє протилежну сторону на відрізки, пропорційні до прилеглих сторін: $\frac{AB}{BC} = \frac{KA}{KC}$.



У нерівнобедреному трикутнику кожна бісектриса лежить між медіаною і висотою, проведеними з цієї ж вершини: $h_a < l_a < m_a$.



Визначні точки трикутника

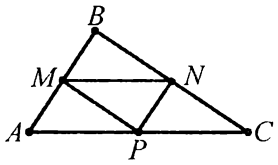
Точка перетину медіан (центр мас)	Точка перетину висот або їх продовжень (ортоцентр)	Точка перетину бісектрис (інцентр) — центр вписаного кола	Точка перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника — центр описаного кола
			

У будь-який трикутник можна вписати коло і навколо будь-якого трикутника можна описати коло.

Середня лінія трикутника

Середня лінія трикутника — це відрізок, який з'єднує середини двох його сторін.

У кожному трикутнику можна провести три середні лінії.



MN — середня лінія трикутника ABC.

Середня лінія трикутника паралельна до однієї з його сторін і дорівнює її половині. Наприклад, $MN = \frac{1}{2}AC$ і $MN \| AC$.

Середні лінії трикутника ділять його на 4 рівні трикутники. Наприклад, рівними є трикутники AMP, NPM, PNC і MBN.

Рівні трикутники

Два трикутники називають *рівними*, якщо при накладанні вони суміщаються.

У позначенні вершин рівних трикутників має значення порядок запису літер: літери, які відповідають рівним кутам, потрібно записувати в обох трикутниках на однакових місцях.

У рівних трикутників проти рівних сторін лежать рівні кути; проти рівних кутів — рівні сторони.

Ознаки рівності трикутників

Два трикутники рівні між собою, якщо в них відповідно рівні:

1) дві сторони та кут між ними;

2) сторона та прилеглі до неї кути;

3) три сторони.

Подібні трикутники

Два трикутники називають *подібними*, якщо в них відповідні кути рівні й відповідні сторони пропорційні.

Подібність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ коротко записують так: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Знак «~» замінює слово «подібний». Якщо коефіцієнт подібності відомий, то записують: $\Delta ABC \overset{k}{\sim} \Delta A_1B_1C_1$.

Для подібних трикутників має значення порядок запису вершин.

Щоб скласти відношення відповідних сторін подібних трикутників, потрібно:

1) визначити рівні кути трикутників;

2) з'ясувати, які сторони є відповідними;

3) записати відповідні рівності.

Ознаки подібності трикутників

Два трикутники подібні між собою ($\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$), якщо:

1) два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам іншого трикутника: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$;

2) дві сторони одного трикутника відповідно пропорційні до двох сторін іншого трикутника, а кути, утворені цими сторонами, рівні: $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$, $\angle A = \angle A_1$;

3) три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам іншого трикутника: $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC} = k$, де k — коефіцієнт подібності.

Відношення периметрів подібних трикутників дорівнює відношенню відповідних сторін (коефіцієнту подібності): $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = k$. Відношення відповідних лінійних елементів (медіан, бісектрис, висот тощо) подібних трикутників теж дорівнює коефіцієнту подібності.

Відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату відношення відповідних сторін (квадрату коефіцієнта подібності): $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = k^2$.

Пряма, яка паралельна до сторони трикутника і перетинає дві інші його сторони, відтинає від нього подібний йому трикутник.

Співвідношення між сторонами та кутами трикутника

Теорема синусів: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

Наслідок теореми синусів: $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$, де R — радіус описаного кола.

Терема косинусів: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$.

Площа трикутника

$S = \frac{1}{2}ah_a$.

$S = \frac{1}{2}ac\sin\beta$.

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр (формула Герона).

$S = \frac{abc}{4R}$, $S = pr$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Радіуси вписаного й описаного кіл

$R = \dfrac{abc}{4S}$, $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$, де R — радіус описаного кола, r — радіус вписаного кола.

Приклад 1. Сторони трикутника дорівнюють 4 см і 8 см. Яке найменше ціле значення повинна мати третя сторона, щоб кут між двома даними сторонами був тупим?

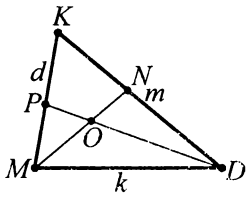
А	Б	В	Г	Д
81 см	6 см	10 см	9 см	13 см

■ Якщо в трикутнику зі сторонами a, b і c справджується нерівність $a^2 + b^2 < c^2$, то кут, протилежний стороні c, тупий. Маємо: $4^2 + 8^2 < c^2$; $80 < c^2$; $c > 9$.

Відповідь. В. ■

Приклад 2. У трикутнику MKD $\angle K = 60°$. Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює 2 см. Скільки сантиметрів має радіус кола, описаного навколо трикутника MOD, де O — точка перетину бісектрис трикутника MKD?

■ Нехай MKD — заданий трикутник, у якого $MK = d$, $KD = m$, $MD = k$, $\angle K = 60°$, R — радіус описаного кола, $R = 2$ см, O — точка перетину бісектрис. За наслідком з теореми синусів $\dfrac{k}{\sin\angle K} = 2R$. Отримаємо: $k = 2R\sin\angle K =$ $= 2 \cdot 2\sin 60° = 2\sqrt{3}$ (см), тобто $MD = 2\sqrt{3}$ (см). Нехай $\angle M = 2x°$, $\angle D = 2y°$. За теоремою про суму кутів трикутника $\angle M + \angle D + \angle K = 180°$; $2x + 2y + 60° = 180°$; $2x + 2y = 120°$; $x + y = 60°$.



Оскільки MO і DO — бісектриси кутів M і D відповідно, то $\angle OMD = x°$, $\angle ODM = y°$.

Із трикутника MOD: $x + y + \angle MOD = 180°$; $\angle MOD = 180° - 60° = 120°$.

За наслідком з теореми синусів $\dfrac{MD}{\sin\angle MOD} = 2R_1$, де R_1 — радіус кола, описаного навколо трикутника MOD. $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 120°} = 2R_1$, $R_1 = \dfrac{2\sqrt{3}}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 2$ (см).

Відповідь. 2. ■

Приклад 3. Знайти найбільший кут трикутника, якщо їхні градусні міри відносяться як 3 : 4 : 5.

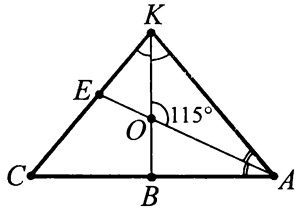
■ Нехай одна частина становить $x°$, тоді $\angle 1 = 3x°$, $\angle 2 = 4x°$, $\angle 3 = 5x°$. Складемо і розв'яжемо рівняння: $3x + 4x + 5x = 180$; $12x = 180$; $x = 15$. Тоді $5x = 5 \cdot 15 = 75$.

Відповідь. 75°. ■

Приклад 4. У трикутнику CKA бісектриси кутів K і A при перетині утворюють кут 115°. Знайти кут C.

Оскільки KB й AE — бісектриси кутів K і A, то

$$\angle BKA = \frac{1}{2}\angle K,\ \angle EAK = \frac{1}{2}\angle A.$$



Із ΔOKA за теоремою про суму кутів трикутника:

$$\frac{1}{2}\angle K + \frac{1}{2}\angle A + \angle KOA = 180°.$$

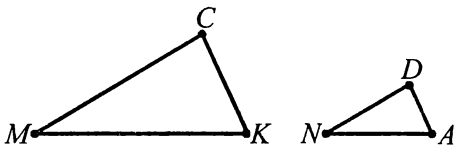
Звідси: $\dfrac{1}{2}\angle K + \dfrac{1}{2}\angle A = 180° - 115°$; $\dfrac{1}{2}(\angle K + \angle A) = 65°$, тоді $\angle K + \angle A = 65 \cdot 2 = 130°$.

Із трикутника CKA за теоремою про суму кутів трикутника: $\angle C + \angle K + \angle A = 180°$.

Звідси: $\angle C = 180° - 130° = 50°$.

Відповідь. 50°. ■

Приклад 5. Трикутники MCK і NDA подібні (див. рис.). Знайти сторону MK, якщо $MC = 32$ см, $ND = 16$ см, $NA = 10{,}5$ см.



■ Складемо відношення відповідних сторін: $\frac{MC}{ND} = \frac{MK}{NA}$. Підставимо в одержану рівність відомі довжини сторін. Одержимо пропорцію: $\frac{32}{16} = \frac{MK}{10{,}5}$. Маємо: $MK = \frac{32 \cdot 10{,}5}{16} = 21$ (см).

Відповідь. 21 см. ■

Завдання 29.1–29.21 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

29.1. У трикутнику ABC сторони AB і AC відповідно дорівнюють 6 см і 10 см. Указати всі можливі значення довжини сторони BC.

А	Б	В	Г	Д
$BC < 16$ см	6 см $< BC <$ 16 см	6 см $< BC <$ 10 см	4 см $< BC <$ 16 см	5 см $< BC <$ 15 см

29.2. Градусні міри кутів трикутника відносяться як 3 : 2 : 10. Знайти градусну міру найменшого кута трикутника.

А	Б	В	Г	Д
12°	20°	24°	36°	18°

29.3. Зовнішні кути при двох вершинах трикутника дорівнюють 70° і 150°. Знайти внутрішній кут при третій вершині.

А	Б	В	Г	Д
40°	50°	60°	100°	140°

29.4. У трикутнику ABC $\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$. Визначити гострий кут, утворений бісектрисами даних кутів.

А	Б	В	Г	Д
25°	30°	55°	35°	60°

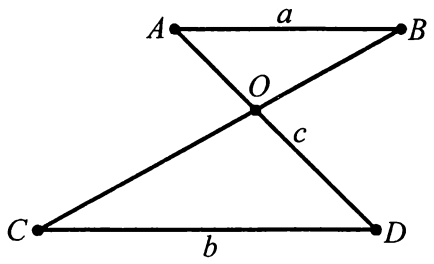
29.5. У трикутнику ABC $\angle A = 30°$ і $\angle B = 105°$. Знайти відношення $\frac{BC}{AB}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

29.6. У трикутнику ABC $AB = \sqrt{3}$ см, $AC = 2$ см і $\angle A = 30°$. Знайти довжину медіани BM.

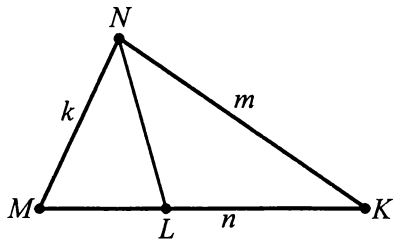
А	Б	В	Г	Д
7	$\sqrt{7}$	1	$\sqrt{13}$	$\sqrt{11}$

29.7. O — точка перетину відрізків AD і BC, відрізки AB і CD паралельні. $AB = a$, $CD = b$. Знайти AO, якщо $OD = c$.



А	Б	В	Г	Д
$\frac{b}{ac}$	$\frac{bc}{a}$	$\frac{a}{bc}$	abc	$\frac{ac}{b}$

29.8. У трикутнику MNK $MN = k$, $NK = m$ і $MK = n$, NL — бісектриса трикутника. Знайти довжину відрізка ML.



А	Б	В	Г	Д
$\frac{k}{k+m+n}$	kmn	$\frac{kn}{m}$	$\frac{kn}{k+m}$	$\frac{mn}{k+m}$

29.9. Відповідні сторони подібних трикутників дорівнюють 14 см і 21 см. Знайти площу меншого трикутника, якщо площа більшого трикутника дорівнює 180 см^2.

А	Б	В	Г	Д
80 см^2	120 см^2	60 см^2	100 см^2	90 см^2

29.10. Одна зі сторін трикутника дорівнює 7 см. Знайти висоту, проведену до цієї сторони, якщо площа трикутника дорівнює 35 см^2.

А	Б	В	Г	Д
2,5 см	5 см	7,5 см	10 см	12,5 см

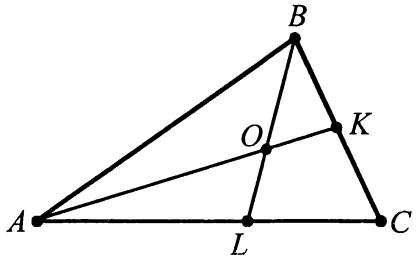
29.11. Два кути трикутника дорівнюють α і β, а радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює R. Визначити площу трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$4R^2\sin(\alpha+\beta)$	$2R^2\sin(\alpha+\beta)$	$2R^2\sin\alpha\sin\beta$	$4R^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$	$2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$

29.12. Дві сторони трикутника дорівнюють 48 см і 28 см. Указати всі можливі значення периметра трикутника.

А	Б	В	Г	Д
20 см $< P <$ 76 см	76 см $< P <$ 152 см	20 см $< P <$ 152 см	96 см $< P <$ 152 см	76 см $< P <$ 96 см

29.13. O — точка перетину бісектрис AK і BL трикутника ABC. Знайти $\angle AOB$, якщо $\angle C = 50°$.



А	Б	В	Г	Д
100°	115°	120°	130°	135°

29.14. Градусні міри зовнішніх кутів трикутника ABC при вершинах A, B і C відносяться як 3 : 4 : 5. Як відносяться градусні міри внутрішніх кутів трикутника при вершинах A, B і C?

А	Б	В	Г	Д
3 : 4 : 5	5 : 4 : 3	3 : 2 : 1	7 : 8 : 9	9 : 8 : 7

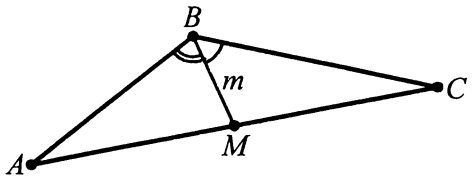
29.15. Кути трикутника відносяться як 1 : 2 : 3. Знайти відношення протилежних їм сторін.

А	Б	В	Г	Д
1 : 2 : 3	3 : 2 : 1	1 : 3 : 2	$1 : \sqrt{3} : 2$	$1 : \sqrt{2} : 2$

29.16. Сторони трикутника дорівнюють 7 см, 8 см і 10 см. Знайти косинус найбільшого кута цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{29}{140}$	$\frac{23}{112}$	$\frac{19}{140}$	$\frac{13}{112}$	$\frac{13}{56}$

29.17. У трикутнику ABC BM — медіана, $\angle ABM = \alpha$, $\angle MBC = \beta$, $BM = m$. Визначити сторону AB.

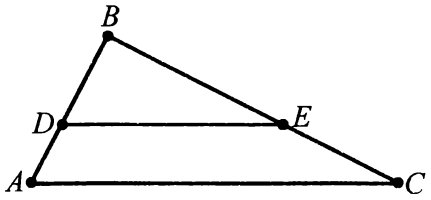


А	Б	В	Г	Д
$\frac{2m\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$	$2m\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$	$\frac{2m\sin\beta}{\sin\alpha}$	$2m\sin\alpha\sin\beta$	$\frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

29.18. Два трикутники подібні. Сторони одного з них дорівнюють 7 см, 12 см і 16 см, а сторони іншого — 40 см, 30 см та x см. Знайти x.

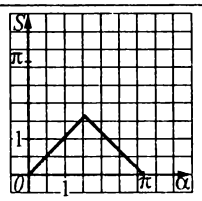
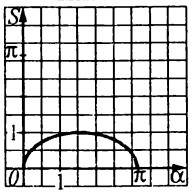
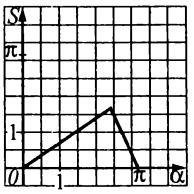
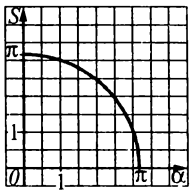
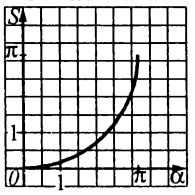
А	Б	В	Г	Д
18 см	17,5 см	20 см	24 см	18,5 см

29.19. У трикутнику ABC відрізок DE з кінцями на сторонах AB і BC паралельний до сторони AC. $S_{\Delta DBE} = 4$ см^2, $S_{ADEC} = 5$ см^2, $DE = 7$ см. Знайти довжину AC.

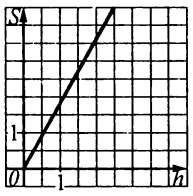
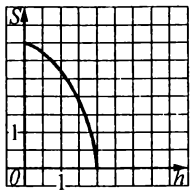
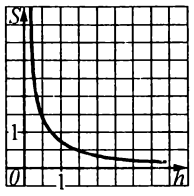
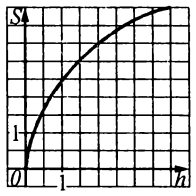
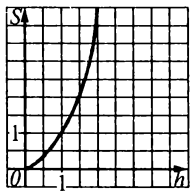


А	Б	В	Г	Д
9,5 см	$9\frac{2}{3}$ см	12 см	10,5 см	9 см

29.20. $S(\alpha)$ — площа трикутника з даними сторонами a і b та змінним кутом α між ними. Який з наведених графіків може бути графіком функції $S(\alpha)$?

А	Б	В	Г	Д
				

29.21. $S(h)$ — площа трикутника з даною стороною a і змінною висотою h, проведеною до неї. Який з наведених графіків може бути графіком функції $S(h)$?

А	Б	В	Г	Д
				

Завдання 29.22–29.25 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

29.22. Установити відповідність між елементами (1–4) рівностороннього трикутника зі стороною a та їхніми величинами (А–Д).

1 Висота
2 Радіус вписаного кола
3 Кут між медіанами
4 Радіус описаного кола

А $\frac{\sqrt{3}}{6}a$
Б $\frac{\sqrt{3}}{2}a$
В $30°$
Г $60°$
Д $\frac{\sqrt{3}}{3}a$

29.23. Установити відповідність між коефіцієнтами подібності (1–4) двох трикутників і відношенням їх площ (А–Д).

1 $k_1 = 2$	**А** 25
2 $k_2 = 3$	**Б** 9
3 $k_3 = 4$	**В** 16
4 $k_4 = 5$	**Г** 36
	Д 4

29.24. Установити відповідність між довжинами сторін (1–4), які лежать проти кута 30° у прямокутних трикутниках, і довжинами діаметрів (А–Д), описаних навколо трикутників кіл.

1 2 см	**А** 8
2 4 см	**Б** 20
3 10 см	**В** 4
4 15 см	**Г** 10
	Д 30

29.25. Установити відповідність між сторонами трикутників (1–4) та їх площами (А–Д).

1 4 см, 5 см, 3 см	**А** 96 см^2
2 8 см, 10 см, 6 см	**Б** 48 см^2
3 16 см, 20 см, 12 см	**В** 6 см^2
4 12 см, 15 см, 9 см	**Г** 54 см^2
	Д 24 см^2

Розв'яжіть завдання 29.26–29.40. Відповідь запишіть десятковим дробом.

29.26. Величини кутів трикутника ABC при вершинах A, B і C відносяться, як 5 : 6 : 7. Знайти в градусах величину кута між висотою CD і бісектрисою кута A трикутника.

29.27. Знайти площу S гострокутного трикутника у квадратних сантиметрах, якщо дві його сторони дорівнюють 2 см і 1 см, а квадрат косинуса кута між ними дорівнює $\frac{1}{4}$. У відповідь записати $\sqrt{3}S$.

29.28. У трикутнику ABC висота BK поділяє сторону AC на відрізки 1 і 3. Знайти квадрат медіани BM трикутника ABC, якщо $BK = 2$.

29.29. У трикутнику ABC проведено медіану AK, яка дорівнює $\frac{13\sqrt{2}}{4}$ й утворює зі стороною AC кут 30°. Знайти BC, якщо $\angle BCA = 45°$.

29.30. Периметр трикутника дорівнює 50, а його бісектриса ділить протилежну сторону на відрізки завдовжки 15 і 5. Знайти меншу сторону трикутника.

29.31. Сторона трикутника дорівнює 10. Знайти квадрат довжини відрізка прямої, яка паралельна до цієї сторони та ділить площу трикутника навпіл.

29.32. Одна зі сторін трикутника дорівнює 2, а прилеглі до неї кути дорівнюють 30° і 45°. Знайти площу трикутника з точністю до 0,01.

29.33. Знайти площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 28 і 30, а медіана, яка проведена до третьої сторони, дорівнює 13.

29.34. На сторонах AB і AC трикутника ABC відповідно позначено такі точки M і K, що $\angle AMK = \angle C$, $AM = 4$, $MB = 2$ і $AK = 3$. Знайти довжину відрізка KC.

29.35. Відношення двох внутрішніх кутів трикутника дорівнює 2 : 3, а зовнішніх кутів при цих же вершинах 11 : 9. Знайти в градусах третій внутрішній кут трикутника.

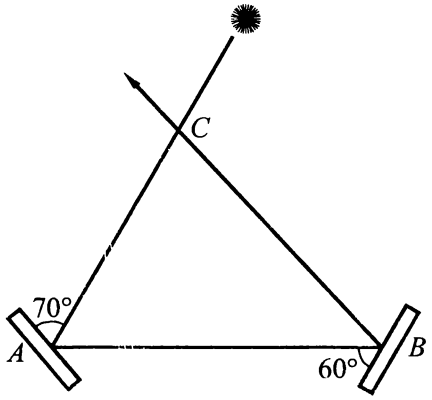
29.36. Сторони трикутника дорівнюють 4 см, 5 см і 6 см. Знайти з точністю до 0,01 см довжину медіани, проведеної до сторони завдовжки 5 см.

29.37. Одна зі сторін трикутника дорівнює 10, а медіани, що проведені до двох інших сторін, дорівнюють 9 і 12. Знайти площу трикутника.

29.38. Дві сторони трикутника дорівнюють b і c, а бісектриса кута між ними дорівнює l. Визначити третю сторону трикутника й обчислити її значення, якщо $b = 1$, $c = 4$, $l = 1{,}2$.

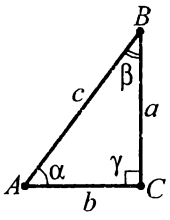
29.39. У трикутнику, дві сторони якого дорівнюють a і b, сума висот, опущених на ці сторони, дорівнює третій висоті. Визначити третю сторону й обчислити її значення, якщо $a = 4$, $b = 6$.

29.40. Промінь світла падає від ліхтарика на поверхню дзеркала A під кутом 70°, а відбитий від нього промінь падає на поверхню іншого дзеркала B під кутом 60° і відбивається від нього. Дзеркала розміщені так, що всі падаючі та відбиті промені лежать в одній площині (див. рис.). Знайти градусну міру найменшого внутрішнього кута утвореного променями трикутника ABC.



Тема 30. Прямокутний трикутник

Прямокутним називають трикутник, у якого один з кутів є прямим.



$\angle C = 90°$, трикутник ABC — прямокутний. a, b — катети, c — гіпотенуза.

Теорема Піфагора. У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Теорема, обернена до теореми Піфагора. Якщо квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін, то цей трикутник — прямокутний.

Властивості прямокутних трикутників

1. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.

2. У прямокутному трикутнику гіпотенуза більша від катета.

3. Катет прямокутного трикутника, який лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи: якщо $\alpha = 30°$, то $a = \frac{1}{2}c$.

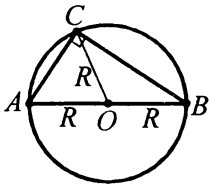
Справедливе й обернене твердження: якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то кут, протилежний цьому катету, дорівнює 30°.

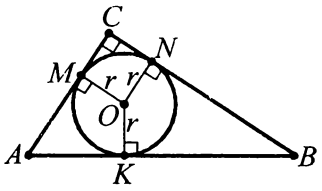
Описане та вписане кола

Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є серединою гіпотенузи: $AO = BO = CO = R = \frac{1}{2}AB$.

Радіус описаного кола: $R = \frac{1}{2}c$, $R = m_c$.

Радіус вписаного кола: $r = \frac{a+b-c}{2}$, $r = \frac{ab}{a+b+c}$.

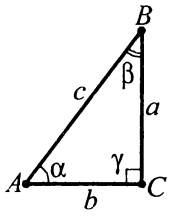




Залежність між сторонами та кутами прямокутного трикутника

$a = c\sin\alpha = c\cos\beta = b\operatorname{tg}\alpha = b\operatorname{ctg}\beta$, $b = c\sin\beta = c\cos\alpha = a\operatorname{tg}\beta = a\operatorname{ctg}\alpha$.

$$c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{\cos\beta} = \frac{b}{\cos\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$



Висоти прямокутного трикутника

$h_a = b$, $h_b = a$, $h_c = \frac{ab}{c}$.

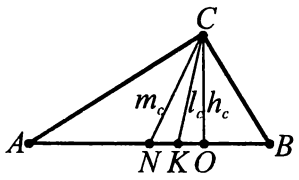
Висоти h_a і h_b збігаються з катетами b та a.

Медіани прямокутного трикутника

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 + a^2};\ m_b = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + b^2};\ m_c = \frac{1}{2}c = R;\ m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2.$$

Площа прямокутного трикутника

У прямокутному трикутнику бісектриса прямого кута поділяє навпіл кут між висотою і медіаною, проведеними з цієї ж вершини: $\angle NCK = \angle OCK$.



$$S = \frac{1}{2}ab,\ S = \frac{1}{2}ch_c,\ S = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg}\beta,\ S = \frac{1}{2}b^2 \operatorname{tg}\alpha.$$

Ознаки рівності прямокутних трикутників.

1. Якщо катети одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катетам іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

2. Якщо катет і гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету і гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

3. Якщо гіпотенуза й гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно гіпотенузі й гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

4. Якщо гіпотенуза й катет одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно гіпотенузі й катету іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

Ознаки подібності прямокутних трикутників.

Два прямокутні трикутники подібні між собою, якщо:

1) гострий кут одного трикутника дорівнює гострому куту іншого трикутника;

2) катети одного трикутника пропорційні катетам іншого трикутника;

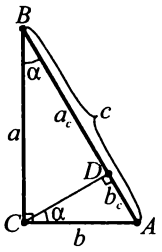
3) гіпотенуза та катет одного трикутника пропорційні гіпотенузі та катету іншого трикутника.

У прямокутному трикутнику:

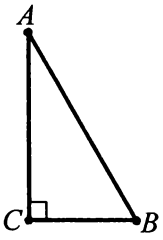
1) висота, проведена з вершини прямого кута, є середнім пропорційним між проекціями катетів на гіпотенузу;

2) катет є середнім пропорційним між гіпотенузою і його проекцією на гіпотенузу.

Наприклад, у трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AC = b$, $BC = a$, $DB = a_c$, $CD = h_c$, $AD = b_c$. Тоді: 1) $h^2 = a_c \cdot b_c$; 2) $a^2 = c \cdot a_c$, $b^2 = c \cdot b_c$.



Приклад 1. Знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють 5 см і 12 см.



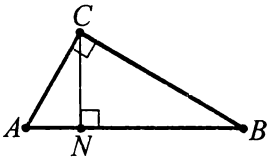
■ За теоремою Піфагора маємо: $AB^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$; $AB = \sqrt{169} = 13$.

Відповідь. 13 см. ■

Приклад 2. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює h, а гострий кут — β. Знайти гіпотенузу трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{h}{\sin\beta}$	$h\operatorname{ctg}\beta$	$h\operatorname{tg}\beta$	$\frac{h}{\sin\beta\cos\beta}$	$\frac{h}{\cos\beta}$

■ Трикутник CNB — прямокутний. За співвідношеннями між елементами прямокутного трикутника маємо: $CB = \frac{CN}{\sin B}$, тобто $CB = \frac{h}{\sin\beta}$.



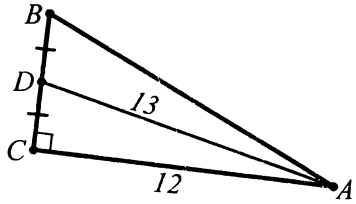
Із прямокутного трикутника ACB маємо: $AB = \frac{CB}{\cos B}$, тобто $AB = \frac{h}{\sin\beta\cos\beta}$.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 3. Катет прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а медіана, проведена до іншого катета, — 13 см. Знайти гіпотенузу трикутника.

А	Б	В	Г	Д
5 см	$2\sqrt{61}$ см	25 см	22 см	26 см

■ Із трикутника ACD за теоремою Піфагора маємо: $AD^2 = CD^2 + CA^2$, звідки $CD = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (см).

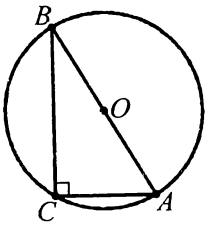


$CB = 2CD = 2 \cdot 5 = 10$ (см).

Із трикутника ABC: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 10^2} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$ (см).

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 4. Навколо прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C описано коло (див. рис.). Знайти радіус кола, якщо $AC = 12$ см, $\angle B = 30°$.

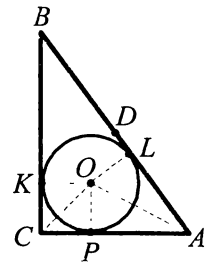


■ За властивістю катета, який лежить проти кута 30°, $AC = \frac{1}{2}AB$, звідси $AB = 2AC = 2 \cdot 12 = 24$ (см). $R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$ (см).

Відповідь. 12 см. ■

Приклад 5. Знайти площу прямокутного трикутника у квадратних метрах, якщо радіуси вписаного в нього й описаного навколо нього кіл відповідно дорівнюють 2 м і 5 м.

■ Нехай трикутник ABC заданий. У нього: $\angle C = 90°$, r — радіус вписаного кола, $r = 2$ м, R — радіус описаного кола, $R = 5$ м. У прямокутному трикутнику центр описаного кола D є серединою гіпотенузи і його радіус дорівнює половині гіпотенузи. Отже, $DA = DB = R = 5$ м.



Нехай точка O — центр вписаного в трикутник кола; OK, OP, OL — радіуси, проведені в точки дотику кола зі сторонами трикутника. Тоді $OK \perp BC$, $OP \perp CA$, $\angle C = 90°$ і тому $CPOK$ — прямокутник. Звідки: $OK = CP = r = 2$ м; $OP = KC = r = 2$ м. За властивістю дотичних до кола відрізки дотичних, проведених з однієї точки до точок дотику, рівні. Тому $BK = BL$, $AP = AL$ і $CP = CK$. Знайдемо периметр трикутника ABC: $P = KB + BL + LA + AP + PC + CK = BL + BL + LA + LA + PC + PC = 2BL + 2LA + 2PC = 2(BL + LA) + 2PC = 2BA + 2PC = 2 \cdot 2R + 2r = 4R + 2r = 4 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 24$ (м). Площу трикутника знайдемо з формули $S = \frac{1}{2}P \cdot r$, де P — периметр, r — радіус вписаного кола. Маємо: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 2 = 24$ (м^2).

Відповідь. 24. ■

Завдання 30.1–30.21 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

30.1. Один з гострих кутів прямокутного трикутника на 18° більший від іншого. Знайти більший з цих кутів.

А	Б	В	Г	Д
66°	68°	36°	54°	48°

30.2. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b ($a > b$). Визначити довжину медіани, проведеної до меншого катета.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{2}}$	$\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{2}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$	$\sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$	$\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$

30.3. Катет прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а медіана, що проведена до нього, дорівнює 8 см. Знайти інший катет трикутника.

А	Б	В	Г	Д
8 см	$2\sqrt{7}$ см	$4\sqrt{5}$ см	12 см	$8\sqrt{5}$ см

30.4. Один з катетів і гіпотенуза прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 5 см і 13 см. Знайти площу трикутника.

А	Б	В	Г	Д
65 см^2	32,5 см^2	30 см^2	60 см^2	130 см^2

30.5. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 60 см і 80 см. Знайти висоту трикутника, проведену до гіпотенузи.

А	Б	В	Г	Д
24 см	36 см	48 см	56 см	96 см

30.6. Катет та гіпотенуза прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 10 см і 26 см. Знайти проекцію цього катета на гіпотенузу.

А	Б	В	Г	Д
8 см	5,2 см	$7\frac{8}{13}$ см	2,6 см	$3\frac{11}{13}$ см

30.7. Знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, у якого висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює $6\sqrt{3}$ см, а проекція одного з катетів на гіпотенузу дорівнює 6 см.

А	Б	В	Г	Д
12 см	18 см	24 см	28 см	32 см

30.8. Довжина гіпотенузи прямокутного трикутника дорівнює $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Обчислити площу круга, описаного навколо трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{5}$	4π	$\frac{4\pi}{5}$	5π	π^2

30.9. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює b, а протилежний до нього кут — β. Визначити радіус кола, описаного навколо трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{b}{2\sin\beta}$	$\frac{b}{2\cos\beta}$	$\frac{b\sin\beta}{2}$	$\frac{2b}{\sin\beta}$	$\frac{2b}{\cos\beta}$

30.10. Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює α. Визначити катет, прилеглий до цього кута, якщо радіус кола, вписаного в трикутник, дорівнює r.

А	Б	В	Г	Д
$r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$	$r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$	$r\left(1+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)$	$r\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$	$2r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$

30.11. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 12 см. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник.

А	Б	В	Г	Д
4 см	2 см	8 см	8,5 см	6 см

30.12. У прямокутному трикутнику один з гострих кутів дорівнює α, а висота, що проведена до гіпотенузи, дорівнює h. Визначити площу трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{h^2}{2\sin\alpha}$	$2h^2\sin 2\alpha$	$h^2\sin 2\alpha$	$\frac{h^2}{2\sin 2\alpha}$	$\frac{h^2}{\sin 2\alpha}$

30.13. Гострі кути прямокутного трикутника відносяться як 1 : 2. Знайти відношення протилежних їм катетів.

А	Б	В	Г	Д
1 : 2	1 : 3	$1:\sqrt{2}$	$1:\sqrt{3}$	$1:\sqrt{5}$

30.14. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а гіпотенуза дорівнює 20 см. Знайти менший з відрізків, на які поділяє гіпотенузу бісектриса прямого кута.

А	Б	В	Г	Д
$8\frac{4}{7}$ см	$6\frac{5}{12}$ см	6 см	5 см	$4\frac{2}{7}$ см

30.15. Бісектриси двох кутів прямокутного трикутника утворюють при перетині кут 79°. Знайти менший гострий кут трикутника.

А	Б	В	Г	Д
11°	17°	22°	34°	44°

30.16. У прямокутному трикутнику один з гострих кутів дорівнює 27°. Знайти кут між бісектрисою і висотою трикутника, проведеними з вершини прямого кута.

А	Б	В	Г	Д
8°	16°	32°	28°	18°

30.17. У прямокутному трикутнику один з гострих кутів дорівнює 32°. Знайти кут між висотою і медіаною, проведеними з вершини прямого кута.

А	Б	В	Г	Д
32°	26°	36°	33°	23°

30.18. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника поділяє гіпотенузу на відрізки у відношенні 3 : 4. У якому відношенні ділить гіпотенузу висота?

А	Б	В	Г	Д
3 : 4	$\sqrt{3}$: 2	9 : 16	2 : 3	1 : 2

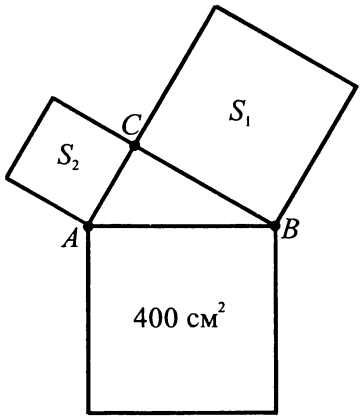
30.19. Знайти площу прямокутного трикутника, у якого бісектриса прямого кута ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 4 см і 8 см.

А	Б	В	Г	Д
32 см^2	16 см^2	57,6 см^2	28,8 см^2	14,4 см^2

30.20. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10 см. Якою найбільшою може бути площа трикутника?

А	Б	В	Г	Д
75 см^2	100 см^2	50 см^2	25 см^2	12,5 см^2

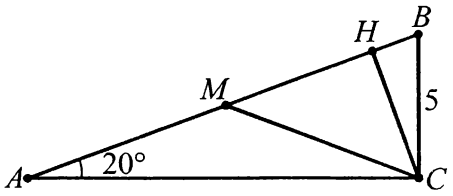
30.21. На сторонах прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) побудовані квадрати. Площа квадрата, побудованого на гіпотенузі, дорівнює 400 см^2, а різниця площ квадратів, побудованих на катетах, дорівнює 112 см^2. Знайти площу трикутника.



А	Б	В	Г	Д
168 см^2	84 см^2	96 см^2	192 см^2	48 см^2

Завдання 30.22–30.25 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

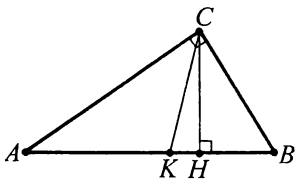
30.22. На рисунку зображено прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$), його висоту CH, медіану CM і позначено величини деяких його елементів. Установити відповідність між елементами трикутника (1–4) та їхніми величинами (А–Д).



1 $\angle MCH$
2 $\angle CMH$
3 CM
4 CH

А $\dfrac{5}{2\sin 20°}$
Б $5\sin 20°$
В $50°$
Г $5\sin 70°$
Д $40°$

30.23. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) проведено бісектрису CK та висоту CH. Установити відповідність між значеннями кута при вершині A (1–4), розміщеній зі сторони бісектриси, і кутом KCH (А–Д).



1 $8°$
2 $32°$
3 $28°$
4 $18°$

А $27°$
Б $33°$
В $37°$
Г $13°$
Д $17°$

30.24. Установити відповідність між катетами a й b (1–4) прямокутних трикутників і значеннями гострого кута, протилежного до катета a (А–Д).

1 2 см, 2 см
2 1 см, $\sqrt{3}$ см
3 $\sqrt{3}$ см, 1 см
4 $2-\sqrt{2}$ см, $\sqrt{2}$ см

А $22{,}5°$
Б $45°$
В $60°$
Г $90°$
Д $30°$

30.25. Установити відповідність між довжинами гіпотенуз і катетів (1–4) прямокутних трикутників і їх площами (А–Д).

1 5 см, 3 см
2 13 см, 5 см
3 10 см, 8 см
4 25 см, 7 см

А $84\ \text{см}^2$
Б $6\ \text{см}^2$
В $24\ \text{см}^2$
Г $48\ \text{см}^2$
Д $30\ \text{см}^2$

Розв'яжіть завдання 30.26–30.41. Відповідь запишіть десятковим дробом.

30.26. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника утворює з протилежною стороною кути, один з яких дорівнює 70°. Знайти у градусах менший гострий кут трикутника.

30.27. Катети прямокутного трикутника відносяться як 2 : 1, а гіпотенуза дорівнює $5\sqrt{5}$ см. Знайти у сантиметрах більший катет.

30.28. Катет прямокутного трикутника дорівнює 28 см, різниця двох інших його сторін дорівнює 8 см. Знайти у сантиметрах гіпотенузу.

30.29. У прямокутному трикутнику висота і медіана, проведені до гіпотенузи, відповідно дорівнюють 24 см і 25 см. Знайти у сантиметрах периметр трикутника.

30.30. У прямокутному трикутнику катет дорівнює 12, а тангенс прилеглого кута дорівнює $\frac{5}{6}$. Знайти квадрат довжини гіпотенузи.

30.31. Проекції катетів прямокутного трикутника на гіпотенузу дорівнюють 4 см і 21 см. Знайти у сантиметрах менший катет.

30.32. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює $\sqrt{5}$ см, а проекція іншого катета на гіпотенузу дорівнює 4 см. Знайти у сантиметрах гіпотенузу.

30.33. Точка дотику вписаного в прямокутний трикутник кола ділить гіпотенузу на відрізки 3 см і 10 см. Знайти у квадратних сантиметрах площу трикутника.

30.34. Точка дотику вписаного в прямокутний трикутник кола ділить гіпотенузу на відрізки 4 см і 6 см. Знайти у сантиметрах радіус вписаного кола.

30.35. Знайти у квадратних сантиметрах площу прямокутного трикутника, якщо його висота ділить гіпотенузу на відрізки 18 см і 32 см.

30.36. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника поділяє гіпотенузу на відрізки, що дорівнюють m і n. Визначити висоту, проведену з вершини прямого кута й обчислити її значення, якщо $m = 3$, $n = 4$.

30.37. У прямокутному трикутнику висота і бісектриса, проведені з вершини прямого кута, відповідно дорівнюють h і l. Визначити площу трикутника й обчислити її значення, якщо $h = 0{,}5$, $l = 0{,}7$.

30.38. У прямокутний трикутник вписано коло радіуса r. Визначити синус меншого гострого кута трикутника, якщо довжина гіпотенузи $5r$.

30.39. Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, дорівнює h, а відстань від вершини прямого кута до точки перетину бісектриси меншого гострого кута з меншим катетом дорівнює d. Визначити довжину меншого катета й обчислити її значення, якщо $h = 7$, $d = 5$.

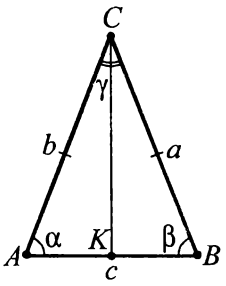
30.40. У прямокутному трикутнику катет дорівнює 12, а гіпотенуза — 13. Знайти квадрат довжини бісектриси трикутника, проведеної з вершини меншого кута.

30.41. Від високої тополі падає тінь завдовжки 9 м, а від вертикальної жердини завдовжки 2 м — тінь завдовжки 1,2 м. Знайти висоту тополі.

Тема 31. Рівнобедрений трикутник

Трикутник, у якого дві сторони рівні, називають *рівнобедреним*. $AC = BC$, a, b — бічні сторони, c — основа.

У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AB: $AC = BC$, $\alpha = \beta$.



$l_c = m_c = h_c$

Властивості рівнобедреного трикутника

1. Бісектриса, проведена до основи рівнобедреного трикутника, є його медіаною і висотою. Наприклад, якщо трикутник ABC — рівнобедрений (див. рис.), $AC = BC$ і CK — його бісектриса, то CK — медіана та висота трикутника ABC.

2. Кути при основі рівнобедреного трикутника рівні. Наприклад, для рівнобедреного трикутника ABC (див. рис.) $AC = BC$. Тоді $\angle A = \angle B$.

3. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є одночасно його медіаною і бісектрисою.

4. Медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є одночасно його висотою і бісектрисою.

5. Медіани, бісектриси та висоти, проведені до бічних сторін рівнобедреного трикутника, рівні.

6. Зовнішній кут при вершині рівнобедреного трикутника удвічі більший за кут при основі.

Ознаки рівнобедреного трикутника

Трикутник є рівнобедреним, якщо:

1) у нього є два рівні кути;

2) одна з медіан є висотою або бісектрисою;

3) одна з висот є бісектрисою або медіаною;

4) одна з бісектрис є медіаною або висотою;

5) дві медіани (висоти, бісектриси) рівні.

Подібність рівнобедрених трикутників

1. Рівнобедрені трикутники подібні, якщо вони мають по рівному куту: **а)** при основі; **б)** при вершині.

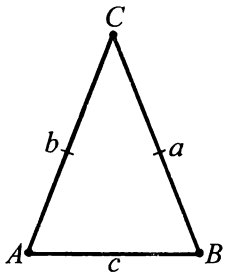
2. Усі рівнобедрені прямокутні трикутники подібні.

Основні співвідношення для рівнобедреного трикутника

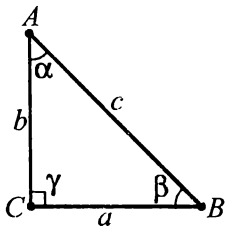
Для будь-якого рівнобедреного трикутника (див. рис.) мають місце такі співвідношення:

1) $h_a = h_b = \dfrac{2S}{a}$;

2) $h_c = m_c = l_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 - c^2}$.



Для прямокутного рівнобедреного трикутника (див. рис.) мають місце такі співвідношення:



1) $a = b = \frac{c\sqrt{2}}{2}$;

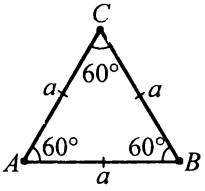
2) $\alpha = \beta = 45°$, $\gamma = 90°$;

3) $S = \frac{a^2}{2} = \frac{c^2}{4}$;

4) $m_a = m_b = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $m_c = h_c = l_c = \frac{c}{2}$.

Рівносторонній трикутник

$AB = BC = AC = a$, трикутник ABC — рівносторонній. $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.



$h_a = m_a = l_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Властивості рівностороннього трикутника

1. Будь-який рівносторонній трикутник має усі властивості рівнобедреного трикутника.

2. Усі кути рівностороннього трикутника рівні.

3. Будь-яка бісектриса рівностороннього трикутника є його медіаною і висотою.

Радіус вписаного й описаного кіл для рівностороннього трикутника

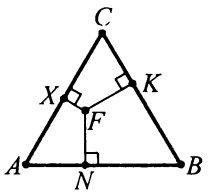
$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = 2r$, $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $R = 2r$.

Справедливими є такі властивості:

1. Центри вписаного й описаного кіл збігаються.
2. Сума радіусів описаного та вписаного кіл дорівнює висоті ($h = R + r$).

Площа рівностороннього трикутника. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ортоцентр, центр мас, центр вписаного й описаного кіл у рівносторонньому трикутнику збігаються.



Усі рівносторонні трикутники подібні.

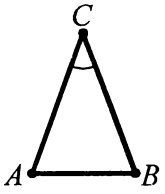
Сума відстаней від будь-якої точки рівностороннього трикутника до його сторін дорівнює висоті трикутника

$$FX + FN + FK = h.$$

Приклад 1. Кут при основі рівнобедреного трикутника учетверо більший від кута при вершині. Знайти кут при вершині.

А	Б	В	Г	Д
20°	40°	15°	140°	10°

■ Нехай трикутник ABC — заданий. У ньому $AC = BC$, $\angle A = 4\angle C$. Оскільки $\angle A = \angle B$ і $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, то одержимо: $4\angle C + 4\angle C + \angle C = 180°$; $9\angle C = 180°$; $\angle C = 20°$.

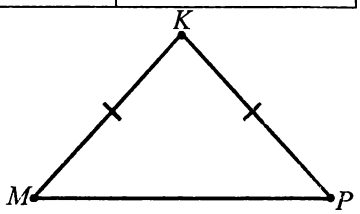


Відповідь. **А.** ■

Приклад 2. Кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника дорівнює 82°. Знайти кут при основі трикутника.

А	Б	В	Г	Д
82°	90°	49°	51°	98°

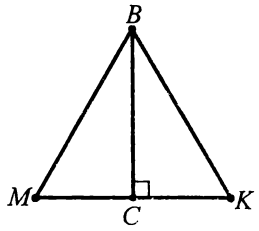
■ За теоремою про суму кутів трикутника $\angle K + \angle M + \angle P = 180°$. За властивістю кутів при основі рівнобедреного трикутника $\angle M = \angle P$. Нехай $\angle M = \angle P = x°$. Складемо і розв'яжемо рівняння: $82 + x + x = 180$; $82 + 2x = 180$; $2x = 98$; $x = 49$. Отже, $\angle M = \angle P = 49°$.



Відповідь. **В.** ■

Приклад 3. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см. Знайти периметр трикутника, якщо його бісектриса, проведена до основи, дорівнює 8 см.

■ Оскільки трикутник MBK рівнобедрений, то BC — бісектриса, медіана та висота. Тому $MC = KC = \frac{1}{2}MK = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ (см); $BC \perp MK$ і трикутник MBC — прямокутний. За теоремою Піфагора $MB^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$; $MB = \sqrt{100} = 10$ (см). $KB = MB = 10$ см (як бічні сторони рівнобедреного трикутника). $P_{\Delta MBK} = 10 + 10 + 12 = 32$ (см).

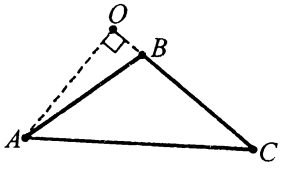


Відповідь. 32 см. ■

Приклад 4. Кут, протилежний основі рівнобедреного трикутника, дорівнює 120°. Знайти основу трикутника, якщо висота, проведена до бічної сторони дорівнює 7 см.

■ Нехай у рівнобедреному трикутнику ABC (рис. 195) AC — основа, AO — висота, тому $\angle AOB = 90°$ і трикутник AOB прямокутний.

Оскільки в прямокутному трикутнику AOC $\angle C = (180° - 120°) : 2 = 30°$, то за властивістю катета, який лежить проти кута 30°, $AO = \frac{1}{2}AC$, тоді $AC = 2 \cdot 7 = 14$ (см).



Відповідь. 14 см. ■

Приклад 5. Знайти кути рівнобедреного трикутника, якщо один з його зовнішніх кутів дорівнює: **а)** 48°; **б)** 116°. Скільки розв'язків має задача?

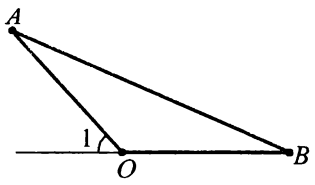


Рис. 1

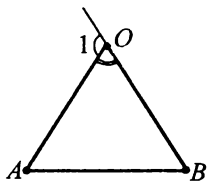


Рис. 2

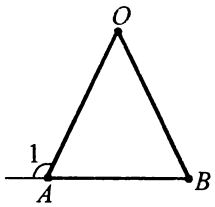


Рис. 3

Нехай $\angle 1$ — зовнішній кут трикутника.

а) Якщо зовнішній кут при деякій вершині трикутника гострий, то кут трикутника при цій вершині — тупий. Трикутник може мати лише один тупий кут. У рівнобедреному трикутнику це кут між бічними сторонами. На рис. 1 це кут O. $\angle 1$ і $\angle O$ — суміжні, тому $\angle 1 + \angle O = 180°$, $\angle O = 180° - 48° = 132°$. За властивістю кутів при основі рівнобедреного трикутника $\angle A = \angle B$. За теоремою про зовнішній кут трикутника $\angle 1 = \angle A + \angle B$. Тому $\angle A = \angle B = 48° : 2 = 24°$. У цьому випадку задача має один розв'язок;

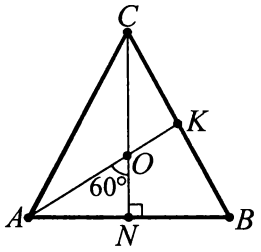
б) якщо зовнішній кут при деякій вершині трикутника тупий, то кут трикутника при цій вершині — гострий. У рівнобедреному трикутнику це може бути: 1) кут між бічними сторонами (рис. 2); 2) кут при основі (рис. 3). Маємо:

1) $\angle 1 + \angle O = 180°$, $\angle O = 180° - 116° = 64°$; $\angle A = \angle B = 116° : 2 = 58°$;

2) $\angle 1$ і $\angle A$ — суміжні, тому $\angle 1 + \angle A = 180°$, $\angle A = 180° - 116° = 64°$; $\angle B = \angle A = 64°$. $\angle 1 = \angle O + \angle B$, тому $\angle O = 116° - 64° = 52°$. У цьому випадку задача має два розв'язки.

Відповідь. **а)** Один розв'язок: 132°, 24°, 24°; **б)** два розв'язки: 64°, 58°, 58° або 64°, 64°, 52°.

Приклад 6. З вершини A рівнобедреного трикутника ABC з основою AB проведена медіана завдовжки 90 см. Ця медіана утворює з бісектрисою кута C кут 60°. Знайти в сантиметрах довжину бісектриси кута C.



■ Нехай трикутник ABC — заданий рівнобедрений трикутник з основою AB, $AC = CB$, AK — медіана, $AK = 90$ см, CN — бісектриса кута C, O — точка перетину AK і CN, $\angle AON = 60°$.

За властивістю бісектриси, проведеної до основи рівнобедреного трикутника, CN — медіана та висота. За властивістю медіан трикутника $AO : OK = 2 : 1$. $OK = \frac{1}{3}AK = \frac{1}{3} \cdot 90 = 30$ (см). $AO = 90 - 30 = 60$ (см).

У трикутнику AON $\angle ANO = 90°$, оскільки CN — висота, $\angle AON = 60°$, тоді $\angle OAN = 30°$. Маємо: $ON = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30$ (см). $CO = 2ON = 2 \cdot 30 = 60$ (см). $CN = 3ON = 90$ (см).

Відповідь. 90. ■

Завдання 31.1–31.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

31.1. Знайти периметр рівнобедреного трикутника зі сторонами 3 см і 7 см.

А	Б	В	Г	Д
20 см	10 см	13 см	17 см	17 см або 13 см

31.2. У рівнобедреному трикутнику ABC кут C дорівнює 104°. Знайти кут B.

А	Б	В	Г	Д
66°	76°	38°	28°	48°

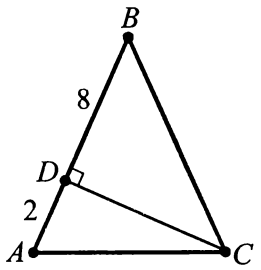
31.3. Знайти площу рівнобедреного трикутника, у якого бічна сторона дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а кут між бічними сторонами дорівнює 30°.

А	Б	В	Г	Д
$8\sqrt{2}$ см^2	$16\sqrt{3}$ см^2	$8\sqrt{3}$ см^2	16 см^2	8 см^2

31.4. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 10 см, а висота, що проведена до основи, — 6 см. Знайти площу трикутника.

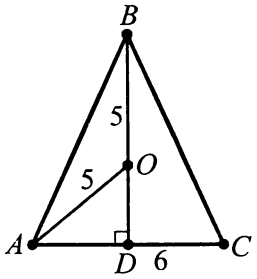
А	Б	В	Г	Д
48 см^2	24 см^2	96 см^2	30 см^2	60 см^2

31.5. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до бічної сторони, поділяє її на відрізки 8 см і 2 см, починаючи від вершини кута між бічними сторонами. Знайти площу трикутника.



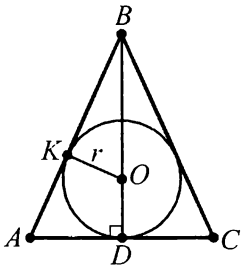
А	Б	В	Г	Д
78 см^2	64 см^2	60 см^2	30 см^2	32 см^2

31.6. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 6 см, а радіус кола, описаного навколо трикутника, — 5 см. Знайти висоту, проведену до основи.



А	Б	В	Г	Д
8 см	9 см	10 см	11 см	12 см

31.7. У рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює α, а радіус кола, вписаного в трикутник, дорівнює r. Визначити бічну сторону трикутника.



А	Б	В	Г	Д
$r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$	$r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$	$\frac{r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$	$r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$	$\frac{r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$

31.8. Знайти площу рівностороннього трикутника зі стороною $2\sqrt{3}$ см.

А	Б	В	Г	Д
3 см^2	$\sqrt{3}$ см^2	$3\sqrt{3}$ см^2	$4\sqrt{3}$ см^2	$2\sqrt{3}$ см^2

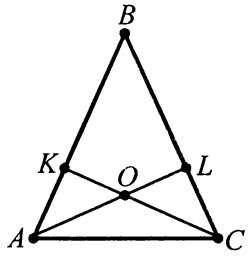
31.9. Радіус кола, вписаного в рівносторонній трикутник, дорівнює $4\sqrt{3}$ см. Знайти сторону трикутника.

А	Б	В	Г	Д
12 см	16 см	24 см	36 см	48 см

31.10. Сторона правильного трикутника дорівнює $20\sqrt{3}$ см. Знайти проекцію однієї медіани на іншу.

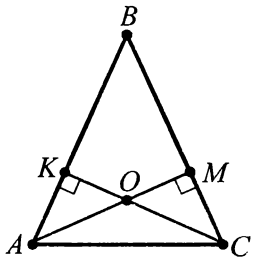
А	Б	В	Г	Д
15 см	20 см	30 см	40 см	$10\sqrt{3}$ см

31.11. У рівнобедреному трикутнику бісектриси кутів при основі утворюють при перетині кут 52°. Знайти кут між бічними сторонами трикутника.



А	Б	В	Г	Д
72°	74°	76°	78°	84°

31.12. O — точка перетину висот AM і CK рівнобедреного трикутника ABC з основою AC. Знайти кут B, якщо $\angle AOC = 110°$.



А	Б	В	Г	Д
70°	80°	60°	50°	35°

31.13. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 55 см, а висота, що проведена до основи, — 44 см. Знайти відношення відрізків, на які поділяє бічну сторону бісектриса кута при основі.

А	Б	В	Г	Д
2 : 3	3 : 4	4 : 5	5 : 6	6 : 7

31.14. Сторона рівностороннього трикутника дорівнює $8\sqrt{3}$ см. Знайти радіус кола, яке проходить через середини сторін трикутника.

А	Б	В	Г	Д
2 см	8 см	4 см	$4\sqrt{3}$ см	$2\sqrt{3}$ см

31.15. Знайти радіус кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 160 см а висота, проведена до неї, — 60 см.

А	Б	В	Г	Д
$26\frac{2}{3}$ см	$13\frac{1}{3}$ см	40 см	$17\frac{1}{7}$ см	$8\frac{4}{7}$ см

31.16. Знайти відстань від точки перетину медіан до центра кола, вписаного в рівнобедрений трикутник з основою 160 см і бічною стороною 100 см.

А	Б	В	Г	Д
$13\frac{1}{3}$ см	$3\frac{1}{3}$ см	$23\frac{6}{7}$ см	$6\frac{2}{3}$ см	$7\frac{2}{3}$ см

31.17. Центр кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, поділяє висоту, що проведена до основи, у відношенні 10 : 3. Знайти периметр трикутника, якщо бічна сторона дорівнює 20 см.

А	Б	В	Г	Д
64 см	49 см	43 см	46 см	52 см

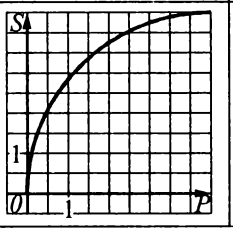
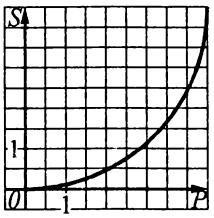
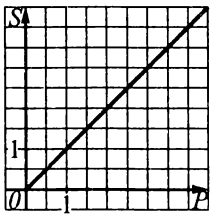
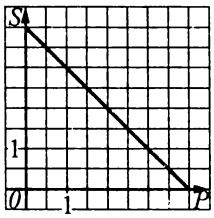
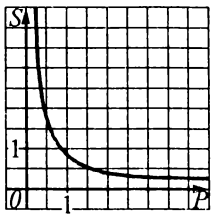
31.18. Основа і бічна сторона рівнобедреного трикутника відповідно дорівнюють 16 см і 10 см. Знайти висоту трикутника, проведену до бічної сторони.

А	Б	В	Г	Д
34 см	6 см	8 см	9,6 см	4,8 см

31.19. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 48 см. За якого значення висоти, проведеної до основи, площа трикутника буде найбільшою?

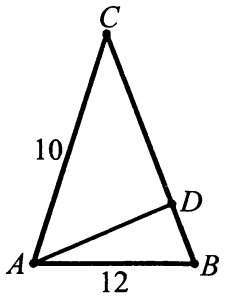
А	Б	В	Г	Д
24 см	$24\sqrt{2}$ см	$12\sqrt{2}$ см	$12\sqrt{3}$ см	$8\sqrt{3}$ см

31.20. S — площа рівностороннього трикутника. Серед наведених графіків указати графік залежності периметра P від S: $P = P(S)$.

А	Б	В	Г	Д
				

Завдання 31.21–31.24 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

31.21. На рисунку зображено рівнобедрений трикутник ABC ($AC = BC$), його висоту AD і позначено величини деяких елементів. Установити відповідність між елементами трикутника (1–4) та їхніми величинами (А–Д).



1 AD

2 $S_{\Delta ABC}$

3 Радіус вписаного кола

4 Радіус описаного кола

А 9,6

Б 6,25

В 3

Г 48

Д 32

31.22. Установити відповідність між заданими довжинами основ (1–4) рівнобедрених трикутників з кутами 120° при вершинах, протилежних до основ, та їх висотами (А–Д) до цих основ.

1 4 см
2 $8\sqrt{3}$ см
3 10 см
4 $12\sqrt{3}$ см

А 4 см
Б $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см
В 6 см
Г 16 см
Д $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ см

31.23. Установити відповідність між довжинами бічних сторін рівнобедрених трикутників (1–4), кут між якими дорівнює 30°, та площами (А–Д) цих трикутників.

1 20 см
2 24 см
3 28 см
4 32 см

А 196 см^2
Б 100 см^2
В 256 см^2
Г 625 см^2
Д 144 см^2

31.24. Установити відповідність між довжинами сторін рівнобедрених трикутників (1–4) та радіусами описаних навколо них кіл (А–Д).

1 29 см, 29 см, 42 см
2 30 см, 30 см, 48 см
3 5 см, 5 см, 8 см
4 20 см, 20 см, 32 см

А 21,025 см
Б 20 см
В 25 см
Г $\frac{25}{6}$ см
Д $\frac{50}{3}$ см

Розв'яжіть завдання 31.25–31.37. Відповідь запишіть десятковим дробом.

31.25. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 20. Знайти його основу, якщо вона на 2 більша від бічної сторони.

31.26. Кут при основі AB рівнобедреного трикутника дорівнює 30°. Висоти трикутника, проведені до бічних сторін, перетинаються в точці O. Знайти у градусах величину кута AOB.

31.27. У рівнобедреному трикутнику ABC основа AC дорівнює 18. Через точку O — середину висоти BD — проведено промені AO і CO, які перетинають бічні сторони в точках M і K. Знайти довжину відрізка MK.

31.28. У рівнобедреному трикутнику основа і бічна сторона відповідно дорівнюють 5 і 20. Знайти менший з відрізків, на які поділяє бічну сторону бісектриса кута при основі.

31.29. У рівнобедреному трикутнику центр вписаного кола ділить висоту, проведену до основи, у відношенні 12 : 5, а бічна сторона дорівнює 60. Знайти периметр трикутника.

31.30. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 108 см, а основа — 30. Знайти радіус вписаного кола.

31.31. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12, а висота, що проведена до основи, — 8. Знайти радіус кола, вписаного в цей трикутник.

31.32. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a, радіус вписаного кола — r. Визначити бічну сторону трикутника й обчислити її значення, якщо $a = 6$, $r = 2$.

31.33. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює a, висота, що проведена до основи, — h. Визначити відстань від середини основи до бічної сторони й обчислити її значення, якщо $a = 3$, $h = 2$.

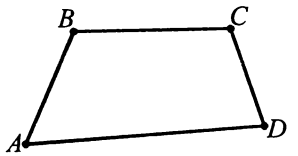
31.34. Знайти у градусах кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника, якщо бісектриса кута при основі відтинає від нього трикутник подібний даному.

31.35. Знайти площу рівнобедреного трикутника з точністю до 0,01 см^2, якщо висота, яка проведена до бічної сторони, дорівнює 12 см, а інша висота — 9 см.

31.36. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює b, медіана, яка проведена до бічної сторони, дорівнює m. Визначити квадрат основи трикутника й обчислити його значення, якщо $m = 2{,}5$; $b = 3$.

31.37. У правильному трикутнику зі стороною 6 на одній зі сторін узято точку на відстані 1 від вершини. Знайти квадрат відстані від цієї точки до центра трикутника.

Тема 32. Чотирикутники



Чотирикутником називають фігуру, яка складається з чотирьох точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій, та чотирьох відрізків, які послідовно з'єднують ці точки.

Чотирикутник позначають, послідовно записуючи його вершини. Наприклад, чотирикутник, зображений на рисунку, можна позначити так: *ABCD*, *BCDA*, *CDAB*, *DABC*.

Чотирикутники бувають *опуклі й неопуклі*. Чотирикутник називають *опуклим*, якщо він лежить з одного боку від кожної прямої, яка містить його сторону. Чотирикутник називають *неопуклим*, якщо він не лежить з одного боку від кожної прямої, яка містить його сторону. Далі ми розглядатимемо лише опуклі чотирикутники.

Елементами чотирикутника є його вершини, сторони та кути. На рисунку *A*, *B*, *C* і *D* — вершини чотирикутника, *AB*, *BC*, *CD* і *DA* — сторони чотирикутника, кути *DAB*, *ABC*, *BCD* і *CDA* — кути чотирикутника. Кути позначають і так: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ і $\angle D$ відповідно.

Дві вершини чотирикутника називають *сусідніми*, якщо вони є кінцями однієї сторони. На рисунку *A* та *B*, *B* та *C*, *C* та *D*, *D* та *A* — сусідні вершини. Дві несусідні вершини чотирикутника називають *протилежними*. На рисунку *A* та *C*, *B* та *D* — протилежні вершини. Сторони чотирикутника називають *сусідніми*, якщо вони виходять з однієї вершини. На рисунку *AB* та *AD*, *AB* та *BC*, *BC* та *CD*, *CD* та *AD* — сусідні сторони. Сторони чотирикутника, які не мають спільної вершини, називають *протилежними*. На рисунку *AB* та *CD*, *BC* та *AD* — протилежні сторони.

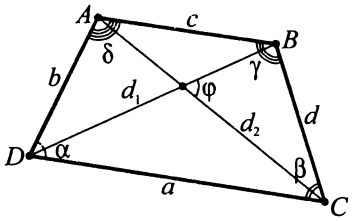
Відрізок, який сполучає протилежні вершини чотирикутника, називають його *діагоналлю*. Кожен чотирикутник має дві діагоналі, які перетинаються. Кожна діагональ розбиває чотирикутник на два трикутники.

Периметр чотирикутника — це сума довжин усіх його сторін. Периметр позначають літерою *P*. Периметр чотирикутника обчислюють за формулою $P = a + b + c + d$.

Кожна сторона чотирикутника менша за суму трьох інших його сторін. Щоб установити, чи можна з чотирьох відрізків утворити чотирикутник, потрібно перевірити, чи буде найдовший з них меншим за суму трьох інших.

Сума кутів опуклого чотирикутника дорівнює 360°:

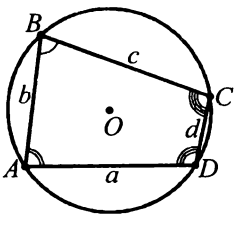
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°.$$



Кут, суміжний з кутом чотирикутника, називають *зовнішнім кутом чотирикутника*. При кожній вершині чотирикутника є два зовнішні кути, які рівні між собою. Сума зовнішніх кутів чотирикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°.

Площа чотирикутника. $S = \dfrac{d_1 d_2 \sin\varphi}{2}$.

Чотирикутник, вписаний у коло



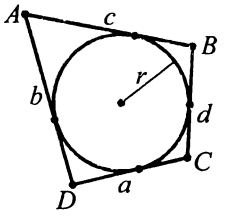
Чотирикутник, усі вершини якого лежать на колі, називають *вписаним* у це коло, а коло називають описаним навколо чотирикутника.

Навколо чотирикутника можна описати коло тоді й тільки тоді, коли суми його протилежних кутів дорівнюють 180°: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$.

Площа чотирикутника, вписаного в коло: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$,

де $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$.

Чотирикутник, описаний навколо кола

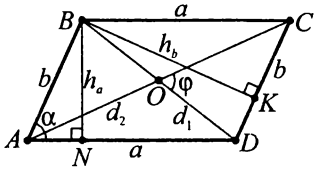


Чотирикутник, усі сторони якого дотикаються до кола, називають *описаним* навколо цього кола, а коло називають вписаним у чотирикутник.

У чотирикутник можна вписати коло тоді й тільки тоді, коли суми його протилежних сторін рівні: $a + c = b + d$.

Площа чотирикутника, описаного навколо кола: $S = \frac{a+b+c+d}{2} \cdot r$.

Паралелограм



Паралелограмом називають чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні. $AB||CD$, $AD||BC$, $ABCD$ — паралелограм.

Висотою паралелограма називають перпендикуляр, проведений з будь-якої точки однієї сторони до протилежної сторони або до її продовження.

Властивості паралелограма:

1) у паралелограма протилежні сторони рівні: $AB = CD = a$, $BC = AD = b$;

2) у паралелограма протилежні кути рівні: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$;

3) діагоналі паралелограма при перетині діляться навпіл: $AO = OC$, $BO = OD$;

4) кожна діагональ паралелограма ділить його на два рівні трикутники;

5) сума кутів паралелограма, прилеглих до однієї сторони, дорівнює 180°;

6) $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$.

7) у паралелограмі кут між висотами дорівнює його гострому куту.

8) бісектриси кутів, прилеглих до однієї сторони паралелограма, взаємно перпендикулярні;

9) бісектриси двох протилежних кутів паралелограма паралельні.

Ознаки паралелограма

Чотирикутник $ABCD$ буде паралелограмом, якщо:

1) $AB = CD$ і $AB||CD$;

2) $AB = CD$ і $BC = AD$;

3) $AO = OC$ і $BO = OD$;

4) $\angle A = \angle C$ і $\angle B = \angle D$.

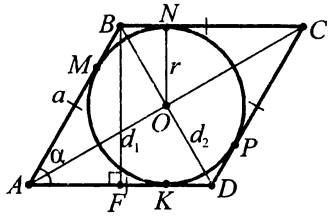
Теорема. Діагоналі паралелограма перетинаються і точкою перетину діляться навпіл.

Точка перетину діагоналей паралелограма є його центром симетрії.

Площа

$S = ah_a$; $S = bh_b$; $S = ab\sin\alpha$; $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$.

Ромб



Ромбом називають паралелограм, у якого всі сторони рівні. $AB = BC = CD = DA$, $ABCD$ — ромб.

Оскільки ромб — це паралелограм, то він має всі властивості паралелограма, а також властивості, характерні лише для нього.

Властивості:

1) діагоналі ромба перпендикулярні;

2) діагоналі ромба є бісектрисами його кутів.

Ознака ромба:

1. Паралелограм, діагоналі якого взаємно перпендикулярні, є ромбом.

2. Паралелограм, діагоналі якого є бісектрисами його кутів, є ромбом.

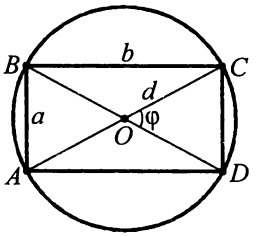
Площа ромба

$S = a^2 \sin\alpha$; $S = ah$; $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$; $S = ar$.

У будь-який ромб можна вписати коло. Центр кола, вписаного в ромб, є точкою перетину його діагоналей. $r = \frac{1}{2} h_a$.

Прямокутник

Паралелограм, у якого всі кути прямі, називають *прямокутником*. $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$, $ABCD$ — прямокутник.



Оскільки прямокутник — це окремий вид паралелограма, то він має всі властивості паралелограма.

Крім цих властивостей, прямокутник має особливу властивість: *Діагоналі прямокутника рівні.*

Наприклад, у прямокутнику $ABCD$ (див. рис.) AC і BD — діагоналі. Тоді $AC = BD$.

Ознака прямокутника

Якщо діагоналі паралелограма рівні, то такий паралелограм є прямокутником.

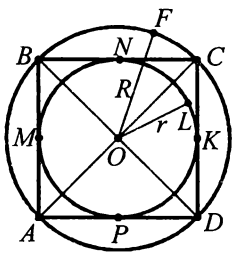
Площа прямокутника

$S = ab$; $S = \frac{1}{2} d^2 \sin\varphi$.

Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло. Центром кола, описаного навколо прямокутника, є точка перетину його діагоналей. $R = \frac{1}{2} d$; $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.

Квадрат

Квадрат — це ромб, у якого всі кути прямі. $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$, $AB = BC = CD = DA$, $ABCD$ — квадрат.



Ознака квадрата

Якщо діагоналі чотирикутника рівні та є бісектрисами його кутів, то такий чотирикутник — квадрат.

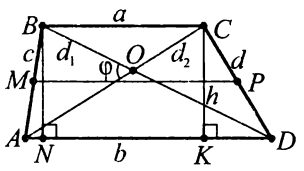
Площа квадрата

$S = a^2$; $S = \frac{1}{2} d^2$.

У будь-який квадрат можна вписати коло й навколо квадрата можна описати коло.

Центром вписаного й описаного кіл є точка перетину діагоналей квадрата. $r = \frac{1}{2} a$, $R = \frac{1}{2} d$, $R = \frac{\sqrt{2}}{2} a$.

Трапеція



Трапецією називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші — непаралельні. Паралельні сторони трапеції називають її *основами*, а непаралельні — *бічними сторонами*. *Висотою трапеції* називають перпендикуляр, проведений з будь-якої точки однієї основи до іншої або до її продовження. $BC \| AD$, AB і CD — не паралельні. $ABCD$ — трапеція. $BN \perp AD$, $CK \perp AD$, BN, CK — висоти.

Сума градусних мір кутів, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180°: $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle C + \angle D = 180°$ (рис. 1).

Трапецію, один з кутів якої прямий, називають *прямокутною*.

Рівнобічною називають трапецію, у якої бічні сторони рівні. Якщо $AB = CD$, то трапеція рівнобічна. У рівнобічній трапеції кути при кожній основі рівні.

Навколо трапеції можна описати коло, лише тоді, коли вона рівнобічна. У трапецію можна вписати коло, коли сума її основ дорівнює сумі бічних сторін.

Середня лінія трапеції

Середньою лінією трапеції називають відрізок, який сполучає середини її бічних сторін. $AM = MB$, $CP = PD$, MP — середня лінія трапеції $ABCD$. Середня лінія трапеції паралельна до основ і дорівнює їх півсумі: $MP = \frac{1}{2}(BC + AD)$.

Властивості рівнобічної трапеції:

1. Сума протилежних кутів рівнобічної трапеції дорівнює 180°: $\angle A + \angle C = 180°$, $\angle B + \angle D = 180°$ (рис. 1).

2. Діагоналі рівнобічної трапеції рівні: $AC = BD$ (рис. 2).

3. Якщо BK і CM — висоти рівнобічної трапеції $ABCD$ (рис. 3), то:

1) $\Delta ABK = \Delta DCM$;

2) $AK = DM = \frac{1}{2}(AD - BC)$;

3) $KD = MA = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

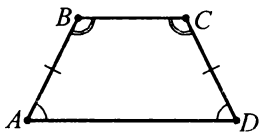


Рис. 1

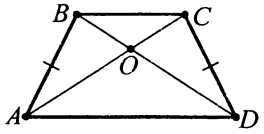


Рис. 2

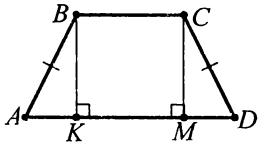


Рис. 3

Ознаки рівнобічної трапеції:

1. Якщо кути при основі трапеції рівні, то трапеція рівнобічна.

2. Якщо в трапеції сума протилежних кутів дорівнює 180°, то трапеція рівнобічна.

3. Якщо діагоналі трапеції рівні, то трапеція рівнобічна.

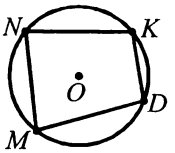
Площа трапеції

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Приклад 1. Знайти кути чотирикутника, якщо відомо, що три з них, взяті послідовно, відносяться як 5 : 3 : 4 і навколо цього чотирикутника можна описати коло.

А	Б	В	Г	Д
120°, 80°, 60°, 100°	80°, 20°, 130°, 130°	100°, 60°, 80°, 120°	80°, 120°, 110°, 50°	110°, 90°, 80°, 80°

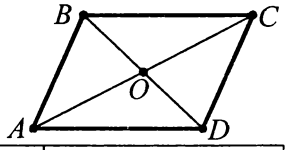
■ Нехай коло $(O; R)$ описане навколо чотирикутника $MNKD$. $\angle M : \angle N : \angle K = 5 : 3 : 4$. Оскільки навколо чотирикутника описане коло, то $\angle M + \angle K = 180°$, $\angle N + \angle D = 180°$.



Нехай одна частина дорівнює $x°$. Тоді одержимо: $\angle M = 5x°$, $\angle N = 3x°$, $\angle K = 4x°$. $5x + 4x = 180$; $9x = 180$; $x = 20$. Тоді $\angle M = 5 \cdot 20 = 100°$, $\angle N = 3 \cdot 20 = 60°$, $\angle K = 4 \cdot 20 = 80°$. $\angle D = 180° - 60° = 120°$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 2. O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Знайти сторону AB, якщо периметр трикутника COD дорівнює 15 см, $AC = 10$ см, $BD = 8$ см.



А	Б	В	Г	Д
15 см	10 см	8 см	6 см	4 см

■ За властивістю діагоналей паралелограма: $AO = OC = \frac{1}{2}AC = 10 : 2 = 5$ (см). $BO = OD = \frac{1}{2}BD = 8 : 2 = 4$ (см). $CD = P_{\Delta COD} - (OC + OD)$; $CD = 15 - (5 + 4) = 6$ (см). За властивістю протилежних сторін паралелограма $AB = CD = 6$ см. ■

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 3. Знайти сторони чотирикутника, якщо перша з них на 9 см менша за другу, на 2 см більша за третю й удвічі більша за четверту, а периметр чотирикутника дорівнює 147 см.

■ Нехай четверта сторона дорівнює x см. Тоді перша дорівнює $2x$ см, друга — $(2x + 9)$ см, третя — $(2x - 2)$ см. Складемо й розв'яжемо рівняння: $2x + 2x + 9 + 2x - 2 + x = 147$; $7x + 7 = 147$; $7x = 140$; $x = 20$ (см). Тоді $2x = 2 \cdot 20 = 40$ (см), $2x + 9 = 40 + 9 = 49$ (см), $2x - 2 = 40 - 2 = 38$ (см). Отже, перша сторона чотирикутника дорівнює 40 см, друга — 49 см, третя — 38 см, четверта — 20 см.

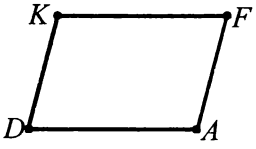
Відповідь. 40 см, 49 см, 38 см, 20 см. ■

Приклад 4. Знайти кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 7, 8, 9 і 12.

■ Кути чотирикутника відповідно дорівнюють $7x°$, $8x°$, $9x°$ і $12x°$, де x — деяке число. Складемо й розв'яжемо рівняння: $7x + 8x + 9x + 12x = 360$; $36x = 360$; $x = 10$. Тоді: $7x = 7 \cdot 10 = 70$, $8x = 8 \cdot 10 = 80$, $9x = 9 \cdot 10 = 90$, $12x = 12 \cdot 10 = 120$. Отже, кути чотирикутника дорівнюють 70°, 80°, 90° і 120°.

Відповідь. 70°, 80°, 90° і 120°. ■

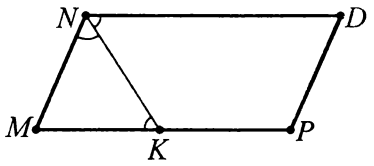
Приклад 5. Градусні міри двох кутів паралелограма відносяться як 5 : 7. Знайти кути паралелограма.



■ Оскільки протилежні кути паралелограма рівні, то кути, про які йдеться в умові задачі, будуть прилеглими до однієї сторони. Нехай це $\angle D$ і $\angle K$ (див. рис.). $\angle D = 5x°$, $\angle K = 7x°$, де x — деяке число. За властивістю кутів паралелограма, прилеглих до однієї сторони, $\angle D + \angle K = 180°$. Маємо: $5x + 7x = 180$; $12x = 180$; $x = 15$, $5x = 5 \cdot 15 = 75$; $7x = 7 \cdot 15 = 105$. Отже, $\angle F = \angle D = 75°$, $\angle A = \angle K = 105°$.

Відповідь. 75°, 105°, 75°, 105°. ■

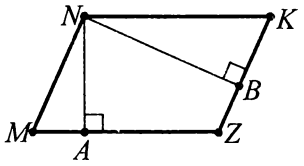
Приклад 6. Бісектриса тупого кута паралелограма $MNDP$ поділяє сторону MP на відрізки 8 см і 10 см, рахуючи від вершини гострого кута. Знайти периметр паралелограма.



■ Оскільки $ND \| MP$, то $\angle DNK = \angle MKN$ як внутрішні різносторонні. NK — бісектриса кута N, отже, $\angle DNK = \angle MNK$. Тому $\angle MKN = \angle MNK$ і трикутник MNK — рівнобедрений з основою NK. Отже, $MN = MK = 8$ (см). За властивістю вимірювання відрізків маємо: $MP = 8 + 10 = 18$ (см). $P_{MNDP} = 2 \cdot (MN + MP)$; $P_{MNDP} = 2(8 + 18) = 52$ (см).

Відповідь. 52 см. ■

Приклад 7. Знайти площу паралелограма, периметр якого дорівнює 24 см, а висоти — 10 см і 14 см.



■ $MZ + ZK = 24 : 2$; $MZ + ZK = 12$ (см). Нехай $MZ = x$ см, тоді $ZK = (12 - x)$ см.

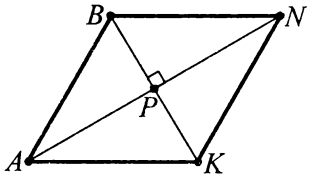
$S_{MNKZ} = MZ \cdot NA$; $S_{MNKZ} = x \cdot 10 = 10x$ (см) **(1)**.

$S_{MNKZ} = ZK \cdot NB$; $S_{MNKZ} = 14 \cdot (12 - x)$ **(2)**.

З рівностей (1) і (2) складемо та розв'яжемо рівняння: $10x = 14(12 - x)$; $10x = 168 - 14x$; $24x = 168$; $x = 7$. Отже, $MZ = 7$ см. $S = 7 \cdot 10 = 70$ (см^2).

Відповідь. 70 см. ■

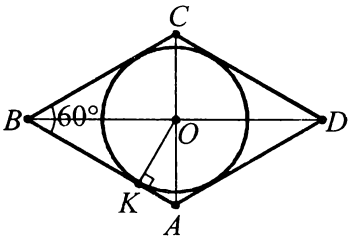
Приклад 8. Сторона ромба утворює з діагоналями кути, градусні міри яких відносяться як 4 : 5. Знайти кути ромба.



■ $\angle KAP = 4x°$, $\angle AKP = 5x°$, де x — деяке число. За властивістю діагоналей ромба $BK \perp AN$, тому трикутник APK — прямокутний ($\angle APK = 90°$). $4x + 5x = 90$, $9x = 90$, $x = 10$; $4x = 40$, $5x = 50$. Отже, $\angle KAP = 40°$, $\angle AKP = 50°$. Оскільки діагоналі ромба — бісектриси його кутів, то $\angle A = 2\angle KAP = 2 \cdot 40° = 80°$, $\angle K = 2\angle AKP = 2 \cdot 50° = 100°$.

Відповідь. 80°, 100°, 80°, 100°. ■

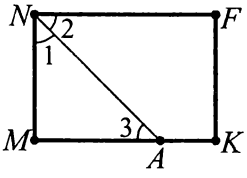
Приклад 9. Діагональ ромба, що виходить з вершини кута 60°, дорівнює 24 см. Знайти радіус кола, вписаного в ромб.



Нехай $ABCD$ — ромб, про який ідеться в умові задачі (див. рис.). За властивістю діагоналей ромба: $BO = DO = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$ (см). $\angle ABO = \angle CBO = 60° : 2 = 30°$. Проведемо $KO \perp AB$. KO — радіус вписаного кола. Трикутник BKO — прямокутний, бо $KO \perp AB$. За властивістю катета, який лежить проти кута 30°, $KO = \frac{1}{2} BO = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ (см).

Відповідь. 6 см. ■

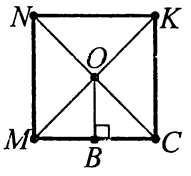
Приклад 10. Бісектриса кута N прямокутника $MNFK$ ділить сторону MK на відрізки у відношенні 5 : 2, починаючи від вершини M. Знайти сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 72 см.



■ Оскільки NA — бісектриса кута N, то $\angle 1 = \angle 2$. $NF \| MK$, NA — січна, тому $\angle 2 = \angle 3$ як внутрішні різносторонні. Отже, $\angle 1 = \angle 3$ і трикутник NMA — рівнобедрений з основою NA. Отже, $MN = MA$. Довжини відрізків MA і AK відповідно дорівнюють $5x$ см, $2x$ см, де x — деяке число. Маємо: $2 \cdot ((5x + 2x) + 5x) = 72$; $12x = 36$; $x = 3$. $7x = 7 \cdot 3 = 21$, $5x = 5 \cdot 3 = 15$. Отже, $MK = NF = 21$ см, $MN = FK = 15$ см.

Відповідь. 15 см, 21 см, 15 см, 21 см. ■

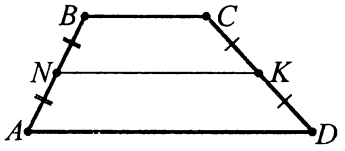
Приклад 11. Відстань від точки перетину діагоналей квадрата до однієї з його сторін дорівнює 7 см. Знайти периметр квадрата.



■ $MN \perp MC$, $OB \perp MC$, отже, $MN \parallel OB$. За властивістю діагоналей квадрата точка O — середина NC. Тоді за теоремою Фалеса точка B — середина сторони MC. Отже, OB — середня лінія трикутника MNC. За теоремою про середню лінію $OB = \frac{1}{2} MN$. Тому $MN = 2 \cdot OB = 2 \cdot 7 = 14$ (см). $P_{MNKC} = 4 \cdot MN = 4 \cdot 14 = 56$ (см).

Відповідь. 56 см. ■

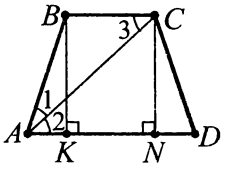
Приклад 12. Середня лінія трапеції дорівнює 12 см, а більша основа — 14 см. Знайти меншу основу.



■ За теоремою про середню лінію трапеції маємо: $NK = \frac{a+b}{2}$, де a та b — основи трапеції. Нехай $a = 14$ см, $b = x$ см. Тоді $12 = \frac{14+x}{2}$; $14 + x = 24$; $x = 10$. Отже, менша основа дорівнює 10 см.

Відповідь. 10 см. ■

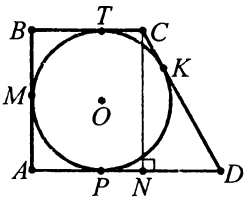
Приклад 13. Діагональ рівнобічної трапеції ділить навпіл її гострий кут, який дорівнює 60°. Знайти периметр трапеції, якщо її менша основа дорівнює 12 см.



■ Оскільки AC — бісектриса, то $\angle 1 = \angle 2$. $\angle 2 = \angle 3$ (як внутрішні різносторонні при $BC \parallel AD$ і січній AC). Отже, $\angle 1 = \angle 3$, тому трикутник ABC — рівнобедрений з основою AC. $AB = BC = 12$ см. $CD = AB = 12$ (см) (як бічні сторони рівнобічної трапеції). Проведемо висоти BK і CN, $BK = CN$. $\Delta ABK = \Delta DCN$ за гіпотенузою і катетом. Отже, $AK = DN$. У прямокутному трикутнику ABK $\angle A = 60°$, тому $\angle ABK = 30°$. $AK = \frac{1}{2} AB$ (як катет, який лежить проти кута 30°). $AK = ND = 12 : 2 = 6$ (см). $KN = BC = 12$ см (як протилежні сторони прямокутника $KBCN$). $AD = AK + KN + ND$. $AD = 6 + 12 + 6 = 24$ (см). $P = 12 + 12 + 12 + 24 = 60$ (см).

Відповідь. 60 см. ■

Приклад 14. У прямокутній трапеції менша основа дорівнює 21 см. Обчислити площу трапеції, якщо довжина кола, вписаного в неї, дорівнює 24π см.



■ Нехай $ABCD$ ($AD \parallel BC$) — задана прямокутна трапеція, у яку вписано коло $(O; r)$ завдовжки 24π см, $BC = 21$ см. Тоді $2\pi r = 24\pi$, $r = 12$ (см). Проведемо висоту CN. Оскільки трапеція прямокутна, то $CN = AB = 2r = 24\pi : \pi$. За властивістю сторін описаного чотирикутника $BC + AD = AB + CD$; $21 + AD = 24 + CD$; $AD - CD = 3$. Нехай $CD = x$ см. Тоді $AD = (x + 3)$ см. $ABCN$ — прямокутник, тому $AN = BC = 21$ (см). Оскільки $AD = AN + ND$, то $ND = AD - AN = (x + 3) - 21 = (x - 18)$ см. Із трикутника CND ($\angle N = 90°$): $CD^2 = CN^2 + ND^2$; $x^2 = 24^2 + (x - 18)^2$; $x^2 = 576 + x^2 - 36x + 324$; $36x = 900$; $x = 25$. Отже, $CD = 25$ см. $ND = \sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{625 - 576} = 7$. $AD = 21 + 7 = 28$ (см). $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h$; $S_{ABCD} = \frac{21+28}{2} \cdot 24 = 588$ (см^2).

Відповідь. 588 см^2. ■

Завдання 32.1–32.24 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

32.1. Сума двох кутів паралелограма дорівнює 130°. Знайти найбільший кут паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
140°	120°	105°	115°	125°

32.2. Периметр паралелограма дорівнює 84 см, а сума двох його сторін — 58 см. Знайти меншу сторону паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
11 см	29 см	17 см	23 см	13 см

32.3. Бісектриса гострого кута паралелограма поділяє сторону на відрізки завдовжки 7 см і 10 см, починаючи від вершини тупого кута. Знайти периметр паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
48 см	54 см	96 см	68 см	56 см

32.4. У чотирикутнику діагоналі дорівнюють 8 см і 5 см. Обчислити периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін даного чотирикутника.

А	Б	В	Г	Д
40 см	13 см	26 см	3 см	20 см

32.5. Одна зі сторін прямокутника дорівнює 8 см. Знайти площу прямокутника, якщо площа круга, описаного навколо нього, дорівнює 25π см^2.

А	Б	В	Г	Д
80 см^2	48 см^2	40 см^2	24 см^2	200 см^2

32.6. У прямокутнику $ABCD$ O — точка перетину діагоналей, $\angle BOC = 108°$. Знайти $\angle ABD$.

А	Б	В	Г	Д
72°	45°	30°	54°	18°

32.7. Діагональ ромба утворює з однією зі сторін кут, що дорівнює 54°. Знайти менший кут ромба.

А	Б	В	Г	Д
36°	26°	72°	62°	27°

32.8. Одна з діагоналей ромба дорівнює 30 см. Знайти іншу діагональ ромба, якщо його периметр дорівнює 68 см.

А	Б	В	Г	Д
20 см	24 см	30 см	16 см	19 см

32.9. Сторона ромба дорівнює 6 см, а його площа — 18 см^2. Знайти найбільший кут ромба.

А	Б	В	Г	Д
105°	120°	130°	135°	150°

32.10. Сторони паралелограма дорівнюють 18 см і 30 см, а висота, яка проведена до більшої сторони, — 6 см. Знайти іншу висоту паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
10 см	20 см	15 см	3,6 см	18 см

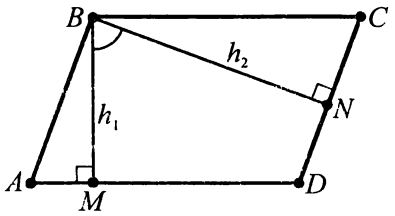
32.11. Висота рівнобічної трапеції, яка проведена з вершини тупого кута, поділяє основу на відрізки завдовжки 5 см і 11 см. Знайти периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 12 см.

А	Б	В	Г	Д
50 см	43 см	48 см	47 см	53 см

32.12. Дві менші сторони прямокутної трапеції дорівнюють a, а один з її кутів — 45°. Визначити площу трапеції.

А	Б	В	Г	Д
a^2	$\frac{5}{2}a^2$	$2a^2$	$3a^2$	$\frac{3}{2}a^2$

32.13. Висоти паралелограма дорівнюють h_1 і h_2, а кут між ними — α. Визначити площу паралелограма.



А	Б	В	Г	Д
$\frac{h_1h_2}{\cos\alpha}$	$\frac{h_1h_2}{\sin\alpha}$	$h_1h_2\sin\alpha$	$h_1h_2\cos\alpha$	$\frac{h_1h_2}{\sin^2\alpha}$

32.14. Діагоналі прямокутника утворюють кут 50°. Знайти кут між діагоналлю прямокутника та бісектрисою кута, проведеними з однієї вершини.

А	Б	В	Г	Д
50°	30°	25°	15°	20°

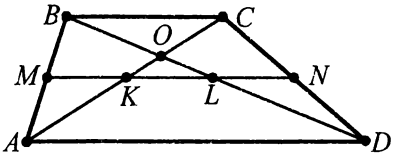
32.15. Точка O, яка є перетином діагоналей трапеції $ABCD$ ($AD \| BC$), ділить діагональ AC на відрізки $AO = 8$ см і $OC = 4$ см. Знайти основу BC, якщо $AD = 14$ см.

А	Б	В	Г	Д
5 см	6 см	7 см	8 см	4 см

32.16. Менша основа трапеції дорівнює 20 см. Точка перетину діагоналей віддалена від основ на 5 см і 6 см. Знайти площу трапеції.

А	Б	В	Г	Д
110 см^2	363 см^2	121 см^2	242 см^2	484 см^2

32.17. Відстань між серединами діагоналей трапеції дорівнює 7 см, а менша її основа — 6 см. Знайти середню лінію трапеції.



А	Б	В	Г	Д
9 см	6,5 см	12 см	26 см	13 см

32.18. У рівнобічну трапецію вписане коло. Знайти у квадратних сантиметрах площу трапеції, якщо її основи дорівнюють 2 см і 8 см.

А	Б	В	Г	Д
40 см^2	5 см^2	20 см^2	16 см^2	8 см^2

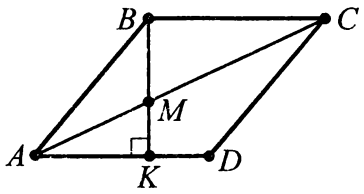
32.19. Діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні. Знайти площу трапеції, якщо її основи дорівнюють 8 см і 20 см.

А	Б	В	Г	Д
196 см^2	392 см^2	784 см^2	588 см^2	98 см^2

32.20. Одна з діагоналей паралелограма дорівнює d і поділяє його гострий кут на кути α і β. Визначити площу паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
$d^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$	$\frac{d^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin^3(\alpha+\beta)}$	$\frac{d^2\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$	$\frac{d^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$	$\frac{d^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$

32.21. У ромбі $ABCD$ більша діагональ AC поділяє висоту BK на відрізки $BM = 5$ см і $MK = 3$ см. Знайти площу ромба.



А	Б	В	Г	Д
40 см^2	80 см^2	120 см^2	140 см^2	20 см^2

32.22. Діагональ трапеції поділяє її на два подібні трикутники. Знайти цю діагональ, якщо основи трапеції дорівнюють 50 см і 72 см.

А	Б	В	Г	Д
90 см	30,5 см	30 см	61 см	60 см

32.23. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута й утворює з більшою основою кут 30°. Знайти периметр трапеції, якщо більша основа дорівнює 8 см.

А	Б	В	Г	Д
18 см	24 см	16 см	20 см	32 см

32.24. Периметр паралелограма більший від однієї з його сторін на 23 см і більший на 19 см від іншої його сторони. Знайти периметр паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
42 см	28 см	34 см	36 см	32 см

Завдання 32.25–32.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

32.25. Установити відповідність між фігурами (1–4) та їхніми характерними властивостями (А–Д).

1 Описаний навколо кола чотирикутник	**А** Сума протилежних кутів дорівнює 180°
2 Вписаний у коло чотирикутник	**Б** Діагоналі рівні
3 Паралелограм	**В** Суми протилежних сторін рівні
4 Ромб	**Г** Сума кутів при одній стороні дорівнює 180°
	Д Діагоналі є бісектрисами кутів

32.26. Діагональ ромба утворює зі стороною кут 60°. Установити відповідність між довжинами сторін (1–4) ромба і площами (А–Д) прямокутників з вершинами на серединах сторін ромба.

1 20 см	**А** $441\sqrt{3}$ см^2
2 36 см	**Б** $100\sqrt{3}$ см^2
3 42 см	**В** $529\sqrt{3}$ см^2
4 50 см	**Г** $625\sqrt{3}$ см^2
	Д $324\sqrt{3}$ см^2

32.27. Сторони паралелограма дорівнюють 12 см і 5 см. Установити відповідність між величинами гострих кутів (1–4) паралелограмів і їх площами (А–Д).

1 30°	**А** $30\sqrt{3}$ см^2
2 45°	**Б** 30 см^2
3 60°	**В** $15\sqrt{3}$ см^2
4 80°	**Г** $30\sqrt{2}$ см^2
	Д $60\sin\frac{4\pi}{9}$ см^2

32.28. У рівнобічних трапеціях діагональ є бісектрисою гострого кута й утворює з більшою основою кут 30°. Установити відповідність між довжинами більших основ (1–4) та периметрами трапецій (А–Д).

1 4 см	**А** 20 см
2 8 см	**Б** 60 см
3 24 см	**В** 10 см
4 12 см	**Г** 30 см
	Д 50 см

Розв'яжіть завдання 32.29–32.47. Відповідь запишіть десятковим дробом.

32.29. Перпендикуляр, проведений з вершини прямокутника на діагональ, дорівнює 12 і поділяє діагональ на відрізки, різниця яких дорівнює 7. Знайти площу прямокутника.

32.30. Одна з діагоналей паралелограма дорівнює $6\sqrt{6}$ і утворює зі стороною паралелограма кут 60°. Знайти іншу діагональ, якщо вона утворює з тією ж стороною кут 45°.

32.31. Одна з діагоналей паралелограма, яка дорівнює $3\sqrt{6}$, утворює з основою паралелограма кут 60°. Обчислити довжину другої діагоналі, якщо вона утворює з цією ж основою кут 45°.

32.32. Висоти паралелограма дорівнюють 4 і 6, а його периметр — 40. Знайти у градусах гострий кут паралелограма.

32.33. Одна сторона паралелограма на 2 більша за іншу, а його діагоналі дорівнюють 8 і 14. Знайти периметр паралелограма.

32.34. Діагоналі ромба відносяться як 3 : 4. Знайти висоту ромба, якщо його периметр дорівнює 80.

32.35. Сума довжин діагоналей ромба дорівнює l, а площа ромба — S. Визначити сторону ромба й обчисли її значення, якщо $l = 5$, $S = 4$.

32.36. Визначити площу паралелограма за його висотами h_1 і h_2 та периметром P й обчислити її значення, якщо $h_1 = 3$, $h_2 = 7$, $P = 20$.

32.37. Основи трапеції дорівнюють 10 і 24, а бічні сторони — 15 і 13. Знайти площу трапеції.

32.38. У рівнобічну трапецію, верхня основа якої удвічі менша від її висоти, вписане коло, радіус якого дорівнює 3 см. Знайти у квадратних сантиметрах площу трапеції.

32.39. Основи трапеції дорівнюють 5 і 15, а діагоналі — 12 і 16. Знайти площу трапеції.

32.40. Навколо трапеції описане коло, діаметром якого є більша основа. Обчислити площу трапеції у квадратних сантиметрах, якщо її діагональ і висота відповідно дорівнюють 5 см і 3 см.

32.41. Площі трикутників, утворених основами трапеції та відрізками діагоналей дорівнюють S_1 і S_2. Визначити площу трапеції й обчисли її значення, якщо $S_1 = 4$, $S_2 = 1$.

32.42. Квадрат зі стороною a повернуто навколо свого центра на 45°. Знайти площу спільної частини цих квадратів й обчисли її значення з точністю до 0,01, якщо $a = 1$.

32.43. Знайти квадрат площі паралелограма, якщо його більша діагональ дорівнює $2\sqrt{7}$, а висоти дорівнюють $\sqrt{3}$ і $2\sqrt{3}$.

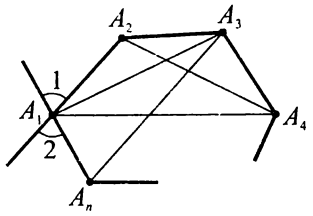
32.44. Висота ромба дорівнює 24, а менша діагональ — 30. Знайти більшу діагональ ромба.

32.45. Знайти площу паралелограма з точністю до 0,01 см^2, якщо його більша діагональ дорівнює 5, а висоти дорівнюють 2 і 3.

32.46. Канал з Дніпра до Кривого Рогу в районі села Червоні Поди має у поперечному перерізі форму рівнобедреної трапеції, у якої довжина більшої основи дорівнює 12 м, висота 3 м, а бічні сторони нахилені до основи під кутом 45°. Швидкість руху води в каналі дорівнює 3 м/хв. Скільки кубічних метрів води забирається з Дніпра за 1 хв?

32.47. Скільки потрібно листів бляхи завширшки 3 м, щоб обгородити земельну ділянку прямокутної форми під будівництво офісного центру, площа якої дорівнює 480 м^2, а одна зі сторін — 16 м?

Тема 33. Многокутники



Нехай задано точки A_1, A_2, A_3, A_4,..., A_n, жодні три сусідні з яких не лежать на одній прямій, і відрізки A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1, жодні два з яких не перетинаються. Одержану таким чином фігуру називають *многокутником*.

Точки A_1, A_2, A_3, A_4,..., A_n називають *вершинами* многокутника, відрізки A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 — *сторонами* многокутника. *Кутом многокутника* при даній вершині називають кут, утворений його сторонами, які сходяться в цій вершині. $\angle A_1$, $\angle A_2$, $\angle A_3$, $\angle A_4$,..., $\angle A_n$ — *кути* (або *внутрішні кути*) многокутника.

Кут, суміжний із внутрішнім кутом многокутника, називають його *зовнішнім кутом многокутника*.

У многокутнику є *сусідні сторони* та *вершини*. Наприклад, на рисунку A_1 і A_2, A_2 і A_3 — сусідні вершини, A_1A_2 і A_2A_3 — сусідні сторони.

Многокутник, який має n вершин (а отже, й n сторін), називають *n-кутником*. Залежно від кількості вершин (сторін) многокутник може бути трикутником, чотирикутником, п'ятикутником тощо.

Многокутник позначають назвами його вершин. При цьому букви, що стоять у назві многокутника поруч, є назвами сусідніх вершин. Наприклад, п'ятикутник $ACFBK$ не можна назвати $AFCBK$.

Многокутник називають *опуклим*, якщо він лежить з одного боку від будь-якої прямої, що містить його сторону.

Довжина кожної сторони многокутника менша за суму довжин усіх інших сторін.

Периметром многокутника називають суму довжин усіх його сторін. Позначають периметр літерою P: $P_{A_1A_2\ldots A_n} = A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n + A_nA_1$.

Діагоналлю многокутника називають відрізок, який сполучає дві несусідні його вершини.

Многокутник називають *вписаним* у коло, якщо всі його вершини лежать на цьому колі.

Многокутник називають *описаним* навколо кола, якщо всі його сторони дотикаються до кола.

Властивості опуклого n-кутника

1. Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180° \cdot (n-2)$.

2. Сума зовнішніх кутів опуклого n-кутника, узятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°.

3. З однієї вершини опуклого многокутника виходить $(n-3)$ діагоналі, які розбивають його на $(n-2)$ трикутники.

4. В опуклому многокутнику є $\frac{n(n-3)}{2}$ діагоналі.

5. Опуклий многокутник існує, якщо сума його кутів кратна 180°.

Правильні многокутники

Правильним многокутником називають опуклий многокутник, у якого всі сторони й усі кути рівні.

Сума кутів правильного многокутника, як і довільного многокутника, дорівнює $180° \cdot (n-2)$.

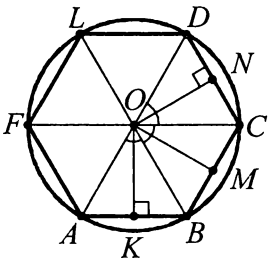
Величина кута α_n правильного n-кутника: $\alpha_n = \frac{180(n-2)}{n}$.

Навколо будь-якого правильного многокутника можна описати коло; у будь-який правильний многокутник можна вписати коло, до того ж центри вписаного й описаного кіл збігаються. $R = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}$, $R = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}$, $r = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}$, $r = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$, де R — радіус описаного кола, r — радіус вписаного кола, a — сторона правильного n-кутника.

Формули для обчислення сторони a_n, радіуса R описаного та радіуса r вписаного кіл для правильних n-кутників

n	R через a_n	r через a_n	a_n через R	a_n через r	R через r	r через R
3	$\frac{a_3}{\sqrt{3}}$	$\frac{a_3}{2\sqrt{3}}$	$R\sqrt{3}$	$2r\sqrt{3}$	$2r$	$\frac{R}{2}$
4	$\frac{a_4}{\sqrt{2}}$	$\frac{a_4}{2}$	$R\sqrt{2}$	$2r$	$r\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$
6	a_6	$\frac{a_6\sqrt{3}}{2}$	R	$\frac{2r}{\sqrt{3}}$	$\frac{2r}{\sqrt{3}}$	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$
n	$\frac{a_n}{2\sin\frac{180°}{n}}$	$\frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}$	$2R\sin\frac{180°}{n}$	$2r\operatorname{tg}\frac{180°}{n}$	$\frac{r}{\cos\frac{180°}{n}}$	$R\cos\frac{180°}{n}$

Спільний центр описаного і вписаного кіл називають *центром* правильного многокутника.



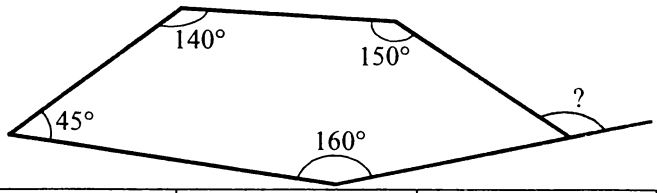
Апофемою правильного многокутника називають перпендикуляр, проведений з центра правильного многокутника до його сторони. Апофема — це радіус вписаного кола. На рисунку *OK*, *OM*, *ON*, ... — апофеми.

Правильні *n*-кутники подібні. Відношення їхніх периметрів, радіусів вписаних й описаних кіл дорівнюють відношенню їхніх сторін, а відношення їх площ — відношенню квадратів сторін.

Центральним кутом правильного многокутника називають кут, утворений двома радіусами, проведеними до сусідніх вершин. Наприклад, кути *AOB*, *BOC*, *COD*, ... — центральні кути.

Центральний кут правильного *n*-кутника обчислюють за формулою $\beta = \frac{360°}{n}$.

Приклад 1. Знайти зовнішній кут многокутника, зображеного на рисунку.



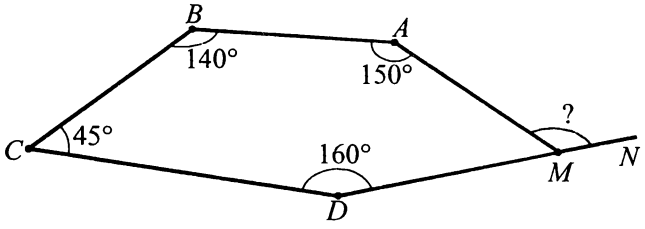
А	Б	В	Г	Д
150°	45°	160°	140°	135°

■ Сума кутів п'ятикутника дорівнює:
$180° \cdot 5 - 180° \cdot 2 = 540°$.

$\angle AMD = 540° - (150° + 140° + 45° + 160°) = 45°$.

$\angle AMN = 180° - 45° = 135°$.

Відповідь. Д. ■



Приклад 2. Скільки сторін має многокутник, якщо в ньому можна провести 20 діагоналей?

А	Б	В	Г	Д
10	15	5	8	6

■ У *n*-кутнику можна провести $\frac{n(n-3)}{2}$ діагоналі. Маємо: $\frac{n(n-3)}{2} = 20$; $n^2 - 3n - 40 = 0$; $n_1 = -5$ — не задовольняє умову задачі, $n_2 = 8$.

Відповідь. Г. ■

Приклад 3. Знайти найбільший кут п'ятикутника, якщо градусні міри його внутрішніх кутів відносяться як 3 : 2 : 4 : 4 : 5.

■ Нехай кути п'ятикутника дорівнюють $3x°$, $2x°$, $4x°$, $4x°$, $5x°$, де x — деяке число. Сума кутів опуклого п'ятикутника дорівнює $180° \cdot (5 - 2) = 180° \cdot 3$. Рівняння: $3x + 2x + 4x + 4x + 5x = 180 \cdot 3$; $18x = 180 \cdot 3$; $x = 30$. Тоді $3x = 90$, $2x = 60$, $4x = 120$, $5x = 150$.

Отже, кути п'ятикутника дорівнюють 90°, 60°, 120°, 120° і 150°. Найбільший кут дорівнює 150°.

Відповідь. 150°. ■

Приклад 4. Скільки вершин має опуклий многокутник, якщо сума його внутрішніх кутів дорівнює 2160°?

■ Опуклий многокутник має стільки вершин, скільки й кутів. Сума кутів опуклого многокутника дорівнює $180° \cdot (n - 2)$. Складемо та розв'яжемо рівняння: $180° \cdot (n - 2) = 2160$; $n - 2 = 12$; $n = 14$.

Отже, многокутник має 14 вершин.

Відповідь. 14. ■

Приклад 5. Скільки вершин у правильного многокутника, якщо його внутрішній кут відноситься до зовнішнього кута як 5 : 2?

■ Нехай внутрішній кут дорівнює $5x°$, а зовнішній — $2x°$. Маємо: $5x + 2x = 180$; $7x = 180$; $x = \frac{180}{7}$. Отже, зовнішній кут многокутника дорівнює $2 \cdot \frac{180°}{7} = \frac{360°}{7}$. Сума зовнішніх кутів многокутника, узятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°, а кожен зовнішній кут — $\frac{360°}{n}$. Маємо: $\frac{360°}{n} = \frac{360°}{7}$; $n = 7$. Отже, у многокутнику є 7 вершин.

Відповідь. 7. ■

Приклад 6. Три кути опуклого n-кутника дорівнюють по 80°, а решта по 160°. Визначити кількість кутів n-кутника.

■ Нехай $\angle A_1$, $\angle A_2$, $\angle A_3$,..., $\angle A_n$ — кути n-кутника. $\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3 = 80°$. Тому $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 = 80° \cdot 3 = 240°$. У даному n-кутнику ще є $(n - 3)$ кути по 160°, їх сума дорівнює $160° \cdot (n - 3)$. Отже, сума всіх кутів даного n-кутника дорівнює $240° + 160° \cdot (n - 3)$, а сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180° \cdot (n - 2)$. Складемо та розв'яжемо рівняння: $240 + 160 \cdot (n - 3) = 180 \cdot (n - 2)$; $240 + 160 \cdot n - 480 = 180 \cdot n - 360$; $20n = 120$; $n = 6$. Отже, в n-кутнику 6 кутів.

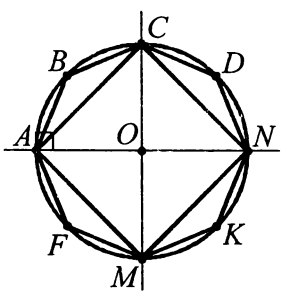
Відповідь. 6. ■

Приклад 7. На скільки градусів збільшиться сума внутрішніх кутів многокутника, якщо число сторін збільшити на 5?

■ Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180° \cdot (n - 2)$. Якщо число сторін збільшити на 5, то й число кутів збільшиться на 5. Тоді їх сума дорівнюватиме $180° \cdot (n + 5 - 2) = 180° \cdot (n + 3)$ і вона збільшиться на: $180° \cdot (n + 3) - 180° \cdot (n - 2) = 180° \cdot n + 540° - 180° \cdot n + 360° = 900°$.

Відповідь. На 900°. ■

Приклад 8. Знайти радіус кола, описаного навколо правильного восьмикутника, сторона якого дорівнює a.



■ Нехай $ABCDNKMF$ — правильний восьмикутник, вписаний у коло, AC — сторона квадрата, вписаного в це коло (див. рис.) $AC = R\sqrt{2}$, де R — шуканий радіус. Кут правильного n-кутника дорівнює $\alpha_n = \frac{180°(n-2)}{n}$. Тоді

$\angle B = \frac{180°(8-2)}{8} = 135°$.

Із трикутника ABC за теоремою косинусів $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B$.

$AC^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \cos 135°$;

$2R^2 = 2a^2 + 2a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$R^2 = a^2 + \sqrt{2}\, a^2$; $R^2 = a^2\left(1+\sqrt{2}\right)$;

$R = a\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Відповідь. $a\sqrt{1+\sqrt{2}}$. ■

Завдання 33.1–33.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

33.1. Скільки всього діагоналей має десятикутник?

А	Б	В	Г	Д
10	50	75	70	35

33.2. Чому дорівнює сума внутрішніх кутів опуклого дванадцятикутника?

А	Б	В	Г	Д
1800°	1980°	2160°	1620°	2520°

33.3. Скільки вершин має опуклий многокутник, якщо сума його внутрішніх кутів дорівнює 900°?

А	Б	В	Г	Д
п'ять	шість	сім	вісім	дев'ять

33.4. Якщо в опуклому многокутнику всі кути гострі, то він...

А	Б	В	Г	Д
трикутник	чотирикутник	п'ятикутник	трикутник або чотирикутник	стокутник

33.5. Чому дорівнює внутрішній кут правильного восьмикутника?

А	Б	В	Г	Д
36°	45°	54°	135°	126°

33.6. Скільки сторін має правильний многокутник, якщо його внутрішній кут дорівнює 156°?

А	Б	В	Г	Д
13	14	15	16	17

33.7. Скільки вершин має правильний многокутник, якщо його зовнішній кут дорівнює 20°?

А	Б	В	Г	Д
9	12	16	18	20

33.8. Якщо у правильного многокутника всі діагоналі рівні, то він...

А	Б	В	Г	Д
Чотирикутник	п'ятикутник	шестикутник	чотирикутник або п'ятикутник	чотирикутник або шестикутник

33.9. Кути п'ятикутника пропорційні до чисел 3, 5, 5, 6 і 8. Знайти найбільший кут п'ятикутника.

А	Б	В	Г	Д
160°	150°	140°	130°	155°

33.10. Скільки діагоналей має многокутник, якщо сума його внутрішніх кутів дорівнює 1620°?

А	Б	В	Г	Д
35	54	65	55	44

33.11. Сторона правильного шестикутника дорівнює 10 см. Знайти його найбільшу діагональ.

А	Б	В	Г	Д
$10\sqrt{3}$ см	$20\sqrt{3}$ см	10 см	40 см	20 см

33.12. Сторона правильного шестикутника дорівнює a. Визначити меншу діагональ.

А	Б	В	Г	Д
$2a\sqrt{3}$	a	$2a\sqrt{2}$	$a\sqrt{3}$	$2a$

33.13. Сторона правильного шестикутника дорівнює 2 см. Знайти його площу.

А	Б	В	Г	Д
$6\sqrt{3}$ см^2	$12\sqrt{3}$ см^2	$3\sqrt{3}$ см^2	32 см^2	64 см^2

33.14. Знайти периметр правильного шестикутника, якщо довжина кола, описаного навколо нього, дорівнює 18π см.

А	Б	В	Г	Д
108 см	54 см	27 см	$27\sqrt{3}$ см	$54\sqrt{3}$ см

33.15. Знайти меншу діагональ правильного шестикутника, якщо більша його діагональ дорівнює $2\sqrt{3}$ см.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\sqrt{3}}{2}$ см	$\sqrt{3}$ см	3 см	2 см	1 см

33.16. Радіус кола, вписаного в правильний шестикутник, дорівнює $8\sqrt{3}$ см. Знайти периметр шестикутника.

А	Б	В	Г	Д
24 см	48 см	96 см	192 см	72 см

33.17. Чому дорівнює найбільший кут між двома діагоналями, проведеними з однієї вершини правильного шестикутника?

А	Б	В	Г	Д
45°	60°	80°	90°	120°

33.18. Скільки сторін має опуклий многокутник, у якого сума внутрішніх кутів дорівнює сумі його зовнішніх кутів, узятих по одному при кожній вершині?

А	Б	В	Г	Д
Три	чотири	п'ять	шість	вісім

33.19. Скільки сторін має опуклий многокутник, якщо сума його усіх внутрішніх кутів і усіх зовнішніх дорівнює 2520°?

А	Б	В	Г	Д
10	11	12	13	14

33.20. Скільки вершин має правильний многокутник, у якого внутрішній кут у 8 разів більший від зовнішнього?

А	Б	В	Г	Д
12	14	16	18	20

Завдання 33.21–33.23 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

33.21. Установити відповідність між кількістю кутів (1–4) многокутника та кількістю його діагоналей (А–Д).

1 12
2 15
3 7
4 5

А 14
Б 5
В 54
Г 20
Д 90

33.22. Установити відповідність між величиною внутрішнього кута (1–4) правильного многокутника та кількістю його сторін (А–Д).

1 156°
2 108°
3 150°
4 140°

А 9
Б 12
В 5
Г 7
Д 15

33.23. Сторона правильного многокутника дорівнює 2 см. Установити відповідність між кількістю сторін (1–4) цього многокутника та його площею (А–Д).

1 6
2 9
3 12
4 15

А $12\operatorname{ctg}15°$ см^2
Б $6\sqrt{3}$ см^2
В $9\operatorname{ctg}20°$ см^2
Г $12\operatorname{ctg}12°$ см^2
Д $15\operatorname{ctg}12°$ см^2

Розв'яжіть завдання 33.24–33.35. Відповідь запишіть десятковим дробом.

33.24. Сума внутрішніх кутів многокутника удвічі більша від суми зовнішніх кутів, узятих по одному при кожній вершині. Знайти число сторін многокутника.

33.25. Кожний із трьох внутрішніх кутів многокутника дорівнює 80°, а кожний з решти кутів — 150°. Скільки найменше сторін може мати многокутник?

33.26. Три кути многокутника прямі, а решта дорівнюють по 150°. Скільки найменше вершин може мати многокутник?

33.27. На скільки градусів збільшиться сума внутрішніх кутів многокутника, якщо число його сторін збільшити на 5?

33.28. Внутрішній кут правильного многокутника на 144° більший від зовнішнього. Скільки сторін має многокутник?

33.29. Радіус кола, описаного навколо правильного восьмикутника, дорівнює $4\sqrt{2}$. Знайти найменшу діагональ восьмикутника.

33.30. Менша діагональ правильного шестикутника дорівнює $\sqrt{3}$. Визначити більшу його діагональ.

33.31. R — радіус кола, описаного навколо правильного шестикутника. Визначити радіус кола, вписаного в правильний шестикутник, якщо $R = \sqrt{3}$.

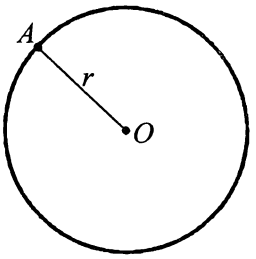
33.32. Під яким кутом (у градусах) перетинаються дві діагоналі правильного п'ятикутника, проведені з різних вершин?

33.33. За стороною a правильного дванадцятикутника визначити його апофему (перпендикуляр, опущений з центра до сторони), якщо $a = 2 - \sqrt{3}$.

33.34. Виразити сторону a правильного дванадцятикутника через радіус R описаного кола, й обчислити її довжину, якщо $R = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

33.35. На клумбі, яка має форму правильного восьмикутника зі стороною 1 м, потрібно посадити квіти. Скільки найбільше квітів можна посадити на такій клумбі, якщо для однієї рослини потрібно 160 $см^2$ землі?

Тема 34. Коло, круг та їх елементи



Колом називають геометричну фігуру, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки. Цю точку називають *центром кола*. *Радіусом кола* називають відрізок, який сполучає будь-яку точку кола з його центром. Коло позначають так: $K(O; r)$. Читають: «*Коло з центром O і радіусом ер*».

Кругом називають частину площини, обмежену колом. Точки круга радіуса r віддалені від його центра O на відстань, яка менша або дорівнює r. Центр круга збігається з центром кола, яке його обмежує, а радіус круга дорівнюють радіусу кола. Коло, яке обмежує круг, належить кругові. Круг позначають так: $Kp(O; r)$. Читають: «*Круг з центром O й радіусом ер*».

Усі точки круга, крім точок кола, яке його обмежує, називають *внутрішніми*.

Хордою називають відрізок, який сполучає будь-які дві точки кола.

Діаметром називають хорду, яка проходить через центр кола. Діаметр кола зазвичай позначають буквою d або D. *Діаметр дорівнює двом радіусам:* $d = 2r$, $D = 2R$.

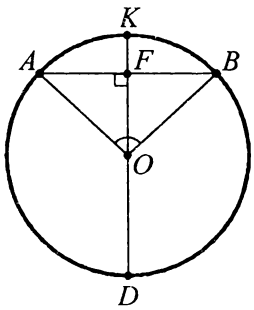
Довжина кола

Довжину кола обчислюють за формулами: $C = \pi d$, $C = 2\pi r$, де $\pi \approx 3{,}1415...$.

Площа круга

Площу круга обчислюють за формулами: $S = \pi r^2$, $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$.

Властивість хорди та діаметра



Діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить її і дугу, яку вона стягує, навпіл. Якщо $DK \perp AB$, то $AF = FB$ і $\cup AK = \cup KB$.

Справедливе й обернене твердження: *Якщо діаметр кола проходить через середину хорди, яка не є діаметром, чи через середину дуги, яку вона стягує, то цей діаметр перпендикулярний до даної хорди.*

Рівні дуги стягуються рівними хордами, а рівні хорди стягують рівні дуги.

Дуги, які лежать між паралельними хордами, рівні.

Взаємне розміщення прямої й кола

Відомі три випадки взаємного розміщення прямої й кола:

1) пряма та коло не мають спільних точок (рис. 1):

2) пряма та коло мають одну спільну точку (рис. 2);

3) пряма та коло мають дві спільні точки (рис. 3).

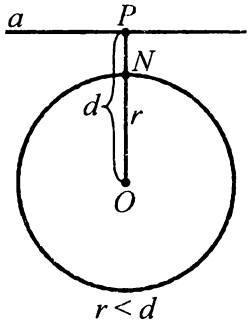


Рис. 1

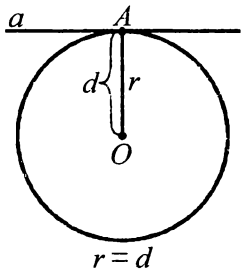


Рис. 2

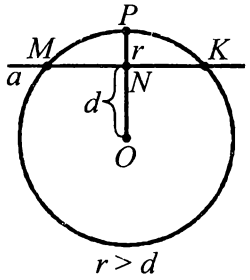


Рис. 3

Пряму, яка має з колом лише одну спільну точку, називають *дотичною* до кола. На рис. 2 пряма a — дотична до кола, A — точка дотику. Пряму, що перетинає коло у двох точках, називають *січною*. На рис. 3 MK — січна.

Ознака дотичної

Якщо пряма проходить через точку кола й перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то вона є дотичною до кола. Наприклад, на рис. 2 зображено $K(O; r)$, OA — радіус, пряма a проходить через точку A, $a \perp r$. Тоді a — дотична до кола.

З ознаки дотичної випливає наслідок: *Якщо відстань від центра кола до деякої прямої дорівнює радіусу, то ця пряма є дотичною до даного кола ($d = r$)* (рис. 2).

Також справедливі твердження: *Якщо відстань від центра кола до деякої прямої більша від радіуса, то ця пряма з колом не мають спільних точок ($d > r$) (рис. 1); якщо відстань від центра кола до деякої прямої менша від радіуса, то ця пряма з колом мають дві спільні точки, тобто перетинаються ($d < r$), де r — радіус кола, d — відстань від центра кола до прямої* (рис. 3).

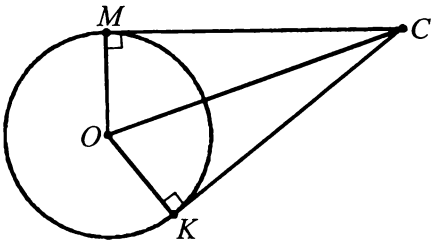
Властивість дотичної

Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику. Наприклад, на рис. 2, пряма a дотична до кола, $a \perp OA$.

Властивість дотичних, проведених до кола з однієї точки

Якщо з даної точки до кола провести дві дотичні, то відрізки дотичних, які сполучають дану точку з точками дотику, рівні.

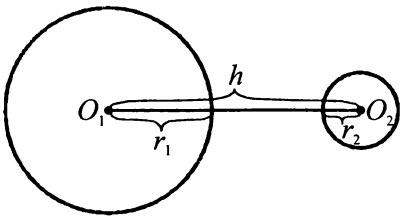
Наприклад, на рисунку зображено $K(O; r)$, CM і CK — дотичні до кола. Тоді $CM = CK$.



Взаємне розміщення двох кіл

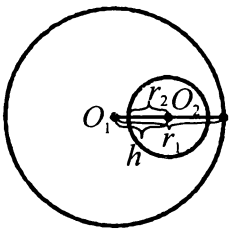
Два кола можуть бути розміщені так:

1) кола не мають спільних точок. Вони лежать або: а) одне поза кругом іншого (рис. 4), у цьому випадку відстань між центрами буде більша від суми радіусів; б) одне всередині круга іншого (рис. 5), у цьому випадку відстань між центрами буде меншою від різниці радіусів;



$h > r_1 + r_2$

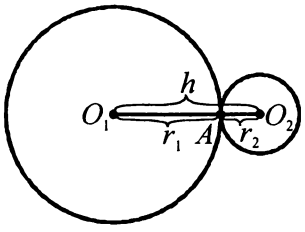
Рис. 4



$h < r_1 - r_2$

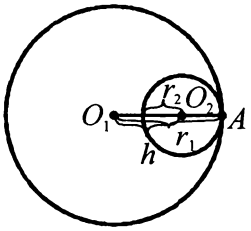
Рис. 5

2) кола мають одну спільну точку (рис. 6, 7). Кола, які мають одну спільну точку, називають *дотичними*. Спільну точку називають *точкою дотику*. На рис. 6 і 7 точка A — точка дотику. Дотик кіл може бути зовнішнім (рис. 6) ($h = r_1 + r_2$) або внутрішнім (рис. 7) ($h = r_1 - r_2$).



$h = r_1 + r_2$

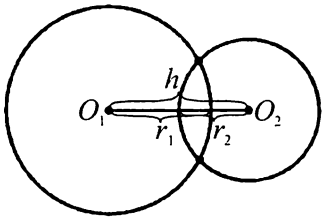
Рис. 6



$h = r_1 - r_2$

Рис. 7

3) кола мають дві спільні точки (рис. 8), у цьому випадку відстань між центрами буде меншою від суми їх радіусів, але більшою від їх різниці.



$r_1 - r_2 < h < r_1 + r_2$

Рис. 8

Пряму, яка проходить через центри двох кіл, називають *лінією центрів*. На рис. 9–11 пряма a — лінія центрів.

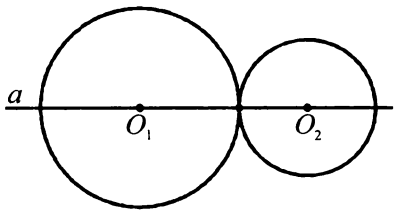


Рис. 9

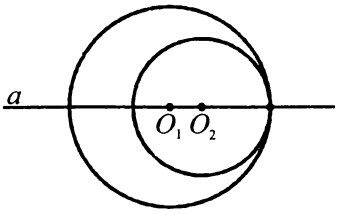


Рис. 10

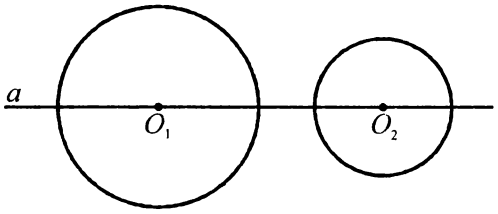
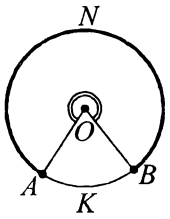


Рис. 11

Центральний кут



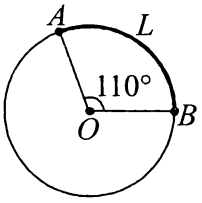
Центральним є кут з вершиною в центрі кола. Кут AOB — центральний, він спирається на дугу AB. Кут і дуга мають однакові градусні міри.

Частину кола, розміщену всередині центрального кута, називають *дугою кола*, що відповідає цьому центральному куту.

Центральному куту AOB відповідають дві дуги з кінцями A і B. Одна з них менша за півколо (на ній позначена проміжна буква K), а інша більша за півколо (на ній позначена проміжна буква N). Дугу можна називати і без проміжної точки, якщо зрозуміло, про яку з двох дуг ідеться.

Градусною мірою дуги кола називають градусну міру відповідного центрального кута.

Наприклад, якщо $\angle BOA = 110°$, то $\cup ALB = 110°$ (див. рис.). І навпаки, градусною мірою центрального кута є градусна міра відповідної дуги. Наприклад, якщо $\cup AB = 110°$, то $\angle AOB = 110°$.

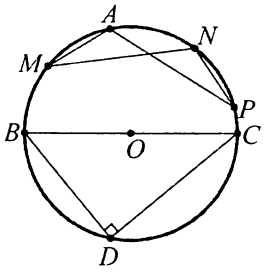


Градусну міру дуги, як і саму дугу, позначають знаком «$\cup$». Наприклад: запис $\cup NK$ читають: дуга NK, запис $\cup CD = 35°$ читають: градусна міра дуги CD дорівнює 35°, або дуга CD дорівнює 35°.

Довжина дуги $l_n = \frac{\pi R}{180} \cdot n$, де n — градусна міра відповідного центрального кута.

Кути й дуги вимірюють у градусах й радіанах.

Вписаний кут



Кут PNM — вписаний у коло. Вписаний у коло кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається: $\angle PNM = \frac{1}{2} \cup PDM$. Вписані кути, які спираються на одну й ту ж дугу, рівні: $\angle PNM = \angle PAM$. Вписані кути, які спираються на діаметр, прямі: $\angle BDC = 90°$.

Кут з вершиною всередині кола вимірюється півсумою дуг, на які спирається даний кут і кут, вертикальний з ним. На рис. 12 $\angle ABC = \dfrac{\cup AC + \cup DK}{2}$.

Кут, вершина якого лежить зовні кола, а сторони перетинають коло, вимірюється піврізницею більшої та меншої дуг, які містяться між його сторонами. На рис. 13 $\angle ABC = \dfrac{\cup AC - \cup DK}{2}$.

Кут між дотичною і хордою, яка проходить через точку дотику, вимірюється половиною дуги, що лежить між його сторонами. На рис. 14 $\angle ABC = \dfrac{1}{2} \cup BC$.

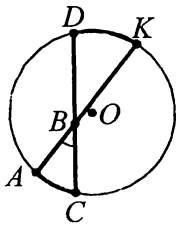


Рис. 12

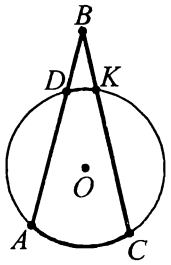


Рис. 13

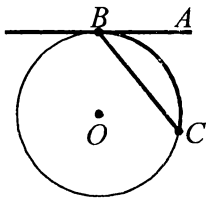
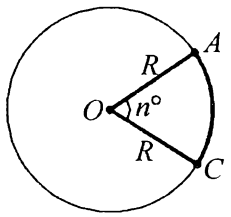


Рис. 14

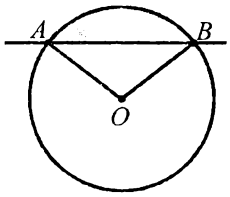
Круговий сектор



Круговим сектором називають частину круга, яка лежить усередині відповідного центрального кута.

На рисунку сектор AOC затушований, AC — дуга сектора, $\angle AOC$ — центральний кут, який відповідає сектору AOC.

Площу сектора з центральним кутом в 1° визначають за формулою $S_{сек.} = \dfrac{\pi R^2}{360°}$.



Площу сектора з центральним кутом $n°$ визначають за формулою $S_{сек.} = \dfrac{\pi R^2 n°}{360°}$.

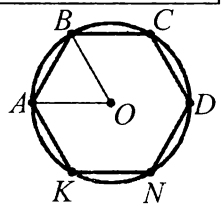
Круговим сегментом називають частину круга, яка лежить з одного боку від прямої, що перетинає даний круг. Будь-яка пряма розбиває круг на два кругових сегменти.

Площу кругового сегмента, який не дорівнює півкругу, обчислюють за формулою $S_{сег.} = \dfrac{\pi R^2 n°}{360°} \pm S_{AOB}$. (див. рис.).

Приклад 1. Знайти площу частини круга, яка лежить поза вписаним у коло радіуса R правильним шестикутником.

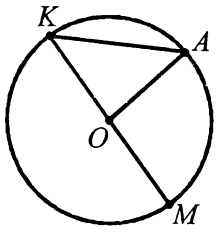
А	Б	В	Г	Д
$\pi R^2 + 1{,}5\pi^2\sqrt{3}$	$2\pi R^2 - 1{,}5\pi^2\sqrt{3}$	$\dfrac{2\pi R^2 + 3\pi^2\sqrt{3}}{12}$	$\dfrac{2\pi R^2 - 3\pi^2\sqrt{3}}{12}$	$\pi R^2 - 1{,}5\pi^2\sqrt{3}$

■ Шукана площа є різницею між площею круга і шестикутника. Знайдемо їх площі: $S_{кр.} = \pi R^2$; $S_{шест.} = 6S_{\Delta AOB} = 6 \cdot \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4} = 1{,}5R^2\sqrt{3}$. Шукана площа дорівнюватиме: $S = \pi R^2 - 1{,}5R^2\sqrt{3}$.



Відповідь. **Д.** ■

Приклад 2. У колі з центром O проведено діаметр KM і хорду KA (див. рис.). Знайти кут AOM, якщо $\angle OAK = 48°$.



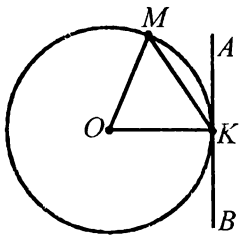
А	Б	В	Г	Д
48°	86°	96°	90°	24°

■ Розглянемо трикутник KOA. У ньому $OK = OA = r$. Отже, ΔKOA — рівнобедрений з основою KA. За властивістю кутів при основі рівнобедреного трикутника $\angle OAK = \angle OKA = 48°$.

Кут AOM — зовнішній кут трикутника KOA. За теоремою про зовнішній кут $\angle AOM = \angle OAK + \angle OKA = 48° + 48° = 96°$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 3. У колі з центром O проведено хорду MK і дотичну в точці K. Знайти кут між хордою і дотичною, якщо $\angle MOK = 80°$.



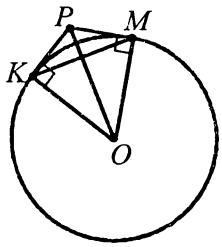
■ За властивістю дотичної $AB \perp OK$, отже, $\angle OKA = 90°$.

Трикутник MOK рівнобедрений ($OM = OK = r$). За властивістю кутів при основі рівнобедреного трикутника $\angle OMK = \angle OKM$. Отже, $\angle OMK = \angle OKM = (180° - 80°) : 2 = 50°$.

За властивістю вимірювання кутів $\angle MKA = 90° - 50° = 40°$.

Відповідь. 40°.

Приклад 4. Через кінці хорди KM, яка дорівнює радіусу, проведено дві дотичні, які перетинаються в точці P (див. рис.). Знайти кут KPM.



■ Трикутник OKM — рівносторонній, тому $\angle KOM = 60°$. $PK = PM$ за властивістю дотичних, проведених з однієї точки до кола. Тоді трикутник PKM — рівнобедрений, $\angle PKM = \angle PMK = 60° : 2 = 30°$.

Із трикутника KPM: $\angle P = 180° - (30° + 30°) = 120°$.

Відповідь. 120°. ■

Приклад 5. Як розміщені два кола, якщо:

1) радіуси дорівнюють 7 см і 13 см, а відстань між центрами — 20 см?

2) радіуси дорівнюють 5 см і 8 см, а відстань між центрами — 14 см?

3) радіуси дорівнюють 6 см і 15 см, а відстань між центрами — 9 см?

4) радіуси дорівнюють 8 см і 10 см, а відстань між центрами — 1,5 см?

5) радіуси дорівнюють 4 см і 9 см, а відстань між центрами — 7 см?

■ 1) $7 + 13 = 20$, $20 = 20$ — відстань між центрами дорівнює сумі радіусів, отже, кола дотикаються (зовнішній дотик);

2) $5 + 8 = 13$, $14 > 13$ — відстань між центрами більша від суми радіусів, отже, кола не мають спільних точок;

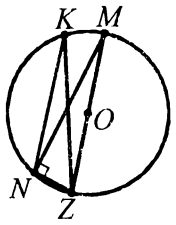
3) $15 - 6 = 9$, $9 = 9$ — відстань між центрами дорівнює різниці радіусів, отже, кола дотикаються (внутрішній дотик);

4) $10 - 8 = 2$, $1,5 < 2$ — відстань між центрами менша від різниці радіусів, отже, кола не мають спільних точок;

5) $9 + 4 = 13$, $9 - 4 = 5$, $5 < 7 < 13$ — відстань між центрами більша від різниці радіусів і менша від їх суми, отже, кола перетинаються.

Відповідь. 1), 3) — дотикаються; 2), 4) — не мають спільних точок; 5) — перетинаються. ■

Приклад 6. Хорди кола NK і KZ утворюють кут 30°. Знайти хорду NZ, якщо діаметр кола дорівнює 38 см.



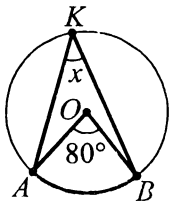
■ За умовою, $\angle NKZ = 30°$. Проведемо діаметр ZM і сполучимо точки N і M. $\angle NMZ = \angle NKZ$ як вписані, що спираються на дугу NZ. Отже, $\angle NMZ = 30°$.

Кут MNZ спирається на діаметр кола, тому $\angle MNZ = 90°$.

У прямокутному трикутнику MNZ $NZ = \frac{1}{2} MZ$ за властивістю катета, який лежить проти кута 30°. Отже, $NZ = \frac{1}{2} \cdot 38 = 19$ (см).

Відповідь. 19 см. ■

Приклад 7. За даними на рисунку знайти кут x.

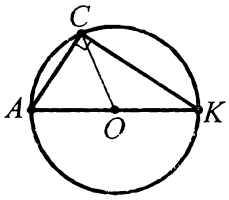


■ Оскільки центральний кут AOB спирається на дугу AB, то $\cup AB = \angle AOB = 80°$.

За теоремою про вписаний кут $\angle AKB = \frac{1}{2} \cup AB = \frac{1}{2} \cdot 80° = 40°$.

Відповідь. 40°. ■

Приклад 8. Трикутник AKC вписаний у коло, центр якого належить стороні AK. Знайти: **1)** кут K, якщо $\angle A = 46°$; **2)** медіану, проведену з вершини C, якщо $AK = 14$ см.



■ **1)** Оскільки центр кола лежить на одній зі сторін трикутника, то такий трикутник прямокутний ($\angle C = 90°$). За властивістю гострих кутів прямокутного трикутника $\angle K = 90° - 46° = 44°$.

2) $AK = d = 14$ см; $r = \frac{1}{2} d = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7$ (см).

$CO = r = 7$ см.

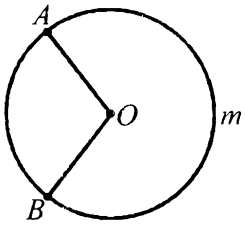
Відповідь. **1)** 44°; **2)** 7 см. ■

Приклад 9. Знайти площу сектора круга радіуса 5 см з центральним кутом 72°.

■ $S = \frac{\pi R^2 n°}{360°}$, $S = \frac{\pi \cdot 25 \cdot 72°}{360°} = 5\pi$ (см^2).

Відповідь. 5π см^2. ■

Приклад 10. Площа кругового сектора становить $\frac{5}{9}$ площі круга. Знайти площу цього сектора, якщо довжина дуги, на яку він спирається, дорівнює 20π см.



■ Площу сектора визначають за формулою $S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2 n°}{360°}$. $S_{\text{кр.}} = \pi R^2$. Маємо:

$\frac{\pi R^2 n°}{360°} = \frac{5}{9} \pi R^2$, $\frac{n°}{360°} = \frac{5}{9}$, $n° = \frac{360° \cdot 5}{9} = 200°$.

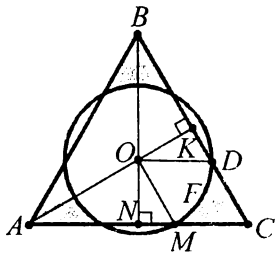
Довжину дуги визначають за формулою $l = \frac{\pi R n°}{180°}$. Маємо: $\frac{\pi R \cdot 200°}{180°} = 20\pi$. Звідси $R = 18$.

$S_{\text{сект.}} = \frac{\pi \cdot 18^2 \cdot 200°}{360°} = 180\pi$ (см^2).

Відповідь. 180π см^2. ■

Приклад 11. Сторона правильного трикутника дорівнює a. З його центра радіусом, утричі меншим від сторони, проведено коло. Знайти площу частини трикутника, розміщеної поза кругом. У відповідь записати значення $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{S}$, якщо $a=3$.

■ Нехай ABC — рівносторонній трикутник зі стороною $AB=a$ і центром O. Знайдемо площу фігури $MFDC$.



У прямокутному трикутнику ONM ($\angle N=90°$) $ON=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. $OM=\frac{1}{3}a$, звідки $\sin\angle OMN=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle OMN=60°$. Аналогічно $\angle ODK=60°$. $\angle MCD=60°$ як кут рівностороннього трикутника. Маємо: $\angle ODK=\angle MCD=60°$, а вони є відповідними при прямих OD і MC та січній DC. Отже, $OD\|MC$, аналогічно $OM\|DC$. $OM=OD=r$. Тому $MODC$ — ромб. $\angle MOD=\angle MCD=60°$. $S_{MFDC}=S_{OMCD}-S_{сект.\ MOD}$. $S_{OMCD}=MC\cdot DC\cdot\sin\angle C=$ $=\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{18}$. $S_{сект.\ MOD}=\frac{\pi\cdot a^2\cdot 60}{9\cdot 360}=\frac{\pi a^2}{54}$. $S_{MFDC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{18}-\frac{\pi a^2}{54}=\frac{3a^2\sqrt{3}-\pi a^2}{54}$.

$S=3\cdot\frac{3a^2\sqrt{3}-\pi a^2}{54}=\frac{a^2}{18}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$. У відповідь необхідно записати $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{S}$. Тоді одержимо: $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{\frac{a^2\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{18}}=\frac{18}{a^2}$. Якщо $a=3$, то $\frac{18}{a^2}=\frac{18}{9}=2$.

Відповідь. 2. ■

Завдання 34.1–34.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

34.1. Знайти довжину кола, якщо його діаметр дорівнює 20 см.

А	Б	В	Г	Д
10π см	40π см	20π см	100π см	50π см

34.2. Знайти радіус кола, якщо довжина кола дорівнює 24π см.

А	Б	В	Г	Д
4π см	12 см	24 см	48 см	96 см

34.3. Знайти довжину дуги кола, радіус якого дорівнює 10 см, якщо її кутова величина дорівнює 30°.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{10}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{6}{5}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$

34.4. Знайти радіус кола, в якого кутова величина дуги завдовжки π см дорівнює 45°.

А	Б	В	Г	Д
6 см	3 см	8 см	2 см	4 см

34.5. Яка кутова величина дуги завдовжки $\frac{\pi}{2}$ см у колі радіуса 3 см?

А	Б	В	Г	Д
15°	30°	45°	60°	75°

34.6. Знайти площу круга, у який вписано трикутник зі сторонами 6 см, 8 см і 10 см.

А	Б	В	Г	Д
10π см^2	36π см^2	64π см^2	25π см^2	480π см^2

34.7. Знайти діаметр круга, площа якого дорівнює π см^2.

А	Б	В	Г	Д
2 см	4 см	3 см	5 см	6 см

34.8. Знайти площу кругового сектора радіуса 3 см з центральним кутом 120°.

А	Б	В	Г	Д
2π см^2	3π см^2	4π см^2	5π см^2	6π см^2

34.9. Площа кругового сектора радіуса 6 см дорівнює $5\ \pi$ см^2. Знайти кутову величину дуги.

А	Б	В	Г	Д
30°	50°	60°	80°	100°

34.10. При збільшенні круга його площа збільшилась у 9 разів. У скільки разів збільшилась довжина кола цього круга?

А	Б	В	Г	Д
1,5	27	9	2	3

34.11. З точки кола проведено дві перпендикулярні хорди, довжини яких дорівнюють 12 і 16. Знайти довжину кола.

А	Б	В	Г	Д
20π	40π	50π	60π	35π

34.12. Площа кругового сектора становить 15% площі круга. Яка величина центрального кута сектора?

А	Б	В	Г	Д
30°	45°	54°	15°	20°

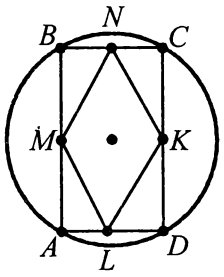
34.13. Коло, радіус якого дорівнює 9, розігнуто в дугу, радіус кола якої дорівнює 24. Знайти центральний кут, який стягує утворену дугу.

А	Б	В	Г	Д
100°	120°	135°	150°	180°

34.14. Точки A, B і C ділять коло на дуги у відношенні 2 : 3 : 4. Знайти найбільший кут трикутника ABC.

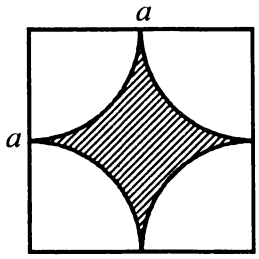
А	Б	В	Г	Д
160°	80°	120°	100°	70°

34.15. У коло, довжина якого дорівнює 6π см, вписано прямокутник $ABCD$. M, N, K і L — середини сторін прямокутника. Чому дорівнює периметр чотирикутника $MNKL$?



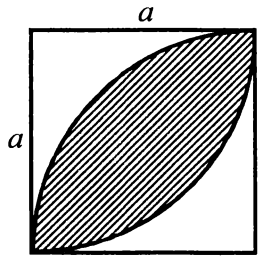
А	Б	В	Г	Д
6 см	9 см	12 см	14 см	18 см

34.16. Знайти площу заштрихованої на рисунку частини квадрата зі стороною a.



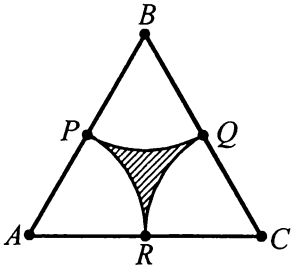
А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi-2}{2}a^2$	$\frac{\pi-3}{3}a^2$	$\frac{3-\pi}{3}a^2$	$\frac{4-\pi}{4}a^2$	$\frac{8-\pi}{8}a^2$

34.17. На рисунку зображено квадрат зі стороною 1 і дуги кіл радіуса 1. Знайти площу заштрихованої частини.



А	Б	В	Г	Д
$\pi+1$	$\pi-2$	$\frac{\pi}{2}+1$	$\pi-1$	$\frac{\pi}{2}-1$

34.18. Довжина сторони правильного трикутника ABC дорівнює 6. Точки P, Q і R — середини його сторін. PR, PQ і QR — дуги кіл з центрами відповідно у точках A, B і C. Знайти площу криволінійного трикутника PQR.

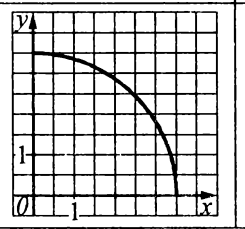
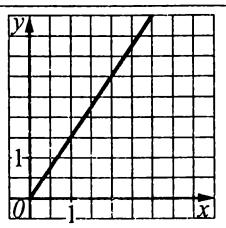
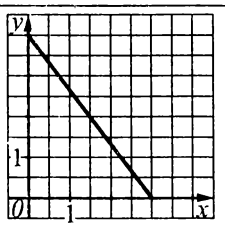
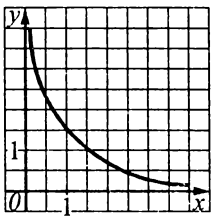
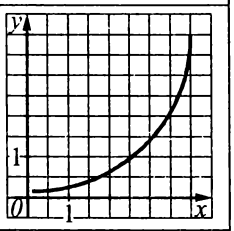


А	Б	В	Г	Д
1	2	$\frac{\pi}{2}-1$	$6(\pi-3)$	$9\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)$

34.19. Три кола, радіуси яких дорівнюють 2, 3 і 10, попарно дотикаються зовні. Знайти радіус кола, яке вписане в трикутник, утворений центрами цих кіл.

А	Б	В	Г	Д
3,5	3	2,5	2	1,5

34.20. $l(x)$ — довжина хорди, проведеної на відстані x від центра кола. Який із наведених графіків може бути графіком функції $l = l(x)$?

А	Б	В	Г	Д
				

Завдання 34.21–34.23 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

34.21. З точки кола проведено дві перпендикулярні хорди a та b. Установити відповідність між довжинами цих хорд (1–4) та довжиною кола (А–Д).

1 12 см, 16 см	**А** 5π см
2 5 см, 12 см	**Б** 20π см
3 3 см, 4 см	**В** 10π см
4 6 см, 8 см	**Г** 13π см
	Д 12π см

34.22. Установити відповідність між довжинами сторін квадрата (1–4) та радіусами вписаних у квадрати кіл (А–Д).

1 2 см	**А** 3 см
2 6 см	**Б** 15 см
3 10 см	**В** 1 см
4 30 см	**Г** 4 см
	Д 5 см

34.23. Установити відповідність між заданими відношеннями радіусів двох концентричних кругів (1–4) та відношенням площі першого круга до площі кільця (А–Д).

1 2 : 1	**А** 9 : 5
2 3 : 2	**Б** 16 : 7
3 5 : 3	**В** 4 : 3
4 4 : 3	**Г** 16 : 5
	Д 25 : 16

Розв'яжіть завдання 34.24–34.34. Відповідь запишіть десятковим дробом.

34.24. Знайти довжину кола l, вписаного в ромб, діагоналі якого дорівнюють 15 і 20. У відповідь записати $\frac{l}{\pi}$.

34.25. У рівнобедрену трапецію вписано коло. Основи трапеції дорівнюють 9 і 25, а бічна сторона — 17. Знайти довжину l вписаного кола. У відповідь записати $\frac{l}{\pi}$.

34.26. Периметр правильного трикутника дорівнює 36. На стороні трикутника як на діаметрі, побудовано коло. Знайти довжину l дуги, розміщену у внутрішній області трикутника. У відповідь записати $\frac{l}{\pi}$.

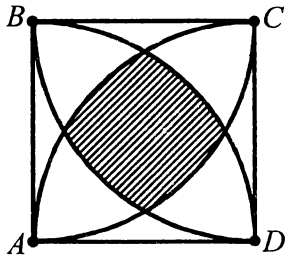
34.27. Знайти площу S круга, описаного навколо правильного трикутника зі стороною 9 см. У відповідь записати $\frac{S}{\pi}$.

34.28. Знайти площу S круга, вписаного в правильний шестикутник зі стороною 6 см. У відповідь записати $\frac{S}{\pi}$.

34.29. Дано два круги зі спільним центром. Радіус меншого круга дорівнює $\frac{1}{2}$ радіуса більшого. Знайти відношення площі утвореного кільця до площі круга більшого радіуса.

34.30. Знайти відношення площ кругів, вписаного й описаного навколо квадрата.

34.31. На рисунку сторона квадрата дорівнює 5. Кожна його вершина є центром кола радіуса 5. Знайти периметр P замальованого криволінійного чотирикутника обмеженого цими колами. У відповідь записати $\frac{3P}{\pi}$.



34.32. У прямокутну трапецію з основами 1 і 3 вписано коло. Знайти радіус вписаного кола.

34.33. На висоті рівностороннього трикутника як на діаметрі побудовано круг. Довжина сторони трикутника дорівнює 1. Знайти з точністю до 0,01 площу тієї частини трикутника, яка лежить поза даним кругом.

34.34. Клумбу діаметром 6 м потрібно розбити на 6 рівних секторів для квітів різних видів. Скільки квітів одного виду можна посадити, якщо для кожної квітки необхідно 1 дм^2 землі?

Тема 35. Аксіоми стереометрії. Прямі та площини в просторі

Розділ геометрії, в якому вивчають властивості фігур у просторі, називають *стереометрією*. Основними фігурами у просторі є точка, пряма та площина.

Властивості всіх фігур, які вивчали в планіметрії, справджуються і в кожній площині простору.

Аксіоми стереометрії та наслідки з них.

1. Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй.
2. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій.
3. Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину і до того ж лише одну.

Прямі в просторі

Прямі в просторі можуть:

— перетинатися (рис. 1);

— лежати в одній площині й не перетинатися (рис. 2). Такі прямі називають *паралельними*;

— не лежати в одній площині й не перетинатися (рис. 3). Такі прямі називають *мимобіжними*.

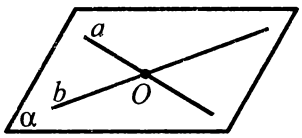


Рис. 1

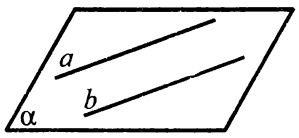


Рис. 2

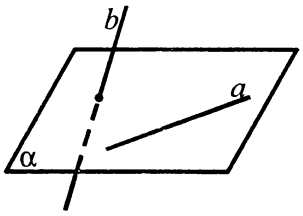


Рис. 3

Через одну точку простору можна провести безліч прямих (рис. 4).

Через будь-які дві точки простору можна провести одну пряму (рис. 5).

Через будь-яку пряму в просторі можна провести безліч площин (рис. 6).

Оскільки пряму визначають дві точки, то через будь-які дві точки у просторі можна провести безліч площин (рис. 6).

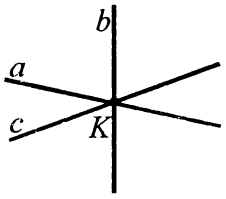


Рис. 4

Рис. 5

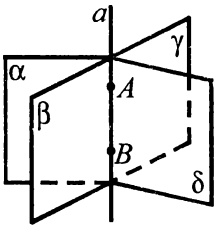


Рис. 6

Властивості площини

Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж лише одну (рис. 7).

Єдину площину можна провести:

— через дві прямі, що перетинаються (рис. 8);

— через пряму і точку, що не належить цій прямій (рис. 9);

— через дві паралельні прямі (рис. 10).

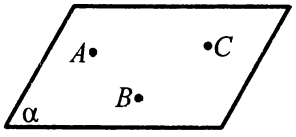


Рис. 7

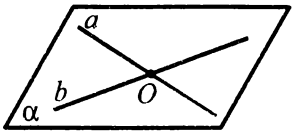


Рис. 8

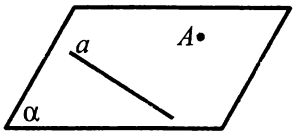


Рис. 9

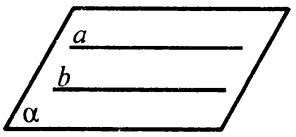


Рис. 10

Взаємне розміщення прямої і площини

Пряма може:

— перетинати площину (рис. 11), A — єдина спільна точка;

— лежати в площині (рис. 12);

— не мати з площиною спільних точок (рис. 13). Такі пряму і площину називають *паралельними*. На рис. 13 пряма a паралельна до площини α.

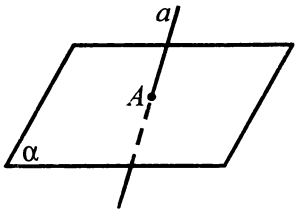


Рис. 11

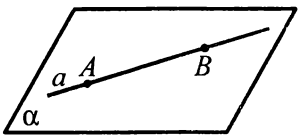


Рис. 12

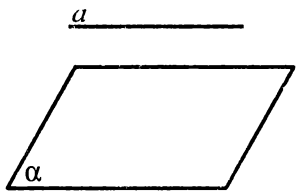


Рис. 13

Паралельність прямих і площин

Ознака паралельності прямої та площини.

Якщо пряма, яка не належить площині, паралельна до якої-небудь прямої у цій площині, то вона паралельна і до самої площини (рис. 14). Коротко: якщо $a \| b$, $b \subset \alpha$, то $a \| \alpha$.

Ознака паралельності площин.

Якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини, відповідно паралельні двом прямим, що перетинаються, іншої площини, то такі площини паралельні (рис. 15). Коротко: якщо a, $b \subset \alpha$, $a \cap b$, $a \| a_1$, $b \| b_1$, a_1, $b_1 \subset \beta$, то $\alpha \| \beta$.

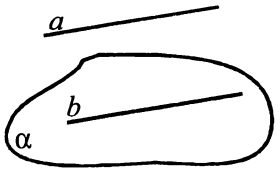


Рис. 14

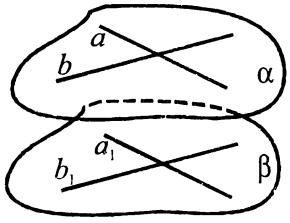


Рис. 15

Перпендикулярність прямих і площин

Ознака перпендикулярності прямої та площини.

Пряму a називають *перпендикулярною* до площини, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині.

Пряма a буде перпендикулярною до площини α, якщо вона перпендикулярна до двох прямих, які лежать у площині α і перетинаються (рис. 16). Коротко: $a \perp b \in \alpha$, $a \perp c \in \alpha$, $b \nparallel c$, то $a \perp \alpha$.

Перпендикуляр і похила

Перпендикуляром, проведеним з даної точки до даної площини, називають відрізок, який сполучає дану точку з точкою площини і лежить на прямій, перпендикулярній до площини.

Кінець перпендикуляра, який лежить у площині, називають *основою перпендикуляра*. На рис. 17 AC — перпендикуляр, проведений з точки A до площини α, точка C — основа перпендикуляра.

Відстанню від точки до площини називають довжину перпендикуляра, проведеного з цієї точки на площину. На рис. 17 AC — відстань від точки A до площини α.

Похилою, проведеною з даної точки до даної площини, називають будь-який відрізок, який сполучає дану точку з точкою площини і не є перпендикуляром до площини. На рис. 17 AB — похила.

Відрізок, який сполучає основи перпендикуляра і похилої, проведених з однієї й тієї ж точки, називають *проекцією похилої*. На рис. 17 CB — проекція похилої AB.

Теорема про три перпендикуляри

Якщо пряма, проведена на площині через основу похилої, перпендикулярна до її проекції, то вона перпендикулярна до похилої (рис. 18). Навпаки: якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна й до проекції похилої на цю площину. Коротко: якщо $a \perp BC$, то $a \perp AC$ або якщо $a \perp AC$, то $a \perp BC$ (рис. 18).

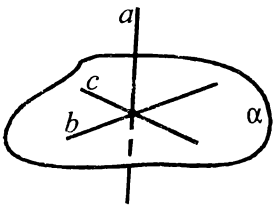


Рис. 16

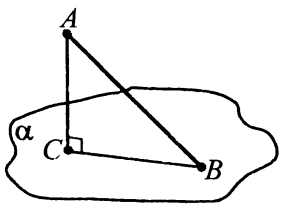


Рис. 17

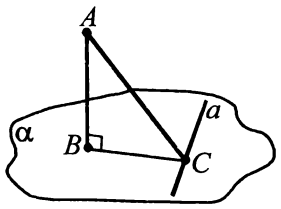


Рис. 18

Відстань між мимобіжними прямими

Відстанню між мимобіжними прямими називають довжину їх спільного перпендикуляра (рис. 19).

Кут між мимобіжними прямими

Кутом між мимобіжними прямими називають кут між прямими, які перетинаються й паралельні до мимобіжних прямих: $\angle(ab) = \angle(a'b)$ (рис. 20).

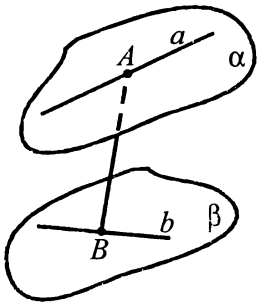


Рис. 19

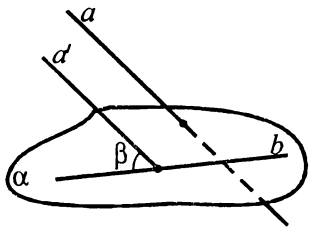


Рис. 20

Кут між прямою та площиною

Кутом між прямою та площиною називають кут між прямою і її проекцією на цю площину (рис. 21).

Якщо пряма перпендикулярна до площини, то кут між нею й площиною вважається таким, що дорівнює 90°, а між паралельними прямою та площиною таким, що дорівнює 0°.

Кут між площинами

Двогранний кут — це фігура, утворена двома півплощинами, які мають спільну пряму, що їх обмежує. Півплощини називаються *гранями кута*, а спільну пряму — *ребром кута*. Мірою двогранного кута є міра відповідного йому лінійного кута.

Лінійний кут двогранного кута — це кут, утворений двома півпрямими, по яких площина, перпендикулярна до ребра двогранного кута, перетинає даний двогранний кут. Міра двогранного кута не залежить від вибору лінійного кута.

Нехай дані площини перетинаються (див. рис. 22). Проведемо площину, перпендикулярну до прямої їх перетину. Ця площина перетинає дані площини по двох прямих. Кут між цими прямими називають *кутом між даними площинами*. Означений таким чином кут між площинами не залежить від вибору січної площини. Коротко: якщо $\alpha \cap \beta = c$, $\gamma \perp c$, $\alpha \cap \gamma = a$, $\beta \cap \gamma = b \Rightarrow \angle(a; b)$ — кут між площинами α і β.

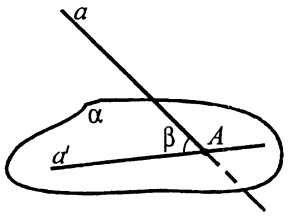


Рис. 21

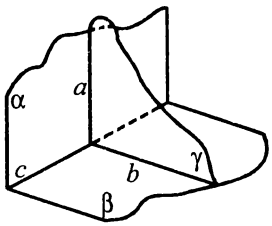


Рис. 22

Якщо кут між площинами α і β дорівнює 90°, то α⊥β.

Ознака перпендикулярності площин

Якщо площина проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні. Коротко: якщо $a \perp \alpha$, $a \subset \beta$, то $\beta \perp \alpha$ (рис. 23).

Якщо пряма, яка лежить в одній із двох перпендикулярних площин, перпендикулярна до лінії їх перетину, то вона перпендикулярна і до другої площини.

Справедливими є такі твердження:

1. Через точку поза площиною можна провести безліч площин, перпендикулярних до цієї площини і всі вони пройдуть через перпендикулярну до цієї площини пряму, яка проходить через дану точку.

2. Якщо площина й пряма, що не належить цій площині, перпендикулярні до однієї й тієї ж площини, то ці площина й пряма паралельні.

3. Через довільну пряму, яка не перпендикулярна до даної площини, можна провести єдину площину, перпендикулярну до даної.

4. Якщо дві площини перпендикулярні, то пряма, яка є перпендикулярною до однієї з цих площин і проходить через їх спільну точку, лежатиме в іншій площині.

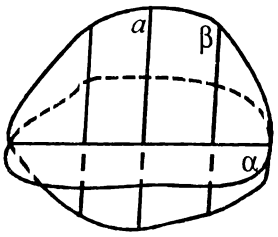
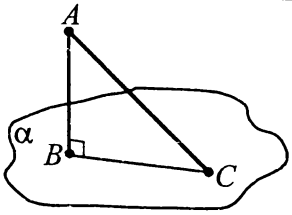


Рис. 23

Приклад 1. З даної точки до площини проведено перпендикуляр і похилу. Довжина перпендикуляра дорівнює довжині проекції похилої. Знайти кут між перпендикуляром і похилою.

А	Б	В	Г	Д
45°	60°	30°	40°	20°

■ Нехай з точки A до площини α проведено перпендикуляр AB ($AB \perp \alpha$) і похилу AC. Тоді BC — проекція похилої AC на площину α. $AB = BC$. $\angle CAB$ — кут між перпендикуляром і похилою. Трикутник ABC прямокутний ($\angle B = 90°$) і рівнобедрений. Отже, $\angle CAB = 45°$.



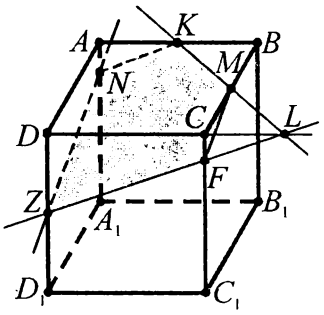
Відповідь. **А.** ■

Приклад 2. Визначити вид перерізу куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через середини ребер AB, BC і DD_1.

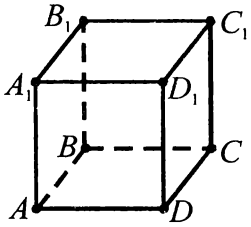
А	Б	В	Г	Д
Трикутник	Трапеція	Паралелограм	П'ятикутник	Прямокутник

■ Будуємо точку $L = KM \cap DC$, точку $F = ZL \cap CC_1$, точку N таку, що $N \in AA_1$, $N = ZN \cap AA_1$, $ZN \parallel FM$. Отже, перерізом є п'ятикутник $NKMFZ$.

Відповідь. **Г.** ■



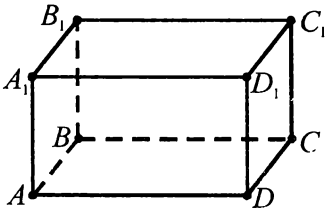
Приклад 3. Дано зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. **а)** Чи перетинаються прямі BB_1 і CC_1, AB і CD? Як називають ці прямі? **б)** Чи перетинаються прямі BC і AA_1, CD і BB_1? Як називають ці прямі?



■ **а)** Прямі BB_1 і CC_1 лежать в одній площині (BCC_1) і не перетинаються. Вони паралельні. Прямі AB і CD лежать у площині (ABC) і не перетинаються. Вони паралельні;

б) прямі BC і AA_1 лежать в різних площинах і не перетинаються. Вони мимобіжні. Прямі CD і BB_1 лежать в різних площинах і не перетинаються. Вони мимобіжні. ■

Приклад 4. Дано зображення прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Визначити взаємне розміщення площини ABC і прямих: **а)** A_1B_1; **б)** BB_1; **в)** DB_1; **г)** CD.



■ Позначимо площину ABC через α.

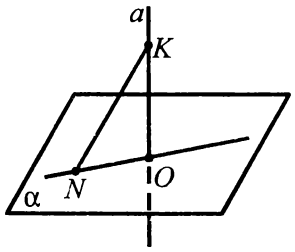
а) Оскільки $A_1B_1 \parallel AB$, $AB \in \alpha$, то $A_1B_1 \parallel \alpha$;

б) оскільки $BB_1 \perp AB$, $BB_1 \perp BC$ і $AB \in \alpha$, $BC \in \alpha$, то $BB_1 \perp \alpha$;

в) оскільки пряма DB_1 і площина α мають спільну точку D, то пряма DB_1 перетинає площину α;

г) пряма CD належить площині α. ■

Приклад 5. Пряма a перпендикулярна до площини α і перетинає її в точці O (див. рис.). Точка K лежить на даній прямій і віддалена від площини α на 32 см, а від точки N цієї площини — на 40 см. Знайти NO.

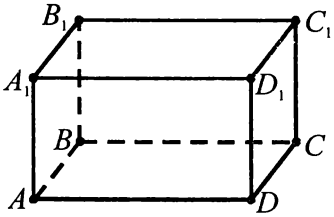


■ Оскільки $a \perp \alpha$, $NO \in \alpha$, то $a \perp NO$ і ΔNKO — прямокутний $(\angle O = 90°)$.

Маємо: $NO = \sqrt{NK^2 - KO^2}$, $NO = \sqrt{40^2 - 32^2} = \sqrt{8 \cdot 72} = 24$ (см).

Відповідь. 24 см. ■

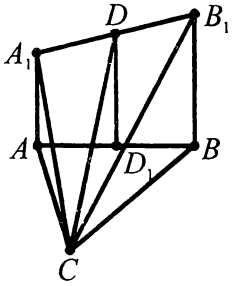
Приклад 6. Дано зображення прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (див. рис.). Користуючись рисунком, визначити: **а)** площини, які перетинають площину ABC; **б)** площини, які паралельні до площини ABC.



■ **а)** Площина ABB_1 перетинає площину ABC по прямій AB;
площина BB_1C_1 перетинає площину ABC по прямій BC;
площина DD_1C_1 перетинає площину ABC по прямій DC;
площина AA_1D_1 перетинає площину ABC по прямій AD;

б) площина $A_1B_1C_1$ паралельна площині ABC. ■

Приклад 7. Дано рівносторонній трикутник ABC, $AB = 2$ см, $AA_1 \perp (ABC)$, $BB_1 \perp (ABC)$, $CA_1 = 3$ см, $CB_1 = 7$ см, $A_1D = DB_1$. Знайти довжину CD.



■ $AA_1 \perp (ABC)$, тому $AA_1 \perp AB$ і $AA_1 \perp AC$. З ΔA_1CA знайдемо довжину AA_1: $AA_1 = \sqrt{CA_1^2 - AC^2}$, $AA_1 = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$ (см).

$BB_1 \perp (ABC)$, тому $BB_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AB$. З ΔCB_1B знайдемо довжину BB_1: $BB_1 = \sqrt{CB_1^2 - BC^2}$, $BB_1 = \sqrt{49-4} = 3\sqrt{5}$ (см).

$AA_1 \perp (ABC)$, $BB_1 \perp (ABC)$, тоді $AA_1 \| BB_1$. Чотирикутник AA_1B_1B — трапеція, точка D — середина відрізка A_1B_1, $D_1D \perp (ABC)$, тобто $DD_1 \| AA_1$ і $DD_1 \| BB_1$, тоді DD_1 — середня лінія трапеції.

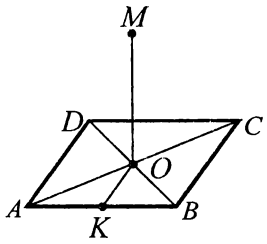
$$DD_1 = \frac{AA_1 + BB_1}{2}. \; DD_1 = \frac{\sqrt{5} + 3\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5} \text{ (см)}.$$

У рівносторонньому трикутнику ABC медіана CD_1 є висотою. $CD_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}AC$, $CD_1 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$ $= \sqrt{3}$ (см).

З ΔCD_1D знайдемо CD: $CD = \sqrt{CD_1^2 + DD_1^2}$, $CD = \sqrt{3+20} = \sqrt{23}$ (см).

Відповідь. $\sqrt{23}$ см. ■

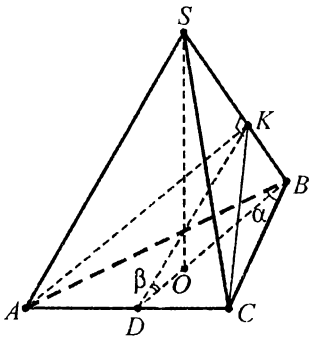
Приклад 8. Через точку O перетину діагоналей квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр MO до його площини, сторона квадрата дорівнює $2a$. Знайти відстань між прямими AB і MO.



■ Прямі AB й MO мимобіжні. Відстанню від точки O до AB є $OK \perp AB$. $MO \perp (ABC)$, тому $MO \perp KO$. Отже, KO — спільний перпендикуляр до мимобіжних прямих MO і AB, KO — шукана відстань. $KO = \frac{1}{2}AO$, $KO = a$.

Відповідь. $KO = a$. ■

Приклад 9. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині. Через основу трикутника проведено переріз перпендикулярно до протилежного бічного ребра, який утворює з площиною основи кут β. Висота піраміди дорівнює H і усі її бічні ребра рівні. Знайти площу перерізу. У відповідь записати значення площі перерізу, якщо $H = 4$, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$.



■ Нехай $SABC$ — задана піраміда, $AB = BC$, $\angle ABC = \alpha$. SO — висота піраміди, $SO = H$. Оскільки похилі SA, SB і SC рівні, то рівними будуть і їх проекції OA, OB і OC. Тому O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC. Нехай площина, проведена через сторону AC перпендикулярно до ребра SB, перетинає це ребро в точці K. $\Delta SBA = \Delta SBC$ за трьома сторонами. Отже, $\Delta KBA = \Delta KBC$ за двома сторонами і кутом між ними. Тому $AK = CK$ і трикутник AKC — рівнобедрений. Проводимо $KD \perp AC$. Оскільки $AK = KC$, то $AD = DC$. Точки D, O і B рівновіддалені від кінців відрізка AC, тому вони лежать на серединному перпендикулярі до цього відрізка. Отже, $O \in BD$, $BD \perp AC$. Кут KDB — лінійний кут двогранного кута між площинами AKC і ABC. За умовою, $\angle KDB = \beta$. Оскільки $SB \perp (AKC)$, то $DK \perp SB$. З ΔDKB ($\angle K = 90°$): $\angle KBD = 90° - \beta$. З ΔSOB ($\angle O = 90°$): $OB = SO\text{ctg}(90° - \beta) = H\text{tg}\beta$. Із трикутника ABC за наслідком з теореми синусів $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R$, крім того, $R = OB = H\text{tg}\beta$. Отже, $AC = 2H\text{tg}\beta\sin\alpha$. Оскільки BD — висота, а отже, медіана та бісектриса трику-

тника ABC, то $DC = H\text{tg}\beta\sin\alpha$, $\angle CBD = \frac{\alpha}{2}$. З ΔBDC ($\angle D = 90°$): $DB = DC\text{ctg}\frac{\alpha}{2} = H\text{tg}\beta\sin\alpha\text{ctg}\frac{\alpha}{2}$. З ΔDKB ($\angle K = 90°$): $DK = DB\cos\beta = H\text{tg}\beta\sin\alpha\text{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos\beta = H\sin\beta\sin\alpha\text{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

$$S_{\Delta AKC} = \frac{1}{2}AC \cdot DK;\ S_{\Delta AKC} = \frac{1}{2} \cdot 2H\,\text{tg}\beta\sin\alpha \cdot H\sin\beta\sin\alpha\,\text{ctg}\frac{\alpha}{2} = H^2\sin^2\alpha\sin\beta\,\text{tg}\beta\,\text{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Якщо $H = 4$, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, то:

$$S_{\Delta AKC} = 4^2\sin^2 60°\sin 30°\,\text{tg}30°\,\text{ctg}\frac{60°}{2} = 16 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 6.$$

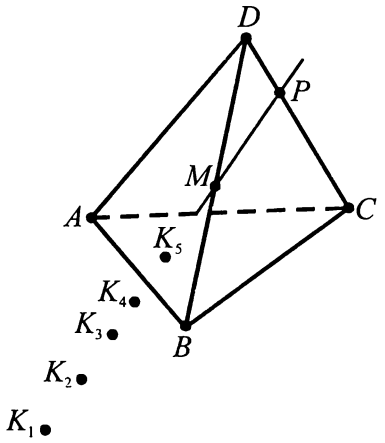
Відповідь. 6. ■

Завдання 35.1–35.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

35.1. Шість точок не лежать в одній площині. Яке найбільше число цих точок може лежати на одній прямій?

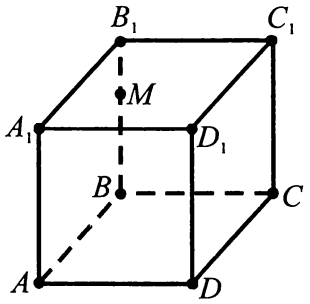
А	Б	В	Г	Д
дві	три	чотири	п'ять	шість

35.2. На рисунку зображено тетраедр $ABCD$. Точка M належить ребру DB, а точка P — ребру DC. Точки K_1, K_2, K_3, K_4 і K_5 належать площині ABC. У якій з цих точок пряма PM перетинає площину ABC?



	Б	В	Г	Д
K_1	K_2	K_3	K_4	K_5

35.3. На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і точку M на ребрі BB_1. Якій із прямих належить точка перетину прямої MC із площиною $A_1B_1C_1$?

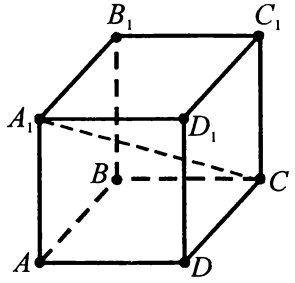


А	Б	В	Г	Д
A_1B_1	B_1C_1	C_1D_1	A_1C_1	B_1D_1

35.4. Яка з наведених фігур не може бути паралельною проекцією прямокутної трапеції?

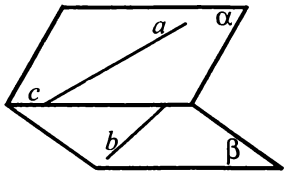
А	Б	В	Г	Д
трапеція з тупим кутом при більшій основі	прямокутна трапеція	рівнобічна трапеція	відрізок	паралелограм

35.5. На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вказати ортогональну проекцію діагоналі A_1C на площину DD_1C_1.



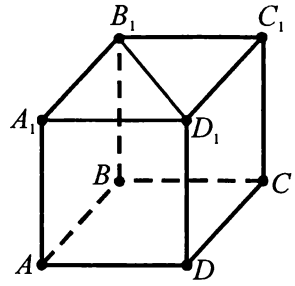
А	Б	В	Г	Д
C_1D	CC_1	C_1D_1	DD_1	CD_1

35.6. На рисунку площини α і β перетинаються по прямій c. Пряма a належить площині α, пряма b — площині β. Яке з наведених тверджень правильне?



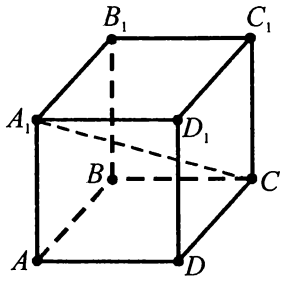
А	Б	В	Г	Д
прямі a і b перетинаються	прямі a і b паралельні	прямі a і b мимобіжні	прямі a і b паралельні або мимобіжні	прямі a і b паралельні або перетинаються

35.7. На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює 1. Знайти відстань між прямими AA_1 і B_1D_1.



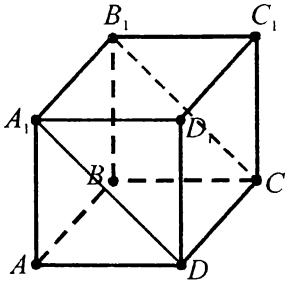
А	Б	В	Г	Д
$1\frac{1}{2}$	1	2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$

35.8. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вказати кут між прямою A_1C і площиною DCC_1.



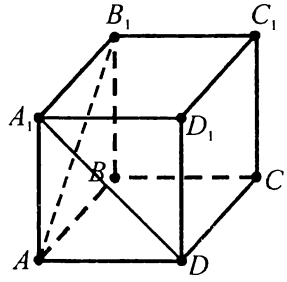
А	Б	В	Г	Д
$\angle A_1CC_1$	$\angle A_1CD$	$\angle A_1CD_1$	$\angle ACB_1$	$\angle A_1CA$

35.9. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якого $ABCD$ — квадрат зі стороною 1, а бічне ребро $AA_1 = \sqrt{3}$. Чому дорівнює кут між площинами AA_1B_1 і A_1B_1C?



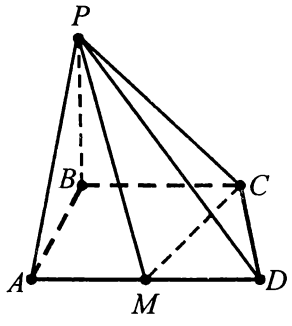
А	Б	В	Г	Д
30°	45°	60°	75°	90°

35.10. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайти кут між прямими AB_1 і A_1D.



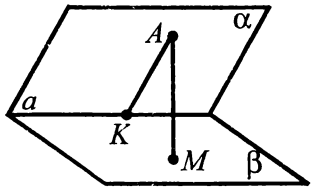
А	Б	В	Г	Д
30°	45°	60°	75°	90°

35.11. На рисунку $ABCD$ — прямокутна трапеція з прямим кутом B, точка M — середина сторони AD. PB — перпендикуляр до площини ABC. Визначити кут між площинами ABC і APD.



А	Б	В	Г	Д
$\angle PMC$	$\angle PMD$	$\angle PDB$	$\angle PAD$	$\angle PAB$

35.12. Площини α і β перетинаються по прямій a під кутом 60°. Точка A належить площині α. Довжина відрізка AM є відстанню від точки A до площини β, а довжина відрізка AK — відстанню від точки A до прямої a. Знайти довжину відрізка AK, якщо $AM = \sqrt{3}$.



А	Б	В	Г	Д
2	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	3

35.13. Точка A віддалена від площини на відстань $6\sqrt{3}$ см. Обчислити довжину проекції похилої, проведеної з цієї точки під кутом 60° до площини.

А	Б	В	Г	Д
18 см	$3\sqrt{3}$ см	3 см	$2\sqrt{3}$ см	6 см

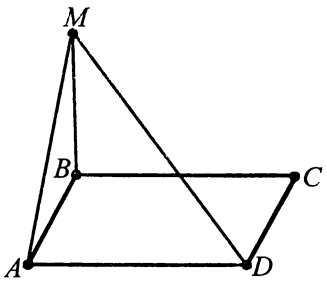
35.14. Сторона рівностороннього трикутника дорівнює a. Точка A розміщена від кожної вершини трикутника на відстані b. Визначити відстань від точки A до площини трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{b^2+\frac{a^3}{3}}$	$\sqrt{b^2-a^2}$	$\sqrt{b^2-\frac{a^2}{12}}$	$\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$	$\sqrt{b^2-\frac{a^2}{9}}$

35.15. Точка M розміщена на відстані m від кожної сторони правильного трикутника і на відстані h від площини трикутника. Визначити сторону трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{m^2+h^2}$	$2\sqrt{m^2-h^2}$	$2\sqrt{3(m^2-h^2)}$	$\sqrt{3(m^2-h^2)}$	$\sqrt{3(m^2+h^2)}$

35.16. На рисунку $ABCD$ — квадрат, MB — перпендикуляр до площини ABC. Похила AM нахилена до площини ABC під кутом 45°. Під яким кутом нахилена до площини ABC похила MD?



А	Б	В	Г	Д
30°	60°	$\operatorname{arctg}\sqrt{2}$	$\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\operatorname{arctg}2$

35.17. З вершини A квадрата $ABCD$ до його площини проведено перпендикуляр AK завдовжки 6 см. Знайти відстань від точки K до вершини C квадрата, якщо його сторона дорівнює $4\sqrt{2}$ см.

А	Б	В	Г	Д
9 см	10,5 см	17 см	14 см	10 см

35.18. Сторони трикутника ABC дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см. З вершини найбільшого кута трикутника до його площини проведено перпендикуляр AD, який дорівнює 15 см. Знайти відстань від точки D до сторони BC трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{241}$ см	17 см	$\sqrt{31}$ см	23 см	$\sqrt{335}$ см

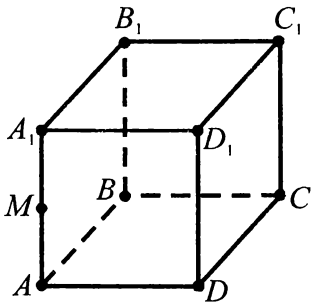
35.19. Знайти кут між площинами, якщо точка, яка лежить на одній з них, віддалена від прямої перетину площин утричі далі, ніж від другої площини.

А	Б	В	Г	Д
$\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\arcsin\frac{1}{3}$	$\operatorname{arcctg}\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\arccos\frac{1}{3}$

35.20. Відрізок завдовжки 10 м перетинає площину, його кінці розміщені на відстані 2 м і 3 м від площини. Знайти кут між даним відрізком і площиною.

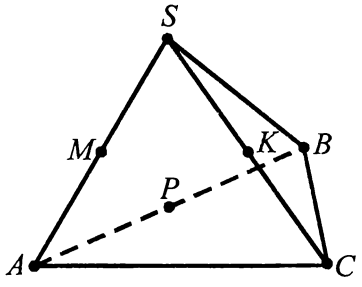
А	Б	В	Г	Д
30°	45°	60°	$\arcsin\frac{2}{3}$	$\arccos\frac{2}{5}$

35.21. На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром $2a$. Точка M — середина ребра AA_1. Встановити вид многокутника, який є перерізом куба площиною MBC, визначити його площу.



А	Б	В	Г	Д
$2a^2\sqrt{3}$	a^2	$2a^2$	$2a^2\sqrt{5}$	$5a^2$

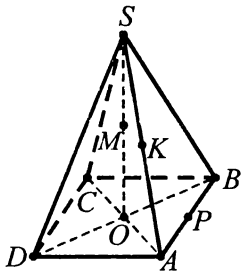
35.22. На рисунку зображено правильний тетраедр $SABC$ з ребром a. Точки M, K і P — відповідно середини ребер AS, SC і AB. Встановити вид многокутника, який є перерізом тетраедра площиною MKP, визначити його периметр.



А	Б	В	Г	Д
$3a$	$\frac{3}{2}a$	a	$2a$	$4a$

Завдання 35.23–35.29 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

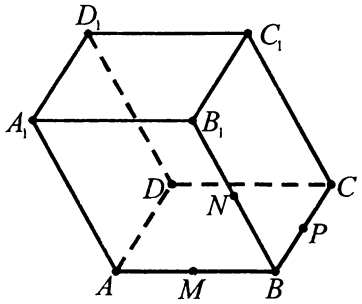
35.23. На рисунку зображено піраміду $SABCD$, де SO — висота піраміди, M — середина висоти, K — середина ребра SA, P — середина ребра AB. Установити відповідність між прямими і площинами (1–4) та їхнім взаємним розміщенням (А–Д).



1 Пряма MK і площина ABC
2 Прямі OP і MK
3 Пряма MP і площина SDC
4 Площини BMK і SDC

А Площини перетинаються
Б Пряма і площина перетинаються
В Пряма паралельна площині
Г Прямі паралельні
Д Прямі мимобіжні

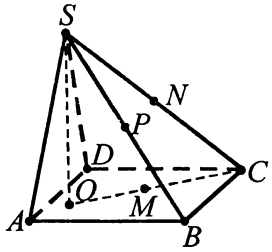
35.24. На рисунку зображено паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M, N і P — середини ребер AB, BB_1 і BC відповідно. Установити відповідність між прямими і площинами (1–4) та їхнім взаємним розміщенням (А–Д).



1 Прямі MN і DD_1
2 Прямі MN і DC_1
3 Площини MNP і AB_1C
4 Прямі NP і CC_1

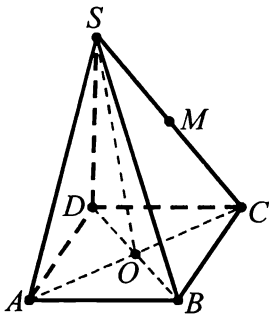
А Площини паралельні
Б Площини перетинаються
В Прямі паралельні
Г Прямі мимобіжні
Д Прямі перетинаються

35.25. На рисунку зображено піраміду $SABCD$, в основі якої паралелограм. SO — висота піраміди. Точки M, N і P — середини відрізків OC, SC і SB відповідно. Установити відповідність між прямими і площинами (1–4) та їх взаємним розміщенням (А–Д).



1 Пряма MN і площина ABC	**А** Не можна встановити
2 Прямі MN і SO	**Б** Перпендикулярні
3 Прямі MN і SD	**В** Перетинаються
4 Пряма OC і площина ASD	**Г** Мимобіжні
	Д Паралельні

35.26. На рисунку зображено правильну чотирикутну піраміду $SABCD$, у якої SO — висота, M — середина ребра SC, діагональні перерізи — рівносторонні трикутники. Установити відповідність між точками, прямими, площинами (1–4) та відстанями між ними (А–Д).

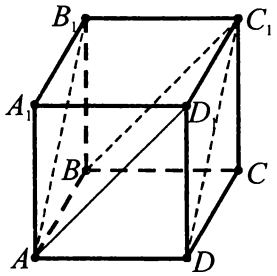


1 Точка D і пряма SB	**А** BD
2 Точка M і площина ABC	**Б** AB
3 Прямі AD і BC	**В** AM
4 Прямі DB і SC	**Г** $\frac{AM}{2}$
	Д $\frac{SO}{2}$

35.27. Установити відповідність між кількостями точок, які не лежать в одній площині (1–4) та найбільшою з них кількістю точок (А–Д), які можуть лежати на одній прямій.

1 6	**А** 6
2 8	**Б** 4
3 12	**В** 16
4 20	**Г** 10
	Д 18

35.28. Установити відповідність між відрізками (1–4), побудованими на гранях і ребрах куба, та величинами кутів між ними (А–Д).



1 AD_1 і BC_1	**А** 60°
2 BA_1 і AD_1	**Б** 0°
3 AB і AD_1	**В** 45°
4 DC_1 і AB	**Г** 90°
	Д 30°

35.29. Установити відповідність між кутами нахилу (1–4) відрізка завдовжки 10 см до площини та довжиною його проекції на площину (А–Д).

1 30°	**А** 5 см
2 45°	**Б** $5\sqrt{3}$ см
3 60°	**В** $5\sqrt{2}$ см
4 0°	**Г** 0 см
	Д 10 см

Розв'яжіть завдання 35.30–35.44. Відповідь запишіть десятковим дробом.

35.30. Через кінець A відрізка AB проведено площину α. Через кінець B і точку C відрізка AB проведено паралельні прямі, які перетинають площину α відповідно в точках M і N. Знайти довжину відрізка CN, якщо $AC : CB = 2 : 3$, $BM = 12$.

35.31. Площина α перетинає сторони кута ABC у точках A_1 і C_1, а паралельна їй площина β — у точках A_2 і C_2. Знайти BC_1, якщо $A_1B : A_1A_2 = 1 : 3$, $BC_2 = 12$.

35.32. З точки A до площини проведено дві похилі $AB = 30$ і $AC = 40$. Знайти відстань від точки A до площини, якщо проекції похилих відносяться як 9 : 16.

35.33. З точки B, яка розміщена від площини на відстані 1, проведено дві похилі, які утворюють із площиною кути 45°, а між собою — кут 60°. Знайти квадрат відстані між кінцями похилих.

35.34. Один з катетів прямокутного трикутника ABC дорівнює 6, а гострий кут, прилеглий до цього катета, дорівнює 30°. Через вершину прямого кута C проведено відрізок CD, перпендикулярний до площини цього трикутника, $CD = 4$. Визначити відстань від точки D до прямої AB.

35.35. З точки A, що розміщена на колі, радіус якого дорівнює 2, побудований перпендикуляр AK завдовжки 1 до площини круга. З точки A проведено діаметр AB, а з точки B під кутом 45° до діаметра — хорду BC. Знайти у сантиметрах відстань від точки K до хорди BC.

35.36. Основи трапеції дорівнюють 18 см і 12 см. Через більшу основу проведено площину на відстані 5 см від меншої основи. Знайти у сантиметрах відстань від точки перетину діагоналей трапеції до цієї площини.

35.37. З точок A і B, які лежать у двох перпендикулярних площинах, опущено перпендикуляри AA_1 і BB_1 на лінію перетину площин. Знайти AB, якщо $AB_1 = 7$, $BA_1 = 5$, $A_1B_1 = \sqrt{10}$.

35.38. Рівнобедрені трикутники ABC і ABD зі спільною основою AB лежать у різних площинах, кут між якими дорівнює α. Знайти у градусах кут α, якщо $AB = 6$, $CD = \sqrt{21}$, $AC = AD = 4$.

35.39. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайти площу перерізу куба площиною, яка проходить через вершини B_1 і C_1 та середину ребра DD_1, якщо ребро куба дорівнює $\sqrt{5\sqrt{5}}$.

35.40. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайти площу перерізу куба площиною, яка проходить через вершини B_1 і D та середину ребра CC_1, якщо ребро куба дорівнює $\sqrt{6\sqrt{6}}$.

35.41. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ Знайти площу перерізу куба з точністю до 0,01 площиною, яка проходить через центр куба і середини ребер AB і AD, якщо ребро куба дорівнює 1.

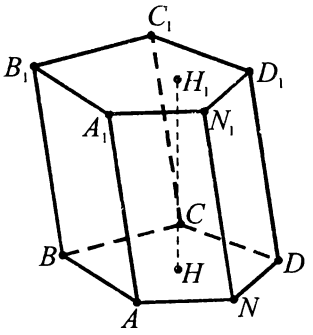
35.42. Через центр основи правильної трикутної піраміди паралельно до двох ребер, які не перетинаються, проведено площину. Визначити площу утвореного перерізу, якщо бічне ребро піраміди дорівнює 9, а ребро основи — 7.

35.43. У правильній чотирикутній піраміді проведено площину через діагональ основи паралельно до бічного ребра. Сторона основи дорівнює $\sqrt{2}$, а бічне ребро — 5. Визначити площу утвореного перерізу.

35.44. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ через середини сторін AB і AD проведено площину, яка паралельна бічному ребру SA. Знайти площу утвореного перерізу, якщо сторона основи дорівнює $\sqrt{2}$, а бічне ребро — 5.

Тема 36. Призма

Многогранник, який складається із двох рівних плоских многокутників, які лежать у паралельних площинах, та бічної поверхні, утвореної паралелограмами, вершини яких є відповідними вершинами многокутників, називають *призмою*.



$ABCDN, A_1B_1C_1D_1N_1$ — основи призми.

AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, NN_1 — бічні ребра; $AA_1 \| BB_1 \| CC_1 \| DD_1 \| NN_1$; $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = NN_1$.

ABB_1A_1, BCC_1B_1, DCC_1D_1, NDD_1N_1, ANN_1A_1 — бічні грані.

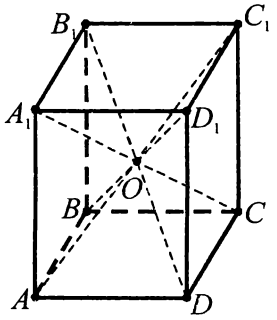
HH_1 — висота призми — відстань між площинами основ.

Відрізок, який сполучає дві вершини, які не належать одній грані, називають *діагоналлю* призми.

Пряма призма — призма, бічні ребра якої перпендикулярні до площин основи, *похила призма* — призма, бічні ребра якої не перпендикулярні до площин основи.

Правильна призма — пряма призма, основи якої — правильні многокутники.

Паралелепіпед — призма, в основі якої паралелограм.



Усі діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці й цією точкою діляться навпіл.

Прямокутний паралелепіпед — паралелепіпед, в основі якої — прямокутник.

У прямокутному паралелепіпеді квадрат будь-якої діагоналі дорівнює сумі квадратів його вимірів: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Площа поверхні й об'єм

Пряма призма.

Бічна поверхня: $S_{б.} = P_{осн.} \cdot H$, де H — висота призми.

Повна поверхня: $S_{п.} = S_{б.} + 2S_{осн.}$

Об'єм: $V = S_{осн.} \cdot H$.

Похила призма.

Бічна поверхня: $S_{б.} = P_{пер.} \cdot AA_1$, де $P_{пер.}$ — периметр перерізу, перпендикулярного до бічного ребра.

Повна поверхня: $S_{п.} = S_{б.} + 2S_{осн.}$

Об'єм: $V = S_{осн.} \cdot H$.

Прямокутний паралелепіпед.

Бічна поверхня: $S_{б.} = P_{осн.} \cdot H = 2(a + b)c$.

Повна поверхня: $S_{п.} = S_{б.} + 2S_{осн.} = 2(ab + bc + ac)$.

Об'єм: $V = S_{осн.} \cdot H = abc$.

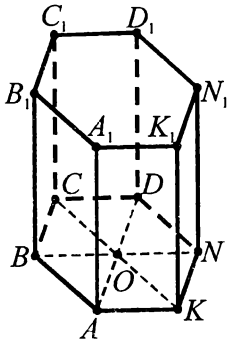
Куб.

Бічна поверхня: $S_{б.} = P_{осн.} \cdot H = 4a^2$.

Повна поверхня: $S_{п.} = S_{б.} + 2S_{осн.} = 6a^2$.

Об'єм: $V = S_{осн.} \cdot H = a^3$.

Приклад 1. Знайти площу бічної поверхні й об'єм правильної шестикутної призми, якщо сторона її основи дорівнює 8 см, а висота — 9 см.



■ $S_{б.} = P_{осн.} \cdot H$, $P_{осн.} = 6a = 6 \cdot 8 = 48$ (см), $H = BB_1 = 9$ см.

$S_б = 48 \cdot 9 = 432$ (см^2). $V = S_{осн.} \cdot H$, $S_{осн.} = 6 \cdot S_{\Delta AOB}$.

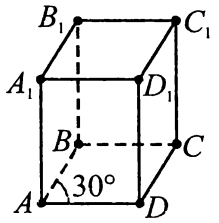
ΔAOB — рівносторонній, $S_{\Delta AOB} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $a = 8$ см.

$S_{\Delta AOB} = \dfrac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$ (см^2). $S_{осн.} = 6 \cdot 16\sqrt{3} = 96\sqrt{3}$ (см^2).

$V = 96\sqrt{3} \cdot 9 = 864\sqrt{3}$ (см^3).

Відповідь. 432 см^2, $864\sqrt{3}$ см^3. ■

Приклад 2. Основою прямої призми є паралелограм зі сторонами 9 см і 14 см і кутом між ними 30°. Висота призми — 15 см. Обчислити площу повної поверхні й об'єм призми.



■ $S_{п.} = S_{б.} + 2S_{осн.}$.

$S_{осн.} = 9 \cdot 14 \cdot \sin 30° = 9 \cdot 14 \cdot \dfrac{1}{2} = 63$ (см^2).

$P_{осн.} = 2 \cdot (AB + AD) = 2 \cdot (9 + 14) = 46$ (см).

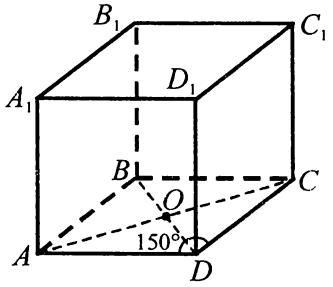
$S_{б.} = 46 \cdot 15 = 690$ (см^2).

$S_{п.} = 2 \cdot 63 + 690 = 126 + 690 = 816$ (см^2).

$V = S_{осн.} \cdot H = 63 \cdot 15 = 945$ (см^3).

Відповідь. 816 см^2, 945 см^3. ■

Приклад 3. Основою прямої призми є ромб з тупим кутом 150°. Площа бічної поверхні призми дорівнює 96 см^2, а площа її повної поверхні — 132 см^2. Знайти висоту призми.



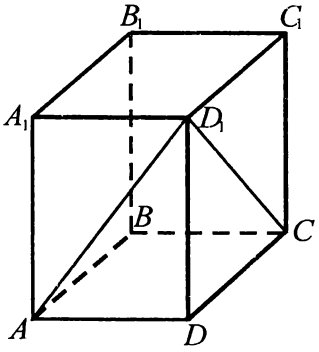
■ Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — пряма призма, $ABCD$ — ромб, $\angle ADC = 150°$, $S_{б.} = 96$ см^2, $S_{п.} = 132$ см^2. $S_{п.} - S_{б.} = 2S_{ABCD} = 132 - 96 = 36$ (см^2), звідки $S_{ABCD} = 18$ (см^2). Отже, $S_{ABCD} = AD^2 \cdot \sin\angle ADC$. Звідки

$$AD = \sqrt{\frac{S_{ABCD}}{\sin\angle ADC}} = \sqrt{\frac{18}{\sin 150°}} = 6 \text{ (см)}.$$

$S_{б.} = 4AD \cdot DD_1$, звідки $DD_1 = \dfrac{S_{б.}}{4AD} = \dfrac{96}{4 \cdot 6} = 4$ (см).

Відповідь. 4 см. ■

Приклад 4. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда відносяться як 1 : 7, довжини діагоналей бічних граней дорівнюють 13 см та 37 см. Визначити площу повної поверхні паралелепіпеда.



■ Оскільки протилежні грані прямокутного паралелепіпеда — рівні прямокутники, то в задачі заданими є довжини діагоналей суміжних бічних граней.

Нехай у прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відрізки D_1A та D_1C — діагоналі суміжних бічних граней; $D_1A = 13$ см, $D_1C = 37$ см. Сторони основи DA і DC є ортогональними проекціями на площину основи діагоналей D_1A та D_1C відповідно. Оскільки довший похилій відповідає довша проекція, то $AD < CD$ і згідно з умовою $AD : CD = 1 : 7$. Нехай $AD = k$ см, $CD = 7k$ см ($k > 0$), $D_1D = H$ см. Тоді з ΔD_1DA ($\angle D = 90°$) і ΔD_1DC ($\angle D = 90°$) за теоремою Піфагора отримаємо: $\begin{cases} 13^2 = H^2 + k^2, \\ 37^2 = H^2 + 49k^2, \end{cases}$

звідки $37^2 - 13^2 = 48k^2$, $k = 5$. Отже, $AD = 5$ см, $CD = 35$ см, $H = \sqrt{13^2 - k^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см). Тоді:

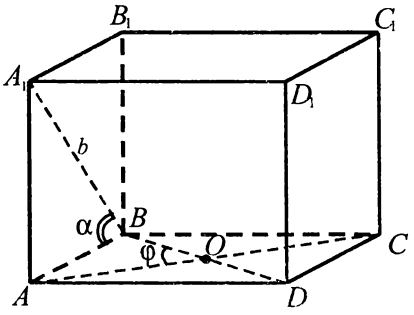
$S_{осн.} = AD \cdot CD = 5 \cdot 35 = 175$ (см^2); $P = 2(AD + CD) = 2(5 + 35) = 80$ (см);

$S_{б.} = P \cdot H = 80 \cdot 12 = 960$ (см^2); $S_{п.} = S_{б.} + 2S_{осн.} = 960 + 2 \cdot 175 = 1310$ (см^2).

Відповідь. 1310 см^2. ■

Приклад 5. В основі прямої призми лежить прямокутник, діагоналі якого утворюють між собою кут φ. Діагональ однієї з бічних граней дорівнює b й утворює з площиною основи кут α. Обчислити об'єм призми.

■ Нехай основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є прямокутник $ABCD$, O — точка перетину діагоналей AC і BD основи, $\angle AOB = \varphi$. Протилежними бічними гранями призми є рівні прямокутники, діагоналі яких рівні. Вважатимемо спочатку, що задана діагональ A_1B грані AA_1B_1B. Оскільки $AA_1 \perp (ABC)$, то проекцією діагоналі A_1B на площину основи є сторона AB. Згідно з умовою задачі, $\angle A_1BA = \alpha$, $A_1B = b$.

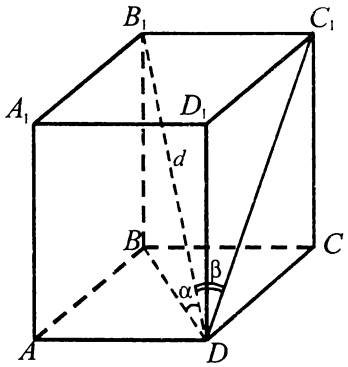


З ΔA_1AB ($\angle A = 90°$): $AB = A_1B\cos\alpha = b\cos\alpha$; $AA_1 = A_1B\sin\alpha = b\sin\alpha$. Діагоналі прямокутника рівні й точкою перетину діляться навпіл. Тому $OA = OB$ і $\angle ABO = \dfrac{180° - \varphi}{2} = 90° - \dfrac{\varphi}{2}$. З ΔBAD ($\angle A = 90°$): $AD = AB\operatorname{tg}\angle ABD = b\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\left(90° - \dfrac{\varphi}{2}\right) = b \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$. Тоді $V = AD \cdot AB \cdot AA_1 = b\cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2} \cdot b\cos\alpha \cdot b \cdot \sin\alpha = \dfrac{b^3}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$. Якщо вважати заданою діагональ A_1D грані AA_1D_1D, то з ΔA_1AD одержимо: $AD = b\cos\alpha$; $AA_1 = b\sin\alpha$. Тоді з ΔBAD: $AB = AD\operatorname{ctg}\left(90° - \dfrac{\varphi}{2}\right) = b \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$ і $V = \dfrac{b^3}{2}\sin 2\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$.

Відповідь. $\dfrac{b^3}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$ або $\dfrac{b^3}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$. ■

Приклад 6. У прямокутному паралелепіпеді діагональ d утворює з площиною основи кут α, а з площиною бічної грані — кут β. Знайти об'єм паралелепіпеда.

■ Нехай у прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ діагональ $B_1D = d$. Оскільки $B_1B \perp (ABC)$, а $B_1C_1 \perp (D_1C_1C)$, то $\angle B_1DB$ і $\angle B_1DC_1$ — це кути, які діагональ B_1D утворює з площиною основи і з площиною бічної грані відповідно. Згідно з умовою, $\angle B_1DB = \alpha$, а $\angle B_1DC_1 = \beta$.



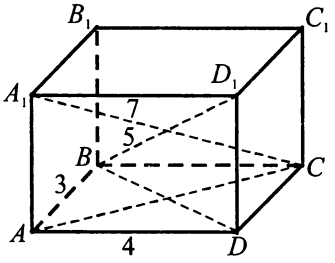
$V = S_{осн.} \cdot H$. З ΔB_1BD ($\angle B = 90°$): $B_1B = H = B_1D \cdot \sin\angle D = d\sin\alpha$; $BD = B_1D \cdot \cos\alpha = d\cos\alpha$. З ΔB_1C_1D ($\angle C_1 = 90°$): $B_1C_1 = BC = B_1D \cdot \sin\angle D = d\sin\beta$. З ΔBCD ($\angle C = 90°$): $BC^2 + CD^2 = BD^2$; $d^2\sin^2\beta + CD^2 = d^2\cos^2\alpha$; $CD = d\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$. Тепер знаходимо:

$S_{осн.} = BC \cdot CD = d\sin\beta \cdot d\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} = d\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$.

$V = d\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} \cdot d \cdot \sin\alpha = d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$.

Відповідь. $d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$. ■

Приклад 7. Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм, сторони якого дорівнюють 3 м і 4 м. Одна з діагоналей цього паралелепіпеда дорівнює 5 м, а інша — 7 м. Знайти об'єм паралелепіпеда.

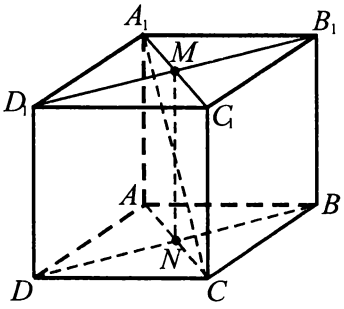


■ Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямий паралелепіпед, $ABCD$ — паралелограм, $AB = 3$ м, $AD = 4$ м, BD_1 і A_1C — діагоналі паралелепіпеда, $B_1D = 5$ м, $A_1C = 7$ м. Позначимо діагоналі основи $BD = d_1$, $AC = d_2$. Нехай $H = AA_1 = x$ м. Тоді з ΔD_1DB $(\angle D = 90°)$: $BD^2 = BD_1^2 - DD_1^2$, тобто $d_1^2 = 25 - x^2$. З ΔA_1AC $(\angle A = 90°)$: $AC^2 = AC_1^2 - AA_1^2$, тобто $d_2^2 = 49 - x^2$. За властивістю діагоналей паралелограма, $BD^2 + AC^2 = 2(AB^2 + AD^2)$, тобто $(25 - x^2) + (49 - x^2) = 2(9 + 16)$. Звідки $74 - 2x^2 = 50$; $2x^2 = 74 - 50$; $x^2 = 12$; $x = 2\sqrt{3}$ (м). Таким чином, $d_1^2 = BD = 25 - x^2 = 25 - 12 = 13$ (м), $d_1 = \sqrt{13}$ (м). З ΔABD за теоремою косинусів одержимо: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos\angle A$. Звідки $\cos\angle A = \dfrac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} = \dfrac{3^2 + 4^2 - 13}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \dfrac{1}{2}$.

Тому $\angle A = 60°$. $S_{осн.} = AB \cdot AD\sin\angle A = 3 \cdot 4 \cdot \sin 60° = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ (м). Отже, $V = S_{осн.} \cdot H =$ $= 6\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 36$ (м^3).

Відповідь. 36 м^3. ■

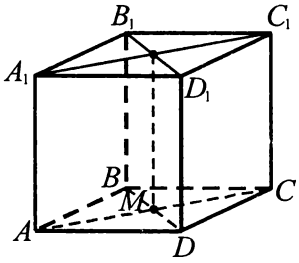
Приклад 8. Ребро куба дорівнює a. Знайти відстань від діагоналі куба до ребра, яке її не перетинає.



■ Нехай маємо куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a. Розглянемо діагональ A_1C і ребро D_1D, яке її не перетинає. Потрібно знайти відстань l між мимобіжними прямими A_1C і D_1D. Ця відстань дорівнює відстані між паралельними площинами, що проходять через дані прямі, зокрема, відстані від деякої точки прямої D_1D до площини, що проходить через A_1C паралельно до DD_1. Оскільки $D_1D \| C_1C$, то площина A_1C_1C паралельна прямій D_1D і містить пряму A_1C. Тому l дорівнює відстані, наприклад, від точки D_1 до площини A_1C_1C. Нехай M — точка перетину діагоналей A_1C_1 і B_1D_1 грані $A_1B_1C_1D_1$. Оскільки $(D_1A_1C_1) \perp (A_1C_1C)$ і $D_1M \perp A_1C_1$, то $D_1M \perp (A_1C_1C)$. Отже, D_1M — перпендикуляр до площини A_1C_1C, а тому $l = D_1M = \dfrac{1}{2}D_1B_1 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Відповідь. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. ■

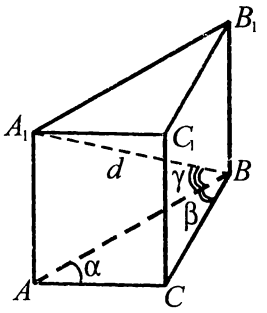
Приклад 9. Основою прямого паралелепіпеда є ромб. Площі діагональних перерізів паралелепіпеда дорівнюють S і Q. Знайти площу бічної поверхні паралелепіпеда.



■ Нехай в основі прямого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежить ромб, ACC_1A_1 і BDD_1B_1 — діагональні перерізи цього паралелепіпеда, $S_{ACC_1A_1} = S$, $S_{BDD_1B_1} = Q$. Позначимо через H бічне ребро паралелепіпеда. Тоді $AC \cdot H = S$, $BD \cdot H = Q$, звідки $AC = \dfrac{S}{H}$, $BD = \dfrac{Q}{H}$. Діагоналі AC і BD ромба $ABCD$ взаємно перпендикулярні й точкою перетину M діляться навпіл. Тому з ΔMCD $(\angle M = 90°$, $MC = \dfrac{S}{2H}$, $MD = \dfrac{Q}{2H})$: $CD = \sqrt{MC^2 + MD^2} = \sqrt{\dfrac{S^2}{4H^2} + \dfrac{Q^2}{4H^2}} = \dfrac{\sqrt{S^2 + Q^2}}{2H}$. $S_б = P \cdot H =$ $= 4CD \cdot H = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{S^2 + Q^2}}{2H} \cdot H = 2\sqrt{S^2 + Q^2}$.

Відповідь. $2\sqrt{S^2 + Q^2}$. ■

Приклад 10. В основі прямої призми лежить трикутник з кутами α і β. Діагональ бічної грані, що містить сторону, для якої дані кути є прилеглими, дорівнює d й утворює з площиною основи кут γ. Знайти об'єм призми.



■ Нехай в основі прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ лежить трикутник ABC, у якому $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Тоді заданою є діагональ грані AA_1B_1B: $A_1B = d$. Оскільки ребро AA_1 перпендикулярне до площини ABC, то проекцією діагоналі A_1B на цю площину є сторона AB трикутника ABC. Тому за умовою задачі $\angle A_1BA = \gamma$.

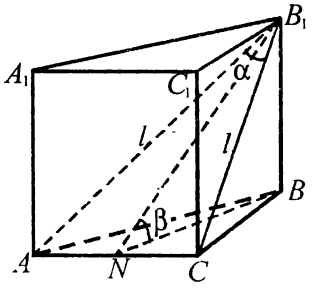
Об'єм призми $V = S_{\text{осн.}} \cdot H$. З ΔA_1BA $(\angle A = 90°)$: $H = AA_1 = d\sin\gamma$; $AB = d\cos\gamma$. За теоремою синусів для трикутника ABC маємо: $\dfrac{AB}{\sin\angle C} = \dfrac{AC}{\sin\angle B}$,

$AC = \dfrac{AB\sin\angle B}{\sin\angle C} = \dfrac{d\cos\gamma\sin\beta}{\sin(180° - \alpha - \beta)} = \dfrac{d\cos\gamma\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. Тоді: $S_{\text{осн/}} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC\sin\alpha =$

$= \dfrac{1}{2}d\cos\gamma\dfrac{d\cos\gamma\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\sin\alpha = \dfrac{d^2\cos^2\gamma\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. $V = \dfrac{d^2\cos^2\gamma\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}d\sin\gamma = \dfrac{d^3\cos^2\gamma\sin\gamma\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$.

Відповідь. $\dfrac{d^3\cos^2\gamma\sin\gamma\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. ■

Приклад 11. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник. Дві діагоналі суміжних бічних граней, що мають спільну вершину, дорівнюють l і утворюють між собою кут α. Площина, що проходить через ці діагоналі, нахилена до площини основи під кутом β. Знайдіть об'єм призми.



■ Нехай в основі прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ лежить рівнобедрений трикутник ABC $(AB = BC)$. Бічними гранями прямої призми є прямокутники. Оскільки $AB = BC$, то прямокутники AA_1B_1B і CC_1B_1B рівні, а тому мають рівні діагоналі. Проведемо діагоналі AB_1 і CB_1. За умовою, $AB_1 = CB_1 = l$ і $\angle AB_1C = \alpha$. З точки B_1 проведемо перпендикуляр B_1N до сторони AC. Тоді за теоремою про три перпендикуляри $BN \perp AC$. Тому $\angle B_1NB$ є лінійним кутом двогранного кута, утвореного площинами AB_1C та ABC, і, згідно з умовою задачі, $\angle B_1NB = \beta$.

Об'єм призми знайдемо за формулою: $V = S_{\text{осн.}} \cdot H$. Висота B_1N рівнобедреного трикутника AB_1C є його бісектрисою і медіаною. Тому $\angle AB_1N = \dfrac{\alpha}{2}$ і $AN = NC$. З ΔAB_1N $(\angle N = 90°)$: $B_1N =$

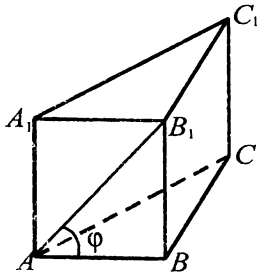
$= AB_1 \cdot \cos\angle AB_1N = l\cos\dfrac{\alpha}{2}$; $AN = l\sin\dfrac{\alpha}{2}$. З ΔNB_1B $(\angle B = 90°)$: $H = B_1B = B_1N \cdot \sin\beta = l\cos\dfrac{\alpha}{2} \cdot \sin\beta$;

$BN = l\cos\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos\beta$. Тоді: $S_{\text{осн.}} = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BN = AN \cdot BN = l\sin\dfrac{\alpha}{2} \cdot l\cos\dfrac{\alpha}{2} \cdot \cos\beta = \dfrac{1}{2}l^2\sin\alpha\cos\beta$;

$V = \dfrac{1}{2}l^2\sin\alpha\cos\beta \cdot l\cos\dfrac{\alpha}{2} \cdot \sin\beta = \dfrac{1}{4}l^3 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2} \cdot \sin2\beta$.

Відповідь. $\dfrac{1}{4}l^3 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2} \cdot \sin2\beta$. ■

Приклад 12. У правильній трикутній призмі сума ребер, що виходять з однієї вершини, дорівнює 2 см. При якій величині кута, утвореного діагоналлю бічної грані з площиною основи призми, площа бічної поверхні буде найбільшою?



■ Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — правильна трикутна призма, у якої $AB = AC = BC = a$ см, $AA_1 = b$ см. За умовою $2a + b = 2$. Ребро основи AB є проекцією на площину основи ABC діагоналі AB_1 бічної грані ABB_1A_1. Отже, $\angle B_1AB$ — кут, утворений цією діагоналлю з площиною основи. Нехай $\angle B_1AB = \varphi$ $(0° < \varphi < 90°)$. Виразимо площу бічної поверхні через φ. З ΔABB_1 $(\angle B = 90°)$:

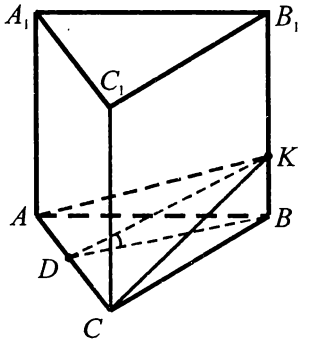
$BB_1 = b = AB\text{tg}\angle A = a\text{tg}\varphi$. Отже, $2a + a\cdot\text{tg}\varphi = 2$, звідки $a = \dfrac{2}{2+\text{tg}\,\varphi}$. $S_б = 3ab = 3a^2\text{tg}\varphi = \dfrac{12\,\text{tg}\,\varphi}{(2+\text{tg}\,\varphi)^2}$.

Проведемо заміну змінної, поклавши $\text{tg}\varphi = x$. Оскільки $\varphi = \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, то $x \in (0; +\infty)$. Отже, задача звелася до знаходження значення змінної x, за якого функція $S(x) = \dfrac{12x}{(2+x)^2}$ набуває найбільшого значення на проміжку $(0; +\infty)$. Знаходимо критичні точки функції: $S'(x) = \dfrac{12(2+x)^2 - 12x\cdot 2(2+x)}{(2+x)^4} = \dfrac{12(2-x)}{(2+x)^3}$;

$S'(x) = 0$, якщо $x = 2$. Якщо $0 < x < 2$, то $S'(x) > 0$, а якщо $x > 2$, то $S'(x) < 0$. Тому точка $x_0 = 2$ — точка максимуму функції $S(x)$. Отже, бічна поверхня призми буде найбільшою, якщо $\text{tg}\varphi = x_0 = 2$, звідки $\varphi = \text{arctg}2$.

Відповідь. $\varphi = \text{arctg}2$. ■

Приклад 13. Сторона основи правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює $8\sqrt{3}$ см. На ребрі BB_1 позначено точку K так, що $BK : KB_1 = 3 : 5$. Знайти тангенс кута між площинами ABC і AKC, якщо відстань між прямими BC й A_1C_1 дорівнює 16 см.



■ Прямі BC і A_1C_1 — мимобіжні, CC_1 — їх спільний перпендикуляр, бо правильна призма є прямою і її бічне ребро перпендикулярне до площин основ, а отже, і до сторін основ BC і A_1C_1. Отже, $CC_1 = 16$ см. Тоді $BB_1 = CC_1 = 16$ см.

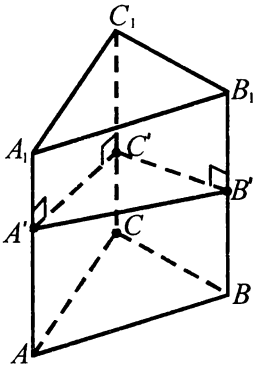
Нехай $BK = 3x$ см, тоді $KB_1 = 5x$ см. Звідки $3x + 5x = 16$; $x = 2$. $BK = 3x = 6$ (см). Позначимо точку D — середину сторони AC. Очевидно, що $BD \perp AC$, а значить, $KD \perp AC$ за теоремою про три перпендикуляри. Оскільки $KD \perp AC$ і $BD \perp AC$, то кут KDB — лінійний кут двогранного кута утвореного площинами ABC і AKC.

З рівностороннього трикутника ABC: $BD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}BC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 8\sqrt{3} = 12$ (см).

Із прямокутного трикутника KBD: $\text{tg}\angle KDB = \dfrac{KB}{BD} = \dfrac{6}{12} = 0{,}5$. Отже, тангенс кута між площинами ABC й AKC дорівнює 0,5.

Відповідь. 0,5. ■

Приклад 14. Бічне ребро похилої трикутної призми дорівнює 6 см, дві бічні грані її взаємно перпендикулярні та їх площі дорівнюють 24 см^2 і 30 см^2. Знайти об'єм призми.

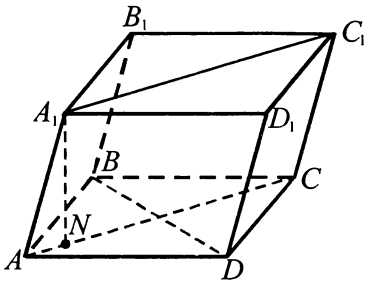


■ Нехай маємо похилу трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$ з бічним ребром $A_1A = 6$ см, площини бічних граней ACC_1A_1 та BCC_1B_1 якої взаємно перпендикулярні, $S_{ACC_1A_1} = 24$ см^2, $S_{BCC_1B_1} = 30$ см^2. Проведемо перпендикулярний переріз $A'B'C'$. Тоді: $A_1A \cdot A'C' = S_{ACC_1A_1}$, $6A'C' = 24$, $A'C' = 4$ (см); $B_1B \cdot B'C' = S_{BCC_1B_1}$, $6B'C' = 30$, $B'C' = 5$ см. Оскільки $(A'B'C') \perp C_1C$ і площини A_1C_1C та B_1C_1C взаємноперпендикулярні, то $\angle A'C'B' = 90°$. Отже, $S_{\Delta A'B'C'} = \dfrac{1}{2}A'C' \cdot B'C' =$

$= \dfrac{1}{2}\cdot 4 \cdot 5 = 10$ (см^2) і шуканий об'єм $V = S_{\Delta A'B'C'} \cdot A_1A = 10 \cdot 6 = 60$ (см)^3.

Відповідь. 60 см^3. ■

Приклад 15. Основою похилого паралелепіпеда є паралелограм $ABCD$, у якого $AB = 3$ дм, $AD = 7$ дм і $BD = 6$ дм. Діагональний переріз AA_1C_1C перпендикулярний до площини основи і його площа дорівнює 1 м^2. Обчислити об'єм паралелепіпеда.



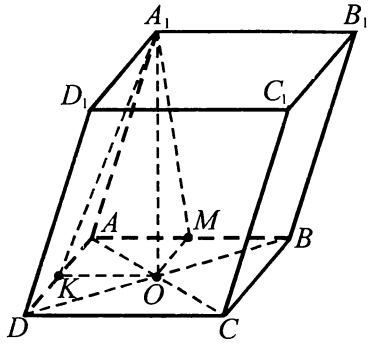
■ Нехай маємо похилий паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якому площина діагонального перерізу ACC_1A_1 перпендикулярна до площини основи. Крім того, за умовою, $AB = 3$ дм, $AD = 7$ дм, $BD = 6$ дм, $S_{ACC_1A_1} = 1$ м^2 $= 100$ дм^2. За властивістю сторін і діагоналей паралелограма $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$, звідки: $AC^2 = 2(9 + 49) - 36 = 80$; $AC = 4\sqrt{5}$ (дм).

Проведемо висоту $A_1N = H$ паралелепіпеда ($N \in AC$) і визначимо її з паралелограма ACC_1A_1: $H = \dfrac{S_{ACC_1A_1}}{AC} = \dfrac{100}{4\sqrt{5}} = 5\sqrt{5}$ (дм). $S_{\text{осн.}} = 2S_{\Delta ABD}$.

Площу трикутника ABD знайдемо за формулою Герона: $p = \dfrac{1}{2}(3 + 7 + 6) = 8$ (дм); $S_{\Delta ABD} = \sqrt{8 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2} = 4\sqrt{5}$ (дм^2). Тому $S_{\text{осн.}} = 8\sqrt{5}$ дм^2. $V = S_{\text{осн.}} \cdot H = 8\sqrt{5} \cdot 5\sqrt{5} = 200$ (дм^3) $= 0{,}2$ (м^3).

Відповідь. 0,2 м^3. ■

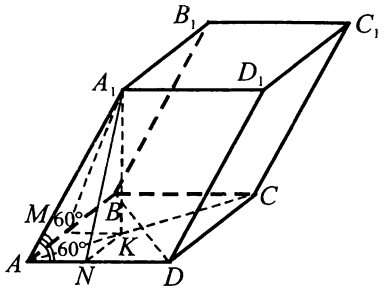
Притклад 16. Основа похилого паралелепіпеда — квадрат зі стороною a. Одна з вершин другої основи проектується в центр цього квадрата. Висота паралелепіпеда дорівнює H. Знайдіть бічну поверхню паралелепіпеда.



■ Нехай основою похилого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадрат $ABCD$ зі стороною $AB = a$, O — центр цього квадрата, $A_1O = H$ — висота паралелепіпеда. Проведемо $OK \perp AD$, $OM \perp AB$. Тоді за теоремою про три перпендикуляри $A_1K \perp AD$, $A_1M \perp AB$, тобто A_1K і A_1M — висоти бічних граней ADD_1A_1 та ABB_1A_1 відповідно. Прямокутні трикутники A_1OK та A_1OM рівні (A_1O — спільний катет і $OK = OM = \dfrac{a}{2}$), звідки $A_1K = A_1M$. Оскільки, крім того, $AD = AB$, то $S_{ABB_1A_1} = S_{ADD_1A_1}$. Тому $S_{\text{б.}} = 4S_{ABB_1A_1}$. З ΔA_1OM ($\angle O = 90°$): $A_1M = \sqrt{A_1O^2 + OM^2} = \sqrt{H^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$.

Отже, $S_{ABB_1A_1} = a \cdot \sqrt{H^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$ і $S_{\text{б.}} = 4S_{ABB_1A_1} = 2a\sqrt{4H^2 + a^2}$. Відповідь. $2a\sqrt{4H^2 + a^2}$. ■

Приклад 17. В основі похилого паралелепіпеда лежить прямокутник. Бічне ребро утворює із суміжними сторонами основи кути, кожний з яких дорівнює по 60°. Знайти кут, який утворює це бічне ребро з площиною основи паралелепіпеда.



■ Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — заданий похилий паралелепіпед, $ABCD$ — прямокутник, $\angle A_1AD = \angle A_1AB = 60°$. A_1K — висота паралелепіпеда. Проведемо $KN \perp AD$ і $KM \perp AB$. У ΔA_1NA ($\angle N = 90°$): $\angle AA_1N = 90° - 60° = 30°$. Отже, $AN = \dfrac{1}{2}AA_1$. Аналогічно у ΔA_1MA $\angle AA_1M = 30°$, тому $AM = \dfrac{1}{2}AA_1$. Оскільки $AN = AM = \dfrac{1}{2}AA_1$, то $AMKN$ — квадрат і прямокутний трикутник ANK — рівнобедрений.

Звідси $AK = \sqrt{2}AN = \dfrac{\sqrt{2}}{2}AA_1$. З ΔA_1KA ($\angle K = 90°$): $\cos\angle A_1AK = \dfrac{AK}{AA_1} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}AA_1}{AA_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Отже, $\angle A_1AK = 45°$.

Відповідь. 45°. ■

Завдання 36.1–36.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

36.1. Сторона куба дорівнює 10 см. Знайти площу поверхні куба.

А	Б	В	Г	Д
80 см^2	800 см^2	400 см^2	360 см^2	600 см^2

36.2. Діагональ грані куба дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Знайти об'єм куба.

А	Б	В	Г	Д
4 см^3	16 см^3	$12\sqrt{3}$ см^3	64 см^3	48 см^3

36.3. Обчислити довжину ребра куба, діагональ якого дорівнює $2\sqrt{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{6}$	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{2}$	2

36.4. Знайти діагональ прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см.

А	Б	В	Г	Д
5,5 см	49 см	36 см	11 см	7 см

36.5. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 5 см і 12 см, а діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом 45°. Знайти бічне ребро паралелепіпеда.

А	Б	В	Г	Д
6,5 см	13 см	12 см	8,5 см	9,5 см

36.6. Основою прямої призми є прямокутний трикутник з гіпотенузою 10 см і катетом 6 см. Знайти площу бічної поверхні призми, якщо її бічне ребро дорівнює 5 см.

А	Б	В	Г	Д
120 см^2	90 см^2	60 см^2	180 см^2	240 см^2

36.7. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 4 см, а бічне ребро дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Знайти об'єм призми.

А	Б	В	Г	Д
$96\sqrt{3}$ см^3	96 см^3	$24\sqrt{3}$ см^3	24 см^3	$12\sqrt{3}$ см^3

36.8. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 12 см, а діагональ бічної грані дорівнює 13 см. Знайти бічну поверхню призми.

А	Б	В	Г	Д
60 см^2	195 см^2	360 см^2	180 см^2	468 см^2

36.9. Знайти площу повної поверхні правильної чотирикутної призми, сторона основи якої дорівнює a, а висота — H.

А	Б	В	Г	Д
$4aH$	$3aH$	$4a(a + H)$	$a(a + 4H)$	$2a(a + 2H)$

36.10. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з основами 4 см і 10 см і бічною стороною 5 см. Бічне ребро призми дорівнює 10 см. Обчислити повну поверхню призми.

А	Б	В	Г	Д
170 см^2	176 см^2	186 см^2	190 см^2	296 см^2

36.11. Основою похилої призми є паралелограм зі сторонами 6 см і 3 см і гострим кутом 45°. Бічне ребро призми дорівнює 4 см і нахилене до площини основи під кутом 30°. Знайти об'єм призми.

А	Б	В	Г	Д
$18\sqrt{6}$ см^3	$12\sqrt{6}$ см^3	$18\sqrt{2}$ см^3	$9\sqrt{2}$ см^3	$36\sqrt{2}$ см^3

36.12. Бічне ребро похилої чотирикутної призми дорівнює 12 см, а перпендикулярним перерізом є ромб зі стороною 5 см. Знайти площу бічної поверхні призми.

А	Б	В	Г	Д
60 см^2	80 см^2	180 см^2	240 см^2	300 см^2

36.13. Куб з ребром 1 м поділили на кубики з ребром 1 см й усі ці кубики поставили в стовпець. Чому дорівнює висота стовпця?

А	Б	В	Г	Д
1 км	10 км	100 км	1000 км	10000 км

36.14. Площа діагонального перерізу куба дорівнює $4\sqrt{2}$ см^2. Знайти площу поверхні куба.

А	Б	В	Г	Д
$36\sqrt{2}$ см^2	16 см^2	24 см^2	192 см^2	32 см^2

36.15. Основою прямого паралелепіпеда є ромб. Площі його діагональних перерізів дорівнюють S_1 і S_2. Визначити висоту паралелепіпеда, якщо його об'єм дорівнює V.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2S_1S_2}{V}$	$\frac{S_1S_2}{V}$	$\frac{S_1S_2}{2V}$	$\frac{V}{S_1S_2}$	$\frac{V}{2S_1S_2}$

36.16. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 13 см, а діагональ бічної грані дорівнює 12 см. Знайти площу основи призми.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{313}$ см^2	25 см^2	50 см^2	144 см^2	169 см^2

36.17. У правильній чотирикутній призмі площа діагонального перерізу дорівнює S. Визначити площу бічної поверхні.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{S}$	$\sqrt{2}S$	$2\sqrt{2}S$	$2S$	$2\sqrt{2S}$

36.18. Діагональним перерізом правильної чотирикутної призми є квадрат, площа якого дорівнює S. Визначити об'єм призми.

А	Б	В	Г	Д
$S\sqrt{2S}$	$\frac{S\sqrt{S}}{\sqrt{2}}$	$2S\sqrt{S}$	$S\sqrt{S}$	$\frac{S\sqrt{S}}{2}$

36.19. Основою прямого паралелепіпеда є ромб, площа якого дорівнює S, а площі діагональних перерізів паралелепіпеда — S_1 і S_2. Визначити висоту паралелепіпеда.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{\frac{S_1S_2}{2S}}$	$\sqrt{\frac{2S_1S_2}{S}}$	$\sqrt{\frac{S_1S_2}{S}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S_1S_2}{S}}$	$\sqrt{\frac{S}{2S_1S_2}}$

36.20. Бічна поверхня правильної чотирикутної призми дорівнює Q, а її об'єм — V. Визначити сторону основи призми.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2V}{Q}$	$\frac{V}{2Q}$	$\frac{V}{4Q}$	$\frac{V}{Q}$	$\frac{4V}{Q}$

36.21. Розгорткою бічної поверхні правильної чотирикутної призми є квадрат зі стороною 8 дм. Знайти об'єм призми.

А	Б	В	Г	Д
16 дм^3	24 дм^3	32 дм^3	48 дм^3	64 дм^3

36.22. Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють S_1, S_2 і S_3. Визначити об'єм паралелепіпеда.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{S_1S_2S_3}$	$2\sqrt{S_1S_2S_3}$	$\frac{\sqrt{S_1S_2S_3}}{2}$	$8\sqrt{S_1S_2S_3}$	$\frac{\sqrt{S_1S_2S_3}}{8}$

Завдання 36.23–36.24 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

36.23. Установити відповідність між сторонами основи та діагоналями (1–4) бічних граней правильних трикутних призм та площами їх бічних поверхонь (А–Д).

1 3 см, 5 см
2 6 см, 10 см
3 5 см, 13 см
4 7 см, 25 см

А 180 см^2
Б 504 см^2
В 36 см^2
Г 144 см^2
Д 164 см^2

36.24. Установити відповідність між площами діагональних перерізів (1–4), які є квадратами у правильних чотирикутних призм, та об'ємами цих призм (А–Д).

1 64 см^2
2 16 см^2
3 36 см^2
4 4 см^2

А 32 см^3
Б 234 см^3
В 108 см^3
Г 256 см^3
Д 4 см^3

Розв'яжіть завдання 36.25–36.37. Відповідь запишіть десятковим дробом.

36.25. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 12, а висота призми — 6. Знайти площу перерізу цієї призми площиною, яка проходить через сторону нижньої основи і протилежну вершину.

36.26. Діагональ правильної чотирикутної призми утворює з площиною основи кут 45°. Знайти у градусах кут, утворений цією діагоналлю з площиною бічної грані.

36.27. Основою паралелепіпеда є ромб. Діагоналі паралелепіпеда дорівнюють 8 см і 5 см, а висота — 2 см. Знайти у сантиметрах сторону основи.

36.28. Діагоналі граней прямокутного паралелепіпеда мають довжини 2, 2 і $2\sqrt{6}$. Визначити діагональ паралелепіпеда.

36.29. Визначити об'єм прямокутного паралелепіпеда, основою якого є прямокутник зі сторонами 3 і 4, а площа діагонального перерізу 20.

36.30. У прямому паралелепіпеді сторони основи 2 і 8, а кут між ними 30°. Бічна поверхня паралелепіпеда дорівнює 20. Визначити об'єм паралелепіпеда.

36.31. Периметри двох граней правильної трикутної призми дорівнюють 48 см і 30 см. Знайти об'єм V призми у кубічних сантиметрах. У відповідь записати $\frac{V}{\sqrt{3}}$.

36.32. Знайти у кубічних сантиметрах об'єм похилої трикутної призми, якщо відстані між її бічними ребрами дорівнюють 3,7 см, 1,3 см і 3 см, а площа бічної поверхні — 480 см^2.

36.33. Основою похилого паралелепіпеда є ромб зі стороною 4 см і гострим кутом 60°. Бічне ребро паралелепіпеда дорівнює 4 см й утворює з ребрами основи, які виходять з цієї ж вершини, кути 45°. Знайти об'єм паралелепіпеда у кубічних сантиметрах.

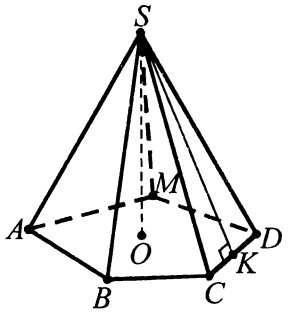
36.34. Висота правильної чотирикутної призми дорівнює 5, а кут між діагоналями, проведеними з однієї вершини основи у двох суміжних бічних гранях, — 60°. Визначити площу бічної поверхні призми.

36.35. Основою призми є правильний трикутник зі стороною 4. Одна з бічних граней перпендикулярна до основи і є ромбом, діагональ якого дорівнює 6. Знайти об'єм V призми. У відповідь записати $\sqrt{21}V$.

36.36. Основою похилого паралелепіпеда є прямокутник зі сторонами 4 і 6. Бічне ребро дорівнює 2 й утворює із суміжними сторонами основи кути в 60°. Знайти об'єм V паралелепіпеда. У відповідь записати $\sqrt{2}V$.

36.37. Для зберігання 1,8 м^3 води на присадибній ділянці виготовили резервуар у формі прямокутного паралелепіпеда з квадратним дном, сторона якого дорівнює 1,2 м. Обчислити висоту резервуару.

Тема 37. Піраміда



n-кутною *пірамідою* називають многогранник, одна з граней якого — довільний n-кутник, а решта граней — трикутники (бічні грані), що мають спільну вершину.

Спільну вершину бічних граней називають *вершиною* піраміди, а n-кутник — *основою* піраміди. Відрізки, які сполучають вершину піраміди з вершинами основи, називають *бічними ребрами.*

На рисунку $ABCDM$ — основа піраміди, S — вершина, SA, SB, SC, SD, SM — бічні ребра, SO — висота, $SO \perp (ABC)$

Властивості

1. Якщо всі бічні ребра нахилені до площини основи під однаковим кутом, то вони рівні й вершина піраміди проектується в центр кола, описаного навколо основи піраміди.

2. Якщо всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під одинаком кутом α, то вершина піраміди проектується в центр кола, вписаного в основу піраміди, а площа основи піраміди дорівнює добутку площі бічної поверхні та косинуса кута α: $S_{осн.} = S_{б.} \cdot \cos\alpha$.

Правильна піраміда

Піраміду називають *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник, а основа висоти збігається з центром цього многокутника. У правильній піраміді висота SK бічної грані, проведена з її вершини, — апофема.

Площа поверхні й об'єм

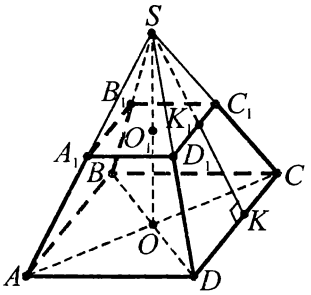
Площа бічної поверхні правильної піраміди: $S_{б.} = \frac{1}{2} P_{осн.} \cdot l$, де l — апофема. Площа повної поверхні: $S_{п.} = S_{б.} + S_{осн.}$

Об'єм піраміди: $V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H$.

Зрізана піраміда

$ABCD$ — нижня основа, $A_1B_1C_1D_1$ — верхня основа. Висота OO_1 — відрізок прямої, перпендикулярної до основ й обмежений ними.

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = \frac{SO_1^2}{SO^2};\ \frac{SA_1}{SA} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{SC_1}{SC} = \frac{SD_1}{SD}.$$



Правильна зрізана піраміда: основи — правильні многокутники; відрізок, який з'єднує центри основ, є висотою. Площа бічної поверхні: $S_{б.} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot m$, де P_1 і P_2 — периметри основ, m — апофема, $m = K_1K$.

Площа повної поверхні: $S_{п.} = S_{б.} + S_1 + S_2$, де $S_1 + S_2$ — площі основ.

Об'єм: $V = \frac{1}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right) \cdot H$, де H — висота.

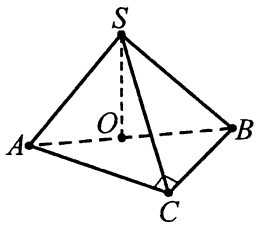
Приклад 1. Обчислити об'єм піраміди, в основі якої лежить ромб з діагоналями 8 см і 6 см, якщо висота піраміди дорівнює 16 см.

А	Б	В	Г	Д
128 см^3	32 см^3	256 см^3	64 см^3	512 см^3

■ В основі піраміди лежить ромб з діагоналями $d_1 = 8$ см і $d_2 = 6$ см. Обчислимо його площу: $S_{осн.} = \frac{1}{2} d_1 d_2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$ (см^2). Знайдемо об'єм піраміди: $V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 16 = 128$ (см^3).

Відповідь. **А.** ■

Приклад 2. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з катетом 8 см. Основа висоти піраміди — центр описаного навколо трикутника основи кола радіуса 5 см. Знайти об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 7 см.

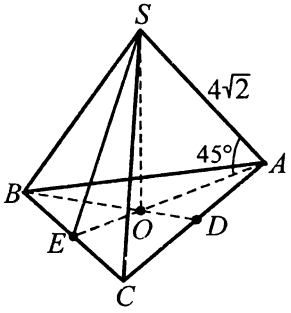


■ Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, — середина гіпотенузи. $AB = 2R$, $AB = 10$ см. Із прямокутного трикутника ABC одержимо: $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (см).

$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$ (см^2). $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 7 = 56$ (см^3).

Відповідь. 56 см^3. ■

Приклад 3. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює $4\sqrt{2}$ см й утворює з площиною основи кут 45°. Знайти об'єм піраміди.

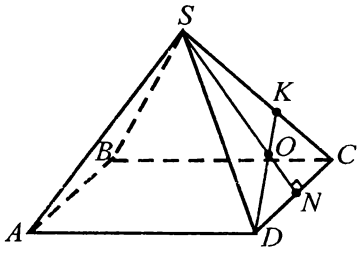


■ Нехай $SABC$ — правильна піраміда, $SA = 4\sqrt{2}$ см, $SO \perp (ABC)$, $\angle SAO = 45°$, SE — апофема. З ΔAOS ($\angle O = 90°$): $AO = SA\cos\angle SAO = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$ (см); $SO = H = OA = 4$ (см). Проведемо $SE \perp BC$. Оскільки $SB = SC$, то $BE = EC$ і тому $AE \perp BC$. $AE = AO : 2 \cdot 3 = 4 : 2 \cdot 3 = 6$ (см). З ΔAEC ($\angle E = 90°$): $EC = AE \cdot \text{tg}30° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ (см). $BC = 2EC = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ (см).

$S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} BC \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 = 12\sqrt{3}$ (см^2). Тоді об'єм піраміди: $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} H = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 4 = 16\sqrt{3}$ (см^3).

Відповідь. $16\sqrt{3}$ см^3. ■

Приклад 4. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро утворює зі стороною основи кут β. Відрізок, що сполучає центр вписаного в бічну грань кола з вершиною основи цієї грані, дорівнює l. Визначити бічну поверхню піраміди.

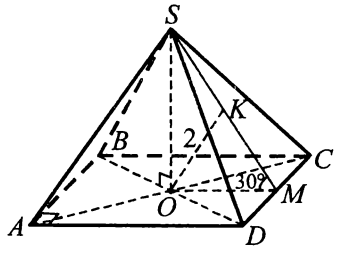


■ Нехай $SABCD$ — задана правильна піраміда. Проведемо бісектриси SN і DK трикутника SCD. Точка O перетину цих бісектрис є центром кола, вписаного в даний трикутник. За умовою задачі, $OD = l$, $\angle SDC = \beta$.

Бісектриса SN є одночасно висотою та медіаною трикутника SCD. Тому $\angle SND = 90°$ і $DN = NC$. З ΔOND $\left(\angle N = 90°, \angle D = \frac{\beta}{2}\right)$: $DN = OD \cdot \cos\angle D = l \cdot \cos\frac{\beta}{2}$. З ΔSND ($\angle N = 90°$): $SN = DN \cdot \text{tg}\angle SDN = l\cos\frac{\beta}{2} \cdot \text{tg}\beta$.

Враховуючи, що $DN = NC$, знаходимо: $S_{\text{б.}} = 4S_{\Delta DSC} = 4 \cdot \frac{1}{2} DC \cdot SN = 4 \cdot DN \cdot SN = 4l\cos\frac{\beta}{2} \cdot l\cos\frac{\beta}{2} \cdot \text{tg}\beta = 4l^2 \cos^2\frac{\beta}{2}\text{tg}\beta$. Відповідь. $4l^2 \cos^2\frac{\beta}{2}\text{tg}\beta$. ■

Приклад 5. Двогранний кут при основі правильної чотирикутної піраміди дорівнює 30°, а відрізок, який сполучає середину апофеми й основу висоти, — 2 дм. Знайти об'єм піраміди.



■ Нехай $SABCD$ — правильна чотирикутна піраміда, SO — її висота. Проведемо $SM \perp DC$. За теоремою про три перпендикуляри, $OM \perp DC$. Тоді $\angle SMO$ — лінійний кут двогранного кута при основі й $\angle SMO = 30°$. K — середина апофеми, $OK = 2$ дм. Оскільки OK — медіана прямокутного трикутника SOM ($\angle O = 90°$), то $OK = \frac{SM}{2}$. Отже, $SM = 2OK = 2 \cdot 2 = 4$ (дм).

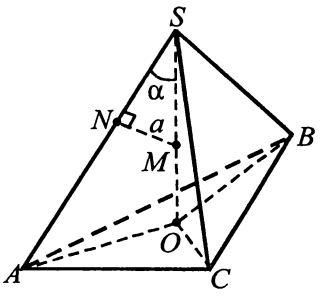
З ΔSOM ($\angle O = 90°$): $SO = SM\sin\angle SMO = 4 \cdot \sin 30° = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ (дм). $OM = SM\cos 30° = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ (дм).

Сторона основи дорівнює: $AD = 2OM = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ (дм).

$$V = \frac{1}{3} S_{осн.} H = \frac{1}{3} AD^2 \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \left(4\sqrt{3}\right)^2 \cdot 2 = 32 \text{ (дм}^3\text{)}.$$

Відповідь. 32 дм^3. ■

Приклад 6. У правильній трикутній піраміді бічне ребро утворює з висотою кут α. Визначити об'єм піраміди, якщо відстань від середини висоти до бічного ребра дорівнює a.



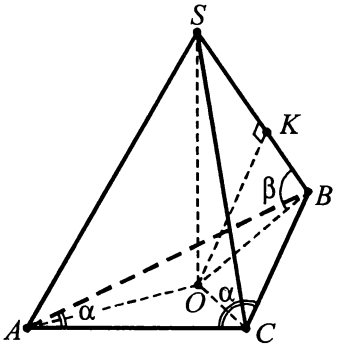
■ Нехай $SABC$ — задана правильна піраміда, SO — її висота, $\angle ASO = \alpha$, точка M — середина висоти. Проведемо з цієї точки перпендикуляр MN до ребра SA. Згідно з умовою задачі, $MN = a$.

Об'єм піраміди $V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H$. З ΔSNM ($\angle N = 90°$): $SM = \frac{a}{\sin\alpha}$. Тоді $H = SO = 2SM = \frac{2a}{\sin\alpha}$. З ΔSOA ($\angle O = 90°$): $OA = SO\operatorname{tg}\alpha = \frac{2a\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2a}{\cos\alpha}$. Оскільки точка O — центр правильного трикутника ABC, то відрізок OA є для цього трикутника радіусом описаного кола, а тому $S_{осн.} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot OA^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2a}{\cos\alpha}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}a^2}{\cos^2\alpha}$.

Тоді $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}a^2}{\cos^2\alpha} \cdot \frac{2a}{\sin\alpha} = \frac{2\sqrt{3}a^3}{\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha}$.

Відповідь. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha}$. ■

Приклад 7. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при основі. Усі бічні ребра піраміди утворюють із площиною основи кут β. Визначити об'єм піраміди, якщо відстань від основи її висоти до бічного ребра дорівнює d. У відповідь записати значення об'єму, якщо $d = 3$ см, $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$.



■ Нехай $SABC$ — задана піраміда, основа якої — рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$), $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$. Проведемо висоту SO. OA, OB і OC — відповідно проекції ребер SA, SB і SC на площину основи. $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \beta$. Прямокутні трикутники SOA, SOB і SOC мають спільний катет SO та рівні гострі кути. Тому $\Delta SOA = \Delta SOB = \Delta SOC$. У рівних трикутників відповідні елементи рівні, тому їх висоти, проведені до гіпотенуз, будуть рівними. Це означає, що відстані від точки O до бічних ребер будуть рівними. Проведемо $OK \perp SB$. За умовою, $OK = d$. З трикутника OKB ($\angle K = 90°$): $OB = \frac{OK}{\sin\beta} = \frac{d}{\sin\beta}$. Із трикутника SOB ($\angle O = 90°$): $H = SO = OB\operatorname{tg}\angle B = \frac{d}{\sin\beta} \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{d}{\cos\beta}$. Оскільки $OA = OB = OC$, то точка O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC, $OB = R$. За наслідком з теореми синусів для трикутника ABC: $\frac{BC}{\sin\alpha} = 2OB$; $BC = 2OB\sin\alpha = \frac{2d\sin\alpha}{\sin\beta}$. Оскільки в трикутнику ABC $AB = BC$ і $\angle B = 180° - 2\alpha$, то

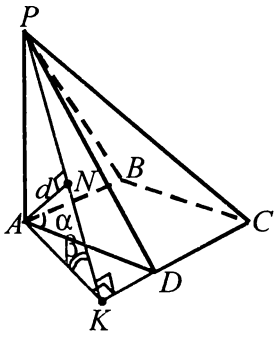
$$S_{осн.} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = \frac{1}{2}\left(\frac{2d\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^2 \sin(180° - 2\alpha) =$$

$= \frac{2d^2 \sin^2\alpha \sin 2\alpha}{\sin^2\beta}$. $V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{2d^2 \sin^2\alpha \sin 2\alpha}{\sin^2\beta} \cdot \frac{d}{\cos\beta} = \frac{2d^3 \sin^2\alpha \sin 2\alpha}{3\sin^2\beta \cos\beta} = \frac{4d^3 \sin^2\alpha \sin 2\alpha}{3\sin\beta \cos 2\beta}$.

Якщо $d = 3$ см, $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$, то $V = \frac{4 \cdot 3^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot 1}{3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 72$.

Відповідь. 72. ■

Приклад 8. Основа піраміди — ромб з гострим кутом α. Дві бічні грані піраміди, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до основи. Дві інші бічні грані нахилені до неї під кутом β, а відстань від основи висоти піраміди до цих граней дорівнює d. Визначити об'єм піраміди.



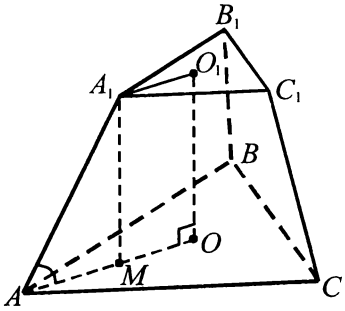
■ Нехай $PABCD$ — задана піраміда, $ABCD$ — ромб, $\angle DAB = \alpha < 90°$. Тоді, згідно з умовою задачі, перпендикулярними до площини основи є грані PAD і PAB, а отже, і пряма PA їх перетину. Тому відрізок PA — висота піраміди. Проведемо висоту PK грані PDC. За теоремою про три перпендикуляри $AK \perp CD$. Згідно з умовою задачі, $\angle PKA = \beta$. Проведемо з точки A перпендикуляр AN до грані PDC; $AN = d$.

Покажемо, що точка N належить висоті PK грані PDC. Справді, пряма CD перпендикулярна до висоти PK і її проекції AK на площину основи. Тому пряма CD перпендикулярна до площини PKA. Оскільки площина PDC містить пряму CD, то вона також перпендикулярна до площини PKA. Тоді перпендикуляр AN до площини PDC лежить у площині PKA, а тому його основа N належить висоті PK.

З ΔANK ($\angle N = 90°$): $AK = \frac{d}{\sin\beta}$. З ΔPAK ($\angle A = 90°$): $H = PA = AK \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{d}{\sin\beta} \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{d}{\cos\beta}$. Оскільки $AB \| CD$, то $\angle ADK = \alpha$. З ΔAKD ($\angle K = 90°$): $AD = \frac{AK}{\sin\alpha} = \frac{d}{\sin\beta \sin\alpha}$. Тоді $S_{осн.} = AD^2 \cdot \sin\alpha = \frac{d^2}{\sin^2\beta \sin\alpha}$. Отже, $V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{d^2}{\sin^2\beta \sin\alpha} \cdot \frac{d}{\cos\beta} = \frac{d^3}{3\sin^2\beta \cos\beta \sin\alpha}$.

Відповідь. $\frac{d^3}{3\sin^2\beta \cos\beta \sin\alpha}$. ■

Приклад 9. Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди відносяться як 1 : 2, висота піраміди дорівнює 3 см, бічне ребро утворює з більшою основою кут 45°. Знайти площі основ піраміди.



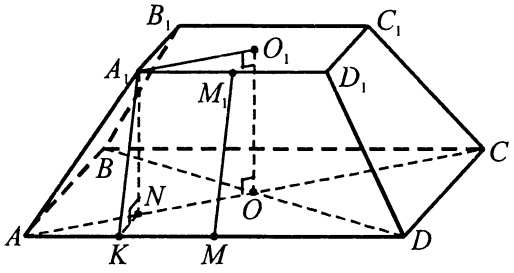
■ Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — задана правильна зрізана піраміда, $A_1C_1 : AC = 1 : 2$, O і O_1 — центри основ. Тоді O_1O — висота піраміди, $OO_1 = 3$ см. Площина AOO_1 проходить через вершину повної піраміди, а тому містить бічне ребро A_1A зрізаної піраміди, звідки випливає, що AA_1O_1O — плоский чотирикутник. Крім того, ця площина перетинає паралельні площини основ піраміди по прямих A_1O_1 та AO і містить її висоту, а тому $A_1O_1 \| AO$ і $AO \perp O_1O$. Таким чином, AA_1O_1O — прямокутна трапеція. Проведемо висоту A_1M цієї трапеції. Оскільки $A_1M \| O_1O$, то $A_1M \perp (ABC)$. Тоді відрізок MA є ортогональною проекцією бічного ребра A_1A на площину ABC. За умовою, $\angle A_1AM = 45°$.

З ΔA_1MA ($\angle M = 90°$): $AM = A_1M = O_1O = 3$ см. Трикутники $A_1B_1C_1$ і ABC подібні, а тому відношення радіусів O_1A_1 і OA кіл, описаних навколо цих трикутників, дорівнює відношенню сторін: $O_1A_1 : OA = 1 : 2$; $OA = 2 \cdot O_1A_1$. З цієї рівності, урахувавши, що $O_1A_1 = OM$, маємо: $OA = 2 \cdot OM$. Отже, точка M — середина відрізка OA. Тому $OA = 2AM = 6$ см.

Знаходимо площу більшої основи через радіус OA описаного кола: $S_{\Delta ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4} OA^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2 = 27\sqrt{3}$ (см^2). Оскільки $A_1C_1 : AC = 1 : 2$, то $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABC} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$ (см^2).

Відповідь. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ см^2 і $27\sqrt{3}$ см^2. ■

Приклад 10. Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 4 см і 2 см, а гострий кут бічної грані — 60°. Знайти висоту зрізаної піраміди.



■ Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — задана правильна зрізана піраміда, $AD = 4$ см, $A_1D_1 = 2$ см, $\angle A_1AD = 60°$, O_1 і O — центри основ. Тоді O_1O — висота піраміди. Проведемо висоту A_1N прямокутної трапеції AA_1O_1O. Оскільки $A_1N \| O_1O$, то $A_1N \perp (ABC)$, тобто A_1N — також висота зрізаної піраміди. У рівнобічній трапеції AA_1D_1D проведемо висоту A_1K та апофему M_1M піраміди. Тоді: $A_1M_1 = \frac{1}{2} A_1D_1 = 1$ см, $AM = \frac{1}{2} AD = 2$ см, $AK = AM - KM = AM - A_1M_1 = 1$ см.

З ΔA_1KA ($\angle K = 90°$): $A_1K = AK \cdot \operatorname{tg}60° = \sqrt{3}$ см. Відрізок NK є ортогональною проекцією похилої A_1K на площину ABC. Тому, оскільки $A_1K \perp AD$, то $NK \perp AD$. З ΔAKN ($\angle K = 90°$, $\angle A = 45°$): $KN = AK \cdot \operatorname{tg}45° = 1$ см. З ΔA_1NK: $A_1N = \sqrt{A_1K^2 - KN^2} = \sqrt{2}$ (см).

Відповідь. $\sqrt{2}$ см. ■

Завдання 37.1–37.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

37.1. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює $b\sqrt{3}$, а висота піраміди — H. Визначити бічне ребро піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{3b^2 - H^2}$	$\sqrt{b^2 + H^2}$	$\sqrt{3b^2 + H^2}$	$\frac{\sqrt{b^2 + 4H^2}}{2}$	$\sqrt{b^2 - H^2}$

37.2. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a. Бічна грань нахилена до площини основи під кутом β. Визначити апофему піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{a}{2\sin\beta}$	$\frac{a}{2\operatorname{tg}\beta}$	$\frac{a\cos\beta}{2}$	$\frac{a\sin\beta}{2}$	$\frac{a}{2\cos\beta}$

37.3. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічне ребро — 5см. Знайти бічну поверхню піраміди.

А	Б	В	Г	Д
30 см^2	12 см^2	36 см^2	72 см^2	45 см^2

37.4. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 6 см. Знайти об'єм піраміди з основою BDD_1 і вершиною C.

А	Б	В	Г	Д
36 см^3	48 см^3	$24\sqrt{2}$ см^3	$36\sqrt{2}$ см^3	$108\sqrt{2}$ см^3

37.5. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 8 см, апофема піраміди — 10 см. Знайти у квадратних сантиметрах площу перерізу піраміди, проведеного через середину висоти паралельно до площини основи.

А	Б	В	Г	Д
24 см^2	72 см^2	48 см^2	9 см^2	36 см^2

37.6. Висота та бічне ребро правильної чотирикутної піраміди відповідно дорівнюють 3 см і 5см. Знайти об'єм піраміди.

А	Б	В	Г	Д
48 см^3	128 см^3	64 см^3	96 см^3	32 см^3

37.7. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 5 см, 12 см і 13 см. Знайти висоту піраміди, якщо бічні грані нахилені до площини основи під кутом 45°.

А	Б	В	Г	Д
1 см	4 см	2 см	$2\sqrt{2}$ см	$4\sqrt{2}$ см

37.8. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 6 см, 8 см і 10 см. Знайти висоту піраміди, якщо всі її бічні ребра рівні та дорівнюють 13 см.

А	Б	В	Г	Д
12 см	9 см	10 см	11 см	8 см

37.9. Основа піраміди — квадрат зі стороною a. Висота піраміди дорівнює H і проходить через одну з вершин основи. Визначити площу бічної поверхні піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$2aH$	$4aH$	$2a(H+\sqrt{a^2+H^2})$	$a(H+\sqrt{a^2+H^2})$	$a(H+\sqrt{a^2-H^2})$

37.10. Висота піраміди поділена на 4 рівні частини і через точки поділу проведено перерізи, паралельні до основи. Знайти площу найбільшого перерізу, якщо площа основи дорівнює 800 см^2.

А	Б	В	Г	Д
600 см^2	400 см^2	450 см^2	350 см^2	150 см^2

37.11. Знайти висоту правильної чотирикутної зрізаної піраміди, у якої сторони основ дорівнюють a і b ($a > b$), а кут нахилу бічного ребра до більшої основи дорівнює α.

А	Б	В	Г	Д
$(a-b)\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{a-b}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{a-b}{\sqrt{2}}\sin\alpha$	$\frac{a-b}{\sqrt{2}}\cos\alpha$	$(a-b)\sin\alpha$

37.12. У правильній зрізаній чотирикутній піраміді сторони основи a і b ($a > b$), двогранний кут при більшій основі — β. Знайти висоту піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{a-b}{2}\operatorname{tg}\beta$	$(a-b)\operatorname{tg}\beta$	$(a-b)\sin\beta$	$\frac{a-b}{2}\sin\beta$	$(a-b)\cos\beta$

37.13. Ребро правильного тетраедра дорівнює a. Визначити об'єм тетраедра.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$	$\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$	$\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

37.14. У правильній трикутній піраміді бічне ребро нахилено до площини основи під кутом 60°. Під яким кутом нахилена до площини основи бічна грань?

А	Б	В	Г	Д
$\operatorname{arctg}\sqrt{3}$	$\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{3}\right)$	$\arcsin\sqrt{3}$	$\arcsin(2\sqrt{3})$	$\arccos\sqrt{3}$

37.15. У правильній чотирикутній піраміді двогранний кут при основі дорівнює 45°. Під яким кутом нахилено до площини основи бічне ребро?

А	Б	В	Г	Д
45°	$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\operatorname{arcctg}\sqrt{2}$	$\operatorname{arctg}\sqrt{2}$	$\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$

37.16. Площа основи правильної трикутної піраміди дорівнює S, а площа бічної поверхні — Q. Визначити двогранний кут при основі.

А	Б	В	Г	Д
$\arcsin\frac{S}{Q}$	$\arccos\frac{S}{Q}$	$\arccos\frac{S}{Q}$	$\arccos\frac{Q}{S}$	$\arcsin\frac{S}{Q}$

37.17. Повна поверхня правильної чотирикутної піраміди дорівнює S. Двогранний кут при ребрі основи — 60°. Визначити бічну поверхню піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{9}S$	$\frac{1}{2}S$	$\frac{5}{6}S$	$\frac{3}{4}S$	$\frac{2}{3}S$

37.18. Діагональним перерізом правильної чотирикутної піраміди є прямокутний трикутник, площа якого дорівнює Q. Знайти площу основи піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$2Q$	$4Q$	Q	$\frac{Q}{2}$	$\frac{Q}{4}$

37.19. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a, а площа перерізу піраміди площиною, яка проходить через бічне ребро і перпендикулярна до основи, дорівнює Q. Знайти об'єм піраміди.

А	Б	В	Г	Д
Qa	$2Q\cdot\frac{a}{3}$	$3Qa$	$Q\cdot\frac{a}{4}$	$4Qa$

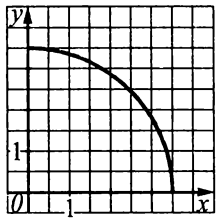
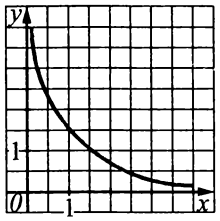
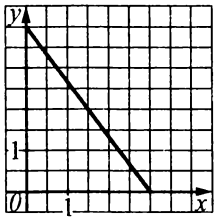
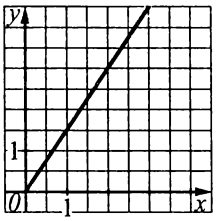
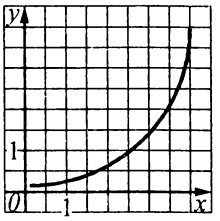
37.20. Усередині призми з об'ємом V взято довільну точку O й побудовано дві піраміди з вершиною O, що мають основами основи призми. Знайти суму об'ємів цих пірамід.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{9}V$	$\frac{1}{4}V$	$\frac{2}{3}V$	$\frac{1}{6}V$	$\frac{1}{3}V$

37.21. Бічні ребра трикутної піраміди попарно перпендикулярні й дорівнюють a, b і c. Визначити об'єм піраміди.

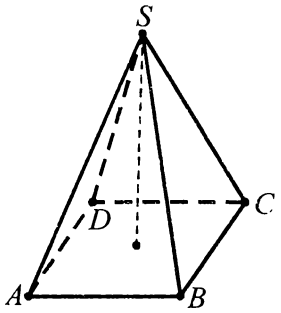
А	Б	В	Г	Д
$6abc$	abc	$\frac{1}{12}abc$	$\frac{1}{6}abc$	$\frac{1}{3}abc$

37.22. $S(x)$ — площа перерізу правильної чотирикутної піраміди, проведеного паралельно до основи на відстані x від неї. Який з наведених графіків може бути графіком функції $S(x)$?

А	Б	В	Г	Д
				

Завдання 37.23–37.27 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

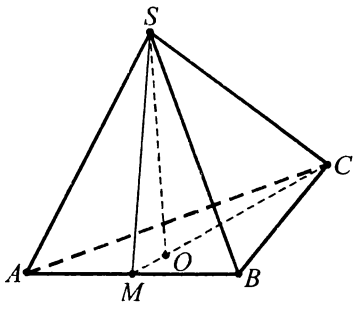
37.23. На рисунку зображено правильну піраміду $SABCD$, висота якої дорівнює діагоналі основи. Установити відповідність між кутами (1–4) та їхніми градусними мірами (А–Д).



1 Кут нахилу бічного ребра до площини основи
2 Кут нахилу апофеми до площини основи
3 Кут між прямими SA і DC
4 $\angle ASC$

А $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$
Б $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{10}}{10}$
В $\operatorname{arctg}2$
Г $\operatorname{arctg}2\sqrt{2}$
Д $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

37.24. На рисунку зображено правильну трикутну піраміду $SABC$, у якої: SO — висота; SM — апофема; сторона основи дорівнює a; бічна грань нахилена до площини основи під кутом α. Установити відповідність між елементами піраміди (1–4) та їхніми величинами (А–Д).



1 SM
2 SB
3 SO
4 OC

А $\frac{\sqrt{3}}{3}a$

Б $\frac{\sqrt{3}a}{6\cos\alpha}$

В $\frac{a}{2\sqrt{3}\cos\alpha}\sqrt{1+3\cos^2\alpha}$

Г $\frac{\sqrt{3}}{2}a\sin\alpha$

Д $\frac{\sqrt{3}}{6}a\operatorname{tg}\alpha$

37.25. Установити відповідність між пірамідами (1–4) та ортогональними проекціями їх вершин на площину основи (А–Д).

1 Усі бічні грані піраміди рівнонахилені до площини основи

2 Усі бічні ребра піраміди рівнонахилені до площини основи

3 Дві сусідні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи

4 Піраміда, в основі якої рівносторонній трикутник. Одна бічна грань піраміди перпендикулярна до площини основи, а дві інші рівнонахилені до неї

А Вершина многокутника основи

Б Середина сторони основи

В Точка перетину діагоналей основи

Г Центр кола, вписаного в многокутник основи

Д Центр кола, описаного навколо многокутника основи

37.26. Установити відповідність між довжиною ребра (1–4) тетраедра та його об'ємом (А–Д).

1 6 см

2 12 см

3 18 см

4 24 см

А $144\sqrt{2}$ см^3

Б $1152\sqrt{2}$ см^3

В $18\sqrt{2}$ см^3

Г $26\sqrt{2}$ см^3

Д $486\sqrt{2}$ см^3

37.27. Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної піраміди дорівнює S і є прямокутним трикутником. Установити відповідність між площею перерізу (1–4) та площею бічної поверхні (А–Д) піраміди.

1 4 см^2

2 8 см^2

3 $2\sqrt{3}$ см^2

4 5 см^2

А $16\sqrt{3}$ см^2

Б 12 см^2

В $10\sqrt{3}$ см^2

Г $14\sqrt{3}$ см^2

Д $8\sqrt{3}$ см^2

Розв'яжіть завдання 37.28–37.41. Відповідь запишіть десятковим дробом.

37.28. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з висотою 9 см й основою 6 см. Кожне з бічних ребер піраміди дорівнює 13 см. Знайти у сантиметрах висоту піраміди.

37.29. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро утворює з висотою кут 30°. Відрізок, що сполучає основу висоти з серединою бічного ребра, дорівнює $\sqrt{3}$. Знайти об'єм піраміди.

37.30. Площа основи піраміди дорівнює 72 см^2. Площі двох перерізів, які паралельні до основи, дорівнюють 18 см^2 і 50 см^2. Знайти у сантиметрах висоту піраміди, якщо відстань між перерізами дорівнює 8 см.

37.31. Сторони основи правильної зрізаної трикутної піраміди дорівнюють 2 см і 5 см, бічне ребро — 2 см. Знайти у сантиметрах висоту піраміди.

37.32. Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює 1 і нахилена до площини основи під кутом 60°. Визначити повну поверхню піраміди.

37.33. У правильній піраміді площа основи становить $\frac{1}{3}$ площі повної поверхні. Знайти у градусах двогранний кут при основі піраміди.

37.34. Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною 2, одна з бічних граней перпендикулярна до площини основи, а дві інші утворюють із площиною основи кут 45°. Визначити об'єм піраміди.

37.35. У правильній чотирикутній піраміді відстань від центра основи до бічної грані дорівнює 3. Бічні грані нахилені до основи під кутом 60°. Визначити об'єм піраміди.

37.36. Основою піраміди є ромб зі стороною $\sqrt{3}$ і кутом 30°. Бічні грані, що проходять через сторони гострого кута ромба, перпендикулярні до площини основи, а дві інші — нахилені до неї під кутом 60°. Знайти об'єм піраміди.

37.37. Бічні ребра правильної трикутної піраміди взаємно перпендикулярні й дорівнюють $7\sqrt{2}$. Знайти відстань між мимобіжними ребрами піраміди.

37.38. У правильній чотирикутній піраміді $PABCD$ з вершиною P проведено переріз через сторону AB і середину бічного ребра PC. У якому відношенні цей переріз поділяє об'єм піраміди?

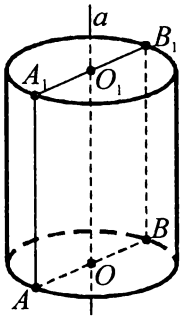
37.39. Основою піраміди є рівносторонній трикутник зі стороною $\sqrt{\sqrt{15}-\sqrt{3}}$. Одна з бічних граней є рівностороннім трикутником і перпендикулярна до площини основи. Визначити бічну поверхню піраміди.

37.40. У трикутній піраміді всі чотири грані — рівні рівнобедрені трикутники з основою $\sqrt{14}$ й бічною стороною 4. Визначити об'єм піраміди.

37.41. Основою піраміди є прямокутник, площа якого дорівнює 9. Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи, а дві інші — нахилені до неї під кутами 30° і 60°. Визначити об'єм піраміди.

Тема 38. Циліндр

Циліндром називають тіло, утворене внаслідок обертання прямокутника навколо осі, що містить його сторону. На рисунку зображено циліндр, який отримали внаслідок обертання прямокутника AA_1O_1O навколо сторони OO_1.



Пряма a — вісь симетрії циліндра, проходить через центри основ.

$H = OO_1$ — висота циліндра.

Циліндр складається із двох кругів, які лежать у паралельних площинах, і бічної поверхні (див. рис. 1). Круги називають *основами* циліндра, їх радіуси — *радіусом* циліндра. Основи циліндра паралельні й рівні. Відрізки, що сполучають відповідні точки кіл основ, називають *твірними* циліндра. Твірні утворюють бічну поверхню циліндра. Твірні й вісь циліндра перпендикулярні до площин основ. Відстань між площинами основ є висотою циліндра.

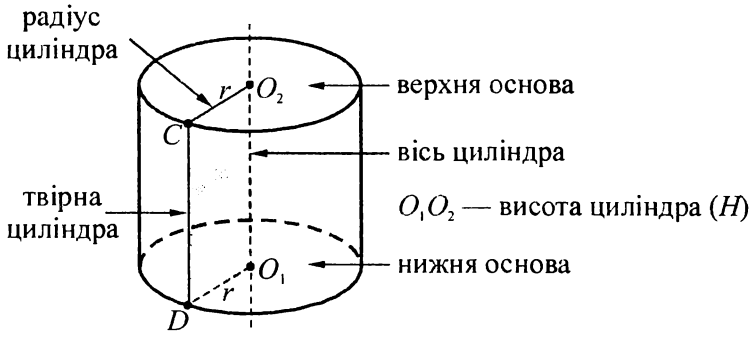


Рис. 1

Розгорткою циліндра є прямокутник, одна зі сторін якого дорівнює висоті циліндра, а інша — довжині кола основи, та два рівні круги (рис. 2).

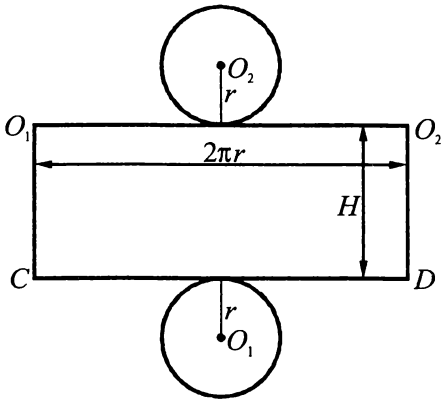


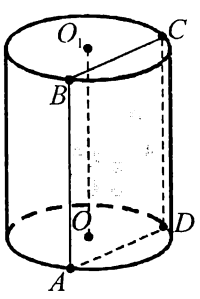
Рис. 2

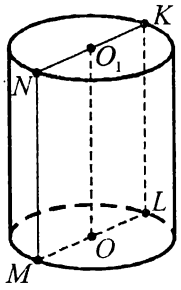
Площа бічної поверхні циліндра: $S = 2\pi RH$.

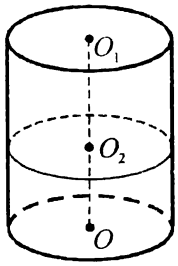
Площа повної поверхні циліндра: $S_{повн.} = S_{бічн.} + 2S_{осн.}$. $S_{повн.} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(R + H)$.

Об'єм циліндра: $V = S_{осн.} \cdot H = \pi R^2 H$.

Переріз циліндра площиною, паралельною до його осі, — прямокутник. Дві сторони прямокутника — твірні циліндра, а дві інші — паралельні хорди основ.







Осьовий переріз циліндра — переріз, який проходить через його вісь.

Переріз циліндра площиною, паралельною до його основ, є кругом, який дорівнює основам циліндра.

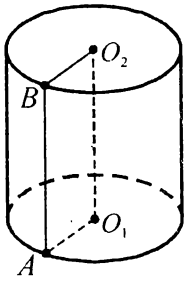
Дотична площина до циліндра — площина, яка проходить через твірну прямого циліндра і перпендикулярна до осьового перерізу, проведеного через цю твірну.

Приклад 1. Знайти площу повної поверхні циліндра радіуса 3 см, висота якого дорівнює 5 см.

■ $S_{п.} = 2\pi R(R + H)$, де $R = O_1A = 3$ см, $H = AB = 5$ см.

$S_{п.} = 2\pi \cdot 3(3 + 5) = 48\pi$ (см^2).

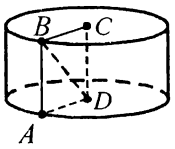
Відповідь. 48π см^2. ■



Приклад 2. Знайти площу бічної поверхні циліндра, утвореного обертанням квадрата з діагоналлю $5\sqrt{2}$ см навколо сторони.

■ $BC = AD = R$. Оскільки $ABCD$ — квадрат, то $AB = AD = R$.

Із прямокутного трикутника ABD ($\angle A = 90°$) маємо: $R^2 + R^2 = \left(5\sqrt{2}\right)^2$, $2R^2 = 50$, $R^2 = 25$, $R = 5$ (см).



$S_{б.} = 2\pi RH$, $H = AB = R = 5$ (см).

Отже, $S_{б.} = 2\pi \cdot 5 \cdot 5 = 50\pi$ (см^2).

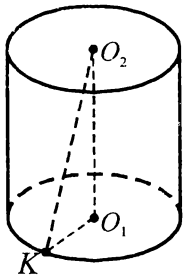
Відповідь. 50π см^2. ■

Приклад 3. Знайти об'єм циліндра, якщо його висота дорівнює 4 см, а відрізок, який сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, дорівнює 6 см.

■ $V_{ц.} = \pi R^2 H$, де $R = O_1K$, $H = O_1O_2$.

Із прямокутного трикутника O_1O_2K ($\angle O_1 = 90°$) маємо:

$O_1K = \sqrt{O_2K^2 - O_1O_2^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ (см).



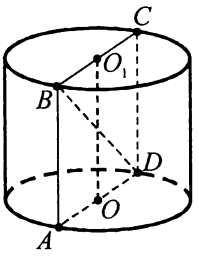
$V_{ц.} = \pi \cdot \left(2\sqrt{5}\right)^2 \cdot 4 = 80\pi$ (см^3)

Відповідь. 80π см^3. ■

Приклад 4. Об'єм циліндра дорівнює $8\pi\sqrt{5}$ см^3, а його висота — $2\sqrt{5}$ см. Знайти діагональ осьового перерізу.

А	Б	В	Г	Д
6 см	4 см	36 см	8 см	20 см

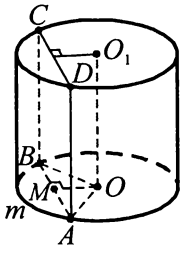
■ Осьовим перерізом циліндра є прямокутник, одна сторона якого дорівнює діаметру основи, а інша — висоті циліндра. $V_{цил.} = \pi R^2 H$. Нехай перерізом є прямокутник $ABCD$, у якому $AB = H = 2\sqrt{5}$ см, $O_1B = R$. Тоді одержимо: $8\pi\sqrt{5} = \pi R^2 \cdot 2\sqrt{5}$, звідки $R^2 = 4$; $R = 2$ (см). $AD = 2R = 4$ (см). Проведемо діагональ BD. Із трикутника ABD ($\angle A = 90°$) маємо: $BD^2 = AB^2 + AD^2 = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{20+16} = \sqrt{36} = 6$ (см).



Відповідь. **А.** ■

Приклад 5. Перерізом циліндра площиною, яка паралельна до його осі, є квадрат, що відтинає від кола основи дугу 90°. Висота циліндра дорівнює 6 см. Знайти відстань від осі циліндра до цього перерізу.

■ Нехай OO_1 — циліндр, OO_1 — його висота, $OO_1 = 6$ см, $ABCD$ — заданий переріз (квадрат), $AB = AD$, $OO_1 \| AD$. $\cup AmB = 90°$, тому $\angle AOB = 90°$. Оскільки $AD = OO_1$, то $AD = AB = 6$ см. З рівнобедреного прямокутного трикутника AOB $OA = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ (см). $OM \perp AB$ і $OA = OB = R$, тоді $AM = BM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 6 =$ $= 3$ (см). З ΔAMO ($\angle M = 90°$): $OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 - 3^2} = 3$ (см). Так як

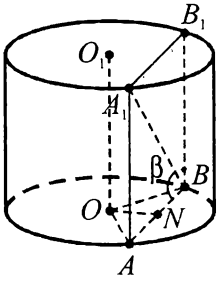


$OM \perp OO_1$ і $OO_1 \| AD$, то $OM \perp AB$. Отже, пряма OM перпендикулярна до двох непаралельних прямих AB й AD площини перерізу, а тому $OM \perp (ABD)$ і є відстанню від прямої OO_1 до паралельної їй площини ABD.

Відповідь. 3 см. ■

Приклад 6. У циліндрі паралельно до його осі проведено площину, що перетинає нижню основу по хорді, яку видно із центра цієї основи під кутом 2α. Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи циліндра під кутом β. Визначити об'єм циліндра, якщо площа перерізу дорівнює Q.

■ Перерізом циліндра площиною, яка паралельна до його осі OO_1 і перетинає основу, є прямокутник. Нехай це прямокутник AA_1B_1B із площею Q. AB — хорда нижньої основи; $\angle AOB = 2\alpha$. Оскільки $AA_1 \perp (AOB)$, то ортогональною проекцією діагоналі A_1B на площину основи є хорда AB. Тому $\angle A_1BA = \beta$.



Об'єм циліндра $V = \pi R^2 H$, де $R = OA$, $H = AA_1$.

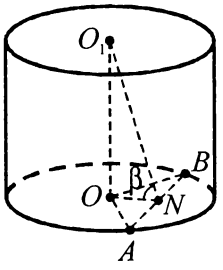
З ΔA_1AB ($\angle A = 90°$): $AB = AA_1 \cdot \operatorname{ctg}\beta = H \cdot \operatorname{ctg}\beta$. Оскільки $AB \cdot AA_1 = Q$, то: $H\operatorname{ctg}\beta \cdot H = Q$; $H^2 = Q\operatorname{tg}\beta$; $H = \sqrt{Q\operatorname{tg}\beta}$. Виразимо радіус R основи через висоту H. Для цього проведемо висоту ON трикутника AOB. Оскільки ΔAOB рівнобедрений, то висота ON є одночасно його бісектрисою і медіаною. Тому $\angle AON = \alpha$, $AN = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}H\operatorname{ctg}\beta$. З ΔAON ($\angle N = 90°$): $R =$

$= OA = \dfrac{AN}{\sin \angle AON} = \dfrac{H\operatorname{ctg}\beta}{2\sin\alpha}$.

Отже, $V = \pi \cdot R^2 \cdot H = \pi \cdot \left(\dfrac{H\operatorname{ctg}\beta}{2\sin\alpha}\right)^2 \cdot H = \dfrac{\pi H^3 \operatorname{ctg}^2\beta}{4\sin^2\alpha} = \dfrac{\pi Q \operatorname{tg}\beta\sqrt{Q\operatorname{tg}\beta}\operatorname{ctg}^2\beta}{4\sin^2\alpha} = \dfrac{\pi Q\sqrt{Q\operatorname{ctg}\beta}}{4\sin^2\alpha}$.

Відповідь. $\dfrac{\pi Q\sqrt{Q\operatorname{ctg}\beta}}{4\sin^2\alpha}$. ■

Приклад 7. В основі циліндра проведено хорду, що стягує дугу α. Відрізок, який сполучає центр іншої основи із серединою цієї хорди, дорівнює l й утворює з площиною основи кут β. Визначити об'єм циліндра.



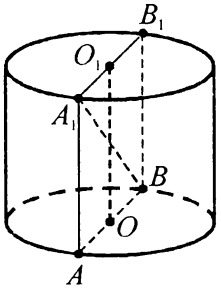
■ Нехай у циліндрі з віссю OO_1: AB — задана хорда, $\cup AMB = \alpha$; точка N — середина хорди AB, $O_1N = l$. Оскільки відрізок ON — ортогональна проекція похилої O_1N на площину основи, то $\angle O_1NO = \beta$.

З ΔO_1ON ($\angle O = 90°$): $H = OO_1 = l\sin\beta$; $ON = l\cos\beta$. Оскільки трикутник AOB рівнобедрений, то медіана ON є його висотою і бісектрисою. Тому $\angle ONA = 90°$, $\angle AON = \frac{\alpha}{2}$. З ΔONA: $R = OA = \frac{ON}{\cos\angle AON} = \frac{l\cos\beta}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Отже, $V = \pi \cdot R^2 \cdot H = \pi \cdot \left(\frac{l\cos\beta}{\cos(\alpha/2)}\right)^2 \cdot l \cdot \sin\beta = \frac{\pi l^3 \cos^2\beta\sin\beta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

Відповідь. $\frac{\pi l^3 \cos^2\beta\sin\beta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. ■

Приклад 8. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює половині площі його повної поверхні. Діагональ осьового перерізу дорівнює 5 см. Знайти повну поверхню циліндра.

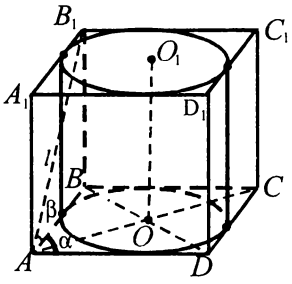


■ Нехай осьовим перерізом циліндра з віссю OO_1 є прямокутник AA_1B_1B, $A_1B = 5$ см. Позначимо: $OA = R$, $AA_1 = H$. Виходячи з рівності $S_{б.} = \frac{1}{2}S_{п.}$, матимемо: $2S_{б.} = S_{п.}$; $2S_{б.} = S_{б.} + 2S_{осн.}$; $S_{б.} = 2S_{осн.}$; $2\pi RH = 2\pi R^2$; $H = R$. Тоді $AB = 2R = 2H$.

З ΔA_1AB ($\angle A = 90°$): $AA_1^2 + AB^2 = A_1B^2$; $H^2 + (2H)^2 = 5^2$; $H^2 = 5$. Враховуючи, що $R = H$, знаходимо повну поверхню: $S_{п.} = 2\pi R(R + H) = 4\pi H^2 = 20\pi$ (см^2).

Відповідь. 20π см^2. ■

Приклад 9. Основою прямої призми є ромб з гострим кутом α. Діагональ бічної грані дорівнює l й утворює з площиною основи кут β. Знайдіть бічну поверхню циліндра, вписаного в дану призму.



■ Нехай в основі прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежить ромб $ABCD$, у якому $\angle A = \alpha < 90°$; $AB_1 = l$. Проекцією діагоналі AB_1 грані AA_1B_1B на площину основи є сторона AB ромба, а тому, за умовою задачі, $\angle B_1AB = \beta$.

Висота H циліндра, вписаного в дану призму, дорівнює висоті призми, а радіус r основи — радіусу кола, вписаного в ромб $ABCD$. Бічна поверхня вписаного циліндра дорівнює $S_{б.} = 2\pi rH$.

З ΔABB_1 ($\angle B = 90°$): $H = BB_1 = l\sin\beta$; $AB = l\cos\beta$. З формули для площі ромба $S = pr$, де $p = 2AB$ — його півпериметр, знаходимо:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{AB^2 \cdot \sin\alpha}{2AB} = \frac{1}{2}AB\sin\alpha = \frac{1}{2}l\cos\beta\cdot\sin\alpha.$$

Отже, $S_{б.} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha \cdot l \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\pi l^2 \sin 2\beta \sin\alpha$.

Відповідь. $\frac{1}{2}\pi l^2 \sin 2\beta \sin\alpha$. ■

Завдання 38.1–38.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

38.1. Знайти повну поверхню циліндра з радіусом 5 см і висотою 15 см.

А	Б	В	Г	Д
375π см^2	100π см^2	400π см^2	200π см^2	150π см^2

38.2. Прямокутник зі сторонами a і b ($a > b$) обертається навколо більшої сторони. Визначити об'єм тіла обертання.

А	Б	В	Г	Д
$2\pi a^2 b$	$\pi a^2 b$	πab^2	$2\pi ab^2$	$4\pi a^2 b$

38.3. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює l і утворює з площиною основи кут α. Визначити радіус циліндра.

А	Б	В	Г	Д
$2l\cos\alpha$	$l\sin\alpha$	$\frac{l\sin\alpha}{2}$	$l\cos\alpha$	$\frac{l\cos\alpha}{2}$

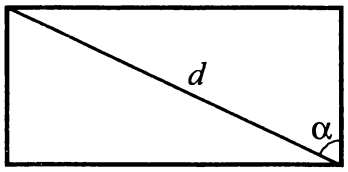
38.4. У циліндрі паралельно до його осі проведено площину на відстані 3 см від неї. Ця площина перетинає основу циліндра по хорді, яка дорівнює 8 см. Знайти радіус циліндра.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{73}$ см	5 см	$\sqrt{55}$ см	$\sqrt{7}$ см	$\sqrt{5}$ см

38.5. Осьовим перерізом циліндра є квадрат зі стороною 10 см. Знайти площу бічної поверхні циліндра.

А	Б	В	Г	Д
100 см^2	50π см^2	150π см^2	100π см^2	200π см^2

38.6. Діагональ розгортки бічної поверхні циліндра дорівнює d й утворює з висотою розгортки кут α. Знайти радіус циліндра.



А	Б	В	Г	Д
$\frac{d\sin\alpha}{2}$	$\frac{d\sin\alpha}{2\pi}$	$\frac{d\cos\alpha}{\pi}$	$\frac{d\sin\alpha}{\pi}$	$\frac{d\cos\alpha}{2}$

38.7. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює S. Визначити площу осьового перерізу.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{S}{4\pi}$	$\frac{S}{2}$	πS	$\frac{S}{2\pi}$	$\frac{S}{\pi}$

38.8. Відро циліндричної форми вміщує 10 л води. Іграшкове відро має розміри в 10 разів менші. Скільки літрів води вміщує іграшкове відро?

А	Б	В	Г	Д
1 л	0,1 л	0,01 л	0,001 л	0,0001 л

38.9. Відрізок, який сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною основи кут α. Даний відрізок розміщений на відстані d від центра нижньої основи. Визначити висоту циліндра.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{d}{\sin\alpha}$	$\frac{d}{\cos\alpha}$	$d\sin\alpha$	$d\cos\alpha$	$d\operatorname{tg}\alpha$

38.10. Паралельно до осі циліндра проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу α. Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи під кутом β. Визначити площу перерізу, якщо радіус циліндра дорівнює R.

А	Б	В	Г	Д
$R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\beta$	$4R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$	$4R^2\sin^2\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\beta$	$R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$	$4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$

38.11. Діагоналі осьового перерізу циліндра утворюють при перетині кут φ. Визначити площу бічної поверхні циліндра, якщо площа його основи дорівнює S.

А	Б	В	Г	Д
$4S\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$	$4S\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$	$4S\sin\frac{\varphi}{2}$	$4S\cos\frac{\varphi}{2}$	$\frac{4S}{\sin\frac{\varphi}{2}}$

38.12. Радіус основи циліндра R. Площина перетинає бічну поверхню циліндра, але не перетинає основи й утворює кут α з площиною основи. Знайти площу перерізу циліндра цією площиною.

А	Б	В	Г	Д
$\pi R^2\operatorname{tg}\alpha$	$\pi R^2\cos\alpha$	$\pi R^2\sin\alpha$	$\frac{\pi R^2}{\cos\alpha}$	$\frac{\pi R^2}{\sin\alpha}$

38.13. Осьовий переріз циліндра — квадрат $ABCD$ зі стороною $2a$. Визначити найкоротшу відстань між точками A і C по поверхні циліндра.

А	Б	В	Г	Д
$2a^2\sqrt{2}$	$4a^2\sqrt{2}$	$a\sqrt{\pi^2+4}$	πa	$a\sqrt{\pi+4}$

38.14. Через твірну циліндра проведено два взаємно перпендикулярні перерізи циліндра, площі яких дорівнюють 60 см^2 і 80 см^2. Знайти площу осьового перерізу.

А	Б	В	Г	Д
70 см^2	80 см^2	90 см^2	100 см^2	200 см^2

38.15. У куб, ребро якого дорівнює a, вписано циліндр. Визначити повну поверхню циліндра.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi a^2}{2}$	$\frac{3}{2}\pi a^2$	$\frac{5}{2}\pi a^2$	$3\pi a^2$	$12\pi a^2$

38.16. У циліндр вписано куб, об'єм якого дорівнює 8 см^3. Знайти об'єм циліндра.

А	Б	В	Г	Д
2π см^3	4π см^3	$4\sqrt{2}\pi$ см^3	8π см^3	$2\sqrt{2}\pi$ см^3

38.17. Знайти радіус циліндра, описаного навколо прямокутного паралелепіпеда зі сторонами основи 9 см та 12 см і висотою 8 см.

А	Б	В	Г	Д
7,5 см	15 см	34 см	8,5 см	17 см

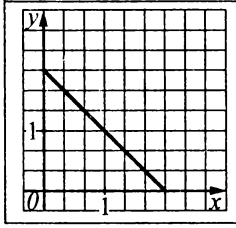
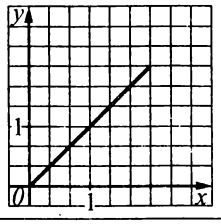
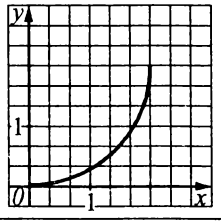
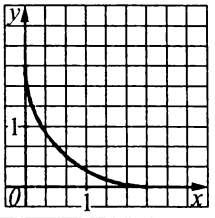
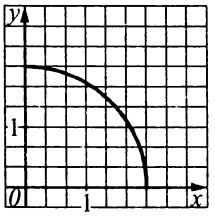
38.18. Об'єм правильної трикутної призми дорівнює V. Визначити об'єм циліндра, вписаного в призму.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi V}{3\sqrt{3}}$	$\frac{4\pi V}{3\sqrt{3}}$	$\frac{\pi V}{12\sqrt{3}}$	$\frac{\pi V}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}\pi V$

38.19. У циліндр вписано правильну трикутну призму, а у призму — циліндр. Знайти відношення об'ємів циліндрів.

А	Б	В	Г	Д
1 : 8	1 : 4	1 : 2	3 : 4	3 : 8

38.20. Дано циліндр з радіусом 2 і висотою 0,5. $S(x)$ — площа перерізу циліндра площиною, паралельною до його осі, де x — відстань від осі циліндра до площини перерізу. Який з наведених графіків є графіком функції $S(x)$?

А	Б	В	Г	Д
				

Завдання 38.21–38.23 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

38.21. Осьовий переріз циліндра дорівнює S, а висота циліндра — H. Установити відповідність між величинами S і H (1–4) та об'ємом циліндра (А–Д).

1 8 см^2, 4 см
2 6 см^2, 3 см
3 12 см^2, 6 см
4 10 см^2, 5 см

А 3π см^3
Б 5π см^3
В 4π см^3
Г 8π см^3
Д 6π см^3

38.22. Площа основи циліндра дорівнює S, а діагоналі осьового перерізу утворюють при перетині кут φ. Установити відповідність між величинами S і φ (1–4) та площею бічної поверхні циліндра (А–Д).

1 4 см^2, 60°
2 3 см^2, 90°
3 6 см^2, 120°
4 5 см^2, 60°

А $8\sqrt{3}$ см^2
Б $16\sqrt{3}$ см^2
В $20\sqrt{3}$ см^2
Г 12 см^2
Д 14 см^2

38.23. Установити відповідність між об'ємами правильних трикутних призм (1–4) та об'ємами вписаних у них циліндрів (А–Д).

1 $18\ см^3$
2 $9\ см^3$
3 $36\ см^3$
4 $27\ см^3$

А $4\sqrt{3}\pi\ см^3$
Б $\sqrt{3}\pi\ см^3$
В $5\sqrt{3}\pi\ см^3$
Г $2\sqrt{3}\pi\ см^3$
Д $3\sqrt{3}\pi\ см^3$

Розв'яжіть завдання 38.24–38.35. Відповідь запишіть десятковим дробом.

38.24. Площа основи циліндра відноситься до площі осьового перерізу як $\sqrt{3}\pi : 4$. Знайти у градусах кут між діагоналлю осьового перерізу циліндра і площиною основи.

38.25. Висота циліндра дорівнює 12, а радіус основи дорівнює 10. Циліндр перетнуто площиною, паралельною до його осі так, що в перерізі утворився квадрат. Знайти відстань від осі циліндра до січної площини.

38.26. Площина, паралельна до осі циліндра, відтинає від кола основи дугу 120°. Знайти площу перерізу, якщо висота дорівнює 10, а відстань від осі циліндра до січної площини дорівнює $\sqrt{3}$.

38.27. Кут між твірною циліндра і діагоналлю осьового перерізу дорівнює 60°, площа основи циліндра дорівнює $\sqrt{3}$. Визначити площу бічної поверхні циліндра.

38.28. Із квадрата, діагональ якого дорівнює $2\sqrt{\pi}$, згорнута бічна поверхня циліндра. Визначити площу основи циліндра.

38.29. Площина, паралельна до осі циліндра, відтинає від кола основи дугу 60°. Твірна циліндра дорівнює $10\sqrt{3}$, а відстань від осі до січної площини — 2. Знайти площу перерізу.

38.30. Знайти об'єм циліндра, якщо розгорткою його бічної поверхні є квадрат, сторона якого дорівнює $\sqrt[3]{\pi}$.

38.31. У циліндр вписано призму, основою якої є прямокутний трикутник з катетом 1 і прилеглим до нього кутом 60°. Визначити об'єм циліндра, якщо висота призми дорівнює $\frac{1}{\pi}$.

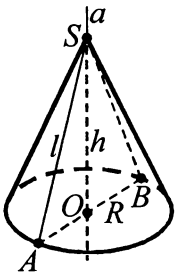
38.32. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 8 і 2. Висота призми дорівнює $\frac{10}{\pi}$. Знайти об'єм циліндра, вписаного в цю призму.

38.33. У циліндрі проведено два перерізи *ABCD* і *ABEF*, де *AB* — твірна циліндра. Площа кожного з цих перерізів дорівнює $\frac{1}{2}$ площі осьового перерізу. Знайти у градусах кут між площинами *ABC* й *ABE*.

38.34. На присадибній ділянці воду для поливу рослин зберігають у циліндричному резервуарі, діаметр основи якого дорівнює 2,5 м. Обчислити висоту резервуару з точністю до 0,01 м, якщо його місткість дорівнює $3\ м^3$.

38.35. Криниця має форму циліндра, діаметр основи якого дорівнює 1,2 м, а глибина — 3 м. Він наповнений водою на $\frac{2}{3}$ глибини. Обчислити з точністю до $0{,}01\ м^3$ об'єм води у криниці.

Тема 39. Конус



Тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо прямої, що містить один з його катетів, називають *конусом*.

Конус складається із круга основи й бічної поверхні (див. рис.).

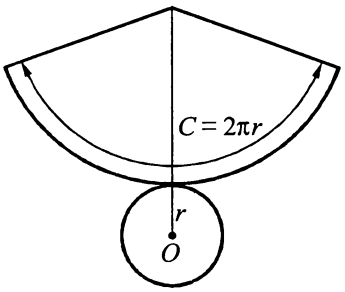
Круг називають *основою* конуса, його радіус — *радіусом* конуса.

Відрізки, що сполучають вершину конуса з точками кола основи, називають *твірними* конуса. Усі твірні конуса рівні.

Пряму, яка проходить через вершину конуса і центр основи, називають *віссю* конуса. Вісь конуса перпендикулярна до площини основи.

Відрізок осі, що сполучає вершину конуса з центром основи, називають *висотою* конуса.

Розгорткою конуса є круговий сектор круга, радіус якого дорівнює твірній конуса l, а довжина дуги — довжині кола основи і круг, радіус якого дорівнює радіусу основи конуса.

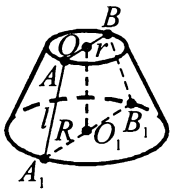


Площа бічної поверхні конуса: $S = \pi Rl$, де R — радіус основи, l — твірна.

Площа повної поверхні конуса: $S_{повн.} = S_{бічн.} + S_{осн.}$. $S_{повн.} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R)$.

Об'єм конуса: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Зрізаний конус



$AA_1 = l$ — твірна. $O_1A_1 = R$, $OA = r$, $OO_1 = h$ — висота.

Осьовий переріз зрізаного конуса — рівнобічна трапеція A_1ABB_1.

Площа бічної поверхні зрізаного конуса: $S = \pi(R + r)l$.

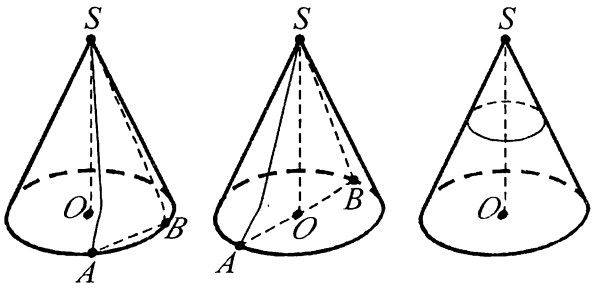
Площа повної поверхні зрізаного конуса: $S_{повн.} = S_{бічн.} + S_1 + S_2$, де S_1 і S_2 — площі основ. $S_{повн.} = \pi(R + r)l + \pi(R^2 + r^2)$, де R і r — радіуси основ.

Об'єм: $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$.

Перерізом конуса площиною, що проходить через його вершину, є рівнобедрений трикутник, у якого бокові сторони — твірні циліндра.

Осьовий переріз конуса — переріз, який проходить через його вісь.

Переріз конуса площиною, паралельною до його основи, є кругом.



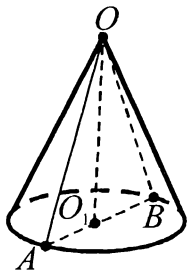
Дотична площина до конуса — площина, яка проходить через твірну конуса та перпендикулярна до площини осьового перерізу, проведеного через цю твірну.

Приклад 1. Обчислити площу бічної поверхні конуса, висота якого дорівнює $3\sqrt{3}$ см, а радіус основи удвічі менший від твірної.

А	Б	В	Г	Д
18π см^2	36π см^2	54π см^2	$9\sqrt{3}\pi$ см^2	48π см^2

■ Нехай OO_1 — конус, висота якого OO_1 дорівнює $3\sqrt{3}$ см. Радіус основи O_1A удвічі менший від твірної AO. Нехай $AO_1 = x$. Тоді з прямокутного трикутника AO_1O отримаємо: $x^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 = (2x)^2$; $4x^2 - x^2 = 27$; $3x^2 = 27$; $x^2 = 9$; $x_1 = 3$, $x_2 = -3$ — не задовольняє умову задачі. Отже, $AO_1 = 3$ (см). $AO = 2x = 6$ (см). Маємо: $S_б = \pi \cdot AO_1 \cdot AO = \pi \cdot 3 \cdot 6 = 18\pi$ (см^2).

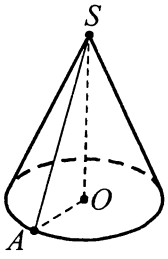
Відповідь. **А.** ■



Приклад 2. Кут між висотою і твірною конуса дорівнює 45°, а висота конуса — $3\sqrt{2}$ см. Знайти площу бічної поверхні конуса.

■ Трикутник SOA — прямокутний ($\angle O = 90°$). $\angle OSA + \angle SAO = 90°$, $\angle SAO = 90° - 45° = 45°$. Отже, трикутник SOA — рівнобедрений, $OA = SO = 3\sqrt{2}$ (см) і $R = OA = 3\sqrt{2}$ см. $SA = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6$ (см). $S_{б.} = \pi \cdot 3\sqrt{2} \cdot 6 = 18\sqrt{2}\,\pi$ (см^2).

Відповідь. $18\sqrt{2}\,\pi$ см^2. ■



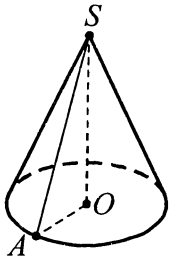
Приклад 3. Висота конуса дорівнює 8 см, довжина кола основи — 12π см. Знайти площу повної поверхні конуса.

■ $C = 2\pi R$. Маємо: $2\pi R = 12\pi$, звідси $R = 6$ см.

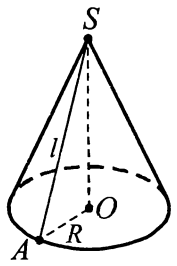
Із прямокутного трикутника SOA ($\angle O = 90°$) маємо: $SA = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

$S_{п.} = \pi \cdot 6(6 + 10) = 96\pi$ (см^2).

Відповідь. 96π см^2. ■



Приклад 4. Площа бічної поверхні конуса втричі більша від площі основи. Знайти об'єм конуса, якщо радіус основи 2 см.

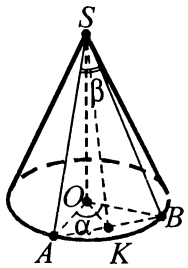


■ $R = 2$ см. $S_{б.} = 3S_{осн.}$; $\pi Rl = 3\pi R^2$; $l = 3R = 6$ (см). $H = \sqrt{l^2 - R^2} = 4\sqrt{2}$ (см).

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$ (см^3).

Відповідь. $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$ см^3. ■

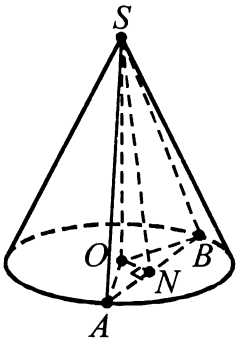
Приклад 5. Через вершину конуса проведено площину, яка перетинає його основу радіуса R по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом α, а з вершини — під кутом β. Визначити площу S перерізу. У відповідь записати значення виразу $\frac{S}{\sqrt{3}}$, якщо $R = 2$ см, $\alpha = 90°$, $\beta = 60°$.



■ Нехай S — вершина конуса, O — центр його основи, SO — висота, OA — радіус. Через вершину конуса проведемо площину, що перетинає його основу по хорді AB, яку видно з центра основи під кутом AOB, а з вершини — під кутом ASB. За умовою, $\angle AOB = \alpha$, $\angle ASB = \beta$, $OA = R$. Оскільки $SA = SB$, то трикутник ASB — рівнобедрений. У трикутнику ASB проведемо медіану SK. Вона буде висотою і бісектрисою. Отже, $SK \perp AB$, $\angle ASK = \angle BSK = \frac{1}{2}\angle ASB = \frac{\beta}{2}$. Із трикутника AOB, у якому $AO = BO = R$, $\angle AOB = \alpha$ за теоремою косинусів одержимо: $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos\angle AOB$; $AB^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos\alpha = 2R^2 - 2R^2\cos\alpha = 2R^2(1 - \cos\alpha) = 2R^2 \cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$. $AB = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$. Із трикутника ASK, у якому $\angle AKS = 90°$, $\angle ASK = \frac{\beta}{2}$, $AK = \frac{1}{2}AB = R\sin\frac{\alpha}{2}$, отримаємо: $SK = AK\operatorname{ctg}\angle ASK = R\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$. $S_{пер.} = \frac{1}{2}AB \cdot SK = \frac{1}{2} \cdot 2R\sin\frac{\alpha}{2} \cdot R\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$. Якщо $R = 2$ см, $\alpha = 90°$, $\beta = 60°$, то $S_{пер.} = 2^2\sin^2 45°\operatorname{ctg}30° = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Тоді $\frac{S}{\sqrt{3}} = 2$.

Відповідь. 2. ■

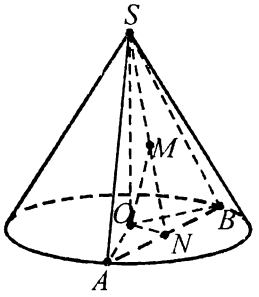
Приклад 6. В основі конуса проведено хорду, яку видно із центра основи під кутом α, а з вершини конуса — під кутом φ. Визначте бічну поверхню конуса, якщо його радіус дорівнює R.



■ Нехай SO — висота конуса, AB — задана хорда, $\angle AOB = \alpha$, $\angle ASB = \varphi$, $OA = R$. Проведемо $SN \perp AB$, тоді $ON \perp AB$. Оскільки трикутники AOB і ASB рівнобедрені, то $\angle AON = \frac{\alpha}{2}$, $\angle ASN = \frac{\varphi}{2}$. З ΔONA: $AN = R \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$. З ΔSNA: $l = SA = \frac{AN}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$. $S_{б.} = \pi Rl = \frac{\pi R^2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$.

Відповідь. $\frac{\pi R^2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$. ■

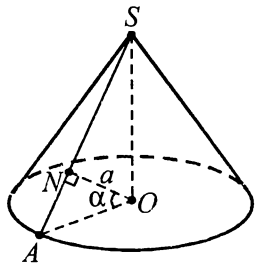
Приклад 7. Через вершину конуса проведено площину, яка перетинає основу конуса по хорді. Цю хорду видно із центра основи під кутом 60°. Відстань від центра основи до середини висоти перерізу дорівнює 4 см. Знайти, під яким кутом площина перерізу нахилена до площини основи, якщо радіус основи конуса дорівнює 8 см.



■ Нехай задана площина перетинає основу конуса по хорді AB, SO — висота конуса, $\angle AOB = 60°$, $OA = 8$ см. Проведемо $SN \perp AB$, M — середина SN, $OM = 4$ см. Оскільки $SN \perp AB$, то $ON \perp AB$. Потрібно знайти $\angle SNO$. $\angle AON = 30°$. З ΔONA: $ON = OA \cdot \cos 30° = 4\sqrt{3}$ (см). OM — медіана прямокутного ΔSON, тому $SN = 2OM = 8$ (см). $\cos\angle SNO = \dfrac{ON}{SN} = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\angle SNO = 30°$.

Відповідь. 30°. ■

Приклад 8. У конусі з центра основи до твірної проведено перпендикуляр, який нахилений до площини основи під кутом α. Знайти об'єм конуса, якщо довжина перпендикуляра дорівнює a.



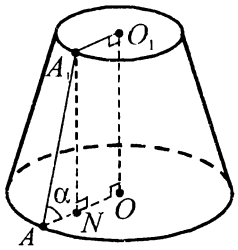
■ Нехай SO — висота конуса, SA — твірна, ON — перпендикуляр до твірної SA; $ON = a$. Оскільки площина SOA перпендикулярна до площини основи конуса, то проекцією прямої ON на площину основи є пряма OA. Тому $\angle NOA = \alpha$.

З ΔANO ($\angle N = 90°$): $R = OA = \dfrac{a}{\cos\alpha}$. $\angle NSO = 90° - \angle NAO = \angle NOA = \alpha$.

З ΔSNO ($\angle N = 90°$): $H = SO = \dfrac{a}{\sin\alpha}$. Отже, $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H = \dfrac{\pi a^3}{3\cos^2\alpha\sin\alpha}$.

Відповідь. $\dfrac{\pi a^3}{3\cos^2\alpha\sin\alpha}$. ■

Приклад 9. Твірна зрізаного конуса нахилена до площини більшої основи під кутом α. Радіуси основ R і r ($R > r$). Знайти площу бічної поверхні зрізаного конуса.

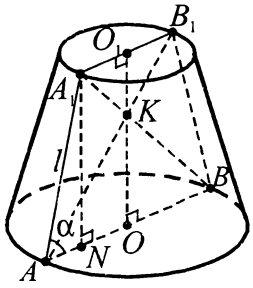


■ Нехай A_1A — твірна заданого зрізаного конуса, O_1O — його вісь, $OA = R$ і $O_1A_1 = r$ ($R > r$). Прямі AA_1 і OO_1 перетинаються (у вершині повного конуса), а тому точки A, A_1, O_1 і O лежать в одній площині. Оскільки ця площина перетинає паралельні площини основ зрізаного конуса по прямих AO та A_1O_1 і містить його висоту O_1O, то $AO \parallel A_1O_1$ і $O_1O \perp AO$. Отже, AA_1O_1O — прямокутна трапеція і O_1O — її висота. Проведемо висоту A_1N трапеції. Тоді $A_1N \parallel O_1O$, звідки A_1N перпендикулярна до площини нижньої основи. Ортогональною проекцією твірної A_1A на площину нижньої основи є відрізок NA, а тому $\angle A_1AN = \alpha$.

$AN = AO - NO = R - r$. З ΔA_1NA ($\angle N = 90°$): $l = A_1A = \dfrac{AN}{\cos\alpha} = \dfrac{R-r}{\cos\alpha}$. Тоді

$S_{б.} = \pi(R+r) \cdot l = \pi(R+r) \cdot \dfrac{R-r}{\cos\alpha} = \dfrac{\pi\left(R^2 - r^2\right)}{\cos\alpha}$. Відповідь. $\dfrac{\pi\left(R^2 - r^2\right)}{\cos\alpha}$. ■

Приклад 10. У зрізаному конусі діагоналі осьового перерізу взаємно перпендикулярні, а твірна l утворює з площиною більшої основи кут α. Знайти площу бічної поверхні конуса.



■ Нехай AA_1B_1B — осьовий переріз зрізаного конуса, AB і A_1B_1 — діаметри відповідно більшої та меншої основ, O_1 і O — центри основ. Тоді O_1O — висота зрізаного конуса, $A_1A = B_1B$ — його твірні. Оскільки площина AA_1B_1 перетинає паралельні площини основ конуса по паралельних прямих AB та A_1B_1, то AA_1B_1B — рівнобічна трапеція, O_1O — її висота. $A_1A = l$, $A_1B \perp B_1A$. Проведемо висоту A_1N трапеції. Тоді $A_1N \parallel O_1O$, а тому A_1N перпендикулярна до площини

нижньої основи. Ортогональною проекцією твірної A_1A на площину нижньої основи є відрізок NA. За умовою задачі, $\angle A_1AN = \alpha$.

Площа бічної поверхні $S_{б.} = \pi(R + r)l$, де $R = OA$, $r = O_1A_1$.

Із прямокутного трикутника A_1NA знаходимо висоту A_1N трапеції: $A_1N = l\sin\alpha$. Покажемо, що $R + r = A_1N$. З рівності трикутників A_1AB і B_1BA (AB — спільна, $A_1A = B_1B$ і $\angle A_1AB = \angle B_1BA$) випливає, що $\angle A_1BA = \angle B_1AB$. Нехай K — точка перетину діагоналей A_1B і B_1A. Тоді ΔAKB прямокутний ($\angle K = 90°$) і рівнобедрений ($\angle A = \angle B$), а тому $\angle A_1BA = 45°$. Оскільки $A_1N \| O_1O$, $A_1O_1 \| NO$ і $\angle O_1ON = 90°$, то чотирикутник A_1O_1ON є прямокутником. Тому $ON = A_1O_1 = r$, $BN = BO + ON = R + r$. З ΔA_1NB ($\angle N = 90°$, $\angle B = 45°$): $A_1N = BN = R + r$. Отже, $R + r = A_1N = l\sin\alpha$.

Знаходимо: $S_{б.} = \pi l\sin\alpha \cdot l = \pi l^2\sin\alpha$.

Відповідь. $\pi l^2\sin\alpha$. ■

Приклад 11. Площі основ зрізаного конуса дорівнюють 4 м^2 і 16 м^2. Через середину висоти проведено площину паралельно до основи. Знайти площу перерізу.

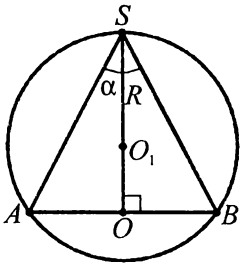
■ $S_1 = 4$ м^2, $S_2 = 6$ м^2. $R_1 = \sqrt{\dfrac{S_1}{\pi}} = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$ (м), $R_2 = \sqrt{\dfrac{S_2}{\pi}} = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}}$ (м) — радіуси основ.

$R = \dfrac{R_1 + R_2}{2} = \dfrac{3}{\sqrt{\pi}}$ (м) — радіус перерізу. Площа перерізу: $S = \pi R^2 = 9$ (м^2).

Відповідь. 9 м^2. ■

Приклад 12. Конус вписано в кулю, радіус якої дорівнює R. Знайти площу бічної поверхні конуса, якщо кут при вершині його осьового перерізу дорівнює α.

■ На рисунку зображено осьовий переріз конуса та кулі, SO — висота конуса, $SA = SB$ — його твірні, O_1 — центр описаної кулі, $O_1S = R$, $\angle ASB = \alpha$.



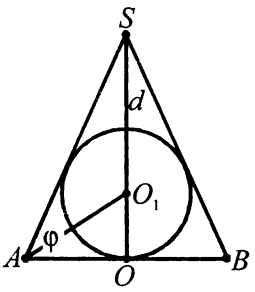
За наслідком з теореми синусів для трикутника ASB маємо: $\dfrac{AB}{\sin\alpha} = 2R$; $AB = 2R \cdot \sin\alpha$. У рівнобедреному трикутнику ASB висота SO є його медіаною і бісектрисою. Тому $\angle OSB = \dfrac{\alpha}{2}$, $OB = \dfrac{AB}{2} = R \cdot \sin\alpha$. З ΔSOB: $SB = \dfrac{OB}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} =$

$= \dfrac{R\sin\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} = 2R\cos\dfrac{\alpha}{2}$. Отже, $S_{б.} = \pi \cdot OB \cdot SB = 2\pi R^2\sin\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

Відповідь. $2\pi R^2\sin\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}$. ■

Приклад 13. Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом φ. Відстань від вершини конуса до центра вписаної в нього кулі дорівнює d. Визначити площу бічної поверхні конуса.

■ На рисунку зображено осьовий переріз конуса та кулі, SO — висота конуса, $SA = SB$ — його твірні, $\angle SAB = \varphi$, O_1 — центр вписаної кулі, $SO_1 = d$.

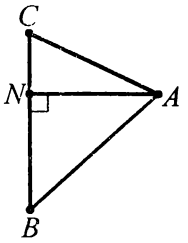


У рівнобедреному трикутнику ASB центр O_1 вписаного кола лежить на висоті SO. Врахувавши, що промінь AO_1 є бісектрисою кута SAB, знаходимо кути трикутника ASO_1: $\angle A = \dfrac{\varphi}{2}$; $\angle S = 90° - \varphi$, $\angle O_1 = 180° - \angle A - \angle S = 90° + \dfrac{\varphi}{2}$. З ΔASO_1 за теоремою синусів: $\dfrac{SA}{\sin\left(90° + \dfrac{\varphi}{2}\right)} = \dfrac{SO_1}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}$; $SA = \dfrac{SO_1 \cdot \cos\dfrac{\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\varphi}{2}} = d\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$.

З ΔSOA: $OA = SA \cdot \cos\varphi$. Отже, $S_{б.} = \pi \cdot OA \cdot SA = \pi \cdot SA^2 \cdot \cos\varphi = \pi d^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} \cos\varphi$.

Відповідь. $\pi d^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} \cos\varphi$. ■

Приклад 14. Трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см обертається навколо сторони 14 см. Знайти площу поверхні та об'єм тіла обертання.



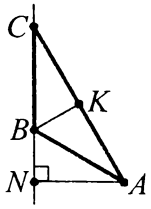
■ Нехай у трикутнику ABC $AB = 15$ см, $BC = 14$ см, $CA = 13$ см, T — тіло, утворене обертанням цього трикутника навколо сторони BC. Проведемо висоту AN трикутника ABC. Покажемо, що N — внутрішня точка сторони BC. Для цього достатньо довести, що кути B і C — гострі. За теоремою косинусів $AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2 \cdot BC \cdot CA \cdot \cos\angle C$, звідки: $15^2 = 14^2 + 13^2 - 2 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \cos\angle C$; $2 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \cos\angle C = 140$; $\cos\angle C = \frac{5}{13}$. Оскільки $\cos\angle C > 0$, то $\angle C$ — гострий. У трикутнику ABC кут B лежить проти найменшої сторони, а тому $\angle B < \angle C < 90°$. Отже, N — внутрішня точка сторони BC. У такому випадку тіло T є об'єднанням двох конусів зі спільною основою радіуса $R = NA$ та висотами CN і BN. Знайдемо радіус NA з трикутника CNA: $NA = CA \cdot \sin\angle C = CA \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \angle C} = 13 \cdot \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = 13 \cdot \frac{12}{13} = 12$ (см).

Площа S поверхні тіла T дорівнює сумі площ бічних поверхонь зазначених конусів: $S = \pi \cdot NA \cdot CA + \pi \cdot NA \cdot BA = \pi \cdot NA \cdot (CA + BA) = \pi \cdot 12 \cdot (13 + 15) = 336\pi$ (см^2).

Об'єм V тіла T дорівнює сумі об'ємів конусів: $V = \frac{1}{3}\pi NA^2 \cdot CN + \frac{1}{3}\pi NA^2 \cdot BN = \frac{1}{3}\pi NA^2 \cdot (CN + NB) = \frac{1}{3}\pi NA^2 \cdot CB = \frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 14 = 672\pi$ (см^3).

Відповідь: 336π см^2; 672π см^3. ■

Приклад 15. Рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 16 см і бічна сторона — 10 см, обертається навколо бічної сторони. Знайти площу поверхні та об'єм тіла обертання.



■ Нехай у трикутнику ABC $AC = 16$ см, $BC = BA = 10$ см. Проведемо висоти BK і AN трикутника. Тоді BK — його медіана і бісектриса. $CK = \frac{1}{2}AC = 8$ (см). З ΔCKB: $BK = \sqrt{BC^2 - CK^2} = 6$ (см). Оскільки $\operatorname{tg}\angle CBK = \frac{CK}{BK} = \frac{8}{6} > 1$, то $\angle CBK > 45°$, а тому $\angle CBA > 90°$. Отже, об'єм V тіла T, утвореного обертанням трикутника ABC навколо бічної сторони BC, дорівнює різниці об'ємів конусів зі спільною основою (радіус $R = NA$) та висотами CN і BN. Площа S поверхні тіла T дорівнює сумі площ бічних поверхонь цих конусів. Знайдемо радіус основи конусів: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BK = \frac{1}{2}CB \cdot NA$; $NA = \frac{AC \cdot BK}{CB} = \frac{16 \cdot 6}{10} = 9{,}6$ (см). Тоді: $S = \pi \cdot NA \cdot CA + \pi \cdot NA \cdot BA = 249{,}6\pi$ (см^2). $V = \frac{1}{3}\pi NA^2 \cdot CN - \frac{1}{3}\pi NA^2 \cdot BN = \frac{1}{3}\pi NA^2 \cdot CB = 307{,}2\pi$ (см^3).

Відповідь. $249{,}6\pi$ см^2, $307{,}2\pi$ см^3. ■

Завдання 39.1–39.21 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

39.1. Діаметр основи конуса 8 см, а його висота 3 см. Знайти твірну конуса.

А	Б	В	Г	Д
10 см	$\sqrt{73}$ см	2 см	10 см	5 см

39.2. Твірна конуса дорівнює l, а кут між твірною і висотою — β. Визначити площу бічної поверхні конуса.

А	Б	В	Г	Д
$\pi l^2 \cos\beta$	$\pi l^2 \sin\beta$	$2\pi l^2 \cos\beta$	$\frac{\pi l^2}{\sin\beta}$	$\frac{\pi l^2}{\cos\beta}$

39.3. Знайти площу повної поверхні конуса, твірна якого дорівнює 10 см, а радіус основи дорівнює 6 см.

А	Б	В	Г	Д
160π см^2	96π см^2	320π см^2	192 см^2	48π см^2

39.4. Прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см обертається навколо меншого катета. Обчислити об'єм утвореного тіла обертання.

А	Б	В	Г	Д
16π см^3	12π см^3	36π см^3	48π см^3	4π см^3

39.5. Осьовим перерізом конуса є прямокутний трикутник. Радіус основи конуса дорівнює 6. Знайти площу осьового перерізу конуса.

А	Б	В	Г	Д
72	9	12	18	36

39.6. Радіус основи конуса дорівнює 8 см, а його твірна — 10 см. Знайти площу осьового перерізу конуса.

А	Б	В	Г	Д
48 см^2	24 см^2	96 см^2	60 см^2	72 см^2

39.7. Розгорткою бічної поверхні конуса є сектор, радіус якого дорівнює 9 см, а дуга — 120°. Знайти радіус конуса.

А	Б	В	Г	Д
4,5 см	1,5 см	6 см	3 см	9 см

39.8. Висоту конуса поділено на чотири рівні відрізки і через точки поділу паралельно основі проведено площини. Визначити площу найбільшого перерізу, якщо площа основи дорівнює S.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{4}S$	$\frac{3}{4}S$	$\frac{3}{16}S$	$\frac{1}{16}S$	$\frac{9}{16}S$

39.9. Хорду основи конуса, довжина якої a, видно з центра основи під кутом α. Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом β. Визначити висоту конуса.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{a\operatorname{tg}\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$	$\frac{a\operatorname{tg}\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$	$\frac{a\operatorname{ctg}\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$	$\frac{a\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$	$\frac{a\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$

39.10. Радіус основи конуса дорівнює r. Визначити площу перерізу, який проходить через вершину конуса і хорду основи, яка стягує дугу 60°, якщо площина перерізу утворює з площиною основи конуса кут 30°.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{r^2}{\sqrt{3}}$	$\frac{3}{2}r^2$	$2r^2$	r^2	$\frac{r^2}{2}$

39.11. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 7 см і 15 см, а його твірна — 10 см. Знайти висоту конуса.

А	Б	В	Г	Д
3 см	$4\sqrt{21}$ см	$2\sqrt{21}$ см	6 см	12 см

39.12. Два конуси мають однакову площу бічної поверхні. Знайти відношення площ їх основ, якщо твірна першого конуса утричі більша від твірної другого.

А	Б	В	Г	Д
1 : 9	1 : 3	1 : 81	2 : 3	4 : 9

39.13. Осьовим перерізом конуса є правильний трикутник зі стороною $2r$. Визначити площу перерізу, проведеного через дві твірні, кут між якими дорівнює 30°.

А	Б	В	Г	Д
r^2	$2r^2$	$3r^2$	$4r^2$	$\frac{r^2}{2}$

39.14. Найбільший кут між твірними конуса дорівнює 60°. Знайти відношення бічної поверхні до площі основи конуса.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

39.15. Відношення площі основи конуса до площі осьового перерізу дорівнює π. Знайти кут нахилу твірної до основи.

А	Б	В	Г	Д
15°	30°	45°	60°	75°

39.16. Півкруг згорнули в конус. Знайти кут при вершині осьового перерізу цього конуса.

А	Б	В	Г	Д
30°	45°	60°	90°	120°

39.17. Розгорткою бічної поверхні конуса є сектор з дугою α. Знайти α, якщо висота конуса дорівнює 4 см, а радіус основи — 3 см.

А	Б	В	Г	Д
54°	72°	58°	216°	108°

39.18. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a. Бічна грань утворює з площиною основи кут α. Визначити об'єм конуса, вписаного в піраміду.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi a^3 \operatorname{tg}\alpha}{8}$	$\frac{\pi a^3 \operatorname{ctg}\alpha}{8}$	$\frac{\pi a^3 \sin\alpha}{8}$	$\frac{\pi a^3 \operatorname{ctg}\alpha}{24}$	$\frac{\pi a^3 \operatorname{tg}\alpha}{24}$

39.19. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює b й утворює з площиною основи кут α. Визначити об'єм конуса, описаного навколо піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$\pi b^3 \operatorname{tg}^3\alpha$	$\pi b^3 \sin^2\alpha\cos\alpha$	$\pi b^3 \cos^2\alpha\sin\alpha$	$\frac{\pi b^3}{3}\sin^2\alpha\cos\alpha$	$\frac{\pi b^3}{3}\cos^2\alpha\sin\alpha$

39.20. Трикутник зі сторонами 3 см, 4 см і 5 см обертається навколо найбільшої сторони. Знайти площу поверхні обертання.

А	Б	В	Г	Д
10π см^2	$12{,}6\pi$ см^2	$14{,}4\pi$ см^2	$16{,}8\pi$ см^2	$20{,}2\pi$ см^2

39.21. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють R і r, а твірна — l. Знайти твірну повного конуса, від якого відокремлений зрізаний конус.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{Rl}{r}$	$\frac{Rl}{R-r}$	$\frac{Rl}{R+r}$	$\frac{R+r}{Rl}$	$\frac{R-r}{Rl}$

Завдання 39.22–39.24 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

39.22. Установити відповідність між кутом при вершині осьового перерізу конуса (1–4) та відношенням площ його бічної поверхні та основи (А–Д).

1 30°
2 90°
3 60°
4 120°

А $\sqrt{2}$
Б 2
В $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$
Г $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$
Д $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

39.23. Установити відповідність між довжинами висоти та радіуса основи (1–4) конуса і кутом (А–Д) сектора, який є розгорткою бічної поверхні конуса.

1 4 см, 3 см
2 3 см, 4 см
3 12 см, 5 см
4 24 см, 7 см

А $\frac{8\pi}{5}$
Б $\frac{10\pi}{13}$
В $\frac{24\pi}{13}$
Г $\frac{6\pi}{5}$
Д $\frac{14\pi}{25}$

39.24. Установити відповідність між кутом нахилу твірної конуса (1–4) та відношенням площ його основи та осьового перерізу (А–Д).

1 30°
2 45°
3 60°
4 15°

А $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$
Б $\pi\sqrt{3}$
В $\pi\left(2+\sqrt{3}\right)$
Г π
Д $2\pi\sqrt{3}$

Розв'яжіть завдання 39.25–39.37. Відповідь запишіть десятковим дробом.

39.25. Осьовим перерізом конуса є прямокутний трикутник. Знайти площу S бічної поверхні конуса, якщо радіус основи конуса дорівнює 5. У відповідь записати $\frac{S\sqrt{2}}{\pi}$.

39.26. Площа осьового перерізу конуса дорівнює 0,6. Висота конуса дорівнює 1,2. Обчислити площу S повної поверхні конуса. У відповідь записати $\frac{S}{\pi}$.

39.27. Твірна конуса утворює з його основою кут 30°, а площа перерізу, що проходить через твірні, кут між якими 120°, дорівнює $\sqrt{3}$. Знайти об'єм V конуса. У відповідь записати $\frac{V}{\pi}$.

39.28. Бічна поверхня конуса дорівнює 10 см^2 і розгортається в сектор з кутом 36°. Знайти у квадратних сантиметрах повну поверхню конуса.

39.29. Висота конуса дорівнює 6. Розгорткою бічної поверхні цього конуса є сектор з центральним кутом 120°. Визначити об'єм V конуса. У відповідь записати $\frac{V}{\pi}$.

39.30. Знайти об'єм V тіла, яке утворюється при обертанні ромба зі стороною 1 і гострим кутом 60° навколо меншої діагоналі. У відповідь записати $\frac{V}{\pi}$.

39.31. Ромб, площа якого дорівнює Q, обертається навколо сторони. Визначити площу S поверхні одержаного тіла. У відповідь записати значення виразу $\frac{S}{\pi Q}$.

39.32. Рівнобічну трапецію, основи якої дорівнюють 8 і 18, обертають навколо більшої основи. Знайти площу S поверхні тіла обертання, якщо відомо, що в цю трапецію можна вписати коло. У відповідь записати $\frac{S}{\pi}$.

39.33. У конус із радіусом $\sqrt{3}$ і висотою 3 вписано правильну трикутну призму, всі ребра якої рівні. Визначити ребро призми.

39.34. У конус із твірною $\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}$, яка нахилена до площини його основи під кутом 60°, вписано кулю. Знайти об'єм кулі.

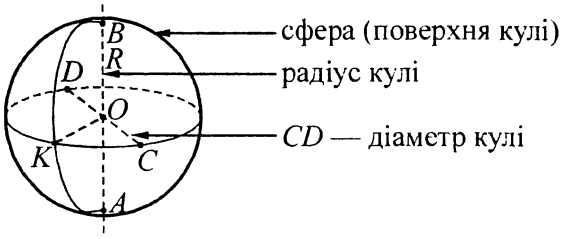
39.35. Визначити бічну поверхню конуса, вписаного в правильний тетраедр з ребром $\frac{5}{\sqrt{\pi}}$.

39.36. Бічною поверхнею конус розгортається у чверть круга. Визначити повну поверхню цього конуса, якщо площа його осьового перерізу дорівнює $\frac{\sqrt{15}}{\pi}$.

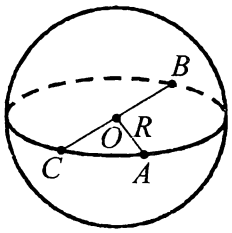
39.37. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює 60°. Визначити площу бічної поверхні конуса, описаного навколо піраміди, якщо її висота дорівнює $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\pi}}$.

Тема 40. Куля

Кулею називають тіло, утворене внаслідок обертання півкруга навколо прямої, що містить його діаметр (див. рис.). На рисунку зображено кулю, яка утворена внаслідок обертання півкола навколо його діаметра AB. AB — діаметр кулі, O — центр кулі. Пряму, яка містить діаметр кулі, вважають *віссю кулі*. Поверхню кулі називають *сферою*.



Діаметральна площина — площина, яка проходить через центр кулі. Переріз кулі діаметральною площиною — великий круг, а переріз сфери — велике коло. Будь-який переріз кулі площиною є кругом. Центр цього круга — основа перпендикуляра, опущеного з центра кулі на січну площину.



Площа сфери

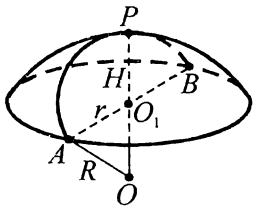
Площу сфери обчислюють за формулою $S = 4\pi R^2$. Площі двох сфер відносяться як квадрати їх радіусів або діаметрів.

Об'єм кулі

Об'єм кулі обчислюють за формулою $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Об'єми двох куль відносяться як куби їх радіусів або діаметрів.

Кульовий сегмент

Кульовий сегмент (*сферичний сегмент*) — частина кулі, яка відтинається від неї площиною. $OA = R$ — радіус кулі, $O_1A = r$ — радіус основи сегмента, $O_1P = H$ — висота сегмента.

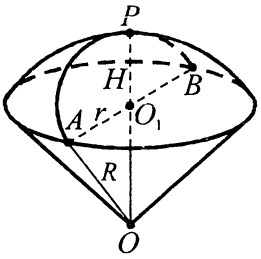


$S_{\text{бічн.}} = 2\pi RH$.

$V = \pi H\left(R - \frac{1}{3}H\right)$; $V = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H)$.

Кульовий сектор

Кульовий сектор складається із кульового сегмента та відповідного конуса. $R = OA$ — радіус кулі, $H = O_1P$ — висота сегмента.



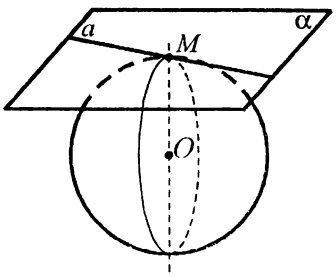
$S = \pi R\left(2H + \sqrt{2RH - H^2}\right)$.

$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$.

Дотичні площина і пряма до кулі (сфери)

Дотична площина (пряма) має з кулею (сферою) тільки одну спільну точку.

Дотична площина (пряма) перпендикулярна до радіуса кулі (сфери), проведеного в точку дотику, і навпаки: якщо площина (пряма) проходить через точку кулі (сфери) і перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то вона дотикається до кулі (сфери).



Приклад 1. Обчислити площу поверхні кулі, якщо її радіус дорівнює 2 см.

■ $S_{сф.} = 4\pi R^2$. $S_{сф.} = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi$ (см^2).

Відповідь. 16π см^2. ■

Приклад 2. Знайти об'єм кулі, якщо її обмежує сфера, площа якої дорівнює 100π см^2.

■ $S_{сф.} = 4\pi R^2$. $4\pi R^2 = 100\pi$, $R^2 = 25$, $R = 5$ (см). $V_к = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 = \frac{500}{3}\pi$ (см^3).

Відповідь. $\frac{500}{3}\pi$ см^3. ■

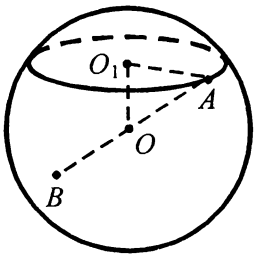
Приклад 3. У скільки разів потрібно збільшити радіус кулі, щоб її об'єм збільшився у 8 разів?

■ Нехай радіус даної кулі дорівнює R_1, а радіус кулі після збільшення — R_2. Тоді: $V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3$, $V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3$. Маємо: $V_2 = 8V_1$, $\frac{4}{3}\pi R_2^3 = 8 \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3$, $R_2^3 = 8R_1^3$, $R_2^3 = (2R_1)^3$. Отже, $R_2 = 2R_1$, тобто радіус кулі потрібно збільшити удвічі.

Відповідь. Збільшити удвічі. ■

Приклад 4. Площина перетинає кулю. Діаметр кулі, проведений з однієї з точок лінії перетину, утворює з площиною кут 45°. Знайдіть площу перерізу, якщо діаметр кулі дорівнює $4\sqrt{3}$ см.

■ Нехай площина перетинає кулю по кругу з центром у точці O_1, O_1A — радіус круга, AB — діаметр кулі, а точка O — її центр. За умовою, $AB = 4\sqrt{3}$ см. Оскільки центр O_1 круга є основою перпендикуляра, опущеного з центра кулі на січну площину, то проекцією прямої OA на цю площину є пряма O_1A, а тому $\angle OAO_1 = 45°$.

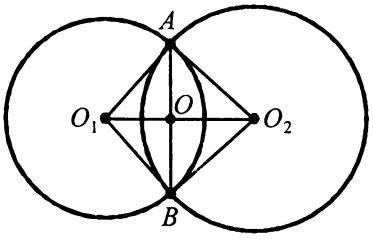


Знайдемо радіус O_1A круга. $OA = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{3}$ (см). З ΔOO_1A ($\angle O_1 = 90°$): $O_1A = OA\cos 45° = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}$ (см). Тоді площа круга: $S = \pi \cdot O_1A^2 = \pi \cdot \left(\sqrt{6}\right)^2 = 6\pi$ (см^2).

Відповідь: 6π см^2. ■

Приклад 5. Радіуси двох куль дорівнюють 25 дм і 29 дм, а відстань між їх центрами — 36 дм. Визначити довжину лінії, по якій перетинаються їх поверхні.

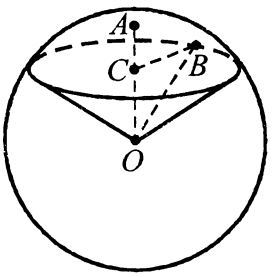
■ На рисунку зображено переріз куль площиною, що проходить через їх центри O_1 і O_2. Нехай $R_1 = 25$ дм і $R_2 = 29$ дм — радіуси куль відповідно з центрами O_1 і O_2, $O_1O_2 = 36$ дм. Оскільки $R_1 + R_2 > O_1O_2$, а $R_2 - R_1 < O_1O_2$, то поверхні куль перетинаються по колу. На рисунку AB — діаметр цього кола, висота AO трикутника O_1AO_2 — його радіус.



Знайдемо радіус кола, використавши формулу Герона для обчислення площі трикутника O_1AO_2. $p = \frac{25+29+36}{2} = 45$ (дм). $S = \sqrt{45(45-25)(45-29)(45-36)} = 360$ (дм^2). З іншого боку, $S = \frac{1}{2}O_1O_2 \cdot OA$, звідки $OA = \frac{2S}{O_1O_2} = \frac{2 \cdot 360}{36} = 20$ (дм). Тоді довжина кола дорівнює: $l = 2\pi OA = 40\pi$ (дм).

Відповідь. 40π дм. ■

Приклад 6. Визначити об'єм меншого кульового сектора кулі, якщо радіус кола його основи дорівнює 60 см, а радіус кулі — 75 см.

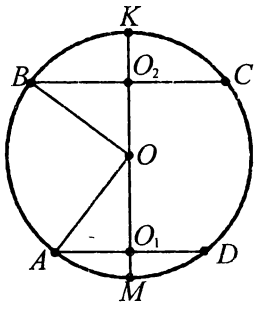


■ Нехай O — центр кулі, OA — вісь меншого кульового сектора, C — центр кола основи сектора, CB — радіус цього кола; $CB = 60$ см, $OA = OB = 75$ см.

Об'єм кульового сектора дорівнює: $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$, де $R = OA$, $H = CA$. З ΔOCB $(\angle C = 90°)$: $OC = \sqrt{OB^2 - CB^2} = 45$ (см). $CA = OA - OC = 75 - 45 = 30$ (см). Отже, $V = \frac{2}{3}\pi \cdot 75^2 \cdot 30 = 112500\pi$ (см^3).

Відповідь. 112500π см^3. ■

Приклад 7. Радіуси основ кульового пояса дорівнюють 10 см і 12 см, а його висота — 11 см. Знайдіть поверхню сферичного пояса, якщо паралельні площини, які перетинають кулю, розміщені з різних боків від центра кулі.

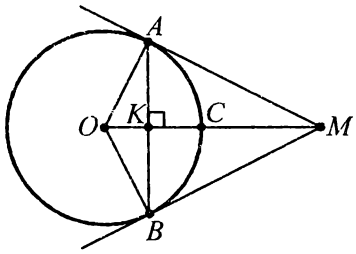


■ На рисунку зображено переріз сфери, $O_1A = 10$ см, $O_2B = 12$ см, $H = O_1O_2 = 11$ см. Площа поверхні пояса: $S = 4\pi R^2 - (S_1 + S_2)$, де R — радіус кулі, S_1, S_2 — площі поверхонь сферичних сегментів з висотами $H_1 = O_1M$ і $H_2 = O_2K$. $S = 4\pi R^2 - (2\pi RH_1 + 2\pi RH_2) = 2\pi R(2R - H_1 - H_2) = 2\pi RH$.

Знайдемо R: $O_1O + OO_2 = O_1O_2$; $\sqrt{R^2 - 10^2} + \sqrt{R^2 - 12^2} = 11$; $R^2 - 10^2 = \left(11 - \sqrt{R^2 - 12^2}\right)^2$; $R = 12{,}5$ (см). Отже, $S = 2\pi \cdot 12{,}5 \cdot 11 = 275\pi$ (см^2).

Відповідь. 275π см^2. ■

Приклад 8. На якій відстані від центра кулі радіуса 12 см повинна міститися точка, яка світиться, щоб вона освітлювала $\frac{1}{3}$ її поверхні?



■ Нехай M — точка, яка освітлює $\frac{1}{3}$ поверхні кулі радіуса $R = 12$ см. На рисунку зображено осьовий переріз кулі площиною, що проходить через точку M; O — центр кулі. Потрібно знайти довжину відрізка OM.

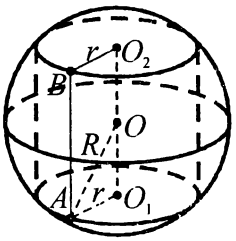
Проведемо через точку M дотичні MA й MB до кола, що обмежує осьовий переріз, і нехай C — точка перетину цього кола з відрізком OM. Точка M освітлюватиме дугу ACB цього кола і сферичний сегмент, утворений обертанням дуги AC навколо осі OM. Проведемо висоту AK трикутника OAM. Тоді $KC = H$ — висота сферичного сегмента; його площа $S = 2\pi RH$. Оскільки ця площа становить третину площі поверхні кулі, то: $2\pi RH = \frac{1}{3} \cdot 4\pi R^2$; $H = \frac{2}{3}R = 8$ (см). Тоді $OK = OC - KC = 12 - 8 = 4$ (см). Трикутники OAM і OKA прямокутні $(\angle OAM = \angle OKA = 90°)$, мають спільний гострий кут O, а тому є подібними. Звідки: $\frac{OM}{OA} = \frac{OA}{OK}$; $OM = \frac{OA^2}{OK} = \frac{12^2}{4} = 36$ (см).

Відповідь. 36 см. ■

Приклад 9. Навколо циліндра описана куля. Площа основи циліндра дорівнює 64π см^2, а його висота — 30 см. Знайти радіус кулі.

А	Б	В	Г	Д
15 см	3 см	9 см	17 см	20 см

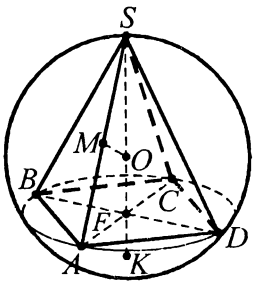
■ Нехай циліндр, у якого круги $(O_1; r)$ і $(O_2; r)$ — основи, $S_{осн.} = 64\pi$ см^2, вписано в кулю $(O; R)$, $R = OA$. Оскільки площа основи циліндра дорівнює 64π см^2, то $\pi r^2 = 64\pi$; $r = 8$ (см). Із трикутника AO_1O ($\angle O_1 = 90°$), у якому $AO_1 = r = 8$ см, $OO_1 = 30 : 2 = 15$ (см), за теоремою Піфагора маємо: $OA^2 = OO_1^2 + AO_1^2$, звідки $OA = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$ (см).



Відповідь. Г. ■

Приклад 10. У кулю вписано правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a. Визначити площу поверхні кулі, якщо бічне ребро піраміди нахилене до площини основи під кутом α. У відповідь записати значення виразу $\frac{S}{\pi}$, якщо $a = 4$ см, $\alpha = 45°$

■ Нехай $SABCD$ — задана правильна чотирикутна піраміда, сторона основи якої дорівнює a. Проведемо діагоналі основи AC і BD. Вони перетинаються в точці F. Оскільки піраміда правильна, то її вершина — точка S — проектується у центр кола, описаного навколо основи піраміди — точку F. Тоді висота піраміди проходить через цю точку. Отже, SF — перпендикуляр до площини основи, SA — похила, FA — її проекція. Кут SAF — кут нахилу бічного ребра до площини основи. За умовою, $\angle SAF = \alpha$. У трикутнику SFA побудуємо серединний перпендикуляр MO до гіпотенузи SA. Тоді $SO = AO$. Аналогічно можна довести, що точка O рівновіддалена від інших вершин піраміди, тобто є центром кулі, описаної навколо даної піраміди. Тому $SO = AO = R$. Площина, проведена через діагональ основи AC і вершину S піраміди, перетинає кулю по великому кругу, описаному навколо діагонального перерізу піраміди — трикутнику ASC, у якому $\angle SAC = \angle SCA = \alpha$, $\angle ASC = 180° - 2\alpha$. За наслідком з теореми синусів $\frac{AC}{\sin(180° - 2\alpha)} = 2R$; $R = \frac{AC}{2\sin 2\alpha}$. Із трикутника ACD ($\angle D = 90°$) за теоремою Піфагора одержимо:



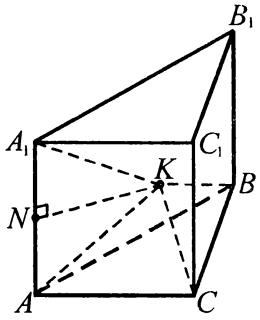
$AC^2 = AD^2 + CD^2$; $AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$; $AC = a\sqrt{2}$. Тоді $R = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin 2\alpha}$. Площу поверхні кулі можна обчислити за формулою $S = 4\pi R^2$. $S = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2\sin 2\alpha}\right)^2 = \frac{2\pi a^2}{\sin^2 2\alpha}$. Якщо $a = 4$ см, $\alpha = 45°$, то $S = \frac{2\pi \cdot 4^2}{\sin^2(2 \cdot 45°)} = 32\pi$.

Тоді $\frac{S}{\pi} = \frac{32\pi}{\pi} = 32$.

Відповідь. 32. ■

Приклад 11. Навколо правильної трикутної призми описано кулю. Радіус кулі, проведений до вершини призми, утворює з бічним ребром кут γ. Визначити об'єм кулі, якщо бічне ребро призми дорівнює b.

■ Нехай K — центр кулі, описаної навколо правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$, $AA_1 = b$, $\angle KAA_1 = \gamma$.



Об'єм кулі $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, де R — її радіус. Проведемо радіуси KA і KA_1 описаної кулі та висоту KN утвореного трикутника KAA_1. Оскільки $KA = KA_1 = R$, то ΔKAA_1 — рівнобедрений, а тому його висота KN є одночасно медіаною, звідки $AN = \frac{b}{2}$. З ΔANK ($\angle N = 90°$): $R = KA = \frac{AN}{\cos\gamma} = \frac{b}{2\cos\gamma}$. Отже, $V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{b}{2\cos\gamma}\right)^3 = \frac{\pi b^3}{6\cos^3\gamma}$.

Відповідь. $\frac{\pi b^3}{6\cos^3\gamma}$. ■

Завдання 40.1–40.21 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

40.1. Кулю, радіус якої 5 см, перетнуто площиною, що розміщена на відстані 3 см від центра. Знайти площу перерізу.

А	Б	В	Г	Д
4π см^2	8π см^2	12π см^2	16π см^2	32π см^2

40.2. Діаметр кулі дорівнює 6 см. Точка А лежить на дотичній площині на відстані 4 см від точки дотику. Знайти відстань від точки А до поверхні кулі.

А	Б	В	Г	Д
0,5 см	1 см	2 см	3 см	4 см

40.3. Площа великого круга кулі дорівнює 4π см^2. Знайти об'єм кулі.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{64}{3}\pi$ см^3	16π см^3	32π см^3	$\frac{32}{3}\pi$ см^3	64π см^3

40.4. Діаметр кулі дорівнює 6 см. Знайти площу поверхні кулі.

А	Б	В	Г	Д
18π см^2	36π см^2	54π см^2	72π см^2	108π см^2

40.5. Площина перетинає сферу. Довжина лінії перетину дорівнює 10π см, а діаметр сфери, проведений в одну з точок лінії перетину, утворює з площиною перетину кут 60°. Знайти площу поверхні сфери.

А	Б	В	Г	Д
40π см^2	100π см^2	25π см^2	1600π см^2	400π см^2

40.6. Відстань між рівновеликими паралельними перерізами кулі, радіус якої становить 10 см, дорівнює 12 см. Знайти площу кожного з цих перерізів.

А	Б	В	Г	Д
22π см^2	16π см^2	64π см^2	128π см^2	100π см^2

40.7. Об'єми двох куль відносяться як 27 : 125. Як відносяться площі їх поверхонь?

А	Б	В	Г	Д
9 : 25	3 : 5	$\sqrt{27} : \sqrt{125}$	27 : 125	$\sqrt[3]{27} : \sqrt[3]{125}$

40.8. Діаметр одного кавуна вдвічі більший від діаметра іншого. У скільки разів перший кавун важчий від другого?

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	8	16

40.9. М'яч, площа повної поверхні якого дорівнює 400π см^2, зробив один повний оберт по прямій. Знайти довжину шляху, яку він при цьому подолав.

А	Б	В	Г	Д
10π см	20π см	30π см	40π см	60π см

40.10. На поверхні кулі радіуса r дано дві точки, відстань між якими дорівнює радіусу кулі. Визначити найкоротшу відстань на поверхні кулі між цими точками.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2\pi}{3r}$	$\frac{\pi r}{12}$	$\frac{\pi r}{6}$	$\frac{\pi r}{3}$	$\frac{\pi r}{4}$

40.11. Металеву кулю переплавлено на 8 рівних куль. Як змінилася при цьому загальна поверхня?

А	Б	В	Г	Д
Збільшилася у 4 рази	збільшилася удвічі	зменшилася удвічі	зменшилася у 8 разів	не змінилася

40.12. Дві рівні кулі радіуса R розміщені так, що центр однієї з них лежить на поверхні іншої. Знайти радіус кола, по якому перетинаються їхні поверхні.

А	Б	В	Г	Д
R	$\frac{R}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}R$	$\frac{R}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}R$

40.13. Вершини трикутника лежать на сфері радіуса 13 см. Знайти відстань від центра сфери до площини трикутника, якщо сторони трикутника дорівнюють 6 см, 8 см і 10 см.

А	Б	В	Г	Д
$4\sqrt{11}$ см	$\sqrt{165}$ см	6 см	24 см	12 см

40.14. Вершини прямокутника лежать на сфері радіуса 10 см. Знайти відстань від центра сфери до площини прямокутника, якщо його діагональ дорівнює 16 см.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{41}$ см	6 см	3 см	7 см	5 см

40.15. Через точку, що лежить на поверхні сфери, проведено дві взаємоперпендикулярні площини, які перетинають сферу по колах з радіусами r_1 і r_2. Визначити площу поверхні сфери.

А	Б	В	Г	Д
$\pi\left(r_1^2+r_2^2\right)$	$4\pi\left(r_1^2+r_2^2\right)$	$\frac{\pi\left(r_1^2+r_2^2\right)}{4}$	$2\pi\left(r_1^2+r_2^2\right)$	$\frac{\pi\left(r_1^2+r_2^2\right)}{2}$

40.16. Через точку, що не лежить на сфері, проведено дві площини, які дотикаються до сфери. Знайти відстань від центра сфери до лінії перетину площин, якщо кут між площинами дорівнює 60°, а площа поверхні сфери — 32π см^2.

А	Б	В	Г	Д
$4\sqrt{2}$ см	$8\sqrt{2}$ см	4 см	$2\sqrt{2}$ см	$16\sqrt{2}$ см

40.17. Знайти відношення площ поверхні куба і вписаної в нього кулі.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{\pi}$	$\frac{3}{\pi}$	$\frac{4}{\pi}$	$\frac{6}{\pi}$	$\frac{12}{\pi}$

40.18. У циліндр вписано кулю. Визначити об'єм кулі, якщо об'єм циліндра дорівнює V.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{3}V$	$\frac{1}{3}V$	$\frac{1}{6}V$	$\frac{5}{6}V$	$\frac{3}{4}V$

40.19. Знайти відношення об'ємів кулі та вписаного в неї куба.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{2}$	$\sqrt{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$

40.20. Знайти відношення площі поверхні кулі описаної навколо рівностороннього конуса, до площі поверхні кулі, вписаної в цей конус.

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	6	8

40.21. Навколо кулі описана правильна трикутна призма. Знайти відношення об'ємів призми і кулі.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$	$\frac{27\sqrt{3}}{4\pi}$	$\frac{9\sqrt{3}}{\pi}$	$\frac{9\sqrt{3}}{4\pi}$	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

Завдання 40.22–40.26 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

40.22. Установити відповідність між геометричними тілами (1–4) та формулами для відшукання їх об'ємів (А–Д).

1 Циліндр
2 Куля
3 Конус
4 Піраміда

А $\pi r^2 H$
Б $\pi r l$
В $\frac{1}{3}\pi r^2 H$
Г $\frac{4}{3}\pi r^3$
Д $\frac{1}{3}S_{\text{ос.}} \cdot H$

40.23. Установити відповідність між геометричними тілами (1–4) та формулами для відшукання їх поверхонь (А–Д).

1 Циліндр
2 Куля
3 Конус
4 Правильна чотирикутна піраміда

А $\pi r(r+l)$
Б $4\pi r^2$
В $a(a+2l)$
Г $2\pi r(r+l)$
Д $2\pi r l$

40.24. Установити відповідність між відношеннями об'ємів двох куль (1–4) та відношеннями площ їх поверхонь (А–Д).

1 27 : 125
2 8 : 27
3 27 : 64
4 125 : 64

А 4 : 9
Б 9 : 16
В 9 : 25
Г 49 : 64
Д 25 : 16

40.25. Дві площини, які перетинаються під кутом 60°, дотикаються до сфери. Установити відповідність між площею поверхні сфери (1–4) та відстанню від її центра до лінії перетин цих площин (А–Д).

1 36π см^2
2 12π см^2
3 48π см^2
4 192π см^2

А $16\sqrt{3}$ см
Б 6 см
В $2\sqrt{3}$ см
Г $5\sqrt{3}$ см
Д $4\sqrt{3}$ см

40.26. Кулю радіуса r вписали в конус висотою H і радіусом основи R. Установити відповідність між висотою H і радіусом основи R конуса (1–4) та радіусом r кулі (А–Д).

1 4 см, 3 см	**А** 6 см
2 16 см, 12 см	**Б** 3 см
3 24 см, 7 см	**В** 1,5 см
4 8 см, 6 см	**Г** $\frac{21}{4}$ см
	Д 3 см

Розв'яжіть завдання 40.27–40.36. Відповідь запишіть десятковим дробом.

40.27. Перерізи кулі двома паралельними площинами, між якими лежить центр кулі, мають площі 144π см^2 і 25π см^2. Відстань між площинами дорівнює 17 см. Знайти у квадратних сантиметрах площу S поверхні кулі. У відповідь записати $\frac{S}{\pi}$.

40.28. Перерізи сфери двома паралельними площинами мають довжини 10π см і 24π см. Знайти у квадратних сантиметрах площу S поверхні сфери, якщо відстань між площинами дорівнює 7 см і центри перерізів лежать на одному радіусі сфери. У відповідь записати $\frac{S}{\pi}$.

40.29. Основою прямої призми є трикутник зі сторонами 6, 8 і 10. Висота призми дорівнює 24. Знайти радіус кулі, описаної навколо призми.

40.30. Сторона основи і висота правильної чотирикутної піраміди дорівнюють 4. Знайти радіус описаної навколо піраміди кулі.

40.31. Навколо конуса з радіусом основи 9 і висотою 3 описано кулю. Визначити радіус цієї кулі.

40.32. У пряму чотирикутну призму, основою якої є ромб з діагоналями 3 і 4, вписано кулю. Визначити радіус кулі.

40.33. У циліндр, об'єм якого дорівнює 16π, вписано кулю. Визначити радіус кулі.

40.34. Висота конуса дорівнює 8 см, а його твірна дорівнює 10 см. Знайти у сантиметрах радіус кулі, вписаної в конус.

40.35. Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною 6 см. Одне з бічних ребер піраміди є перпендикулярним до площини основи і дорівнює 4 см. Знайти у сантиметрах радіус кулі, описаної навколо піраміди.

40.36. Ребро правильного тетраедра дорівнює $3\sqrt{6}$. Визначити радіус сфери, яка дотикається до бічних граней тетраедра, якщо центр цієї сфери лежить на основі тетраедра.

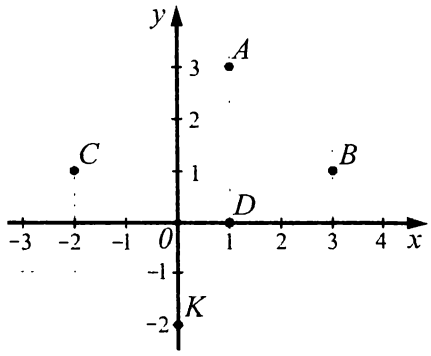
Тема 41. Координати

КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ

Координатна площина

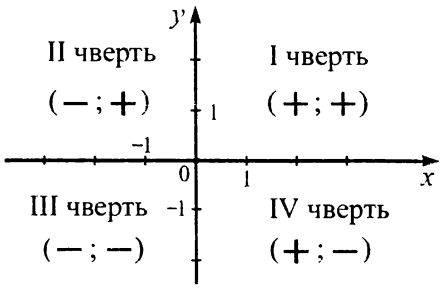
Координатна площина — площина, на якій уведена прямокутна система координат. Прямокутну систему координат утворюють дві взаємно перпендикулярні числові осі, які мають спільний початок відліку — точку O. Одну з осей, як правило горизонтальну, називають *віссю абсцис* (вісь x), а іншу — вертикальну — *віссю ординат* (вісь y). Точку O називають *початком координат* (див. рис.).

Кожній точці площини відповідає впорядкована пара чисел — *координати точки*. Перша координата — *абсциса* точки (позначають x), друга координата — *ордината* точки (позначають y). Тоді $M(x; y)$ — позначення точки на координатній площині. Наприклад, координати точок, які зображені на рисунку, є такими: $A(1; 3)$, $B(3; 1)$, $C(-2; 1)$, $D(1; 0)$, $K(0; -2)$.



Якщо точка лежить на осі абсцис, то її ордината дорівнює нулю ($y = 0$) (наприклад, точка D); якщо точка лежить на осі ординат, то її абсциса дорівнює нулю ($x = 0$) (наприклад, точка K); абсциса й ордината початку координат дорівнюють нулю ($O(0; 0)$).

Координатні осі розбивають площину на чотири *чверті* (*квадранти*). Точки координатних осей не належать до жодної із чвертей. У межах однієї чверті знаки координат точок не змінюються (див. рис.).



Відстань між двома точками

Відстань d між точками $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$ в координатній площині обчислюють за формулою: $d = AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Середина відрізка

Координати точки $C(x; y)$ — середини відрізка AB, де $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$, обчислюють за формулами: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Рівняння фігур на площині

Рівняння з двома змінними називають *рівнянням фігури* F у прямокутній системі координат, якщо:

1) координати будь-якої точки фігури F задовольняють це рівняння;

2) будь-які два числа, що задовольняють це рівняння, є координатами деякої точки фігури F.

Наприклад:

1) $y = x$ — рівняння прямої (рис. 1);

2) $y = x^2$ — рівняння параболи (рис. 2);

3) $y = \frac{3}{x}$ — рівняння гіперболи (рис. 3).

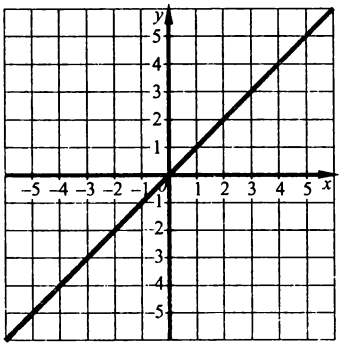


Рис. 1

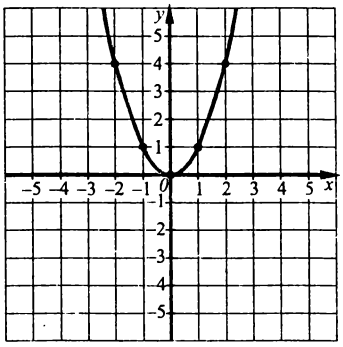


Рис. 2

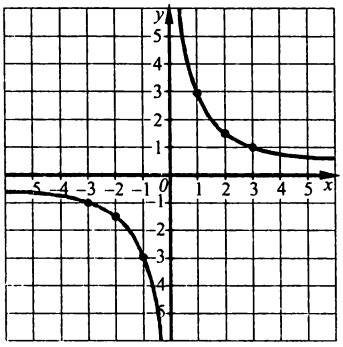
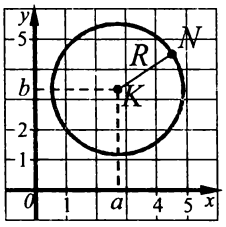


Рис. 3

Рівняння кола

У прямокутній системі координат рівняння кола має вигляд: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, де $K(a; b)$ — координати центра, R — радіус кола. $x^2 + y^2 = R^2$ — рівняння кола з центром у початку координат.



Рівняння прямої

Пряма, яка проходить через початок координат, задається рівнянням $y = kx$, де k — кутовий коефіцієнт прямої, $k = \operatorname{tg}\alpha$, α — кут нахилу прямої до осі абсцис.

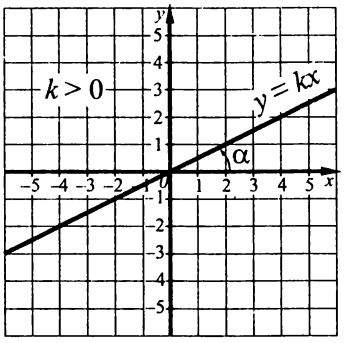


Рис. 4

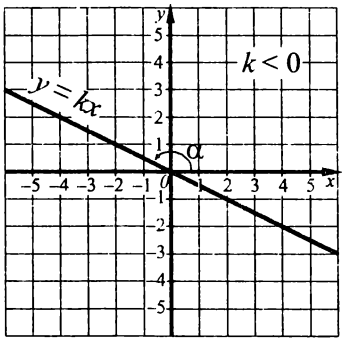


Рис. 5

На рис. 4 зображено графік рівняння $y = kx$, для $k > 0$, на рис. 5 для $k < 0$.

Рівняння прямої у прямокутній системі координат можуть мати вигляд:

1) рівняння $ax + by + c = 0$ (8), де a, b, c — деякі числа, a та b не дорівнюють одночасно 0, називають загальним рівнянням прямої;

2) рівняння $y = kx + b$ (9) називають рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом k.

Одну й ту ж пряму можна задати рівнянням кожного з видів 1)–2).

Пряма у прямокутній системі координат

Пряма $ax + by + c = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ у прямокутній системі координат може бути розміщена такими трьома способами:

1. $a = 0$, $b \neq 0$. Маємо $by + c = 0$, $y = -\dfrac{c}{b}$. Пряма $y = -\dfrac{c}{b}$ паралельна до осі абсцис (рис. 6) або збігається з нею. Рівняння $y = 0$ — рівняння осі абсцис.

2. $a \neq 0$, $b = 0$. Маємо $ax + c = 0$, $x = -\frac{c}{a}$. Пряма $x = -\frac{c}{a}$ паралельна до осі ординат (рис. 7) або збігається з нею. *Рівняння $x = 0$ — рівняння осі ординат.*

3. $a \neq 0$, $b \neq 0$. $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ або $y = kx + m$ — рівняння прямої (рис. 8).

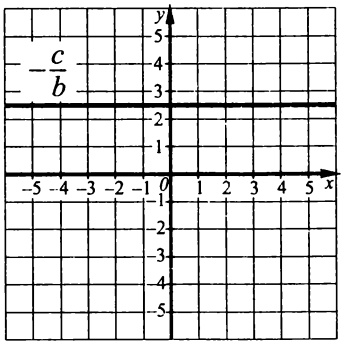


Рис. 6

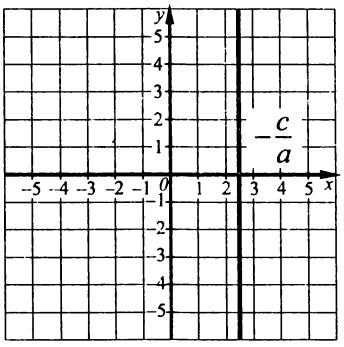


Рис. 7

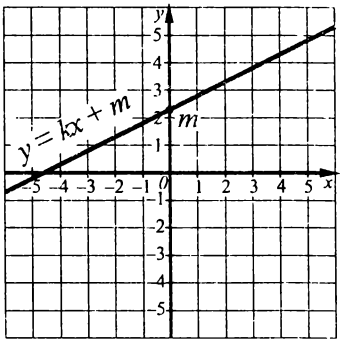


Рис. 8

Взаємне розміщення прямих

Якщо прямі l_1 та l_2 задані рівняннями $y = k_1x + m_1$ і $y = k_2x + m_2$, то вони:

а) паралельні тоді й тільки тоді, коли $k_1 = k_2$ і $m_1 \neq m_2$, тобто коли їх кутові коефіцієнти будуть рівними;

б) перетинаються, якщо $k_1 \neq k_2$.

Метод координат

Метод дослідження геометричних фігур та їхніх властивостей засобами алгебри (із застосуванням системи координат) називають методом координат.

Методом координат розв'язують такі задачі:

1) знаючи деякі геометричні властивості фігури, знаходять її рівняння і досліджують інші властивості;

2) знаючи рівняння фігури, знаходять її властивості.

Щоб розв'язати задачу методом координат, слід:

1) сформулювати задачу мовою координат. Для цього вводять декартову систему координат і вказують спосіб розміщення в ній даної фігури. Доцільно вибрати систему координат так, щоб якнайбільше координат вершин фігури дорівнювали нулю або одному й тому самому числу;

2) визначити координати деяких точок даної фігури;

3) використати відомі співвідношення і формули;

4) перекласти отримані результати мовою геометрії.

КООРДИНАТИ У ПРОСТОРІ

Аналогічно до площини, можна розглянути координати у просторі. Нехай задано точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$.

Координати точки $C(x; y; z)$ — середини відрізка AB, де $A(x_1; y_1; z_1)$, $A(x_2; y_2; z_2)$, обчислюють за формулами: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$; $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

Відстань d між точками A та B обчислюють за формулою $d = AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$. Відстань від точки $M(x; y; z)$ до координатних площин xy, xz, yz відповідно дорівнює $|z|$, $|y|$, $|x|$. Відстань від точки $M(x; y; z)$ до початку координат $O(0; 0; 0)$ дорівнює $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Рівняння сфери $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$, де $(a; b; c)$ — координати центра, R — радіус сфери; $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ — рівняння сфери з центром у початку координат.

Приклад 1. Знайти довжину відрізка DK, якщо $D(9; 1)$, $K(5; -2)$.

■ Скориставшись формулою $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, маємо:

$DK = \sqrt{(9-5)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$.

Відповідь. 5. ■

Приклад 2. На осі ординат знайти точку, рівновіддалену від точок $A(1; 2)$ і $B(2; 3)$.

■ Нехай точка $C(0; y)$ — шукана точка. За формулою $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ маємо: $AC^2 = (0-1)^2 + (y-2)^2$; $BC^2 = (0-2)^2 + (y-3)^2$. Оскільки $AC = BC$, то: $1 + y^2 - 4y + 4 = 4 + y^2 - 6y + 9$; $2y = 8$; $y = 4$. Отже, точка $C(0; 4)$ рівновіддалена від точок A та B і лежить на осі y.

Відповідь. (0; 4). ■

Приклад 3. Знайти периметр і площу трикутника з вершинами $A(-3; 1)$, $B(-1; 3)$ і $C(1; 1)$.

■ За формулою $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ знайдемо довжини сторін трикутника:

$AB = \sqrt{(-3+1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$; $BC = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$; $CA = \sqrt{(-3-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{16} = 4$.

Маємо: $P_{\Delta ABC} = AB + BC + CA$; $P_{\Delta ABC} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4 = 4\sqrt{2} + 4$ (см). Для сторін трикутника ABC маємо: $4^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2$; $16 = 16$, тобто виконується рівність: $CA^2 = AB^2 + BC^2$. Отже, трикутник ABC прямокутний з гіпотенузою CA. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC$; $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4$ (см^2).

Відповідь. $\left(4\sqrt{2} + 4\right)$ см; 4 см^2. ■

Приклад 4. Точка O — середина відрізка AB. Знайти координати точки A, якщо $O(5; -5)$, $B(7; -12)$.

■ З формул координат середини відрізка $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ маємо: $2x = x_1 + x_2$; $x_1 = 2x - x_2$; $2y = y_1 + y_2$; $y_1 = 2y - y_2$. Маємо: $x_1 = 2 \cdot 5 - 7 = 3$; $y_1 = 2 \cdot (-5) - (-12) = -10 + 12 = 2$. $A(3; 2)$ — шукана точка. Відповідь. (3; 2). ■

Приклад 5. Вершини чотирикутника $KDCM$ мають координати $K(1; 1)$, $D(3; 3)$, $C(8; 3)$, $M(6; 1)$. Довести, що $KDCM$ — паралелограм.

■ За ознакою паралелограма, чотирикутник, діагоналі якого діляться навпіл, — паралелограм. Знайдемо координати середин діагоналей KC і DM чотирикутника $KDCM$ за формулами $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Координати середини сторони KC: $x = \frac{1+8}{2} = 4{,}5$; $y = \frac{1+3}{2} = 2$; координати середини сторони DM: $x = \frac{3+6}{2} = 4{,}5$; $y = \frac{3+1}{2} = 2$. Отже, діагоналі мають спільну середину — точку (4,5; 2). Тому чотирикутник $KDCM$ — паралелограм. ■

Приклад 6. Визначити центр і радіус кола, заданого рівнянням $x^2 - 6x + y^2 - 2y - 26 = 0$.

■ Зведемо дане рівняння до вигляду $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$: $x^2 - 6x + y^2 - 2y - 26 = (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) - 36 = 0$; $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 36$. Отже, (3; 1) — центр кола, $R = 6$ — радіус кола.

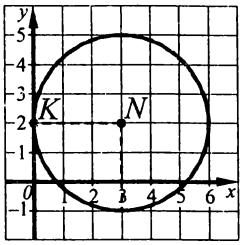
Відповідь. (3; 1); 6. ■

Приклад 7. Скласти рівняння прямої, паралельної до прямої $5x + y - 1 = 0$, яка проходить через точку $A(1; 2)$.

■ Запишемо рівняння прямої у вигляді $y = kx + m$: $y = -5x + 1$. Тоді $y = -5x + m$ — шукана пряма. Оскільки вона проходить через точку $A(1; 2)$, то: $2 = -5 \cdot 1 + m$, $m = 7$. Отже, $y = -5x + 7$ — шукане рівняння прямої.

Відповідь. $y = -5x + 7$. ■

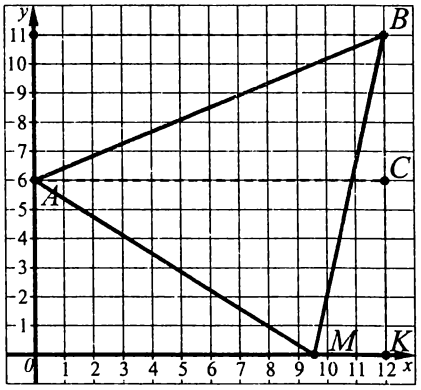
Приклад 8. Скласти рівняння кола з центром на прямій $x = 3$, що дотикається до осі ординат у точці $K(0; 2)$.



■ Точка $N(3; y)$ — центр кола, оскільки вона лежить на прямій $x = 3$ (див. рис.). За властивістю дотичної, $y \perp KN$. Отже, $y = 2$, $R = 3$, $N(3; 2)$. Використавши формулу рівняння кола $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, де $a = 3$, $b = 2$, $R = 3$, одержимо: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$ — шукане рівняння кола.

Відповідь. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$. ■

Приклад 9. Відстань між населеними пунктами A та B, розміщеними з одного боку від залізничної колії, становить 13 км, а від них до колії — відповідно 6 км і 11 км. Де слід побудувати залізничну станцію, щоб вона була однаково віддалена від пунктів A та B? Знайти відстань від станції до пункту A. Результат округлити до цілих.



■ Уведемо систему координат так, щоб вісь x збігалася із залізничною колією, а пункт A розміщувався на осі y. Тоді $OA = 6$ км, $BK = 11$ км. $A(0; 6)$, $B(m; 11)$. $AB = 13$. Оскільки $AB = 13$, то за формулою відстані між точками на координатній площині одержимо: $(m - 0)^2 + (11 - 6)^2 = 13^2$; $m^2 = 169 - 25$; $m^2 = 144$; $m = \pm 12$. $m = -12$ не підходить. Отже, $B(12; 11)$. Знайдемо точку $M(x; 0)$, рівновіддалену від точок $A(0; 6)$ і $B(12; 11)$. $AM^2 = (0 - x)^2 + (6 - 0)^2 = x^2 + 36$; $BM^2 = (12 - x)^2 + (11 - 0)^2 = 144 - 24x + x^2 + 121$. З рівності $AM^2 = BM^2$ одержимо: $x^2 + 36 = 144 - 24x + x^2 + 121$; $24x = 229$; $x \approx 9{,}5$ (км). Отже, $M(9{,}5; 0)$ — точка, у якій має розміститися залізнична станція. $AM = BM = \sqrt{9{,}5^2 + 36} = \sqrt{127} \approx 11{,}3$ (км). Округливши результат до цілих, одержимо: 11,3 км ≈ 11 км.

Відповідь. 11 км. ■

Приклад 10. Довести, що трикутник з вершинами $A(2; 0; 5)$, $B(3; 4; 0)$ і $C(2; 4; 0)$ прямокутний. Знайти координати центра кола, описаного навколо трикутника ABC. У відповідь записати суму координат центра.

■ $AB^2 = (3-2)^2 + (4-0)^2 + (0-5)^2 = 42$; $BC^2 = (3-2)^2 + (4-4)^2 + (0-0)^2 = 1$;

$CA^2 = (2-2)^2 + (4-0)^2 + (0-5)^2 = 41$. $42 = 41 + 1$; $42 = 42$. Отже, за теоремою, оберненою до теореми Піфагора, трикутник ABC прямокутний з гіпотенузою AB. Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є серединою гіпотенузи. Її координати: $x = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$; $y = \frac{0+4}{2} = 2$; $z = \frac{0+5}{2} = 2{,}5$. Отже, точка (2,5; 2; 2,5) — центр кола. Тоді 2,5 + 2 + 2,5 = 7.

Відповідь. 7. ■

Приклад 11. Скласти рівняння сфери, яка проходить через початок координат, а центр її міститься в точці $C(4; -4; 2)$.

■ Оскільки сфера проходить через початок координат, то її радіус дорівнює відстані від центра C сфери до початку системи координат. $R = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2} = 6$. Отже, рівняння сфери: $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 + (z - 2)^2 = 36$. ■

Приклад 12. На осі аплікат знайдіть точку A, рівновіддалену від точок $M(-2; 3; 5)$ і $N(3; -5; 1)$.

■ Нехай шукана точка має координати $A(0; 0; z)$. За умовою, $AM = AN$, звідки $AM^2 = AN^2$. Оскільки $AM^2 = 4 + 9 + (z - 5)^2$, $AN^2 = 9 + 25 + (z - 1)^2$, то: $13 + (z - 5)^2 = 34 + (z - 1)^2$; $8z = 3$; $z = \frac{3}{8}$. Отже, $A\left(0; 0; \frac{3}{8}\right)$. ■

Завдання 41.1–41.21 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

41.1. Точки $A(2; -4; -8)$ і $B(10; -20; 6)$ симетричні відносно точки C. Знайти координати точки C.

А	Б	В	Г	Д
(–10; 20; –6)	(3; –4; –0,5)	(12; –24; –1)	(6; –12; –1)	(–2; 4; –8)

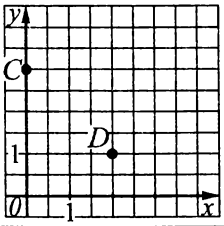
41.2. Скласти рівняння кола, в якого відрізок MN — діаметр і $M(7; 6)$, $N(11; 9)$.

А	Б	В	Г	Д
$(x-7)^2+(y-6)^2=$ $=6{,}25$	$(x+9)^2+(y+7{,}5)^2=$ $=6{,}25$	$(x-9)^2+(y-7{,}5)^2=$ $=6{,}25$	$(x-9)^2+(y-7{,}5)^2=$ $=25$	$(x+9)^2+(y+7{,}5)^2=$ $=9$

41.3. Дано трикутник ABC, вершини якого мають координати $A(–2; 6)$, $B(–2; –2)$ і $C(4; –2)$. Знайти довжину медіани BM.

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	5	6

41.4. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точок $C(0; 3)$ і $D(2; 1)$.



А	Б	В	Г	Д
$y = x + 3$	$y = x + 1$	$y = x + 2$	$y = –x + 1$	$y = 2$

41.5. Знайти координати точки, яка симетрична точці $A(1; 2; 3)$ відносно площини xy.

А	Б	В	Г	Д
(–1; –2; –3)	(–1; –2; 3)	(1; –2; 3)	(–1; 2; 3)	(1; 2; –3)

41.6. Знайти координати точки, яка симетрична точці $M(10; 20; 30)$ відносно осі аплікат.

А	Б	В	Г	Д
(–10; –20; 30)	(10; 20; 30)	(10; 20; 0)	(–10; –20; –30)	(10; 20; –30)

41.7. При паралельному перенесенні точка $A(1; 2; 6)$ переходить у точку $A_1(6; 7; 0)$. Вказати координати точки, у яку при цьому переходить точка $B(7; 9; 1)$.

А	Б	В	Г	Д
(21; 31,5; 0)	(2; 4; 7)	(12; 14; –5)	(12; 14; 7)	(–12; –14; 5)

41.8. Знайти відстань від точки $M(5; 4; 12)$ до осі ординат.

А	Б	В	Г	Д
5	4	12	13	21

41.9. Знайти відстань від точки $P(3; –6; 8)$ до площини yz.

А	Б	В	Г	Д
3	4	6	8	10

41.10. Скласти рівняння сфери, яка проходить через початок координат із центром у точці $S(–1; 2; –3)$.

А	Б	В	Г	Д
$(x-1)^2+(y+2)^2+$ $+(z-3)^2=14$	$(x+1)^2+(y-2)^2+$ $+(z+3)^2=2$	$(x+1)^2+(y-2)^2+$ $+(z+3)^2=14$	$(x-1)^2+(y+2)^2+$ $+(z-3)^2=2$	$(x+1)^2+(y-2)^2+$ $+(z+3)^2=10$

41.11. Вказати рівняння кола, яке на площині симетричне до кола $(x-4)^2+(y+5)^2=9$ відносно осі y.

А	Б	В	Г	Д
$(x+5)^2+$ $+(y-4)^2=9$	$(x-5)^2+$ $+(y+4)^2=9$	$(x+4)^2+$ $+(y-5)^2=9$	$(x-4)^2+$ $+(y-5)^2=9$	$(x+4)^2+$ $+(y+5)^2=9$

41.12. Скласти рівняння кола з центром у точці $C(5;-2)$, яка дотикається до осі ординат.

А	Б	В	Г	Д
$(x+5)^2+(y+2)^2=$ $=25$	$(x+5)^2+(y-2)^2=$ $=4$	$(x-5)^2+(y+2)^2=$ $=4$	$(x-5)^2+(y+2)^2=$ $=5$	$(x-5)^2+(y+2)^2=$ $=25$

41.13. Скласти рівняння сфери з центром у точці $A(-1;3;2)$, яка дотикається до площини xy.

А	Б	В	Г	Д
$(x+1)^2+(y-3)^2+$ $+(z-2)^2=10$	$(x+1)^2+(y-3)^2+$ $+(z-2)^2=4$	$(x+1)^2+(y-3)^2+$ $+(z-2)^2=13$	$(x+1)^2+(y-3)^2+$ $+(z-2)^2=2$	$(x-1)^2+(y+3)^2+$ $+(z+2)^2=2$

41.14. Знайти координати центра кола $x^2-4x+y^2+10y+20=0$.

А	Б	В	Г	Д
(2; 5)	(–2; 5)	(–2; –5)	(2; –5)	(4; –10)

41.15. Знайти радіус сфери $x^2+y^2-2y+z^2+6z-6=0$.

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	5	6

41.16. Дано $ABCD$ — паралелограм. $A(-4;1;5)$, $B(-5;4;2)$, $C(3;-2;-1)$. Знайти координати вершини D.

А	Б	В	Г	Д
(12; 7; –8)	(6; –3; –6)	(–6; 3; 6)	(–12; 7; 8)	(4; –5; 2)

41.17. Дано $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. $A(7;0;0)$, $B(5;0;0)$, $C_1(5;2;2)$. Знайти координати вершини D_1.

А	Б	В	Г	Д
(7; 5; 2)	(5; 2; 0)	(2; 2; 2)	(7; 2; 2)	(7; 0; 2)

41.18. Дано трикутник ABC з вершинами $A(2;2;-4)$, $B(2;-1;-1)$, $C(3;-1;-2)$. Знайти зовнішній кут при вершині B.

А	Б	В	Г	Д
60°	90°	120°	135°	інша відповідь

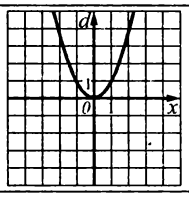
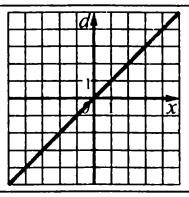
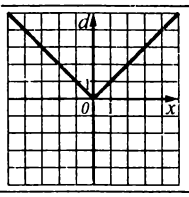
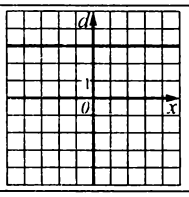
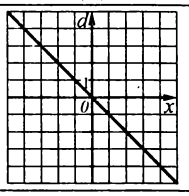
41.19. Точки $A(2;4)$ і $C(5;8)$ є вершинами квадрата $ABCD$. Знайти площу цього квадрата.

А	Б	В	Г	Д
2,5	5	12,5	25	20

41.20. Точки $A(-1;0;2)$ і $B(0;1;1)$ є вершинами правильного трикутника. Знайти площу цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{4}$	$3\sqrt{3}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	3	9

41.21. $d(x)$ — відстань від точки $M(x;0;0)$ до площини yz. Який з наведених графіків є графіком функції $d=d(x)$?

А	Б	В	Г	Д
				

Завдання 41.22–41.24 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

41.22. При паралельному перенесенні точка $A(1; 3; 2)$ переходить у точку $A'(3; 0; 1)$. Установити відповідність між точками (1–4) та точками (А–Д), утвореними при цьому паралельному перенесенні.

1 $M_1(1; 3; 0)$
2 $M_2(6; 8; -1)$
3 $M_3(0; 1; -2)$
4 $M_4(-1; 2; 3)$

А $M'(2; -2; -3)$
Б $M'(8; 5; -2)$
В $M'(3; 0; -1)$
Г $M'(2; -3; -1)$
Д $M'(1; -1; 2)$

41.23. Установити відповідність між центрами і радіусами сфер (1–4) та їх рівняннями (А–Д).

1 $C_1(1; 2; 0); 4$
2 $C_2(3; 0; -1); 3$
3 $C_3(0; 4; 1); 5$
4 $C_4(2; 3; 1); 10$

А $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2z + 1 = 0$
Б $x^2 + y^2 + z^2 - 8y - 2z - 8 = 0$
В $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$
Г $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 11 = 0$
Д $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z - 86 = 0$

41.24. Установити відповідність між парами точок (1–4), та відстанями між цими точками (А–Д).

1 $M_1(1; 3; 4), N_1(2; 1; 2)$
2 $M_2(3; 5; 1), N_2(0; 1; 1)$
3 $M_3(-2; 3; 4), N_3(6; 3; -2)$
4 $M_4(1; -2; 5), N_4(1; 10; 0)$

А 3
Б 13
В 5
Г 7
Д 10

Розв'яжіть завдання 41.25–41.32. Відповідь запишіть десятковим дробом.

41.25. На осі ординат знайти ординату точки, рівновіддаленої від точки $A(-4; 2)$ і початку координат.

41.26. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-2; 5)$ й утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 45°. У відповідь записати абсцису точки перетину прямої з віссю абсцис.

41.27. Знайти площу трикутника, обмеженого осями координат і прямою $4x + 3y = 24$.

41.28. Знайти квадрат довжини медіани AA_1 трикутника ABC, якщо $A(3; -2; 1)$, $B(3; 1; 5)$ і $C(4; 0; 3)$.

41.29. Знайти радіус сфери заданої рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2 = 0$.

41.30. Скласти рівняння кола з центром на осі ординат, яке проходить через точки $A(-3; 0)$, $B(0; 9)$. У відповідь записати довжину радіуса кола.

41.31. Точка $M(2; 6; 3)$ — середина відрізка, кінці якого лежать на осі x і на площині yz. Знайти довжину відрізка.

41.32. На ділянці, яка обмежена з двох боків взаємно перпендикулярними дорогами, посадили сад. Відстань від яблуні до першої дороги становить 3 м, а до другої — 4 м. Відстань від груші до першої дороги дорівнює 6 м, а до другої — 8 м. Знайти відстань між цими деревами.

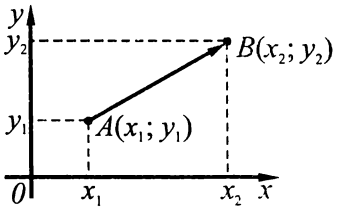
Тема 42. Вектори

ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

Вектором називають напрямлений відрізок, тобто відрізок, для якого вказано, який з його кінців є початком, а який — кінцем. На рис. 1 зображено вектор $\overrightarrow{AB}$, A — початок вектора, B — кінець вектора. Позначають $\overrightarrow{AB}$ або $\overline{AB}$. Риска або стрілка над назвою вектора заміняють слово «вектор». Вектори позначають також малими латинськими буквами: $\bar{a}$ або $\vec{a}$, $\bar{b}$ або $\vec{b}$ (рис. 2). При позначенні вектора двома буквами на першому місці ставлять його початок. Щоб задати вектор, достатньо вказати його початок і кінець.

Координати вектора

Координатами вектора з початком $A(x_1; y_1)$ і кінцем $B(x_2; y_2)$ називають числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ (див. рис.). Отже, координати вектора дорівнюють різниці відповідних координат його кінця і початку. Записують: **а)** $\overrightarrow{AB}(a_1; a_2)$ або **б)** $\vec{a}(a_1; a_2)$ або **в)** $\overrightarrow{(a_1; a_2)}$; читають **а)** вектор AB з координатами a_1 і a_2, **б)** вектор a з координатами a_1 і a_2, **в)** вектор з координатами a_1 і a_2.



Довжина вектора

Довжиною (модулем) вектора називають довжину відрізка, що зображає цей вектор. На рис. 1 довжина вектора AB дорівнює 3 см. Записують $|\overrightarrow{AB}| = 3$ см. Довжину вектора $\vec{a}(a_1; a_2)$ обчислюють за формулою $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Довжина і напрям вектора не залежатьт від розміщення його початку у системі координат.

Рис. 1

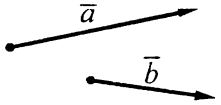


Рис. 2

Нуль-вектором (нульовим вектором) називають вектор, початок і кінець якого збігаються. Позначають: $\vec{0}$ або $\bar{0}$. Нуль-вектор не має напрямку, а його довжина дорівнює нулю: $|\bar{0}| = 0$. Будь-яку точку X площини можна вважати нульовим вектором $\overrightarrow{XX}$.

Одиничним вектором називають вектор, довжина якого дорівнює 1. Позначають $\bar{e}$. За означенням, $|\bar{e}| = 1$.

Колінеарність векторів

Ненульові вектори називають *колінеарними*, якщо вони паралельні до однієї прямої.

На рис. 3 $a \| b$, вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{NK}$ — колінеарні. Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називають *однаково напрямленими* (*співнапрямленими*), якщо промені AB і CD однаково напрямлені. На рис. 4 вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ однаково напрямлені. Позначають: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

Вектори $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{KF}$ називають *протилежно напрямленими*, якщо промені $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{KF}$ протилежно напрямлені. На рис. 5 вектори MN і KF протилежно напрямлені. Позначають: $\overrightarrow{MN} \uparrow\downarrow \overrightarrow{KF}$.

Якщо вектори $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ колінеарні, то $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = k$, і навпаки, якщо $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = k$, то вектори колінеарні. Вектори *протилежно напрямлені*, якщо $k < 0$, і однаково напрямлені, якщо $k > 0$.

Вектори називають *протилежними*, якщо вони мають рівні довжини (модулі) і протилежно напрямлені. На рис. 6 вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$ — протилежні: $\vec{m} = -\vec{n}$, тому що $\vec{m} \uparrow\downarrow \vec{n}$ і $|\vec{m}| = |\vec{n}|$.

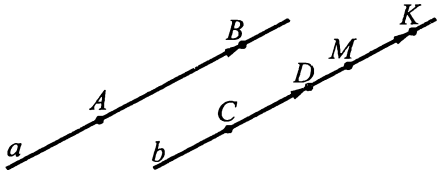


Рис. 3

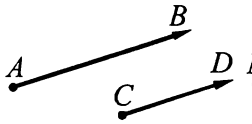


Рис. 4

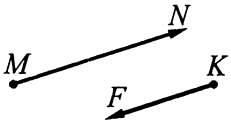


Рис. 5

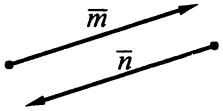
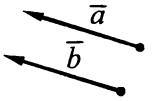


Рис. 6

Рівність векторів.

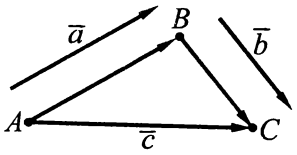
Вектори називають рівними, якщо вони співнапрямлені та мають однакові довжини (модулі). На рисунку вектори a і b рівні $\vec{a} = \vec{b}$, тому що $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ і $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Можна сказати



й так: два вектори будуть рівними, якщо рівними є їхні відповідні координати: $\vec{a}(a_1; a_2) = \vec{b}(b_1; b_2)$, якщо $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$.

Сума векторів $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$

Якщо від довільної точки A відкласти вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, потім від точки B — вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ і сполучити початок вектора $\overrightarrow{AB}$ з кінцем вектора $\overrightarrow{BC}$, то одержимо вектор $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, який називають *сумою* векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (див. рис.). Записують: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.



Щоб додати вектори, можна додати їх відповідні координати. Наприклад, сумою векторів $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ є вектор $\vec{c}(c_1; c_2)$ з координатами $c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + b_2$. Отже, $\overrightarrow{(a_1; a_2)} + \overrightarrow{(b_1; b_2)} = \overrightarrow{(a_1 + b_1; a_2 + b_2)}$.

Для будь-яких векторів $\vec{a}(a_1; a_2)$; $\vec{b}(b_1; b_2)$ і $\vec{c}(c_1; c_2)$ виконуються властивості:

1) переставна: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

2) сполучна: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;

3) додавання нульового вектора: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

4) додавання протилежних векторів: $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$.

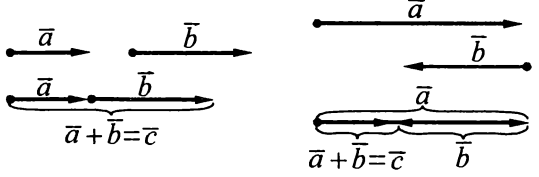
Для будь-яких точок A, B і C справджується векторна рівність $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Побудувати вектор-суму неколінеарних векторів (або додати вектори) можна за:

1) правилом трикутника. Якщо будувати суму двох неколінеарних ненульових векторів, виходячи з означення, то утвориться трикутник (рис. 7). Цей спосіб знаходження суми двох векторів називають додаванням векторів за правилом трикутника: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Побудова суми векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ у випадку, коли вони колінеарні, показано на рис. 8.

а) б)

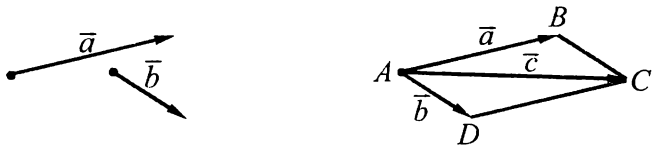
Рис. 7



а) б)

Рис. 8

2) правилом паралелограма. Щоб додати вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 9 а) за правилом паралелограма, потрібно від довільної точки A відкласти вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, потім побудувати на цих векторах як на сторонах паралелограм $ABCD$. Діагональ цього паралелограма — вектор $\overrightarrow{AC}$ є сумою $\vec{c}$ векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (рис. 9 б).



а) б)

Рис. 9

3) правилом многокутника. Щоб додати кілька векторів за правилом многокутника, потрібно вектори-доданки відкладати так, щоб початок другого вектора збігався з кінцем першого, початок третього — з кінцем другого і т. д. Тоді вектор, початок якого є початком першого вектора, а кінець — кінцем останнього, буде *вектором-сумою* (рис. 10): $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$.

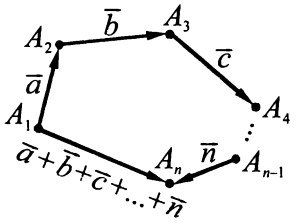


Рис. 10

Різниця векторів $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ ***і*** $\vec{b}\,(b_1; b_2)$

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$ ($\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$), який у сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$: $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$. Щоб побудувати вектор-різницю, або відняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 11 а), потрібно: відкласти вектори від однієї точки (рис. 11 б). Вектор, початок якого збігається з кінцем вектора $\vec{b}$, а кінець — з кінцем вектора $\vec{a}$, буде різницею $\vec{a} - \vec{b}$. Отже, вектор-різниця сполучає кінці векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ й напрямлений у бік зменшуваного.

а) б)

Рис. 11

Добуток вектора на число

Добутком ненульового вектора $\vec{a}$ на число $k \neq 0$ називають вектор $\vec{b}$, довжина якого дорівнює добутку довжини вектора $\vec{a}$ на модуль числа k. Напрям вектора $\vec{b}$ збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, коли $k > 0$, і протилежний до напряму вектору $\vec{a}$, коли $k < 0$ (рис. 12). Записують: $\vec{b} = k\vec{a}$.

а) б)

Рис. 12

Щоб помножити вектор на число, можна помножити його координати на це число. Наприклад, добутком вектора $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ на число k буде вектор $\vec{b}\,(b_1; b_2)$ з координатами $b_1 = ka_1$, $b_2 = ka_2$. Отже, $\vec{b} = k\overrightarrow{(a_1; a_2)} = \overrightarrow{(ka_1; ka_2)}$.

Множення вектора на число має такі властивості:

1. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

2. $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

3. $k \cdot \vec{0} = 0 \cdot \vec{a} = 0$.

4. Переставний закон: $k \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot k$.

5. Сполучний закон: $k \cdot (m \cdot \vec{a}) = (k \cdot m) \cdot \vec{a}$.

6. Розподільний закон: $k \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{a} = (k+m) \cdot \vec{a}$; $k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b} = k(\vec{a} + \vec{b})$.

Кут між векторами

Кутом між ненульовими векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ називають кут BAC (рис. 13). Кутом між довільними векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають кут між векторами, що дорівнюють даним векторам і мають спільний початок. На рис. 14 $\angle MNK$ — кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Позначають $\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

1. Якщо $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$.

2. Якщо $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180°$.

3. Якщо $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$, то вектори називають перпендикулярними (пишуть $\vec{a} \perp \vec{b}$).

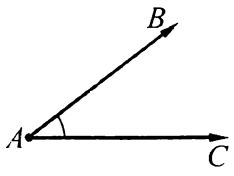


Рис. 13

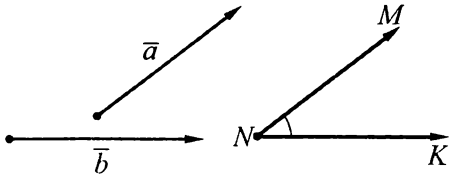


Рис. 14

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

Скалярним добутком двох ненульових векторів називають число, що дорівнює добутку їх довжин та косинуса кута між ними: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{ab})$. Звідси $\cos(\widehat{ab}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ дорівнює сумі добутків відповідних координат цих векторів: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Скалярний добуток векторів має такі властивості:

1. Переставну $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

2. Сполучну $(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$ (відносно скалярного множника).

3. Розподільну $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}$.

Скалярним квадратом вектора $\vec{a}$ називають скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{a}$ і позначають: $\vec{a}^2$: $\vec{a}^2 = a_1^2 \cdot a_2^2 = |\vec{a}|^2$.

Косинус кута між ненульовими векторами

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

Властивість і ознака перпендикулярних ненульових векторів

Якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ і навпаки, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.

ВЕКТОРИ У ПРОСТОРІ

Координати вектора

$A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$; $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1) = \overrightarrow{AB}(a_1; a_2; a_3)$, де $a_1 = x_2 - x_1$; $a_2 = y_2 - y_1$; $a_3 = z_2 - z_1$.

Рівність векторів

$\vec{a}(a_1; a_2; a_3) = \vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, якщо $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$.

Колінеарність векторів.

Якщо вектори $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ колінеарні, то $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k$.

Сума векторів

Сумою векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ є вектор $\vec{c}(c_1; c_2; c_3)$, такий що $c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + b_2$, $c_3 = a_3 + b_3$, тобто $\overrightarrow{(a_1; a_2; a_3)} + \overrightarrow{(b_1; b_2; b_3)} = \overrightarrow{(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)}$.

Різниця векторів

$\overrightarrow{(a_1; a_2; a_3)} - \overrightarrow{(b_1; b_2; b_3)} = \overrightarrow{(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)}$.

Модуль (довжина) вектора $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Множення вектора на число

$\overrightarrow{(a_1; a_2; a_3)} \cdot \lambda = \overrightarrow{(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)}$.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, де φ — кут між векторами.

Косинус кута між ненульовими векторами

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Приклад 1. За якого значення m вектори $\vec{a}(2; -4)$ і $\vec{b}(m; 2m - 1{,}5)$ будуть перпендикулярними?

А	Б	В	Г	Д
1	–1	2	1,5	–6

■ $\vec{a} \perp \vec{b}$, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. $2m - 4(2m - 1{,}5) = 0$; $2m - 8m + 6 = 0$; $-6m = -6$; $m = 1$.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 2. За якого значення t вектори $\vec{a}(8; t; 6)$ і $\vec{d}(4; 2; 3)$ будуть перпендикулярними?

А	Б	В	Г	Д
–23	25	–5	5	–25

■ Не нульові вектори $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ будуть перпендикулярними лише тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто коли $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ або $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$. Для векторів $\vec{a}(8; t; 6)$ і $\vec{d}(4; 2; 3)$ отримаємо: $8 \cdot 4 + t \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 0$; $2t + 50 = 0$; $t = -25$.

Відповідь. **Д.** ■

Приклад 3. Знайти координати вектора CD і вектора, йому протилежного, якщо: **а)** $C(3; -2)$, $D(-2; 5)$; **б)** $C(-5; 7)$, $D(4; -6)$.

■ Координати вектора обчислюють за формулами $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$.

а) $a_1 = -2 - 3 = -5$, $a_2 = 5 - (-2) = 7$. Отже, $\overrightarrow{CD}(-5;7)$. $\overrightarrow{DC}$ — вектор, протилежний $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}(5; -7)$;

б) $a_1 = 4 - (-5) = 9$, $a_2 = -6 - 7 = -13$. Отже, $\overrightarrow{CD}(9; -13)$; $\overrightarrow{DC}(-9; 13)$.

Відповідь. **а)** $(-5; 7)$, $(5; -7)$; **б)** $(9; -13)$, $(-9; 13)$. ■

Приклад 4. Модуль вектора $\vec{a}(12; n)$ дорівнює 13. Знайти n.

■ $|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$; $13^2 = 12^2 + n^2$; $n^2 = 169 - 144 = 25$; $n = \pm 5$.

Відповідь. -5, 5. ■

Приклад 5. Дано точки $A(3; 5)$, $B(-1; -2)$ і $C(0; 4)$. Знайти таку точку D, щоб вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ були рівними.

■ Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AB}(a_1; a_2)$, $a_1 = -1 - 3 = -4$, $a_2 = -2 - 5 = -7$. Отже, $\overrightarrow{AB}(-4; -7)$. Якщо вектори рівні, то їх відповідні координати рівні. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, тому $\overrightarrow{CD}(-4; -7)$. Знаючи координати вектора $\overrightarrow{CD}$, знайдемо координати його кінця: $x_2 = a_1 + x_1$, $x_2 = -4 + 0 = -4$; $y_2 = a_2 + y_1$, $y_2 = -7 + 4 = -3$. Отже, $D(-4; -3)$ — шукана точка.

Відповідь. $(-4; -3)$. ■

Приклад 6. За якого значення n вектори $\vec{a}(n + 5; -8)$ і $\vec{b}(5; 1 - n)$ колінеарні?

■ Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ будуть колінеарними, якщо $\frac{n+5}{5} = \frac{-8}{1-n}$. Звідси: $(n + 5)(1 - n) = 5 \cdot (-8)$; $n + 5 - n^2 - 5n = -40$; $n^2 + 4n - 45 = 0$; $n_1 = -9$, $n_2 = 5$. Отже, вектори будуть колінеарними, якщо $n = -9$ або $n = 5$.

Відповідь. -9; 5. ■

Приклад 7. Знайти координати та довжину вектора $\vec{c}$, який дорівнює $\vec{a} + \vec{b}$, якщо $\vec{a}(-10; 5)$, $\vec{b}(25; 3)$.

■ Нехай c_1 і c_2 — координати вектора $\vec{c}$. $c_1 = a_1 + b_1$, $c_1 = -10 + 25 = 15$; $c_2 = a_2 + b_2$, $c_2 = 5 + 3 = 8$. Отже, $\vec{c}(15; 8)$. $|\vec{c}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $|\vec{c}| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$.

Відповідь. $\overrightarrow{(15; 8)}$; 17. ■

Приклад 9. Спростити вираз $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NM}$.

■ Маємо: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NM} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CA} + \left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM}\right) + \overrightarrow{PQ} =$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \vec{0} + \overrightarrow{PQ} = \vec{0} + \vec{0} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ}$.

Відповідь. $\overrightarrow{PQ}$. ■

Приклад 10. Дано: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $\varphi = 60°$, де φ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Знайти: **а)** скалярний добуток векторів $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a}$; **б)** модуль вектора $\vec{a} + \vec{b}$; **в)** косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{a} + \vec{b}$.

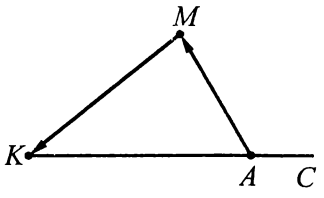
■ **а)** $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 + \vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = 4 + 2 \cdot 1 \cdot \cos 60° = 4 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 5$;

б) $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{4 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 60° + 1} = \sqrt{4 + 2 + 1} = \sqrt{7}$;

в) якщо α — кут між векторами $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}$, то $\cos\alpha=\dfrac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}}{|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}|}$, $\cos\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{7}\cdot 2}$, $\cos\alpha=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$.

Відповідь. **а)** 5; **б)** $\sqrt{7}$; **в)** $\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$. ■

Приклад 11. Знайти у градусах зовнішній кут при вершині A трикутника AMK, якщо $A(2; -2; -3)$, $M(4; -2; -1)$, $K(2; 2; 1)$.



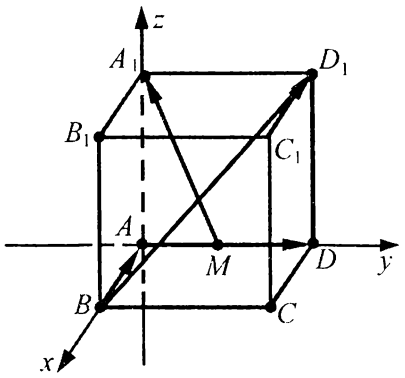
■ Кут KAM — кут між векторами $\overrightarrow{AK}$ і $\overrightarrow{AM}$.

Знайдемо модулі цих векторів. $\overrightarrow{AK}$ $(2-2; 2+2; 1+3)$. $\overrightarrow{AK}$ $(0; 4; 4)$, тоді $|\overrightarrow{AK}|=\sqrt{0^2+4^2+4^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$. $\overrightarrow{AM}$ $(4-2; -2+2; -1+3)$. $\overrightarrow{AM}$ $(2; 0; 2)$, тоді $|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{2^2+0^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AM}=0\cdot 2+4\cdot 0+4\cdot 2=8$.

$\cos\angle KAM=\dfrac{\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AK}|\cdot|\overrightarrow{AM}|}=\dfrac{8}{4\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$; $\angle KAM=60°$. Тоді $\angle CAM=180°-60°=120°$.

Відповідь. 120. ■

Приклад 12. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Обчислити кут між векторами $\overrightarrow{BD_1}$ і $\overrightarrow{MA_1}$, де M — середина ребра AD.



■ Задамо в просторі систему координат, початком якої є вершина A куба, а осі x, y і z містять відповідно ребра AB, AD, AA_1. Приймемо довжину ребра куба за одиницю. Тоді:

$B(1; 0; 0)$, $D_1(0; 1; 1)$, $M(0; 0{,}5; 0)$, $A_1(0; 0; 1)$; $\overrightarrow{BD_1}$ $(-1; 1; 1)$, $\overrightarrow{MA_1}$ $(0; -0{,}5; 1)$.

Знаходимо кут φ між векторами $\overrightarrow{BD_1}$ і $\overrightarrow{MA_1}$:

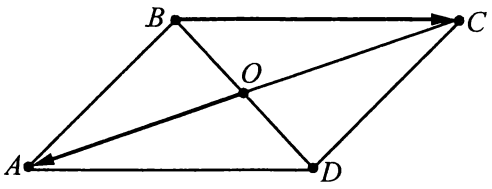
$$\cos\varphi=\frac{(-1)\cdot 0+1\cdot(-0{,}5)+1\cdot 1}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{0{,}25+1}}=\frac{0{,}5}{\sqrt{3\cdot 1{,}25}}=\frac{0{,}5}{\sqrt{3\cdot 0{,}25\cdot 5}}=\frac{0{,}5}{0{,}5\cdot\sqrt{15}}=$$

$=\dfrac{1}{\sqrt{15}}$; $\varphi=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{15}}$.

Відповідь. $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{15}}$. ■

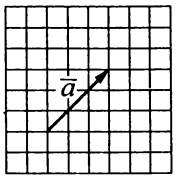
Завдання 42.1–42.24 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

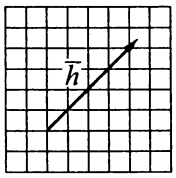
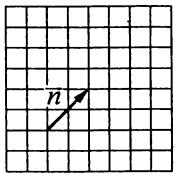
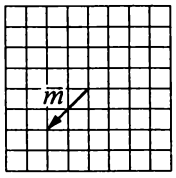
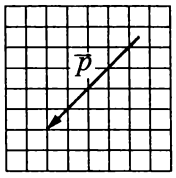
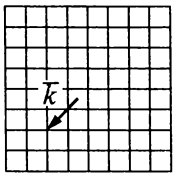
42.1. Дано паралелограм $ABCD$. O — точка перетину діагоналей. Який з наведених векторів дорівнює сумі $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OA}$?



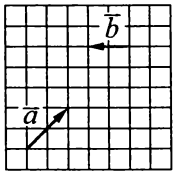
А	Б	В	Г	Д
$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{OC}$	$\overrightarrow{OB}$	$\overrightarrow{OD}$	$\overrightarrow{AD}$

42.2. Дано вектор $\vec{a}$. Який з наведених векторів дорівнює $-\frac{2}{3}\vec{a}$?

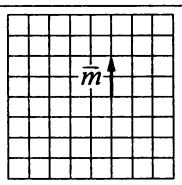
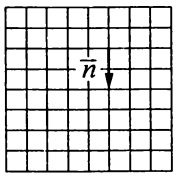
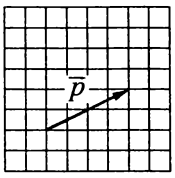
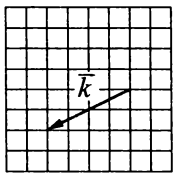
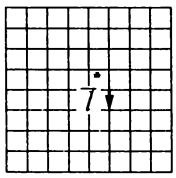


А	Б	В	Г	Д
				

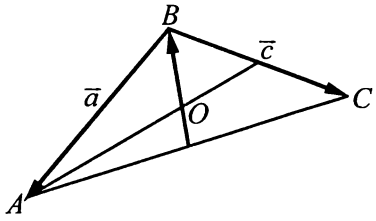
42.3. Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



Який з наведених векторів дорівнює різниці $\vec{a} - \vec{b}$?

А	Б	В	Г	Д
				

42.4. O — точка перетину медіан трикутника ABC. $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$. Виразити вектор $\overrightarrow{OB}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$.



А	Б	В	Г	Д
$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$	$\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}$	$\overrightarrow{OB} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{c}$	$\overrightarrow{OB} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{c}$	$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}$

42.5. Дано точки $A(5; -6; 7)$ і $B(8; -2; 7)$. Знайти абсолютну величину вектора $\overrightarrow{AB}$.

А	Б	В	Г	Д
5	25	$\sqrt{133}$	$9\sqrt{2}$	4

42.6. Знайти довжину вектора $\overline{AB}$, якщо $A(-1; 1; -1)$, $B(-1; 1; 1)$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	3	1

42.7. Серед векторів $\vec{a}(4; 14; 2)$, $\vec{b}(2; 7; -1)$, $\vec{c}(0; 0; 3)$, $\vec{d}(-6; -21; 3)$ знайти колінеарні.

А	Б	В	Г	Д
$\vec{a}$ і $\vec{b}$	$\vec{a}$ і $\vec{c}$	$\vec{a}$ і $\vec{d}$	$\vec{b}$ і $\vec{c}$	$\vec{b}$ і $\vec{d}$

42.8. За якого значення n вектори $\vec{a}(n+5; -8; n+1)$ і $\vec{b}(5; 1-n; 3)$ колінеарні?

А	Б	В	Г	Д
±5	±5; 9	–9	5	5; 9

42.9. Дано вектори $\vec{a}(3; -6; 2)$ і $\vec{b}(8; 4; 5)$. Знайти скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

А	Б	В	Г	Д
–17	0	–5760	10	–3

42.10. Обчислити квадрат довжини вектора $\vec{a}$, якщо відомо, що він колінеарний вектору $\vec{c}(2; -2; 3)$ і їх скалярний добуток дорівнює 34.

А	Б	В	Г	Д
17	$\sqrt{17}$	2	4,5	68

42.11. За якого значення x вектори $\vec{a}(3; 0; 6)$ і $\vec{b}(-8; 7; x)$ перпендикулярні?

А	Б	В	Г	Д
6	4	2	–4	–2

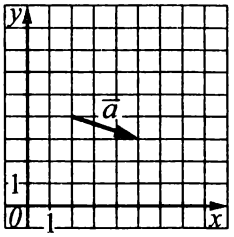
42.12. Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює 4. Знайти скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

А	Б	В	Г	Д
8	–8	4	–4	2

42.13. Знайти кут між векторами $\vec{a}(1; 0; -1)$ і $\vec{b}(0; -1; 1)$.

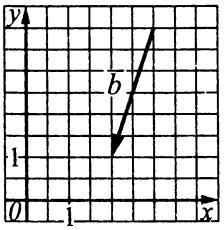
А	Б	В	Г	Д
60°	120°	45°	135°	150°

42.14. Знайти координати вектора $\vec{a}$, зображеного на рисунку.



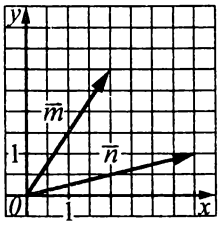
А	Б	В	Г	Д
(–3; –1)	(2; 4)	(5; 3)	(3; –1)	(3; 1)

42.15. Знайти абсолютну величину вектора $\vec{b}$, зображеного на рисунку.



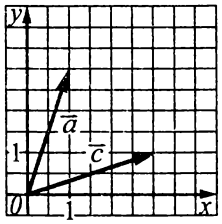
А	Б	В	Г	Д
3	$\sqrt{3}$	$\sqrt{10}$	2	$\sqrt{7}$

42.16. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{m}$ і $\vec{n}$.



А	Б	В	Г	Д
9	10	11	12	14

42.17. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{c}$.



А	Б	В	Г	Д
0,2	0,3	0,4	0,5	0,6

42.18. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут 135°, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$. Знайти $|\vec{a} - \vec{b}|$.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$	5	$4\sqrt{2}$	4

42.19. Дві сили $\overrightarrow{F_1}$ і $\overrightarrow{F_2}$ утворюють між собою кут 120°. $|\overrightarrow{F_1}| = |\overrightarrow{F_2}| = 10$ Н. Знайти модуль рівнодійної цих сил.

А	Б	В	Г	Д
5 Н	10 Н	$5\sqrt{3}$ Н	20 Н	$10\sqrt{2}$ Н

42.20. $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — ненульові вектори. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$. Знайти кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

А	Б	В	Г	Д
30°	60°	45°	90°	120°

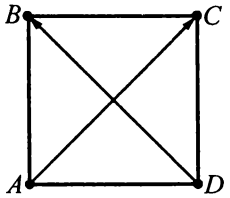
42.21. Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ такі, що $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a}+\vec{b}|=3$. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	4	6	8

42.22. Знайти модуль вектора $2\vec{a}+3\vec{b}$, якщо $\vec{a}(1;2)$, $\vec{b}(1;0)$.

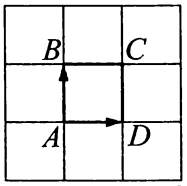
А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{41}$	3	$\sqrt{17}$	1	9

42.23. Дано квадрат $ABCD$. Який з наведених векторів дорівнює сумі $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$?



А	Б	В	Г	Д
$2\overrightarrow{AB}$	$2\overrightarrow{BC}$	$\vec{0}$	$2\overrightarrow{AC}$	$2\overrightarrow{AD}$

42.24. Дано квадрат $ABCD$ зі стороною 1. Знайти $|3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|$.



А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{2}$	$\sqrt{10}$	$2\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{3}$

Завдання 42.25–42.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

42.25. Установити відповідність між назвами формул для векторів $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ і $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ (1–4) та формулами (А–Д).

1 Довжина вектора $|\vec{a}|$

2 Скалярний добуток векторів $\vec{a}\cdot\vec{b}$

3 Умова перпендикулярності векторів $\vec{a}\perp\vec{b}$

4 Умова колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

А $\overrightarrow{(a_1b_1;a_2b_2;a_3b_3)}$

Б $\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

В $a_1:b_1=a_2:b_2=a_3:b_3$

Г $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

Д $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

42.26. Установити відповідність між векторами (1–4) та їх скалярними добутками (А–Д).

1 $\vec{a}_1(1;5;14)$, $\vec{b}_1(3;4;-1)$

2 $\vec{a}_2(3;0;-4)$, $\vec{b}_2(5;-7;2)$

3 $\vec{a}_3(4;-2;9)$, $\vec{b}_3(-3;1;4)$

4 $\vec{a}_4(5;-4;-1)$, $\vec{b}_4(3;4;5)$

А 7

Б 9

В –6

Г 22

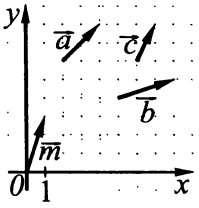
Д 5

42.27. Установити відповідність між значеннями числа x (1–4) та парами векторів (А–Д), які за цих значень взаємно перпендикулярні.

1 8	**А** $\vec{a}_1(2; x; -1)$, $\vec{b}_1(-3; 2; x)$
2 6	**Б** $\vec{a}_2(-4; 5; 2x)$, $\vec{b}_2(6; x; -1)$
3 5	**В** $\vec{a}_3(-x; 4; 2)$, $\vec{b}_3(6; 3; -3x)$
4 1	**Г** $\vec{a}_4(2; 3x; 1)$, $\vec{b}_4(x; 1; -25)$
	Д $\vec{a}_5(x; -10; 1)$, $\vec{b}_5(4; 1; -30)$

42.28. Установити відповідність між векторами (1–4) та їх координатами (А–Д).

1 $\vec{a}$	**А** (1; 2)
2 $\vec{b}$	**Б** (4; 1)
3 $\vec{c}$	**В** (2; 2)
4 $\vec{m}$	**Г** (3; 1)
	Д (1; 3)



Розв'яжіть завдання 42.29–42.43. Відповідь запишіть десятковим дробом.

42.29. Відомо, що $|\vec{x}| = 11$, $|\vec{y}| = 23$, а $|\vec{x} - \vec{y}| = 30$. Знайти $|\vec{x} + \vec{y}|$.

42.30. Дано $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Знайти $|\vec{a} - \vec{b}|$.

42.31. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут 120°. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$. Обчислити $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$.

42.32. $\vec{a}(4; -2; -4)$, $\vec{b}(6; -3; 2)$. Обчислити $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$.

42.33. Дано $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, а кут між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$ дорівнює 120°. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{m}$ і $\vec{m} + \vec{n}$ і знайти його значення з точністю до 0,01.

42.34. Знайти довжину вектора $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 4$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 60°$, $\angle(\vec{b}; \vec{c}) = 90°$, $\angle(\vec{a}; \vec{c}) = 120°$ й обчислити його значення з точністю до 0,01.

42.35. Знайти косинус кута між векторами $-5\vec{a}$ і $\frac{1}{5}\vec{b}$ з точністю до 0,01, якщо $\vec{a}(-1; 1; 4)$ і $\vec{b}(1; 0; -1)$.

42.36. Дано вектори $\vec{a}(-2; 0)$, $\vec{b}(1; -1)$ і $\vec{c}(2; 3)$. За якого значення k вектори $2\vec{a} - k\vec{b}$ та $\vec{c}$ будуть колінеарними?

42.37. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}(3; 0; -4)$ і $\overrightarrow{AD}(0; 5; 0)$.

42.38. Дано трикутник MPK, $M(-3; -2)$, $P(1; 4)$, $K(2; -1)$. Знайти у градусах величину кута M.

42.39. Дано вектор $\vec{a}(2; 1; -3)$. Знайти квадрат довжини вектора $\vec{b}$, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 7$ і вектор $\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{a}$.

42.40. Дано $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 60°$. Знайти косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$ з точністю до 0,01.

42.41. Знайти косинус кута між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}(3; 2)$ і $\vec{b}(1; -2)$ з точністю до 0,01.

42.42. Знайти косинус кута між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 4\vec{m} + 2\vec{n}$ і $\vec{b} = 4\vec{m} + \vec{n}$ з точністю до 0,01, якщо $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, $\varphi = \angle(\vec{m}; \vec{n}) = 60°$.

42.43. На озері від пристані одночасно відпливають два катери. Один з них рухається зі швидкістю 25 км/год під кутом 30° до берега, а інший — зі швидкістю 30 км/год перпендикулярно до берега. Якою буде відстань між човнами через 6 хв? Відповідь округли до сотих кілометра.

Тема 43. Перетворення фігур

Перетворення фігур

Якщо кожній точці фігури F поставити у відповідність деяку точку площини, то всі відповідні точки утворюють деяку фігуру F_1. Кажуть, що фігуру F_1 одержали у результаті *перетворення* фігури F. Фігуру F_1 називають *образом* фігури F.

При перетворенні фігури F у фігуру F' мають місце такі властивості:

1) кожній точці фігури F відповідає єдина точка фігури F';

2) кожній точці фігури F' відповідає деяка точка фігури F;

3) різним точкам фігури F відповідають різні точки фігури F';

Наприклад: 1) поставимо у відповідність кожній точці X півкола основу перпендикуляра, опущеного з точки X на діаметр — точку X' (рис. 1). Ця відповідність буде перетворенням півкола в діаметр. Діаметр — образ півкола; 2) поставимо у відповідність кожній точці кола K діаметрально протилежну їй точку K'. Ця відповідність буде перетворенням кола в коло (рис. 2) або кола в себе. Образом кола буде те саме коло.

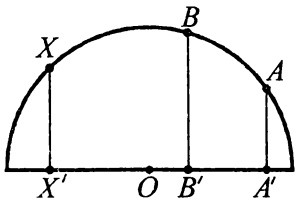


Рис. 1

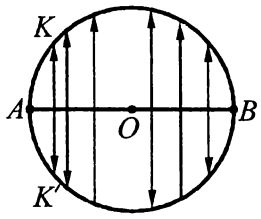


Рис. 2

Переміщення

Перетворення фігури F, яке зберігає відстані між точками, називають *переміщенням* (рухом) фігури F. Наприклад, перетворенням фігури F у фігуру F' (рис. 3) — переміщення, оскільки $X \to X'$, $Y \to Y'$, $XY \to X'Y'$, $XY = X'Y'$.

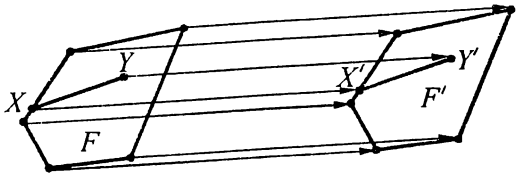
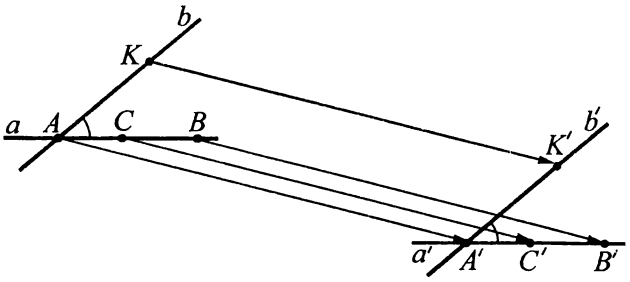


Рис. 3

Властивості переміщення (руху):



1. Унаслідок переміщення точки, які лежать на прямій, переходять у точки, які лежать на прямій, до тогож зберігається порядок їх взаємного розташування. На рисунку $A \to A'$, $C \to C'$, $B \to B'$, до того ж якщо точка C лежить між точками A та B, то точка C' лежить між точками A' та B'.

2. Унаслідок переміщення прямі переходять у прямі, промені — у промені, відрізки — у відрізки. На рисунку: $a \to a'$, $b \to b'$, промінь AK — у промінь $A'K'$, $AC \to A'C'$, $BC \to B'C'$.

3. Унаслідок переміщення кут переходить у рівний йому кут. На рисунку $\angle A \to \angle A'$.

4. Унаслідок переміщення паралельні прямі переходять у паралельні прямі.

Переміщення будь-яку фігуру переводить її у рівну їй фігуру.

Дві фігури називають *рівними*, якщо існує переміщення, яке переводить одну фігуру в іншу.

Симетрія

Дві точки X та X' називають *симетричними* відносно даної точки O, якщо точка O — середина відрізка XX' (рис. 4). Точку O вважають симетричною самій собі й називають центром симетрії.

Щоб побудувати точку X', симетричну до точки X відносно точки O, потрібно:

1) провести промінь XO;

2) відкласти на ньому з другого боку від точки O відрізок $OX' = OX$ (рис. 5).

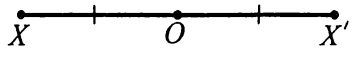


Рис. 4

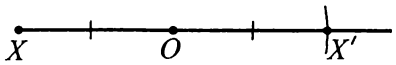
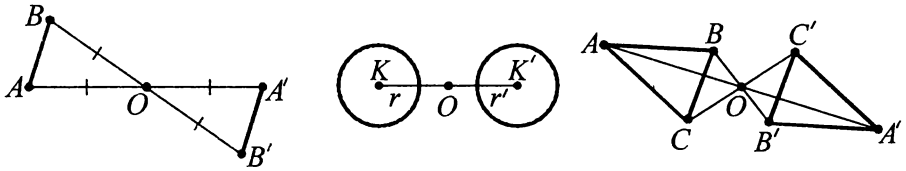


Рис. 5

Перетворення, за якого кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F', симетричну відносно даної точки O, називають *перетворенням симетрії* відносно точки O. Фігури F і F' називають симетричними відносно точки O.

На рисунку 6 показано побудову фігури, симетричної даній відносно точки O:



а) відрізка **б)** кола **в)** трикутника

Рис. 6

Властивості центральної симетрії:

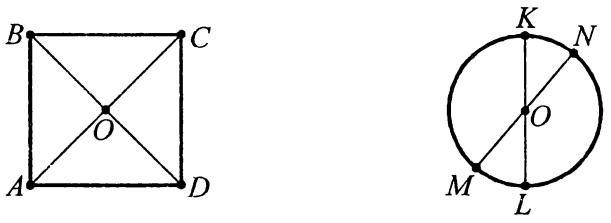
1) центральна симетрія є переміщенням, тому вона має всі властивості переміщення;

2) образом прямої, що проходить через центр симетрії, є сама ця пряма, а образом прямої, яка не проходить через центр симетрії, є паралельна їй пряма.

Образом довільної точки $M(x_0; y_0)$ при центральній симетрії з центром у початку координат є точка $M_1(-x_0; -y_0)$.

Фігуру F називають *центрально-симетричною*, якщо існує така точка O, при симетрії відносно якої фігура F переходить у себе.

Прикладом центрально-симетричної фігури є квадрат (рис. 7 а), коло (рис. 7 б). Центром симетрії квадрата є точка перетину його діагоналей, а кола — його центр.



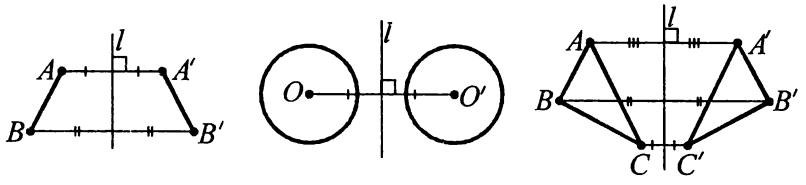
а) **б)**

Рис. 7

Точки X та X_1 називають *симетричними* відносно прямої l, якщо пряма l є серединним перпендикуляром до відрізка XX_1.

Осьовою симетрією відносно прямої l називають перетворення, при якому кожна точка X фігури F переходить у точку X_1 фігури F_1, симетричну відносно прямої l. Осьова симетрія є переміщенням (рухом), отже, вона має всі властивості переміщення. Якщо при симетрії відносно прямої l фігура переходить сама в себе, то фігуру називають *симетричною* відносно прямої l, а пряму l — віссю симетрії фігури. Симетрію з віссю l називають *осьовою симетрією*.

На рис. 8 показано побудову фігури, симетричної даній відносно прямої l:



а) відрізка **б)** кола **в)** трикутника

Рис. 8

Точки, симетричні відносно осі x, мають однакові абсциси та протилежні ординати. Точки, симетричні відносно осі y, мають однакові ординати та протилежні абсциси.

Поворот

Поворотом фігури F навколо точки O на кут α за годинниковою стрілкою (проти годинникової стрілки) називають перетворення фігури F у фігуру F', при якому кожній точці X фігури F ставиться у відповідність така точка X_1 фігури F_1, що $OX' = OX$ і $\angle XOX' = \alpha$. Точку O називають *центром повороту*, а кут α — *кутом повороту* (рис. 9). Центр повороту переходить у себе. Поворот є переміщенням (рухом).

а) **б)**

Рис. 9

Поворот задається:

1) центром повороту;

2) кутом повороту;

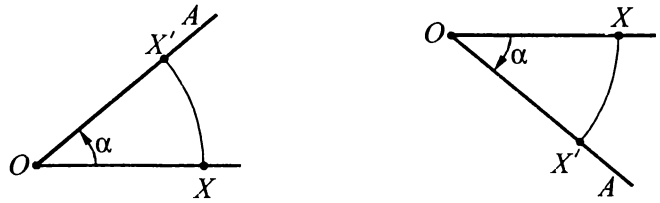
3) напрямом повороту.

Щоб побудувати точку X', у яку перейде точка X унаслідок повороту навколо точки O на кут α, потрібно:

1) провести промінь OX (рис. 10);

2) від променя OX відкласти кут XOA, що дорівнює куту α — на рис. **а)** — проти годинникової стрілки, на рис. **б)** — за годинниковою стрілкою;

3) на промені OA знайти точку X', яка лежить на відстані OX від центру повороту O.



а) **б)**

Рис. 10

Послідовне виконання двох поворотів навколо однієї й тієї ж точки є поворотом.

Щоб виконати поворот фігури F навколо точки O на кут α, потрібно кожну точку X фігури F змістити по дузі кола з центром O радіуса OX на кут α (рис. 11).

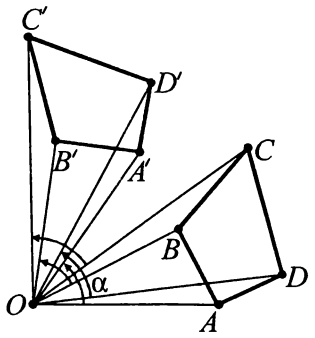
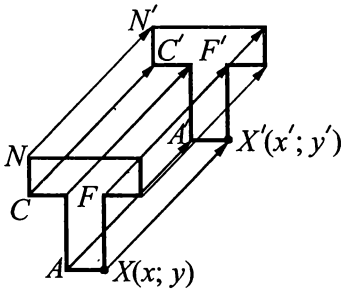


Рис. 11

Паралельне перенесення

Паралельним перенесенням фігури F називають таке перетворення фігури F у фігуру F_1, при якому всі точки фігури F зміщуються на один і той же вектор (в одному й тому ж напрямі та на одну й ту ж відстань). По-іншому кажуть, що всі точки фігури зміщуються уздовж паралельних прямих або прямих, які збігаються, в одному й тому ж напрямі й на одну й ту ж відстань.



На рисунку: $XX' \| AA' \| CC' \| NN'$, $XX' = AA' = CC' = NN'$. Кожну точку фігури F змістили в одному й тому ж напрямку на одну й ту ж відстань: $X \to X'$, $A \to A'$, $C \to C'$, $N \to N'$. Отже, фігура F перейде у фігуру F' унаслідок паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{XX'}$.

Властивості

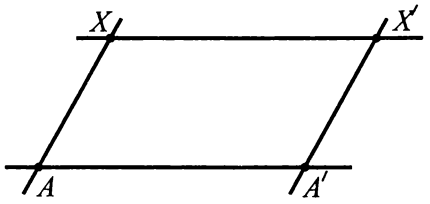
1) паралельне перенесення є переміщенням, тому має усі його властивості;

2) при паралельному перенесенні пряма переходить у паралельну їй пряму або в себе;

3) переміщення, обернене до паралельного перенесення, є паралельним перенесенням;

4) послідовне виконання двох паралельних перенесень є паралельним перенесенням.

Щоб побудувати точку A', у яку перейде точка A при паралельному перенесенні, що переводить точку X у точку X', потрібно:



1) провести пряму XX' (див. рис.);

2) через точку A провести пряму $AA' \| XX'$;

3) на прямій AA' відкласти відрізок $AA' = XX'$ так, щоб промені AA' і XX' були співнапрямлені. Точка A' — шукана.

Задання паралельного перенесення:

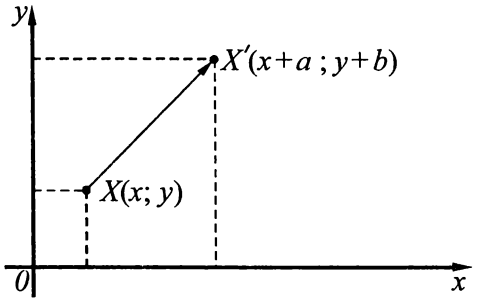
1. Паралельне перенесення можна задати парою точок, указавши, яка з точок переходить у яку.

2. Паралельне перенесення можна задати формулами.

У прямокутній системі координат паралельне перенесення, яке переводить точку $X(x; y)$ у точку $X'(x'; y')$, задається формулами:

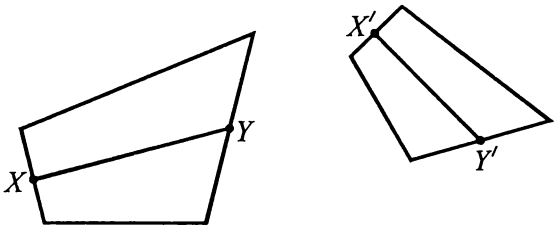
$$x' = x + a, y' = y + b,$$

де a та b — координати вектора переносу (див. рис.).



Перетворення подібності

Перетворенням подібності з коефіцієнтом $k > 0$ називають перетворення фігури F у фігуру F_1, при якому довільним точкам X та Y фігури F ставлять у відповідність такі точки X_1 та Y_1 фігури F_1, що $X_1Y_1 = kXY$. Коефіцієнт k ($k > 0$) називають коефіцієнтом подібності.



Це означає: якщо довільні точки X та Y фігури F унаслідок перетворення подібності переходять у точки X' і Y' фігури F', то $X'Y' = kXY$, де $k > 0$ (див. рис.).

Переміщення є окремим випадком перетворення подібності, якщо $k = 1$.

Властивості перетворення подібності:

1. Перетворення подібності переводить прямі в прямі, промені — у промені, відрізки — у відрізки.

2. Перетворення подібності переводить кут у рівний йому кут.

Дві фігури називають *подібними*, якщо вони переводяться одна в одну перетворенням подібності. Запис $F \sim F'$ означає: фігура F подібна до фігури F'. Інколи вказують коефіцієнт подібності, наприклад, якщо $k = 3$, пишуть $F \overset{3}{\sim} F'$. Коефіцієнт подібності k дорівнює відношенню довжин відповідних лінійних елементів фігур F' і F.

Властивості подібних фігур:

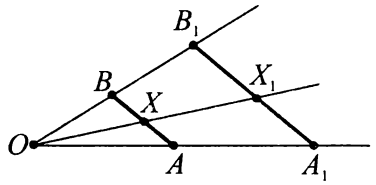
1. Будь-яка фігура подібна сама собі: $F \sim F$.

2. Якщо $F_1 \sim F_2$, то $F_2 \sim F_1$.

3. Якщо $F_1 \sim F_2$, а $F_2 \sim F_3$, то $F_1 \sim F_3$.

4. Відношення площ подібних фігур дорівнює квадрату коефіцієнта подібності, тобто якщо $F \overset{k}{\sim} F_1$, то $\frac{S_{F_1}}{S_F} = k^2$.

Гомотетія



Гомотетією з центром O і коефіцієнтом $k \neq 0$ називають таке перетворення фігури F у фігуру F', унаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F' так, що точка X' лежить на промені OX, якщо $k > 0$, або на доповняльному до нього промені OX'', якщо $k < 0$, і $OX' = |k| \cdot OX$ (k — будь-яке число, відмінне від нуля, O — фіксована точка) (див. рис.). Точку O називають *центром* гомотетії, а число k — *коефіцієнтом* гомотетії. На рисунку відрізок A_1B_1 гомотетичний відрізку AB з центром гомотетії O і $k = 2$.

Щоб побудувати фігуру F', гомотетичну фігуру F, потрібно:

1) зафіксувати на площині точку O;

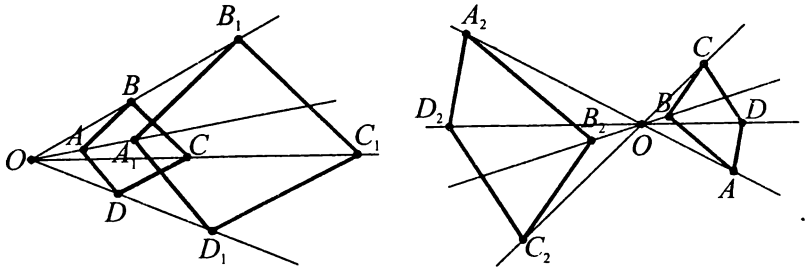
2) вибрати довільну точку X фігури F;

3) відкласти на промені OX (або на доповняльному промені) відрізок OX', що дорівнює $|k| \cdot OX$;

4) провести такі побудови для кожної точки фігури F.

Одержимо фігуру F', яка є образом фігури F, отриманим у результаті гомотетії.

На рис. 12 показано побудову чотирикутника, гомотетичного чотирикутнику $ABCD$ з центром гомотетії O і коефіцієнтом гомотетії: **а)** $k = 2$; **б)** $k = -2$.



а) **б)**

Рис. 12

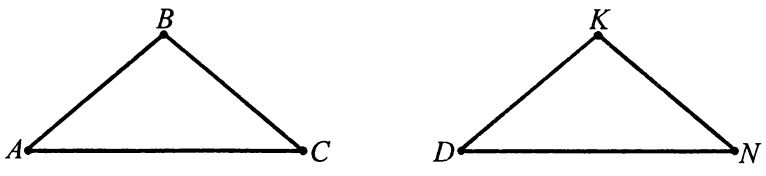
Властивості гомотетії:

Гомотетія є перетворенням подібності й вона має всі властивості перетворення подібності, а також властивості:

1) гомотетія переводить пряму в паралельну їй пряму або в саму себе, якщо дана пряма проходить через центр гомотетії;

2) на координатній площині гомотетія з центром у початку координат задається формулами $\begin{cases} x_1 = kx; \\ y_1 = ky; \end{cases}$ де $(x; y)$ — координати точки A, а $(x_1; y_1)$ — координати образу цієї точки при гомотетії.

Приклад 1. Трикутник ABC — образ трикутника DKN, отриманий у результаті переміщення. Знайти кути трикутника DKN, якщо $DK = KN$, а найбільший кут трикутника ABC дорівнює 120°.

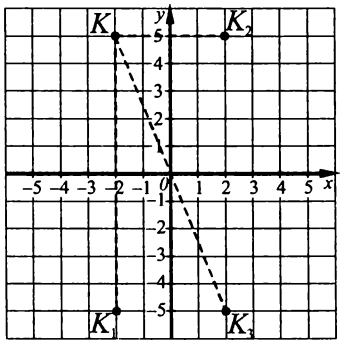


■ Переміщення переводить фігуру у рівну їй фігуру, тому якщо трикутник DKN рівнобедрений, то трикутник ABC теж рівнобедрений. $\angle A = \angle C$ — за вла-

стивістю кутів при основі рівнобедреного трикутника. Оскільки в трикутнику не може бути два тупі кути, то $\angle B = 120°$. Тоді $\angle A = \angle C = (180° - 120°) : 2 = 30°$. $\angle D = \angle A = 30°$, $\angle N = \angle C = 30°$, $\angle K = \angle B = 120°$.

Відповідь. 30°, 30°, 120°. ■

Приклад 2. Побудувати точку, симетричну до точки $K(-2; 5)$ відносно: **а)** осі x; **б)** осі y; **в)** початку координат. Записати координати одержаних точок.



■ **а)** Точка $K_1(-2; -5)$ — симетрична точці $K(-2; 5)$ відносно осі x (див. рис.);

б) точка $K_2(2; 5)$ симетрична точці $K(-2; 5)$ відносно осі y;

в) точка $K_3(2; -5)$ симетрична точці $K(-2; 5)$ відносно початку координат.

Відповідь. **а)** (–2; –5); **б)** (2; 5); **в)** (2; –5). ■

Приклад 3. Дано коло $(x + 7)^2 + (y - 3)^2 = 49$. Встановити рівняння образу кола, утвореного при симетрії відносно початку координат.

А	Б	В	Г	Д
$x^2 + y^2 = 49$	$(x + 7)^2 + (y + 3)^2 = 49$	$(x - 7)^2 + (y + 3)^2 = 49$	$(x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 49$	$(x - 3)^2 + (y + 7)^2 = 49$

■ Рівняння $(x + 7)^2 + (y - 3)^2 = 49$ є рівнянням кола з центром у точці $A(-7; 3)$ і радіуса $r = 7$. При симетрії відносно початку координат $A(-7; 3) \to A'(7; -3)$. Оскільки центральна симетрія є рухом, то коло перейде в рівне йому коло. Отже, $(x - 7)^2 + (y + 3)^2 = 49$ — рівняння образу даного кола.

Відповідь. В. ■

Приклад 4. Встановити рівняння образу параболи $y = x^2$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}(-5; 1)$.

А	Б	В	Г	Д
$y = -x^2 + 10x - 26$	$y = x^2 - 4$	$y = x^2 - 5x + 1$	$y = x^2 - 10x + 26$	$y = x^2 + 10x + 26$

■ При паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}(-5; 1)$ вершина параболи (0; 0) перейде в точку $O_1(0 - 5; 0 + 1)$; $O_1(-5; 1)$. Рівняння параболи-образу з вершиною (–5; 1) має вигляд:
$y - 1 = (x + 5)^2$; $y = (x + 5)^2 + 1$; $y = x^2 + 10x + 26$.

Відповідь. Д. ■

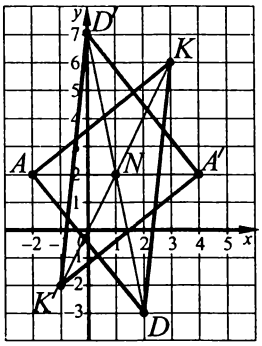
Приклад 5. Сторони двох подібних правильних многокутників відносяться як 6 : 5, а різниця їх площ дорівнює 77 см^2. Знайти площу меншого з цих многокутників.

■ Позначимо сторону меншого многокутника через $5x$ см, тоді сторона більшого — $6x$ см, де x — деяке число. Тоді $\frac{S_1}{S_2} = \frac{(5x)^2}{(6x)^2} = \frac{25x^2}{36x^2} = \frac{25}{36}$; $S_2 = \frac{36}{25}S_1$. $S_2 - S_1 = 77$, звідки $\frac{36}{25}S_1 - S_1 = 77$;

$\frac{11}{25}S_1 = 77$; $S_1 = 175$ (см^2).

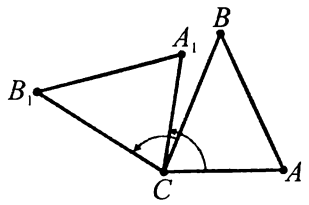
Відповідь. 175 см^2. ■

Приклад 6. Побудувати трикутник, симетричний трикутнику AKD відносно точки N, де $A(-2; 2)$, $K(3; 6)$, $D(2; -3)$, $N(1; 2)$.



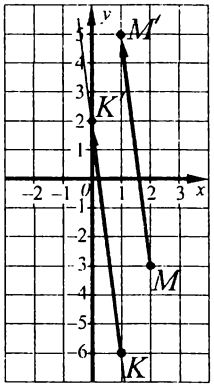
■ Побудова зображена на рисунку. $\Delta A'K'D'$ симетричний ΔAKD відносно точки N. ■

Приклад 7. Побудувати фігуру, у яку перейде рівнобедрений трикутник ABC внаслідок повороту навколо точки C на 80° проти годинникової стрілки.



■ Виконаємо поворот точок A та B навколо точки C проти годинникової стрілки на 80° (див. рис.), одержимо точки A_1 і B_1 відповідно. Сполучимо точки A_1 і B_1 з точкою C. Одержимо трикутник B_1CA_1. ■

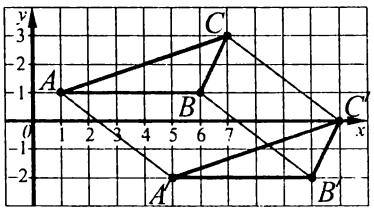
Приклад 8. При паралельному перенесенні точка $M(2; -3)$ переходить у точку $M'(1; 5)$. Побудувати точку K', у яку перейде точка $K(1; -6)$ при такому паралельному перенесенні. Знайти координати точки K'.



■ Побудуємо на координатній площині точки $M(2; -3)$, $M'(1; 5)$ і $K(1; -6)$. Через точку K проведемо пряму l, паралельну до прямої MM'. На прямій l від точки K у напрямі MM' відкладемо відрізок $KK' = MM'$. Точка K' — шукана. Знайдемо координати вектора переносу $\overrightarrow{MM'}$. $a = 1 - 2 = -1$; $b = 5 - (-3) = 8$. Отже, $\overrightarrow{MM'}(-1; 8)$. Тоді координати точки K' дорівнюють: $-1 = x_{K'} - 1$; $8 = y_{K'} - (-6)$; $x_{K'} = 0$; $y_{K'} = 2$. Отже, $K'(0; 2)$.

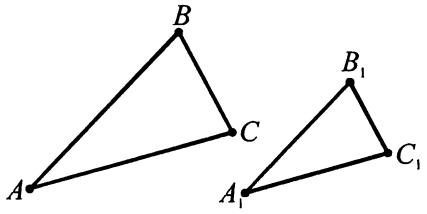
Відповідь. (0; 2). ■

Приклад 9. Побудувати трикутник ABC, у якому $A(1; 1)$, $B(6; 1)$, $C(7; 3)$. Побудувати фігуру, у яку перейде цей трикутник унаслідок паралельного перенесення, заданого формулами $x' = x + 4$, $y' = y - 3$.



■ Побудуємо трикутник ABC (див. рис.). Знайдемо координати точок A', B', C', у які перейдуть точки A, B, C відповідно при даному паралельному перенесенні: $A'(1 + 4; 1 - 3)$, $B'(6 + 4; 1 - 3)$, $C'(7 + 4; 3 - 3)$, тобто $A'(5; -2)$, $B'(10; -2)$, $C'(11; 0)$. Сполучимо точки A', B' і C' послідовно. Одержимо трикутник $A'B'C'$, у який перейде трикутник ABC внаслідок даного паралельного перенесення. ■

Приклад 10. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Знайти невідомі сторони трикутників, якщо $AB = 18$ см, $AC = 16{,}4$ см, $A_1B_1 = 9$ см, $B_1C_1 = 7$ см.

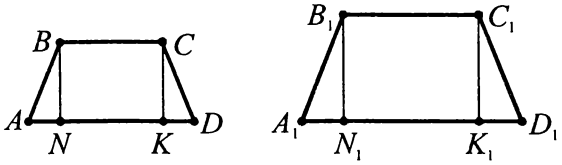


■ $k = \dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{9}{18} = \dfrac{1}{2}$. Отже, $\dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{A_1C_1}{AC} = \dfrac{1}{2}$. Звідси $BC = 2B_1C_1$, $BC = 2 \cdot 7 = 14$ (см).

$A_1C_1 = AC : 2$, $A_1C_1 = 16{,}4 : 2 = 8{,}2$ (см).

Відповідь. 14 см; 8,2 см. ■

Приклад 11. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 20 см і 28 см, а бічна сторона — 5 см. Знайди площу трапеції, подібної до даної, висота якої дорівнює 12 см.



■ Нехай $ABCD$ — дана рівнобічна трапеція, у якої $BC = 20$ см, $AD = 28$ см, $AB = 5$ см. Проведемо $BN \perp AD$, $CK \perp AD$. $\Delta ABN = \Delta DCK$ (як прямокутні за гіпотенузою і катетом). $NBCK$ — прямокутник. $AN = KD = (28 - 20) : 2 = 4$ (см).

Із прямокутного трикутника ABN за теоремою Піфагора $AB^2 = BN^2 + AN^2$. Звідси $BN = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см). Тоді $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BN$, $S_{ABCD} = \dfrac{28 + 20}{2} \cdot 3 = 72$ (см^2).

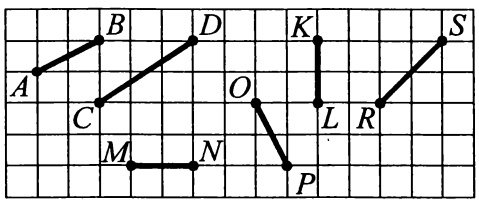
Оскільки $\Delta A_1B_1C_1D_1 \sim \Delta ABCD$ і $k = \dfrac{B_1N_1}{BN} = \dfrac{12}{3} = 4$, то $\dfrac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = k^2$, $S_{A_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD} \cdot k^2 = 72 \cdot 16 =$

$= 1152$ (см^2).

Відповідь. 1152 см^2. ■

Завдання 43.1–43.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

43.1. Який з відрізків є образом відрізка AB при русі?



А	Б	В	Г	Д
CD	MN	OP	KL	RS

43.2. Знайти координати точки, симетричної точці (3; 5) відносно початку координат.

А	Б	В	Г	Д
(–5; 3)	(5; –3)	(3; 5)	(–3; –5)	(–3; 5)

43.3. Яка з указаних фігур має цент симетрії?

А	Б	В	Г	Д
Трапеція	трикутник	кут	промінь	відрізок

43.4. Знайти координати точки, симетричної точці (–3; 4) відносно осі x.

А	Б	В	Г	Д
(4; –3)	(3; 4)	(3; –4)	(–3; –4)	(–4; 3)

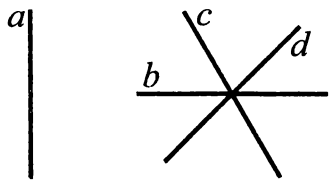
43.5. Яка з указаних фігур має лише одну вісь симетрії?

А	Б	В	Г	Д
Квадрат	коло	відрізок	парабола	ромб

43.6. Дано точку $C(1; 3)$. Знайти координати точки C', у яку перейде точка C при повороті навколо початку координат на 90° проти годинникової стрілки.

А	Б	В	Г	Д
(–3; 1)	(3; –1)	(–1; 3)	(–2; 2)	(–2; 3)

43.7. Яка з прямих, зображених на рисунку, може бути образом прямої a при паралельному перенесенні?



А	Б	В	Г	Д
Жодна	b	c	d	a

43.8. При паралельному перенесенні точка $A(2; 3)$ переходить у точку $A'(5; 1)$. У яку точку перейде при цьому паралельному перенесенні точка $B(–2; 1)$?

А	Б	В	Г	Д
(–5; 3)	(1; –1)	(–1; 1)	(5; –3)	(9; 3)

43.9. Точка $A'(–8; 12)$ — образ точки $A(x; –3)$ при гомотетії з центром у початку координат. Знайти x.

А	Б	В	Г	Д
–17	–2	2	–7	5

43.10. Площі двох подібних трикутників дорівнюють 27 см^2 і 48 см^2. Одна зі сторін першого трикутника дорівнює 6 см. Знайти відповідну їй сторону другого трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$10\frac{2}{3}$ см	8 см	20,25 см	9 см	7,25 см

43.11. Встановити образ прямої $y = 2x + 3$ при симетрії відносно початку координат.

А	Б	В	Г	Д
$y = -2x - 3$	$y = -2x + 3$	$y = 0{,}5x + 3$	$y = 2x - 3$	$y = -0{,}5x - 3$

43.12. Встановити образ параболи $y = (x - 1)^2 + 3$ при симетрії відносно початку координат.

А	Б	В	Г	Д
$y = (x - 1)^2 - 3$	$y = -(x + 1)^2 - 3$	$y = -(x - 1)^2 - 3$	$y = -(x + 1)^2 + 3$	$y = (x - 1)^2 + 3$

43.13. Знайти образ прямої $y = -4x - 3$ при симетрії відносно вісі y.

А	Б	В	Г	Д
$y = -\frac{x}{4}x - 3$	$y = \frac{x}{4}x - 3$	$y = -4x + 3$	$y = 4x + 3$	$y = 4x - 3$

43.14. При симетрії відносно прямої $y = x$ пряма $y = -4x + 4$ переходить у пряму ...

А	Б	В	Г	Д
$y = -\frac{x}{4} + 1$	$y = \frac{x}{4} + 4$	$y = -4x - 4$	$y = 4x + 4$	$y = \frac{x}{4} + 1$

43.15. Встановити образ параболи $y = x^2$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}\,(-1; 2)$.

А	Б	В	Г	Д
$y = x^2 - 2x + 1$	$y = x^2 - 2x - 1$	$y = x^2 - 2x + 3$	$y = x^2 + 2x + 3$	$y = x^2 + 2x + 1$

43.16. Встановити образ прямої $y = -x + 4$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{m}\,(1; 1)$.

А	Б	В	Г	Д
$y = -2x + 5$	$y = -x + 5$	$y = -x + 6$	$y = -2x + 6$	$y = x + 5$

43.17. Знайти образ точки $(\sqrt{2}\,; 0)$ при повороті навколо початку координат на кут 45° проти годинникової стрілки.

А	Б	В	Г	Д
$(0; \sqrt{2}\,)$	$(1; 1)$	$(\sqrt{2}\,; \sqrt{2}\,)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$(\sqrt{2}\,; 1)$

43.18. Вказати рівняння образу кола $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ при гомотетії з коефіцієнтом 3 і центром у початку координат.

А	Б	В	Г	Д
$(x - 3)^2 + (y + 6)^2 = 36$	$(x - 3)^2 + (y + 6)^2 = 12$	$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 12$	$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 36$	$(x + 3)^2 + (y - 6)^2 = 36$

43.19. Точка $A(2; -3)$ — образ точки $B(8; 6)$ при гомотетії з центром у точці $M(4; 0)$. Знайти коефіцієнт гомотетії.

А	Б	В	Г	Д
3	2	0,5	–2	–0,5

43.20. Точка $M(6; -3)$ — образ точки $N(2; 1)$ при гомотетії з коефіцієнтом $k = -\frac{1}{3}$. Вказати координати центра гомотетії.

А	Б	В	Г	Д
$(5; -2)$	$(-5; 2)$	$(-2; 1)$	$\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$	$(-5; -2)$

Завдання 43.21–43.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

43.21. Дано точку $A(5; -2)$. Установити відповідність між перетвореннями (1–4) та координатами образу точки (А–Д).

1 Паралельне перенесення на вектор (3; 4)	**А** (5; 2)
2 Симетрія відносно початку координат	**Б** (2; –6)
3 Симетрія відносно осі x	**В** (–5; 2)
4 Симетрія відносно осі y	**Г** (–5; –2)
	Д (8; 2)

43.22. Дано точку $B(0; \sqrt{2})$. Установити відповідність між поворотами навколо початку координат (1–4) та координатами образу точки (А–Д).

1 Поворот на 90° за годинниковою стрілкою	**А** (1; 1)
2 Поворот на 90° проти годинникової стрілки	**Б** (–1; 1)
3 Поворот на 45° за годинниковою стрілкою	**В** (–1; –1)
4 Поворот на 135° проти годинникової стрілки	**Г** $(\sqrt{2}; 0)$
	Д $(-\sqrt{2}; 0)$

43.23. Дано пряму $y = \frac{x}{3} + 1$. Установити відповідність між перетвореннями (1–4) та рівняннями образів даної прямої (А–Д).

1 Симетрія відносно осі x	**А** $y = -\frac{x}{3} + 1$
2 Симетрія відносно осі y	**Б** $y = \frac{x}{3} + 1$
3 Симетрія відносно початку координат	**В** $y = -\frac{x}{3} - 1$
4 Паралельне перенесення на вектор (3; 1)	**Г** $y = x + 2$
	Д $y = \frac{x}{3} - 1$

43.24. Дано точку $A(4; 6)$. Установити відповідність між гомотетіями (1–4) та координатами образу точки (А–Д).

1 Гомотетія з центром $O(3; 3)$ і $k = 2$	**А** (8; 8)
2 Гомотетія з центром $O(2; 5)$ і $k = 3$	**Б** (8; 10)
3 Гомотетія з центром $O(3; 7)$ і $k = -2$	**В** (2; 8)
4 Гомотетія з центром $O(5; 7)$ і $k = -3$	**Г** (1; 9)
	Д (5; 9)

43.25. Дано коло $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 4$. Установити відповідність між перетвореннями (1–4) та рівняннями образів кола (А–Д).

1 Симетрія відносно осі x	**А** $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 4$
2 Симетрія відносно осі y	**Б** $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 4$
3 Симетрія відносно прямої $y = x$	**В** $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$
4 Симетрія відносно початку координат	**Г** $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 4$
	Д $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$

43.26. Дано графік $y=\sqrt{x}$. Установити відповідність між перетвореннями (1–4) та рівняннями образів графіка (А–Д).

1 Симетрія відносно прямої $x=4$
2 Симетрія відносно прямої $y=2$
3 Симетрія відносно прямої $y=-1$
4 Симетрія відносно прямої $x=-1$

А $y=-\sqrt{x}-2$
Б $y=\sqrt{-x-2}$
В $y=\sqrt{-x+4}$
Г $y=\sqrt{-x+8}$
Д $y=-\sqrt{x}+4$

43.27. Дано коло $(x+3)^2+(y-4)^2=9$. Установити відповідність між гомотетіями (1–4) та рівняннями образів кола (А–Д).

1 Гомотетія з центром $O(0;\,1)$ і $k=-\frac{1}{3}$
2 Гомотетія з центром $O(0;\,1)$ і $k=\frac{1}{3}$
3 Гомотетія з центром $O(0;\,-2)$ і $k=\frac{1}{3}$
4 Гомотетія з центром $O(0;\,2)$ і $k=-\frac{1}{3}$

А $(x+1)^2+(y-2)^2=1$
Б $(x-1)^2+(y-4)^2=0$
В $(x-1)^2+(y+1)^2=1$
Г $(x-1)^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=1$
Д $(x+1)^2+(y-1)^2=1$

43.28. Дано параболу $y=x^2-4x+8$. Установити відповідність між перетвореннями (1–4) та рівняннями образів параболи (А–Д).

1 Паралельне перенесення на вектор $(2;\,-1)$
2 Паралельне перенесення на вектор $(-4;\,1)$
3 Паралельне перенесення на вектор $(1;\,2)$
4 Симетрія відносно осі y

А $y=x^2+4x+8$
Б $y=x^2-8x+19$
В $y=x^2-6x+15$
Г $y=x^2+4x+9$
Д $y=x^2-4x-8$

Розв'яжіть завдання 43.29–43.32. Відповідь запишіть десятковим дробом.

43.29. Вершина A квадрата $ABCD$ є центром повороту проти годинникової стрілки на кут 90°. Знайти довжину відрізка CC_1, де точка C_1 — образ точки C при заданому повороті, якщо $AB=5$ см.

43.30. Середня лінія трикутника відтинає від нього трапецію, площа якої дорівнює 21 см^2. Знайти площу даного трикутника.

43.31. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються у точці E. Знайти площу трапеції, якщо $BC:AD=3:5$, а площа трикутника AED дорівнює 175 см^2.

43.32. Пряма, паралельна до сторони AB трикутника ABC, перетинає його сторону AC у точці E, а сторону BC — у точці F. Знайти площу трикутника CEF, якщо $AE:EC=3:2$, а площа трикутника ABC дорівнює 75 см^2.

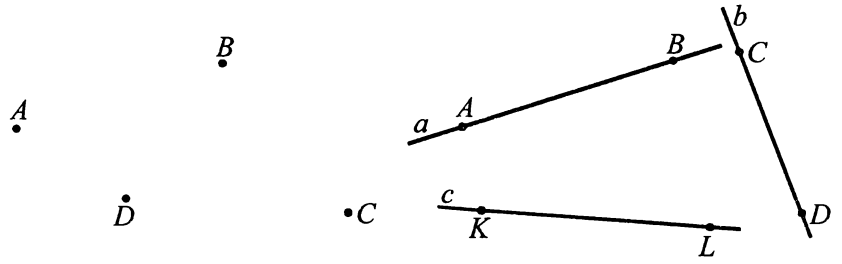
Тема 44. Найпростіші геометричні фігури на площині

Точка та пряма

Точка та пряма — основні, неозначувані фігури на площині.

точка пряма

Точки позначають великими буквами латинського алфавіту: A, B, C, D, ... (рис. 1 а), а прямі — малими буквами латинського алфавіту: a, b, c, ... або двома великими: AB, CD, KL, ... (рис. 1 б).



а) **б)**

Рис. 1

Промінь і відрізок

Відрізок і промінь — частини прямої.

Променем називають частину прямої, що складається з точки на прямій, яку називають початком променя, а також з усіх точок прямої, які лежать з одного боку від указаної точки. Будь-яка точка прямої розбиває пряму на два промені (рис. 2).

Промінь позначають двома великими латинськими літерами, перша з яких позначає початок променя, а друга — будь-яку іншу точку променя. На рисунку 3 промінь OP можна назвати променем OB, променем OK, променем OA.

Два промені, які мають спільний початок і доповнюють один одного до прямої, називають *доповняльними*. На рисунку 4 промені OB й OP — доповняльні. Точка O є спільним початком цих променів.

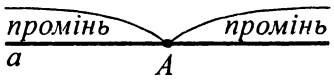


Рис. 2

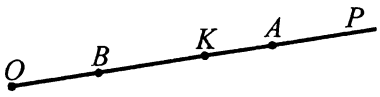


Рис. 3

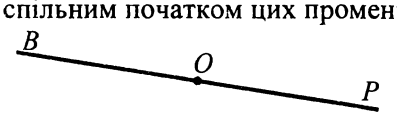


Рис. 4

Відрізком називають частину прямої, яка складається із двох точок на прямій та всіх її точок, що лежать між даними точками (рис. 5).

Згадувані дві точки називають *кінцями відрізка*. Інші точки відрізка називають його *внутрішніми точками*. Відрізок позначають двома великими латинськими літерами, якими позначено його кінці. Наприклад, на рисунку 6 зображено відрізок MN або NM. Довжину відрізків вимірюють у таких одиницях вимірювання: 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км тощо.

Рис. 5

Рис. 6

Відрізки називають *рівними*, якщо при накладанні вони суміщаються. Рівні відрізки мають однакові довжини, і навпаки, якщо довжини відрізків рівні, то рівні й самі відрізки (рис. 7).

Рівні відрізки позначають на рисунках однаковою кількістю рисок. На рисунку 8 зображено рівні між собою відрізки: **а)** BM і DK, **б)** AO і CP.

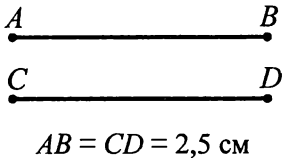


Рис. 7

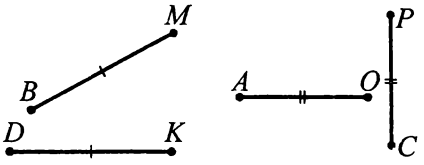


Рис. 8

Щоб встановити, чи лежить точка C між точками A та B, потрібно перевірити правильність рівності $AB = AC + BC$ (рис. 9). Ця рівність виражає основну властивість вимірювання відрізків.

Щоб встановити, чи лежать на одній прямій три точки A, B і C, потрібно переконатись у правильності однієї з рівностей: або $AB = AC + CB$ (рис. 10), або $AC = AB + BC$ (рис. 11), або $BC = BA + AC$ (рис. 12).

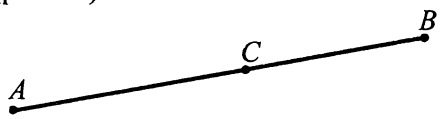


Рис. 9

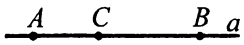


Рис. 10

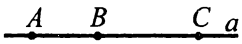


Рис. 11

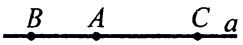


Рис. 12

Кут

Два промені (наприклад, OM і ON) зі спільним початком — точкою O — ділять площину на дві частини. На рисунку 13 ці частини зафарбовані по-різному.

Кутом називають частину площини, обмежену двома променями зі спільним початком. Промені OA й OB, або промені m і n, називають *сторонами кута*, а точку O — *вершиною кута* (рис. 14).

На рисунку 15 зображено два кути — $\angle 1$ і $\angle 2$. Чим вони відрізняються? Ми розглядатимемо лише ті кути, які містять будь-який відрізок з кінцями на його сторонах. На рис. 15 це кут 1.

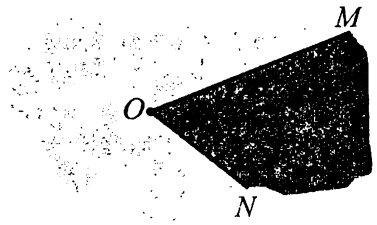


Рис. 13

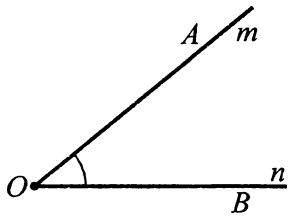


Рис. 14

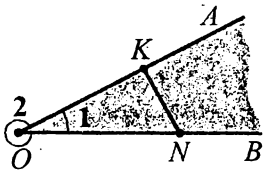


Рис. 15

Кут позначають або назвою його вершини, або назвою променів — його сторін, або назвою трьох точок: вершини і двох точок, які лежать на сторонах кута. Якщо кут позначають трьома буквами, то середньою в запису має бути буква, якою позначена вершина кута. Знак «$\angle$» замінює слово *кут*. Записують $\angle O$, $\angle AOB$, $\angle BOA$, $\angle(mn)$ (рис. 14). Кут також позначають маленькими буквами грецького алфавіту: α, β, γ тощо, тоді знак кута не пишуть. Можна позначати кут цифрами: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ тощо.

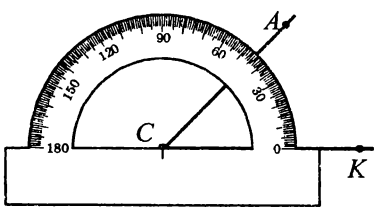
Є такі одиниці вимірювання кутів:

1) 1 градус. Записують 1°. У перекладі з латинської «*gradus*» означає «*ступінь, крок*»;

2) 1 хвилина — це $\frac{1}{60}$ частина градуса. Записують 1′;

3) 1 секунда — це $\frac{1}{60}$ частина хвилини. Записують 1″.

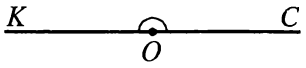
Наприклад, кут 60 градусів 47 хвилин і 19 секунд записують так: 60°47′19″.



Кути вимірюють також у радіанах (1 радіан ≈ 57°18′); у градах (1 град ≈ 0,9°); у румбах (1 румб ≈ 11,29°).

Кути вимірюють транспортиром. Наприклад, кут ACK на рисунку дорівнює 45°.

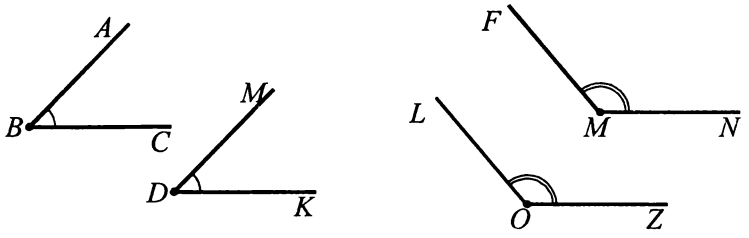
Кут, сторони якого є доповняльними променями, називають *розгорнутим*. На рисунку кут KOC — розгорнутий кут.



Кути називатимемо *рівними*, якщо вони при напкладанні суміщаються. Кути порівнюють за їхніми градусними мірами. Рівні кути мають однакові градусні міри, і навпаки, якщо градусні міри кутів однакові, то й кути рівні.

Наприклад, якщо $\angle NOZ = 65°$, $\angle LFR = 65°$, то $\angle NOZ = \angle LFR$; якщо $\angle RBM = 48°$, $\angle FNC = 34°$, то $\angle RBM > \angle FNC$.

Рівні кути позначають на рисунку однаковою кількістю дужок. На рисунку 16 $\angle ABC = \angle MDK$, $\angle FMN = \angle LOZ$.



а) б)

Рис. 16

Кут, який дорівнює 90°, називають *прямим* кутом (рис. 17). $\angle MOD$ — прямий, $\angle MOD = 90°$.

Кут, менший від прямого, називають *гострим* кутом (рис. 18). $\angle AOK$ — гострий, $\angle AOK < 90°$.

Кут, більший від прямого, але менший від розгорнутого, називають *тупим* кутом (рис. 19). $\angle MDK$ — тупий, $90° < \angle MDK < 180°$.

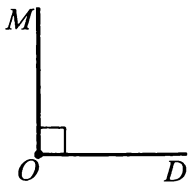


Рис. 17

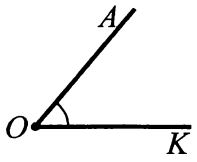


Рис. 18

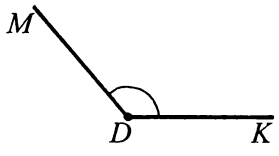


Рис. 19

Щоб встановити, чи проходить промінь OC між сторонами кута AOB, достатньо перевірити правильність рівності $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB$.

На рисунках 20 і 21 показано, як за допомогою транспортира та лінійки від променя OP відкласти кут KOP, який дорівнює 85°.

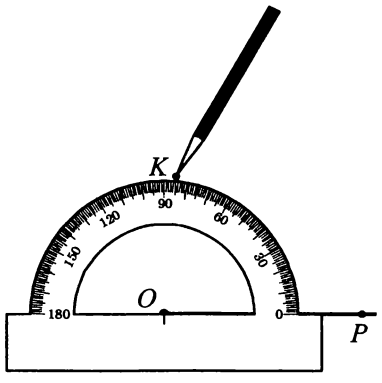


Рис. 20

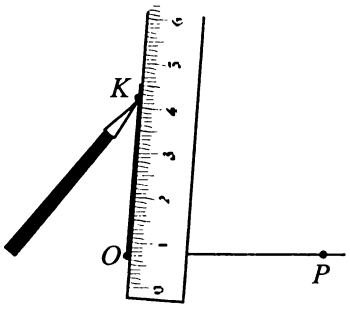
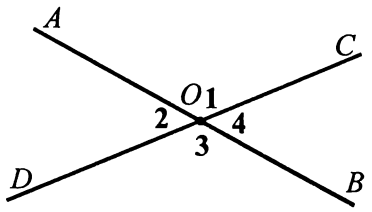


Рис. 21

При перетині двох прямих утворюються 4 кути, менші за розгорнутий. Менший з кутів, утворених при перетині двох прямих, називають *кутом між двома прямими*.



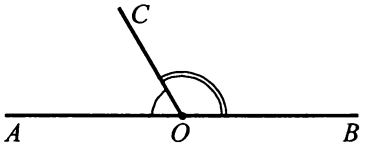
Два кути називають *суміжними*, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші — доповняльні промені. На рисунку $\angle 1$ і $\angle 2$, $\angle 1$ і $\angle 4$, $\angle 2$ і $\angle 3$, $\angle 3$ і $\angle 4$ — суміжні кути.

Два кути називають *вертикальними*, якщо сторони одного кута є доповняльними променями до сторін іншого кута. На рисунку $\angle 1$ і $\angle 3$, $\angle 2$ і $\angle 4$ — вертикальні.

Теорема. *Сума* суміжних *кутів дорівнює 180°.*

Наприклад, кути AOC й BOC — суміжні (див. рис.).

Тоді $\angle AOC + \angle BOC = 180°$.



Наслідки з теореми про суміжні кути.

З теореми про суміжні кути випливають такі наслідки:

1) Якщо один із суміжних кутів гострий, то інший тупий;

2) якщо один із суміжних кутів тупий, то інший гострий;

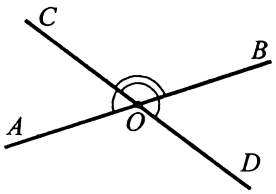
3) якщо два суміжні кути рівні, то вони прямі;

4) якщо два кути рівні, то суміжні з ними кути теж рівні;

5) бісектриси суміжних кутів утворюють прямий кут.

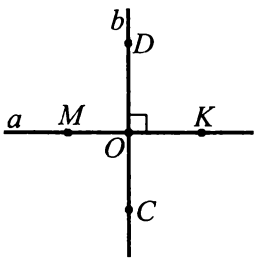
Теорема. *Вертикальні кути рівні.*

Наприклад, кути AOC й BOD — вертикальні (див. рис.). Тоді $\angle AOC = \angle BOD$.



Перпендикулярні прямі

Дві прямі називають *перпендикулярними*, якщо вони перетинаються під прямим кутом (див. рис.). Перпендикулярність прямих a і b позначається знаком «$\perp$». На рисунку $a \perp b$ (читають: «пряма a перпендикулярна до прямої b»). Кут між перпендикулярними прямими дорівнює 90°. На рисунку $\angle MOD = \angle DOK = \angle KOC = \angle COM = 90°$.



Пряму b, перпендикулярну до прямої a, можна побудувати за допомогою косинця (рис. 22) або за допомогою транспортира та лінійки (рис. 23).

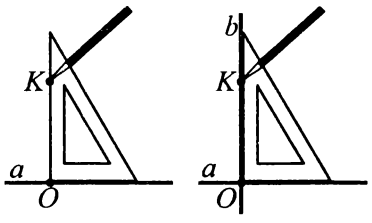


Рис. 22

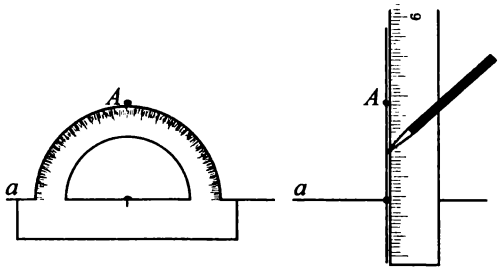


Рис. 23

Перпендикуляром до даної прямої називають відрізок прямої, перпендикулярної до даної прямої, один з кінців якого лежить на даній прямій.

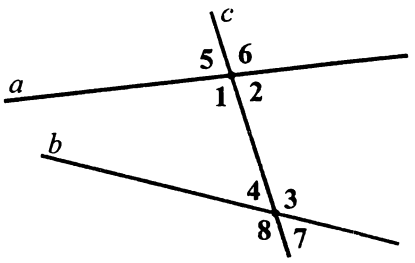
Довжину перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної прямої, називають *відстанню* від даної точки до даної прямої. Відрізок AO — найкоротший з усіх відрізків, які сполучають точку A з точками прямої a.

Паралельні прямі

Дві прямі на площині називають *паралельними*, якщо вони не перетинаються. Паралельність прямих позначають знаком «||». Записують: $a||b$ і читають: «пряма a паралельна до прямої b».

Пряму, яка перетинає дві дані прямі, називають їх *січною*.

При перетині прямих a та b січною c утворюються такі види кутів (див. рис.):



$\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ — внутрішні кути;

$\angle 5, \angle 6, \angle 7, \angle 8$ — зовнішні кути;

$\angle 1$ і $\angle 3$, $\angle 2$ і $\angle 4$ — пари внутрішніх різносторонніх кутів;

$\angle 1$ і $\angle 4$, $\angle 2$ і $\angle 3$ — пари внутрішніх односторонніх кутів;

$\angle 4$ і $\angle 5$, $\angle 3$ і $\angle 6$; $\angle 1$ і $\angle 8$, $\angle 2$ і $\angle 7$ — пари відповідних кутів;

$\angle 5$ і $\angle 8$, $\angle 6$ і $\angle 7$ — пари зовнішніх односторонніх кутів;

$\angle 5$ і $\angle 7$, $\angle 6$ і $\angle 8$ — пари зовнішніх різносторонніх кутів.

Ознаки паралельності прямих

1-ша ознака паралельності прямих

Якщо при перетині двох прямих третьою сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі паралельні. На рис. 24 прямі a і b перетнуті січною c і $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Тоді прямі a та b паралельні.

2-га ознака паралельності прямих

Якщо при перетині двох прямих третьою внутрішні різносторонні кути рівні, то прямі паралельні. На рис. 25 прямі a і b перетнуті січною c і $\angle 1 = \angle 2$. Тоді прямі a і b — паралельні.

3-тя ознака паралельності прямих

Якщо при перетині двох прямих третьою відповідні кути рівні, то прямі паралельні. На рис. 26 прямі a і b перетнуті січною c і $\angle 1 = \angle 2$. Тоді прямі a і b — паралельні.

4-та ознака паралельності прямих

Якщо дві прямі перпендикулярні до третьої прямої, то вони паралельні. На рис. 27 $a \perp c$, $b \perp c$. Тоді прямі a і b — паралельні.

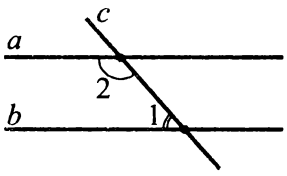


Рис. 24

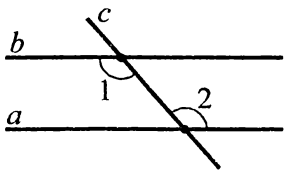


Рис. 25

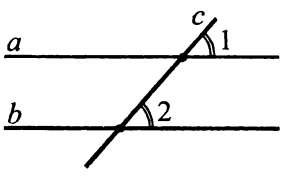


Рис. 26

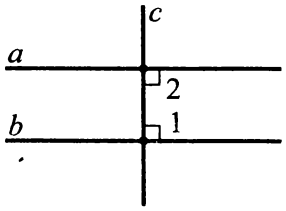


Рис. 27

Властивості паралельних прямих:

1-ша властивість паралельних прямих

Якщо дві паралельні прямі перетнуті третьою, то сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°. На рис. 24 $a||b$, c — січна, кути 1 і 2 — внутрішні односторонні. Тоді $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

2-га властивість паралельних прямих

Якщо дві паралельні прямі перетнуті третьою, то внутрішні різносторонні кути рівні. На рис. 25 $a||b$, c — січна, кути 1 і 2 — внутрішні різносторонні. Тоді $\angle 1 = \angle 2$.

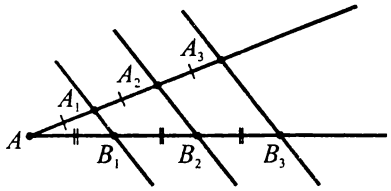
3-тя властивість паралельних прямих

Якщо дві паралельні прямі перетнуті третьою, то відповідні кути рівні. На рис. 26 $a||b$, c — січна, кути 1 і 2 — відповідні. Тоді $\angle 1 = \angle 2$.

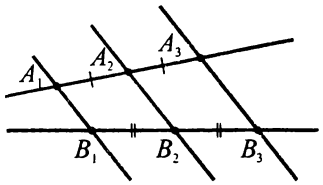
4-та властивість паралельних прямих

Якщо пряма перпендикулярна до однієї із двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна й до іншої прямої. На рис. 27 $a \| b$, $c \perp a$. Тоді $c \perp b$.

Теорема Фалеса. Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки й на іншій його стороні. На рисунку: якщо $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$, $A_1B_1 \| A_2B_2 \| A_3B_3$, то $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$.



Теоерма Фалеса буде справеливою й у випадку, якщо замість сторін кута взяти дві довільні прямі.



Узагальнена теорема Фалеса. Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на його сторонах пропорційні відрізки.

Приклад 1. Дано п'ять точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Через кожні дві точки проведено пряму. Скільки прямих проведено?

А	Б	В	Г	Д
5	20	10	40	4

■ Через кожну з даних п'яти точок можна провести чотири прямі, що проходять через кожну з інших даних точок. Загальна кількість прямих дорівнює $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$, оскільки кожну з прямих порахована двічі.

Відповідь. В. ■

Приклад 2. Провести чотири прямі, кожні дві з яких перетинаються. Скільки точок перетину може утворитися?

■ Може утворитися одна (рис. 32), чотири (рис. 33), шість (рис. 34) точок перетину. ■

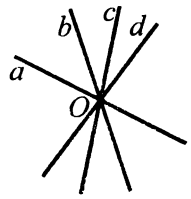


Рис. 32

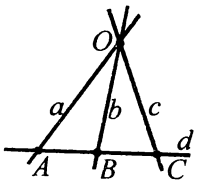


Рис. 33

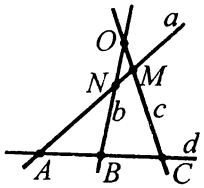
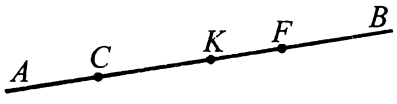


Рис. 34

Приклад 3. Назвати всі промені, зображені на рисунку. Які з них є доповняльними?



■ На рисунку зображено промені CA, KA, FA, FB, KB, CB. Доповняльними є промені CA і CB, KA і KB, FA і FB. ■

Приклад 4. Промінь AC проходить між сторонами кута BAD, який дорівнює 72°. Чому дорівнює кут BAC, якщо він у 5 разів більший за кут CAD?

■ Оскільки промінь AC проходить між сторонами кута BAD, то $\angle BAC + \angle CAD = 72°$. Нехай $\angle CAD = x°$, тоді $\angle BAC = 5x°$. Рівняння: $x + 5x = 72$; $6x = 72$; $x = 12$. Отже, $\angle CAD = 12°$, $\angle BAC = 5 \cdot 12 = 60°$.

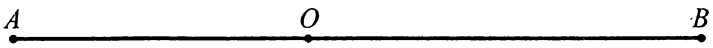
Відповідь. 60°. ■

Приклад 5. Точка K ділить відрізок MT завдовжки 35 см на частини, різниця яких дорівнює 13 см. Знайти довжину кожної частини.

■ $MK + KT = 35$ см (див. рис.). Нехай MK дорівнює x см, тоді KT дорівнюватиме $(x + 13)$ см. Складемо й розв'яжемо рівняння: $x + x + 13 = 35$; $2x = 22$; тоді $x = 11$; $x + 13 = 24$. Отже, $MK = 11$ см, $KT = 24$ см.

Відповідь. 11 см, 24 см. ■

Приклад 6. Точка O належить відрізку AB. Знайти довжини відрізків AO й OB, якщо вони відносяться як 3 : 4, а $AB = 49$ см.



■ За властивістю вимірювання відрізків $AB = AO + OB$ (див. рис.). Нехай одна частина становить x см, тоді $AO = 3x$ см, а OB — $4x$ см. Складемо й розв'яжемо рівняння: $3x + 4x = 49$; $7x = 49$; $x = 7$; тоді $3x = 3 \cdot 7 = 21$ (см); $4 \cdot 7 = 28$ (см). Отже, $AO = 21$ см, а $OB = 28$ см.

Відповідь. 21 см, 28 см. ■

Приклад 7. Із двох пунктів L і N вийшли в пункт P два туристи. Відстань, пройдена першим туристом, дорівнює 9,7 км, а відстань, пройдена другим туристом, — 8,3 км. Якою може бути відстань LN, якщо пункти L, N і P розміщені на одній прямій?

■ Розглянемо два випадки.

1-й випадок

Пункт P лежить між пунктами L і N (рис. 35). Тоді $LN = LP + PN$, тому $LN = 9,7 + 8,3 = 18$ (км).

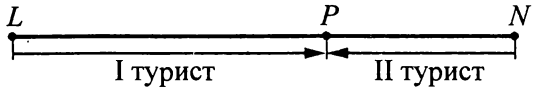


Рис. 35

2-й випадок

Пункт P не лежить між пунктами L і N. Тоді можливим є лише випадок, що пункт N лежить між пунктами L і P (рис. 36). Отже, $LP = LN + PN$, звідси $LN = LP - PN$, $LN = 9,7 - 8,3 = 1,4$ (км).

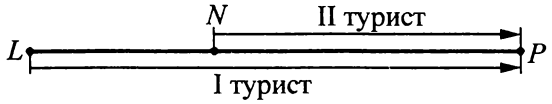


Рис. 36

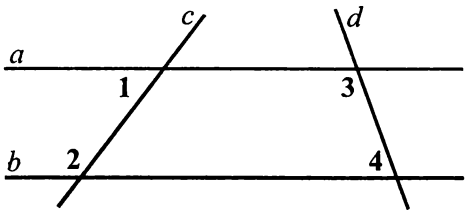
Відповідь. 18 км або 1,4 км. ■

Приклад 8. Сума двох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 270°. Під яким кутом перетинаються ці прямі?

■ Будь-які два нерозгорнуті кути, що утворюються при перетині двох прямих, або суміжні, або вертикальні. Оскільки сума даних кутів не дорівнює 180°, то вони не будуть суміжними, отже, вони вертикальні. Кожен з них дорівнює по 270° : 2 = 135°. Оскільки за кут між прямими, що перетинаються, приймають менший з утворених кутів, то прямі перетинаються під кутом 180° – 135° = 45°.

Відповідь. 45°. ■

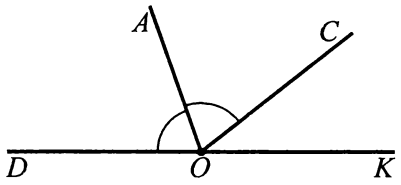
Приклад 9. На рисунку $\angle 1 = 52°$, $\angle 2 = 128°$, $\angle 3 = 110°$. Знайти $\angle 4$.



■ $\angle 1$ і $\angle 2$ — внутрішні односторонні при прямих a та b і січній c. Оскільки $\angle 1 + \angle 2 = 52° + 128° = 180°$, то $a \| b$. $\angle 3$ і $\angle 4$ — внутрішні односторонні при паралельних прямих a та b і січній d. Тому $\angle 3 + \angle 4 = 180°$; $\angle 4 = 180° - 110° = 70°$.

Відповідь. 70°. ■

Приклад 10. Кути DOC і KOC — суміжні, промінь OA — бісектриса кута DOC, кут KOC на 33° менший за кут AOC. Знайти кути DOC і KOC.

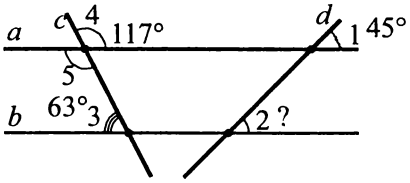


■ Нехай $\angle KOC = x°$ (див. рис.), тоді $\angle AOC = (x + 33)°$.

За теоремою про суміжні кути: $\angle DOC + \angle KOC = 180°$, за властивістю бісектриси $\angle DOC = 2\angle AOC$, тому $2\angle AOC + \angle KOC = 180°$. Складемо і розв'яжемо рівняння: $2(x + 33) + x = 180$; $3x + 66 = 180$; $3x = 114$; $x = 38$. Отже, $\angle KOC = 38°$, $\angle DOC = 180° - 38° = 142°$.

Відповідь. 142°, 38°. ■

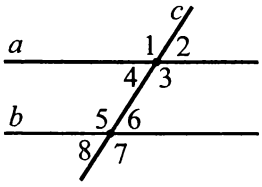
Приклад 11. За рисунком знайти кут 2.



■ Кут 5 вертикальний з кутом 4. Тоді $\angle 5 = \angle 4 = 117°$. Кути 5 і 3 — внутрішні односторонні при прямих a і b та січній c. $\angle 5 + \angle 3 = 117° + 63° = 180°$. Отже, за ознакою паралельності прямих, $a \| b$. Кути 1 і 2 — відповідні при паралельних прямих a і b та січній d. За властивістю паралельних прямих $\angle 2 = \angle 1 = 45°$ (як відповідні).

Відповідь. 45°. ■

Приклад 12. Знайти градусні міри кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, якщо сума трьох з них дорівнює 303°. Скільки розв'язків має задача?



■ Нехай $\angle 1 = \alpha$, $\angle 2 = \beta$ (див. рис.). Тоді $\angle 1 = \angle 3$ (як вертикальні); $\angle 3 = \angle 5$ (як внутрішні різносторонні); $\angle 5 = \angle 7$ (як вертикальні).

Отже, $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = \alpha$. Аналогічно $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = \beta$.

Розглянемо два випадки.

1-й випадок

$2\alpha + \beta = 303°$. За теоремою про суміжні кути $\alpha + \beta = 180°$, $2\alpha + \beta = \alpha + (\alpha + \beta)$. Отже, $\alpha = 303° - 180°$; $\alpha = 123°$. Тоді $\beta = 180° - \alpha = 180° - 123° = 57°$.

Отже, $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 123°$, $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 57°$.

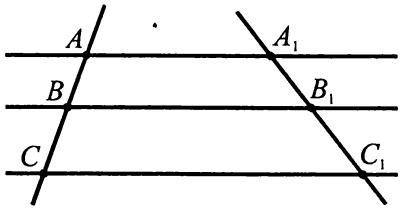
2-й випадок

$3\alpha = 303°$. $\alpha = 303° : 3 = 101°$. Тоді $\beta = 180° - \alpha = 180° - 101° = 79°$.

Отже, $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 101°$, $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 79°$.

Відповідь. 123°, 57°, 123°, 57°, 123°, 57°, 123°, 57° або 101°, 79°, 101°, 79°, 101°, 79°, 101°, 79°. ■

Приклад 13. На рисунку $AA_1 \| BB_1 \| CC_1$. Знайти довжину відрізка AB, якщо $BC = 12$ см, $A_1B_1 = 8$ см, $B_1C_1 = 10$ см.



■ Оскільки прямі AA_1, BB_1 і CC_1 паралельні, то $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

Отже, $AB = \frac{BC \cdot A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{12 \cdot 8}{10} = 9{,}6$ (см).

Відповідь. 9,6 см. ■

Завдання 44.1–44.19 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

44.1. Дано чотири точки, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Через кожні дві точки проведено пряму. Скільки прямих проведено?

А	Б	В	Г	Д
Три	чотири	п'ять	шість	вісім

44.2. На прямій позначено чотири точки. Скільки утворилося променів з початком у цих точках?

А	Б	В	Г	Д
Чотири	п'ять	шість	сім	вісім

44.3. На прямій позначено чотири точки Скільки всього утворилося відрізків з кінцями у цих точках?

А	Б	В	Г	Д
Три	чотири	шість	сім	вісім

44.4. Точка C лежить між точками A та B. Вказати спільну частину променів AB та BC.

А	Б	В	Г	Д
Відрізок BC	відрізок AB	промінь AB	точка B	$\varnothing$

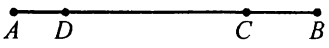
44.5. На відрізку AB позначено точку M таку, що $AM = 5$ см, $MB = 15$ см. Знайти відношення $AM : AB$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$

44.6. На відрізку MK завдовжки 26 см вибрано точку O. Знайти відстань між точками M та O, якщо вона на 12 см більша за відстань між точками O та K.

А	Б	В	Г	Д
7 см	13 см	12 см	19 см	14 см

44.7. На відрізку AB завдовжки 20 см позначено точки C та D такі, що $AC = 15$ см, $BD = 17$ см. Знайти довжину відрізка CD.



А	Б	В	Г	Д
10,5 см	12,5 см	14 см	18 см	12 см

44.8. Який кут утворюють стрілки годинника о 16 годині?

А	Б	В	Г	Д
100°	110°	120°	130°	150°

44.9. Між сторонами кута AOB проведено промінь OC так, що $\angle AOC = 2\angle BOC$. Знайти кут AOC, якщо $\angle AOB = 54°$.

А	Б	В	Г	Д
9°	18°	27°	36°	40°

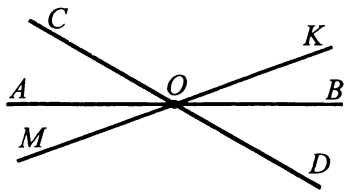
44.10. Бісектриса кута A утворює з його стороною кут, що дорівнює 30°. Знайти кут, суміжний з кутом A.

А	Б	В	Г	Д
150°	120°	165°	140°	170°

44.11. Сума двох кутів, суміжних з кутом B, дорівнює 80°. Знайти кут B.

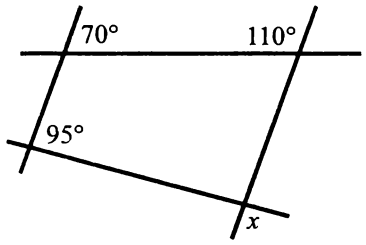
А	Б	В	Г	Д
50°	100°	80°	70°	140°

44.12. На рисунку прямі AB, CD і MK перетинаються у точці O. Знайти кут BOK, якщо $\angle AOC = 30°$, $\angle MOD = 110°$.



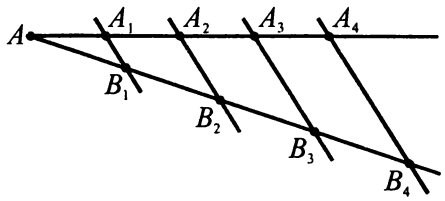
А	Б	В	Г	Д
70°	60°	20°	40°	50°

44.13. За даними рисунка знайти градусну міру кута x.



А	Б	В	Г	Д
70°	95°	110°	85°	75°

44.14. На рисунку $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$ і $A_1B_1 \| A_2B_2 \| A_3B_3 \| A_4B_4$. Знайти AB_2, якщо $B_1B_4 = 24$ см.



А	Б	В	Г	Д
12 см	8 см	16 см	18 см	визначити неможливо

44.15. Точка C належить відрізку AB завдовжки 9 см. Знайти довжину відрізка BC, якщо $4AC + 3BC = 32$ см.

А	Б	В	Г	Д
6 см	5 см	4 см	3 см	7 см

44.16. Відрізок завдовжки 72 см поділили на 6 рівних частин. Знайти відстань між серединами крайніх частин.

А	Б	В	Г	Д
62,5 см	60,6 см	58,6 см	63 см	60 см

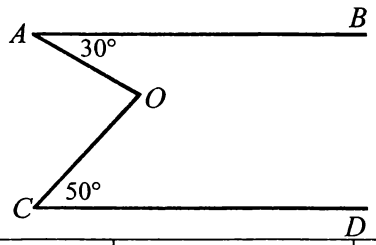
44.17. Промінь OD ділить прямий кут AOB на кути AOD і BOD так, що виконується рівність: $4\angle AOD + 3\angle BOD = 280°$. Знайти градусну міру кута AOD.

А	Б	В	Г	Д
10°	20°	30°	70°	80°

44.18. Який кут утворюють стрілки годинника о 15 годині 30 хвилин?

А	Б	В	Г	Д
80°	70°	65°	75°	85°

44.19. На рисунку прямі AB і CD — паралельні. Знайти градусну міру кута AOC, якщо $\angle BAO = 30°$, $\angle OCD = 50°$.



А	Б	В	Г	Д
30°	50°	80°	100°	визначити неможливо

Завдання 44.20–44.24 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

44.20. Точки A, B та C лежать на одній прямій. Встановити відповідність між характерними властивостями множин (1–4) та фігурами (А–Д).

1 Множина всіх точок прямої, що лежать разом з точкою B між точками A та C

2 Множина всіх точок прямої, які лежать з точкою C по один бік від точки A

3 Множина всіх точок прямої, які лежать з точкою A по один бік від точки C

4 Множина всіх точок прямої, які разом з точкою A лежать між точками B та C

А Промінь CA

Б Відрізок BC

В Відрізок AB

Г Відрізок AC

Д Промінь AC

44.21. Встановити відповідність між рівностями (1–4) та розміщенням точок на прямій (А–Д).

1 $AC = 7$ см, $BC = 3$ см, $AB = 10$ см

2 $AC = 7$ см, $BC = 3$ см, $AB = 9$ см

3 $AC = 12$ см, $BC = 4$ см, $AB = 8$ см

4 $AC = BC - AB$

А Точка B лежить між точками A та C

Б Точка A лежить між точками B та C

В Жодна з точок A, B та C не лежить між двома іншими

Г Точка C лежить між точками A та B

Д Кожна з точок A, B та C лежить на прямій між двома іншими

44.22. З точки A проведено промені AB, AC та AD. Встановити відповідність між градусними мірами утворених кутів (1–4) та розміщеннями променів (А–Д).

1 $\angle BAC = 30°$, $\angle BAD = 70°$, $\angle CAD = 40°$

2 $\angle BAC = 30°$, $\angle BAD = 70°$, $\angle CAD = 100°$

3 $\angle BAD = \angle BAC - \angle CAD$

4 $\angle BAC = 120°$, $\angle BAD = 140°$, $\angle CAD = 100°$

А Промінь AD проходить між сторонами кута BAC

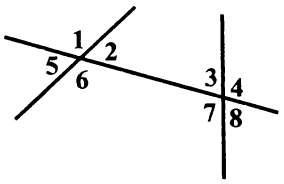
Б Жоден з променів не проходить між сторонами кута, утвореного двома іншими променями

В Промінь AB проходить між сторонами кута CAD

Г Промінь AC проходить між сторонами кута BAD

Д Кожен з променів не проходить між сторонами кута, утвореного двома іншими променями

44.23. Встановити відповідність між парами кутів (1–4), зображеними на рисунку, та їх назвами (А–Д).



1 $\angle 1$ і $\angle 4$

2 $\angle 6$ і $\angle 8$

3 $\angle 6$ і $\angle 7$

4 $\angle 1$ і $\angle 8$

А Внутрішні односторонні

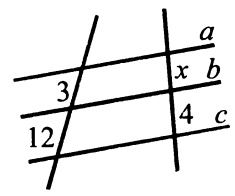
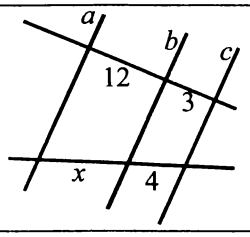
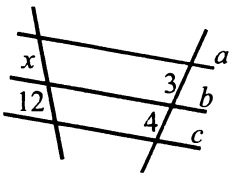
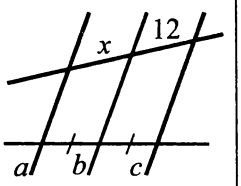
Б Внутрішні різносторонні

В Відповідні

Г Зовнішні односторонні

Д Зовнішні різносторонні

44.24. Встановити відповідність між рисунками (1–4) та довжинами відрізків x на них, якщо прямі a, b та c — паралельні (А–Д).

1	2	3	4
			

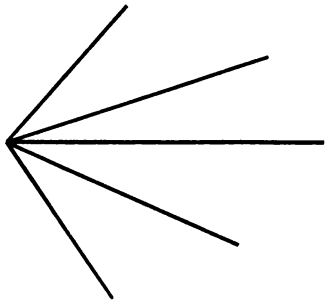
А 12 **Б** 9 **В** 36 **Г** 16 **Д** 1

Розв'яжіть завдання 44.25–44.34. Відповідь запишіть десятковим дробом.

44.25. На відрізку позначили п'ять точок. Скільки всього відрізків утворилося?

44.26. Відрізок завдовжки 24 см поділили на чотири нерівні відрізки. Відстань між серединами крайніх відрізків дорівнює 20 см. Знайти відстань між серединами середніх відрізків.

44.27. Скільки кутів, менших за розгорнутий, зображено на рисунку?



44.28. З даної точки проведено три промені так, що кути між будь-якими двома з них рівні. Яка градусна міра кожного з цих кутів?

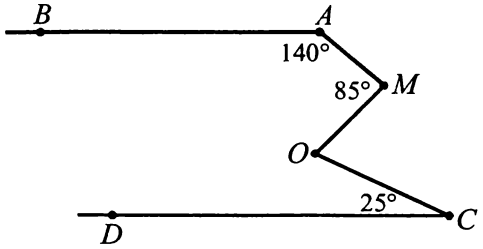
44.29. Різниця двох суміжних кутів менша за їхню суму на 20°. Знайти градусну міру меншого з цих кутів.

44.30. Один з кутів, що утворилися в результаті перетину двох прямих, дорівнює сумі двох інших кутів. Знайти кут між прямими.

44.31. Через точку перетину двох перпендикулярних прямих проведено третю пряму. Знайти найменший з тупих кутів, що утворився в результаті перетину, якщо найбільший з кутів дорівнює 165°.

44.32. Знайти градусну міру кута, під яким січна перетинає паралельні прямі, якщо різниця внутрішніх односторонніх кутів відноситься до їх суми як 2 : 3.

44.33. На рисунку прямі AB та CD — паралельні. Знайти градусну міру кута MOC.



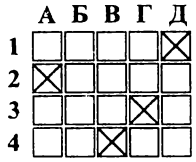
44.34. Який кут утворюють стрілки годинника о 9 год 15 хв?

ВІДПОВІДІ
АЛГЕБРА ТА ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

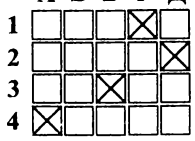
Тема 1. Обчислення. Арифметичні задачі

1.1. Г. **1.2.** Д. **1.3.** Б. **1.4.** Г. **1.5.** В. **1.6.** В. **1.7.** Г. **1.8.** А. **1.9.** Г. **1.10.** Д. **1.11.** Г. **1.12.** Б. **1.13.** Б. **1.14.** Г. **1.15.** В. **1.16.** А. **1.17.** Д. **1.18.** В. **1.19.** Г. **1.20.** Г. **1.21.** В. **1.22.** В.

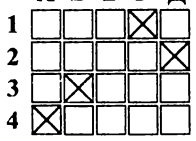
1.23



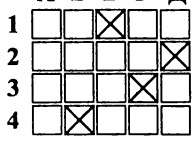
1.24



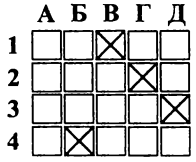
1.25



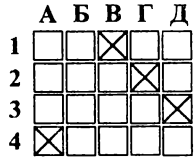
1.26



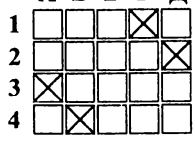
1.27



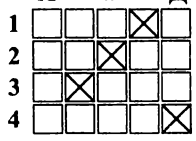
1.28



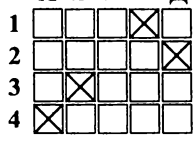
1.29



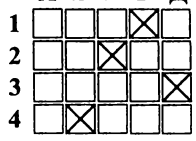
1.30



1.31



1.32



1.33 9,83

1.34 −42,

1.35 1,

1.36 84,

1.37 28,

1.38 32,

1.39 29,

1.40 250,

1.41 288,

1.42 22,

1.43 14,

1.44 10,

1.45 10,

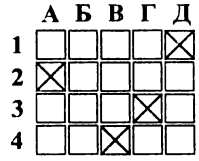
1.46 48,

1.47 72,

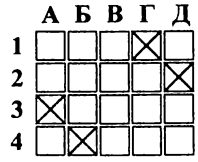
Тема 2. Відсотки

2.1. В. **2.2.** Д. **2.3.** А. **2.4.** Д. **2.5.** Б. **2.6.** В. **2.7.** Б. **2.8.** Г. **2.9.** Д. **2.10.** В. **2.11.** В. **2.12.** В. **2.13.** Г. **2.14.** Г. **2.15.** Б. **2.16.** А. **2.17.** Д. **2.18.** А. **2.19.** А. **2.20.** В. **2.21.** А. **2.22.** Б. **2.23.** А.

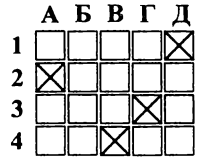
2.24



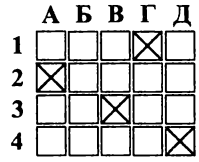
2.25



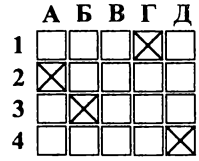
2.26



2.27



2.28



2.29 1,2

2.30 50,

2.31 2,25

2.32 2,5

2.33 7,2

2.34 200,

2.35 500,

2.36 1,44

2.37 4,

2.38 4,

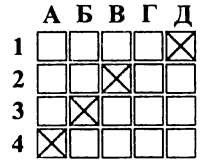
2.39 5,

2.40 30,

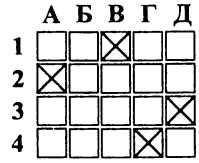
Тема 3. Цілі вирази

3.1. Д. **3.2.** В. **3.3.** А. **3.4.** Д. **3.5.** Г. **3.6.** Г. **3.7.** А. **3.8.** Б. **3.9.** Г. **3.10.** Б. **3.11.** Д. **3.12.** Г. **3.13.** А. **3.14.** Г. **3.15.** Д. **3.16.** Г. **3.17.** Д. **3.18.** В. **3.19.** Д. **3.20.** В. **3.21.** А. **3.22.** Г. **3.23.** Б.

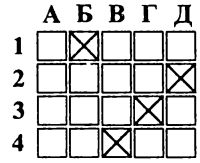
3.24



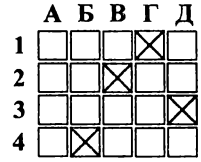
3.25



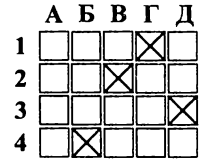
3.26



3.27



3.28



3.29

		2	,			

3.30

		1	5	,		

3.31

		0	,			

3.32

		0	,			

3.33

		9	,			

3.34

–	5	0	,			

Тема 4. Дробово-раціональні вирази

4.1. *Г.* ***4.2.*** *А.* ***4.3.*** *В.* ***4.4.*** *Г.* ***4.5.*** *Б.* ***4.6.*** *Д.* ***4.7.*** *Б.* ***4.8.*** *Г.* ***4.9.*** *А.* ***4.10.*** *Г.* ***4.11.*** *Б.* ***4.12.*** *Г.* ***4.13.*** *Г.* ***4.14.*** *В.* **4.15.** Д. **4.16.** Б. **4.17.** Б. **4.18.** А. **4.19.** В. **4.20.** Г.

4.21

	А	Б	В	Г	Д
1					☒
2	☒				
3		☒			
4				☒	

4.22

	А	Б	В	Г	Д
1			☒		
2				☒	
3		☒			
4					☒

4.23

	А	Б	В	Г	Д
1					☒
2	☒				
3				☒	
4			☒		

4.24

	А	Б	В	Г	Д
1					☒
2				☒	
3		☒			
4	☒				

4.25

	А	Б	В	Г	Д
1			☒		
2					☒
3				☒	
4	☒				

4.26

	А	Б	В	Г	Д
1				☒	
2	☒				
3					☒
4			☒		

4.27

		5	,		

4.28

	–	0	,	5	

4.29

		1	,		

4.30

		0	,	5	

4.31

		1	,	5	

4.32

		0	,	0	5

4.33

		1	,	2	

4.34

		0	,	2	5

4.35

		0	,		

4.36

		0	,	2	

4.37

		4	,		

4.38

		0	,	0	5

4.39

		1	,	1	1

4.40

–	2	0	,		

Тема 5. Ірраціональні вирази

5.1. Г. **5.2.** Д. **5.3.** Б. **5.4.** А. **5.5.** Б. **5.6.** В. **5.7.** Д. **5.8.** В. **5.9.** А. **5.10.** А. **5.11.** А. **5.12.** Д. **5.13.** Г. **5.14.** В. **5.15.** В. **5.16.** Б. **5.17.** Д. **5.18.** Г. **5.19.** Г. **5.20.** В. **5.21.** Г. **5.22.** Д. **5.23.** А. **5.24.** А. **5.25.** Г.

5.26

	А	Б	В	Г	Д
1			☒		
2					☒
3		☒			
4	☒				

5.27

	А	Б	В	Г	Д
1			☒		
2					☒
3		☒			
4	☒				

5.28

	А	Б	В	Г	Д
1			☒		
2	☒				
3		☒			
4					☒

5.29

	А	Б	В	Г	Д
1				☒	
2	☒				
3		☒			
4			☒		

5.30

	А	Б	В	Г	Д
1					☒
2				☒	
3	☒				
4			☒		

5.31

	А	Б	В	Г	Д
1					☒
2			☒		
3				☒	
4	☒				

5.32

	А	Б	В	Г	Д
1		☒			
2				☒	
3					☒
4	☒				

5.33

	–	5	,		

5.34

		2	,		

5.35

	1	0	,		

5.36

		4	,		

5.37

	1	6	,		

5.38

	2	3	,		

5.39

		3	,	5	

5.40

		1	,		

5.41

		1	,		

5.42

	–	1	,		

Тема 6. Логарифмічні та показникові вирази

6.1. Г. **6.2.** В. **6.3.** Г. **6.4.** Д. **6.5.** А. **6.6.** А. **6.7.** Д. **6.8.** Б. **6.9.** Г. **6.10.** Д. **6.11.** А. **6.12.** Д. **6.13.** В. **6.14.** А. **6.15.** Д. **6.16.** Б. **6.17.** Б. **6.18.** Г. **6.19.** В. **6.20.** Б. **6.21.** Г. **6.22.** Б. **6.23.** Б.

6.24

	А	Б	В	Г	Д
1					☒
2				☒	
3			☒		
4	☒				

6.25

	А	Б	В	Г	Д
1					☒
2	☒				
3			☒		
4		☒			

6.26

	А	Б	В	Г	Д
1				☒	
2			☒		
3					☒
4	☒				

6.27

	А	Б	В	Г	Д
1			☒		
2					☒
3		☒			
4				☒	

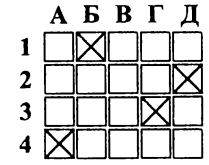
6.28

	А	Б	В	Г	Д
1		☒			
2				☒	
3	☒				
4			☒		

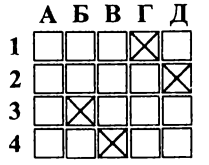
6.29

	А	Б	В	Г	Д
1					☒
2			☒		
3		☒			
4	☒				

6.30

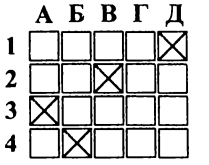


6.31

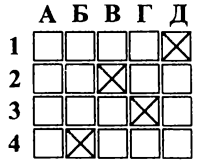


6.32

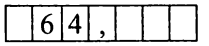
6.33



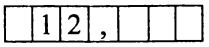
6.34



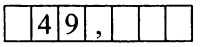
6.35



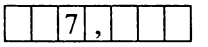
6.36



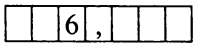
6.37



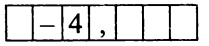
6.38



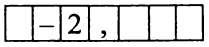
6.39



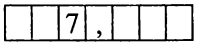
6.40



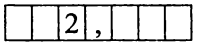
6.41



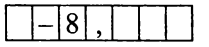
6.42



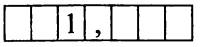
6.43



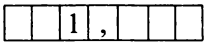
6.44



6.45



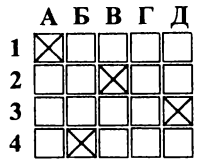
6.46



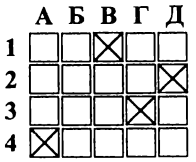
Тема 7. Тригонометричні вирази

7.1. Д. **7.2.** В. **7.3.** Б. **7.4.** А. **7.5.** В. **7.6.** Б. **7.7.** В. **7.8.** В. **7.9.** Б. **7.10.** А. **7.11.** Д. **7.12.** Б. **7.13.** Д. **7.14.** В. **7.15.** А. **7.16.** Д. **7.17.** Б. **7.18.** Г. **7.19.** В. **7.20.** Б. **7.21.** Д. **7.22.** А. **7.23.** Г. **7.24.** А. **7.25.** В. **7.26.** А.

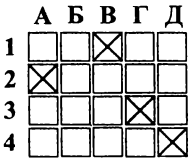
7.27



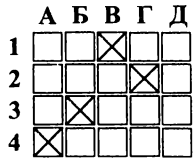
7.28



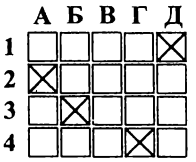
7.29



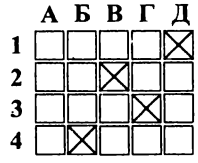
7.30



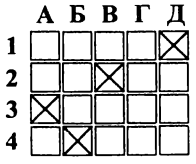
7.31



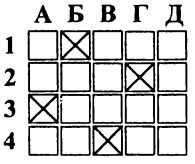
7.32



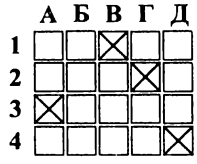
7.33



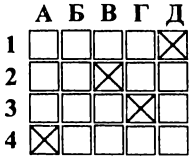
7.34



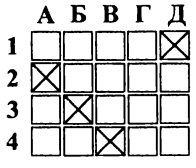
7.35



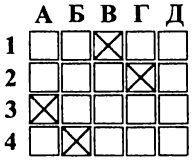
7.36



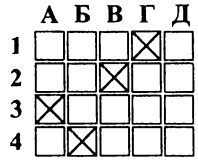
7.37



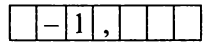
7.38



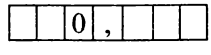
7.39



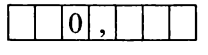
7.40



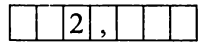
7.41



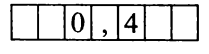
7.42



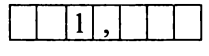
7.43



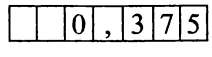
7.44



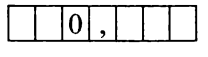
7.45



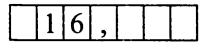
7.46



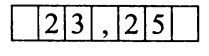
7.47



7.48



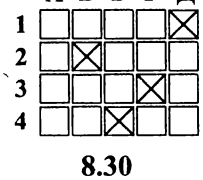
7.49



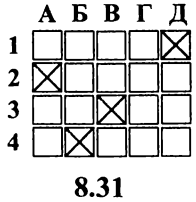
Тема 8. Цілі рівняння

8.1. Г. **8.2.** Д. **8.3.** В. **8.4.** А. **8.5.** В. **8.6.** Г. **8.7.** Б. **8.8.** Б. **8.9.** Г. **8.10.** В. **8.11.** Б. **8.12.** Г. **8.13.** А. **8.14.** А. **8.15.** Д. **8.16.** В. **8.17.** Г. **8.18.** А. **8.19.** Д. **8.20.** Б. **8.21.** Г. **8.22.** В. **8.23.** Б. **8.24.** Г.

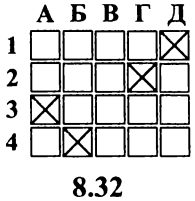
8.25



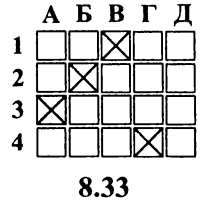
8.26



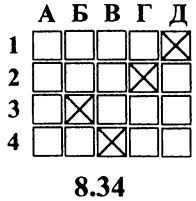
8.27



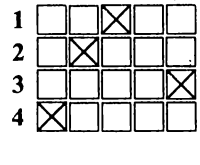
8.28



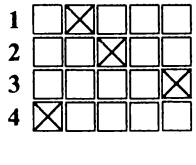
8.29



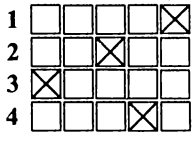
8.30



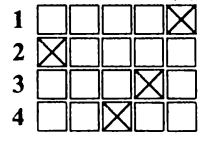
8.31



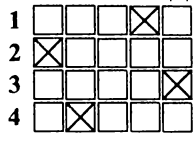
8.32



8.33



8.34



8.35 3,

8.36 8,5

8.37 1,

8.38 −9,

8.39 −1,

8.40 −8,

8.41 2,

8.42 20,

8.43 21,

8.44 62,

8.45 2,

8.46 3,

8.47 −2,

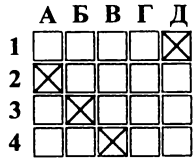
8.48 6,

8.49 4,

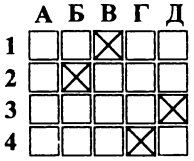
Тема 9. Цілі нерівності

9.1. Г. **9.2.** Б. **9.3.** Д. **9.4.** В. **9.5.** А. **9.6.** Д. **9.7.** Б. **9.8.** Д. **9.9.** Д. **9.10.** В. **9.11.** А. **9.12.** Г. **9.13.** Г. **9.14.** Д. **9.15.** В. **9.16.** Б. **9.17.** Г. **9.18.** А. **9.19.** В. **9.20.** Г. **9.21.** А. **9.22.** Б.

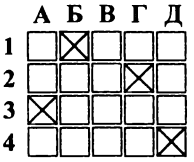
9.23



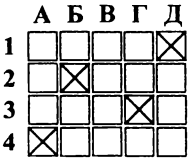
9.24



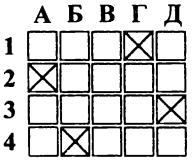
9.25



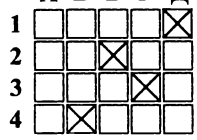
9.26



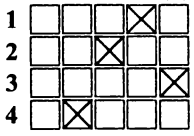
9.27



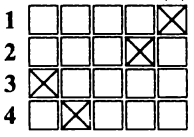
9.28



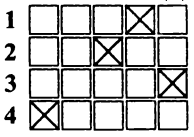
9.29



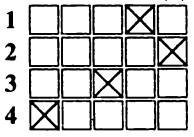
9.30



9.31



9.32



9.33 10,

9.34 −3,

9.35 −3,

9.36 1,

9.37 2,

9.38 0,

9.39 8,

9.40 0,

9.41 4,

9.42 2,75

9.43 12,

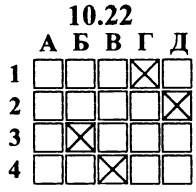
9.44 1,5

9.45 −1,

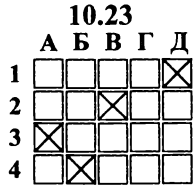
Тема 10. Раціональні рівняння

10.1. В. **10.2.** Г. **10.3.** Г. **10.4.** Д. **10.5.** А. **10.6.** Д. **10.7.** Г. **10.8.** Г. **10.9.** Г. **10.10.** Д. **10.11.** А. **10.12.** Г. **10.13.** Б. **10.14.** Б. **10.15.** А. **10.16.** Г. **10.17.** Д. **10.18.** Б. **10.19.** Г. **10.20.** Г. **10.21.** А.

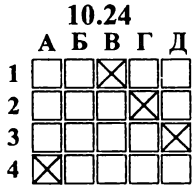
10.22



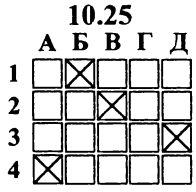
10.23



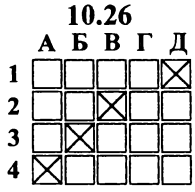
10.24



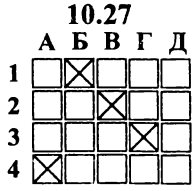
10.25



10.26



10.27



10.28 1,

10.29 −0,5

10.30 9,

10.31 −3,5

10.32 25,

10.33 −4,

10.34 0,8

10.35 40,

10.36 16,

10.37 10,

10.38 3,5

10.39 −7,

10.40 2,

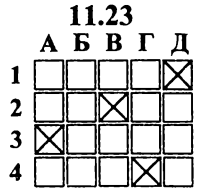
10.41 −0,5

10.42 1,

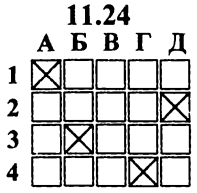
Тема 11. Раціональні нерівності

11.1. В. **11.2.** Д. **11.3.** В. **11.4.** А. **11.5.** Г. **11.6.** Б. **11.7.** Б. **11.8.** В. **11.9.** В. **11.10.** Г. **11.11.** А. **11.12.** В. **11.13.** Г. **11.14.** Б. **11.15.** В. **11.16.** Б. **11.17.** В. **11.18.** Д. **11.19.** А. **11.20.** В. **11.21.** Г. **11.22.** Б.

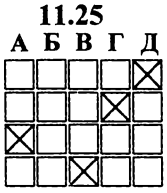
11.23



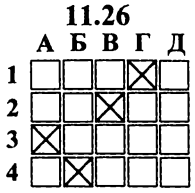
11.24



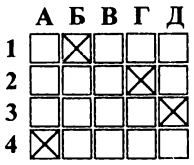
11.25



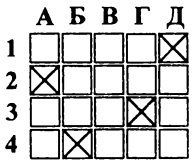
11.26



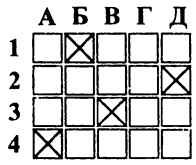
11.27



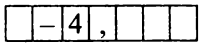
11.28



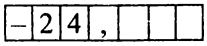
11.29



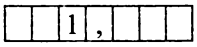
11.30



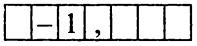
11.31



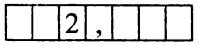
11.32



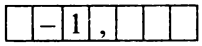
11.33



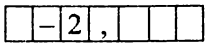
11.34



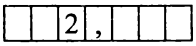
11.35



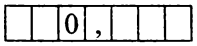
11.36



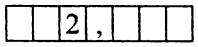
11.37



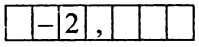
11.38



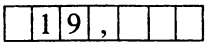
11.39



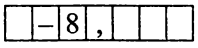
11.40



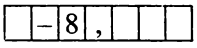
11.41



11.42



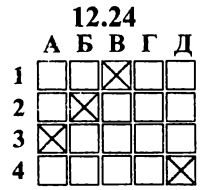
11.43



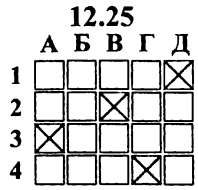
Тема 12. Ірраціональні рівняння

12.1. Д. **12.2.** Г. **12.3.** Д. **12.4.** Г. **12.5.** А. **12.6.** Б. **12.7.** Г. **12.8.** Д. **12.9.** В. **12.10.** А. **12.11.** Д. **12.12.** А. **12.13.** Б. **12.14.** В. **12.15.** А. **12.16.** В. **12.17.** В. **12.18.** Д. **12.19.** В. **12.20.** Г. **12.21.** Д. **12.22.** Г. **12.23.** А.

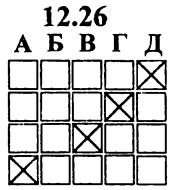
12.24



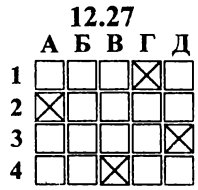
12.25



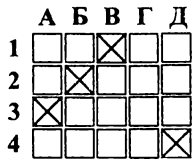
12.26



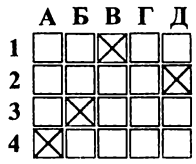
12.27



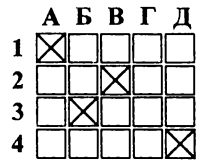
12.28



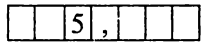
12.29



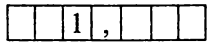
12.30



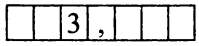
12.31



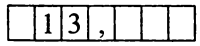
12.32



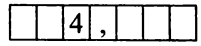
12.33



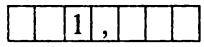
12.34



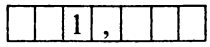
12.35



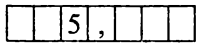
12.36



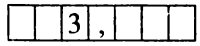
12.37



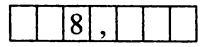
12.38



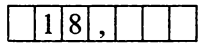
12.39



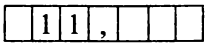
12.40



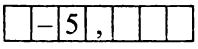
12.41



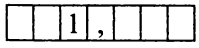
12.42



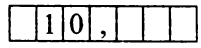
12.43



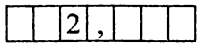
12.44



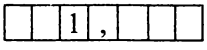
12.45



12.46



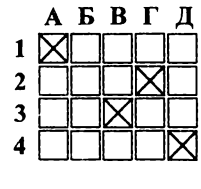
12.47



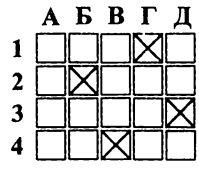
Тема 13. Ірраціональні нерівності

13.1. Г. **13.2.** В. **13.3.** Д. **13.4.** Б. **13.5.** Г. **13.6.** А. **13.7.** В. **13.8.** Д. **13.9.** Г. **13.10.** Б. **13.11.** Б. **13.12.** Д. **13.13.** Г. **13.14.** В. **13.15.** Д. **13.16.** В. **13.17.** Б. **13.18.** Г. **13.19.** Д. **13.20.** Б.

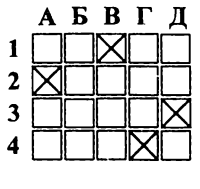
13.21



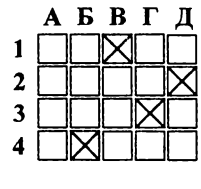
13.22



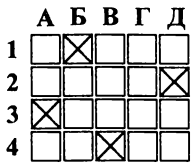
13.23



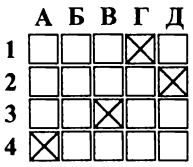
13.24



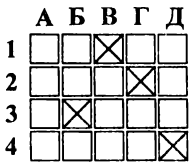
13.25



13.26



13.27



13.28 9,

13.29 24,

13.30 6,

13.31 20,

13.32 14,

13.33 −2,

13.34 6,

13.35 1,5

13.36 −1,

13.37 9,

13.38 24,

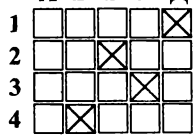
13.39 120,

13.40 480,

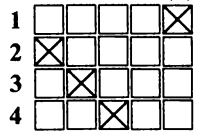
Тема 14. Показникові рівняння

14.1. В. **14.2.** Д. **14.3.** В. **14.4.** Б. **14.5.** Д. **14.6.** Д. **14.7.** Г. **14.8.** Б. **14.9.** А. **14.10.** Г. **14.11.** А. **14.12.** Д. **14.13.** В. **14.14.** Б. **14.15.** Д. **14.16.** Г. **14.17.** В. **14.18.** А. **14.19.** В. **14.20.** Г. **14.21.** Д. **14.22.** Г. **14.23.** Г.

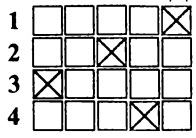
14.24



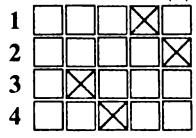
14.25



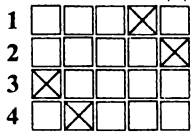
14.26



14.27



14.28



14.29 4,

14.30 0,4

14.31 7,

14.32 9,

14.33 0,

14.34 −6,

14.35 −3,

14.36 0,

14.37 1,

14.38 1,

14.39 −0,2

14.40 1,

14.41 13,

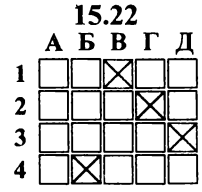
14.42 4,

14.43 1,

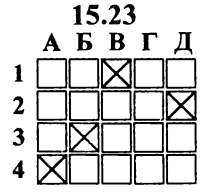
Тема 15. Показникові нерівності

15.1. Г. **15.2.** Д. **15.3.** Г. **15.4.** А. **15.5.** В. **15.6.** Г. **15.7.** Д. **15.8.** Г. **15.9.** Г. **15.10.** А. **15.11.** Д. **15.12.** Д. **15.13.** В. **15.14.** В. **15.15.** А. **15.16.** Б. **15.17.** Г. **15.18.** Б. **15.19.** Д. **15.20.** А. **15.21.** Д.

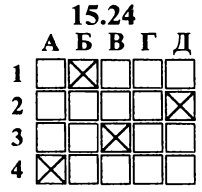
15.22



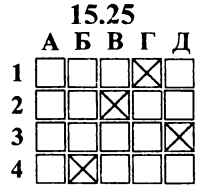
15.23



15.24



15.25



15.26 45,

15.27 −5,

15.28 16,

15.29 0,5

15.30 0,5

15.31 3,

15.32 0,5

15.33 −0,5

15.34 4,

15.35 3,

15.36 0,

15.37 −1,

15.38 9,

15.39 −4,

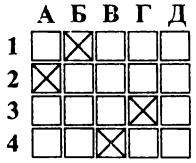
15.40 0,

15.41 0,

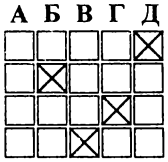
Тема 16. Логарифмічні рівняння

16.1. Г. **16.2.** Д. **16.3.** В. **16.4.** Д. **16.5.** Б. **16.6.** Б. **16.7.** В. **16.8.** Б. **16.9.** Д. **16.10.** В. **16.11.** Г. **16.12.** Д. **16.13.** Г. **16.14.** А. **16.15.** А. **16.16.** А. **16.17.** Д. **16.18.** Д. **16.19.** Б. **16.20.** Д.

16.21

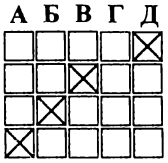


16.22

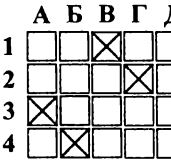


16.23

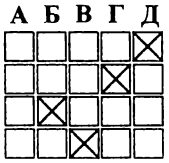
16.24



16.25



16.26



16.27 9,

16.28 6,

16.29 −10,

16.30 −10,

16.31 900,

16.32 10,

16.33 125,

16.34 64,

16.35 ·0,1

16.36 1,

16.37 1,

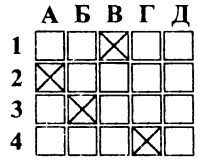
16.38 0,625

16.39 25,

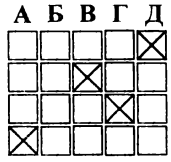
Тема 17. Логарифмічні нерівності

17.1. Г. **17.2.** Д. **17.3.** А. **17.4.** Г. **17.5.** Б. **17.6.** В. **17.7.** Б. **17.8.** Д. **17.9.** Г. **17.10.** Г. **17.11.** В. **17.12.** В. **17.13.** Д. **17.14.** Б. **17.15.** А. **17.16.** Б. **17.17.** Б. **17.18.** Д. **17.19.** В. **17.20.** В. **17.21.** А. **17.22.** Г.

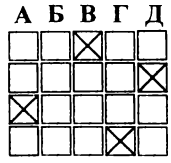
17.23



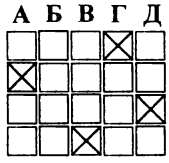
17.24



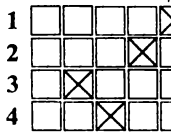
17.25



17.26



17.27



17.28

17.29 1,

17.30 26,

17.31 901,

17.32 9,

17.33 100,

17.34 2,

17.35 9,

17.36 1,

17.37 1,

17.38 24,

17.39 −1,

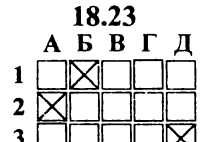
17.40 1,

17.41 2,

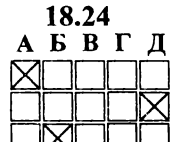
Тема 18. Тригонометричні рівняння

18.1. Д. **18.2.** Д. **18.3.** Б. **18.4.** А. **18.5.** В. **18.6.** Д. **18.7.** В. **18.8.** Д. **18.9.** Б. **18.10.** Г. **18.11.** Б. **18.12.** А. **18.13.** Д. **18.14.** В. **18.15.** Д. **18.16.** В. **18.17.** А. **18.18.** Б. **18.19.** Г. **18.20.** Д. **18.21.** В. **18.22.** Г.

18.23



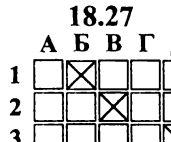
18.24



18.25

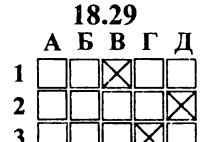
18.26

18.27

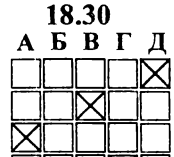


18.28

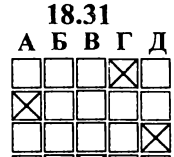
18.29



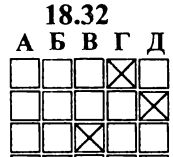
18.30



18.31

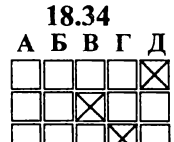


18.32



18.33

18.34



18.35 0,

18.36 1,0

18.37 2,

18.38 0,

18.39 2,

18.40 0,5

18.41 3,

18.42 0,125

18.43 5,

18.44 8,

18.45 14,

18.46 3,

18.47 1,

18.48 1,5

18.49 0,25

18.50 8,

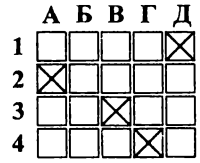
18.51 3,

18.52 1,5

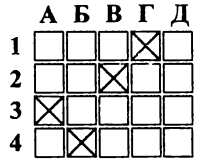
Тема 19. Тригонометричні нерівності

19.1. Д. **19.2.** В. **19.3.** Д. **19.4.** А. **19.5.** Д. **19.6.** В. **19.7.** Г. **19.8.** Г. **19.9.** Д. **19.10.** Б. **19.11.** В. **19.12.** В. **19.13.** А. **19.14.** Д. **19.15.** В. **19.16.** Д. **19.17.** А. **19.18.** Г. **19.19.** Г. **19.20.** В.

19.21

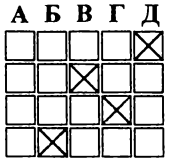


19.22

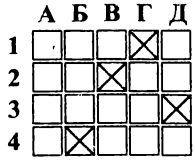


19.23

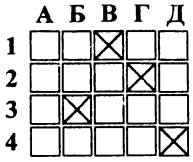
19.24



19.25



19.26



19.27

19.28 $1,$

19.29 $2,$

19.30 $6,$

19.31 $5,$

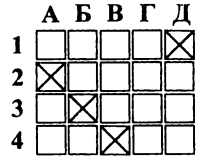
19.32 $3,$

19.33 $1,$

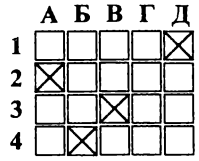
Тема 20. Системи рівнянь

20.1. В. **20.2.** Д. **20.3.** А. **20.4.** Б. **20.5.** Б. **20.6.** Б. **20.7.** Г. **20.8.** А. **20.9.** Д. **20.10.** В. **20.11.** Д. **20.12.** Б. **20.13.** Г. **20.14.** Б. **20.15.** А. **20.16.** Г. **20.17.** Б. **20.18.** Б. **20.19.** В. **20.20.** В. **20.21.** Б. **20.22.** В. **20.23.** Д.

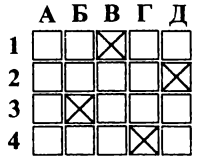
20.24



20.25

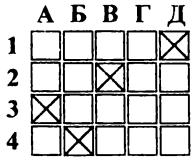


20.26



20.27

20.28



20.29 $3,$

20.30 $6,$

20.31 $7,$

20.32 $3,$

20.33 $1,$

20.34 $2,$

20.35 $-4,$

20.36 $12,$

20.37 $3,$

20.38 $4,$

20.39 $68,$

20.40 $6,5$

20.41 $6,$

20.42 $3,$

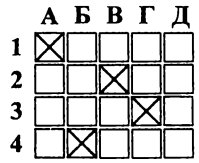
20.43 $12,$

20.44 $2,$

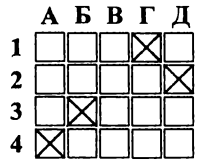
Тема 21. Арифметична та геометрична прогресії

21.1. Г. **21.2.** Д. **21.3.** В. **21.4.** Г. **21.5.** Б. **21.6.** В. **21.7.** В. **21.8.** Г. **21.9.** Д. **21.10.** В. **21.11.** А. **21.12.** Б. **21.13.** Д. **21.14.** Г. **21.15.** Б. **21.16.** А. **21.17.** В. **21.18.** В. **21.19.** Г. **21.20.** Д. **21.21.** А. **21.22.** Б.

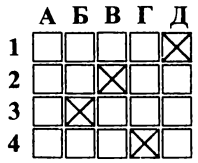
21.23



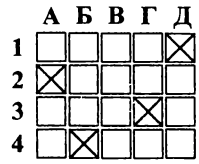
21.24



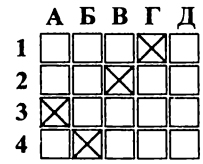
21.25



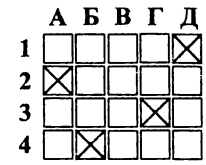
21.26



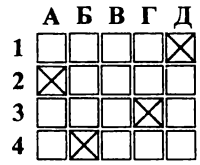
21.27



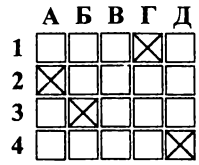
21.28



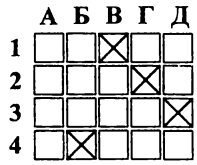
21.29



21.30

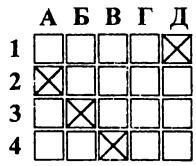


21.31



21.32

21.33



21.34

		–	4	,		

21.35

1	1	7	,	8		

21.36

		1	0	,		

21.37

7	0	3	,	3	6	

21.38

			4	,		

21.39

			2	,		

21.40

		–	0	,	0	5

21.41

6	4	0	,			

21.42

		3	,	3	7	5

21.43

5	9	0	,	4	9	

21.44

	8	2	,			

21.45

4	3	7	,	2	5	

21.46

	–	2	,			

Тема 22. Елементарні функції та їхні властивості

22.1. В. **22.2.** В. **22.3.** Д. **22.4.** Д. **22.5.** В. **22.6.** Б. **22.7.** Б. **22.8.** Г. **22.9.** Б. **22.10.** А. **22.11.** В. **22.12.** В. **22.13.** Д. **22.14.** А. **22.15.** Г. **22.16.** Б. **22.17.** А. **22.18.** Б. **22.19.** Б. **22.20.** Д. **22.21.** В. **22.22.** А. **22.23.** Д. **22.24.** А. **22.25.** Д. **22.26.** Г. **22.27.** В. **22.28.** В. **22.29.** Г.

22.30

	А	Б	В	Г	Д
1			✕		
2					✕
3	✕				
4				✕	

22.31

	А	Б	В	Г	Д
1				✕	
2	✕				
3					✕
4			✕		

22.32

	А	Б	В	Г	Д
1				✕	
2					✕
3		✕			
4			✕		

22.33

	А	Б	В	Г	Д
1		✕			
2					✕
3	✕				
4				✕	

22.34

	А	Б	В	Г	Д
1				✕	
2		✕			
3					✕
4			✕		

22.35

	А	Б	В	Г	Д
1				✕	
2	✕				
3					✕
4			✕		

22.36

	А	Б	В	Г	Д
1					✕
2	✕				
3			✕		
4		✕			

22.37

	А	Б	В	Г	Д
1			✕		
2					✕
3		✕			
4				✕	

22.38

	А	Б	В	Г	Д
1		✕			
2					✕
3	✕				
4			✕		

22.39

	А	Б	В	Г	Д
1					✕
2			✕		
3				✕	
4		✕			

22.40

	А	Б	В	Г	Д
1					✕
2				✕	
3			✕		
4	✕				

22.41

		7	,			

22.42

		2	,			

22.43

		3	,			

22.44

		7	,			

22.45

	1	0	,			

22.46

		2	,			

22.47

		2	,			

22.48

		5	,			

22.49

	3	0	,			

22.50

	–	2	,			

22.51

		1	,			

22.52

		1	,			

22.53

		0	,			

Тема 23. Побудова графіків функцій методом геометричних перетворень

23.1. Г. **23.2.** Д. **23.3.** Б. **23.4.** В. **23.5.** Г. **23.6.** А. **23.7.** Д. **23.8.** В. **23.9.** Б. **23.10.** В. **23.11.** Д. **23.12.** В. **23.13.** Б. **23.14.** Г. **23.15.** В. **23.16.** Д. **23.17.** Б. **23.18.** Г. **23.19.** А. **23.20.** В.

23.21

	А	Б	В	Г	Д
1		✕			
2	✕				
3				✕	
4					✕

23.22

	А	Б	В	Г	Д
1	✕				
2					✕
3			✕		
4		✕			

23.23

	А	Б	В	Г	Д
1					✕
2			✕		
3		✕			
4	✕				

23.24

	А	Б	В	Г	Д
1			✕		
2	✕				
3				✕	
4					✕

23.25

	А	Б	В	Г	Д
1				✕	
2					✕
3		✕			
4	✕				

23.26

	А	Б	В	Г	Д
1					✕
2		✕			
3	✕				
4				✕	

23.27

	А	Б	В	Г	Д
1			✕		
2					✕
3		✕			
4				✕	

23.28

	А	Б	В	Г	Д
1				✕	
2					✕
3		✕			
4	✕				

23.29

	А	Б	В	Г	Д
1					✕
2				✕	
3	✕				
4			✕		

23.30

	А	Б	В	Г	Д
1				✕	
2					✕
3	✕				
4			✕		

23.31

	А	Б	В	Г	Д
1			✕		
2	✕				
3		✕			
4					✕

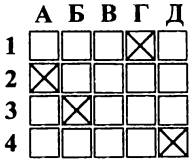
23.32

	А	Б	В	Г	Д
1			✕		
2				✕	
3		✕			
4					✕

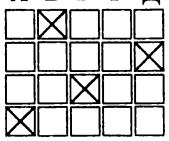
Тема 24. Похідна функції, її геометричний і механічний зміст

24.1. В. **24.2.** Б. **24.3.** Д. **24.4.** В. **24.5.** Г. **24.6.** Г. **24.7.** А. **24.8.** Г. **24.9.** Б. **24.10.** Г. **24.11.** Б. **24.12.** Д. **24.13.** А. **24.14.** А. **24.15.** Б. **24.16.** Г. **24.17.** Г. **24.18.** А. **24.19.** Г. **24.20.** А. **24.21.** В. **24.22.** Д. **24.23.** В. **24.24.** Д. **24.25.** Б. **24.26.** Г. **24.27.** Б.

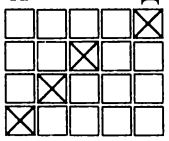
24.28



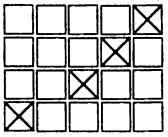
24.29



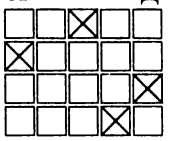
24.30



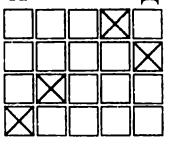
24.31



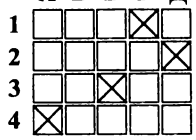
24.32



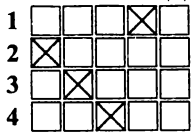
24.33



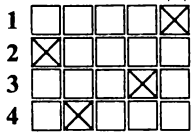
24.34



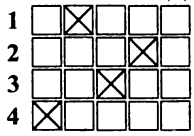
24.35



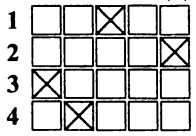
24.36



24.37



24.38



24.39 6,

24.40 0,

24.41 0,

24.42 0,875

24.43 0,1

24.44 −0,2

24.45 −10,

24.46 0,5

24.47 6,

24.48 16,67

24.49 −1,

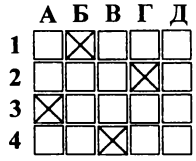
24.50 1,

24.51 0,5

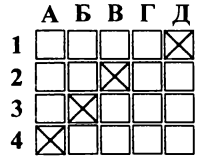
Тема 25. Застосування похідної для дослідження функцій

25.1. Б. **25.2.** Г. **25.3.** Д. **25.4.** Б. **25.5.** А. **25.6.** Г. **25.7.** А. **25.8.** В. **25.9.** Д. **25.10.** В. **25.11.** Б. **25.12.** Б. **25.13.** В. **25.14.** А. **25.15.** В. **25.16.** Г. **25.17.** Д. **25.18.** Г. **25.19.** Б. **25.20.** Б. **25.21.** Г. **25.22.** В. **25.23.** Д. **25.24.** Д.

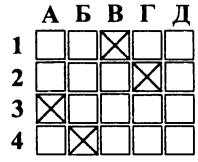
25.25



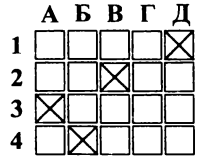
25.26



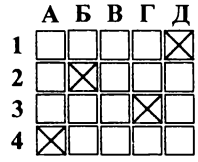
25.27



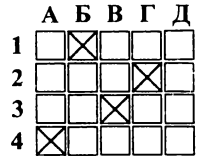
25.28



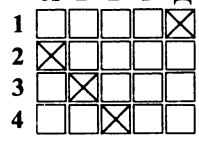
25.29



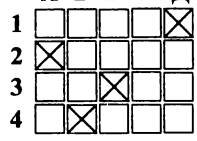
25.30



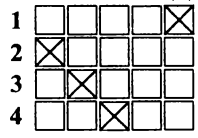
25.31



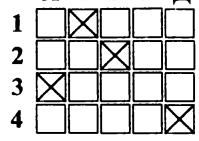
25.32



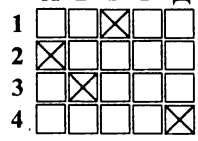
25.33



25.34



25.35



25.36 0,5

25.37 2,

25.38 17,

25.39 128,

25.40 80,

25.41 2,

25.42 4,

25.43 −1,

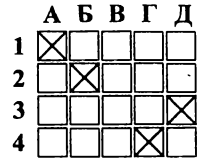
25.44 −4,

25.45 −0,5

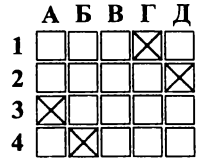
Тема 26. Первісна. Інтеграл

26.1. Б. **26.2.** А. **26.3.** Б. **26.4.** Г. **26.5.** Д. **26.6.** Г. **26.7.** Б. **26.8.** Г. **26.9.** Д. **26.10.** В. **26.11.** Д. **26.12.** В. **26.13.** Д. **26.14.** Б. **26.15.** Г. **26.16.** В. **26.17.** А. **26.18.** Б. **26.19.** Д. **26.20.** В. **26.21.** Г. **26.22.** Д. **26.23.** Г.

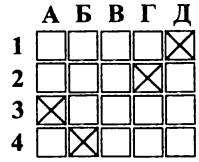
26.24



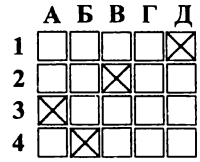
26.25



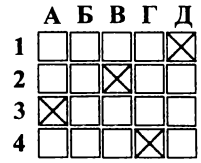
26.26



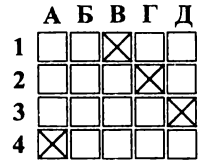
26.27



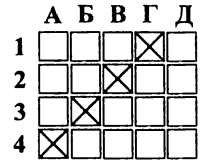
26.28



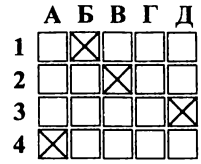
26.29



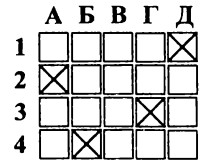
26.30



26.31



26.32



26.33 1 1 2 , | **26.34** 3 1 3 , | **26.35** 2 , | **26.36** 1 , 2 5 | **26.37** 4 , 5

26.38 0 , 0 8 | **26.39** 4 , 5 | **26.40** 0 , 5 | **26.41** – 2 , | **26.42** 1 8 ,

Тема 27. Елементи комбінаторики

27.1. Г. **27.2.** В. **27.3.** Д. **27.4.** Д. **27.5.** В. **27.6.** А. **27.7.** А. **27.8.** Д. **27.9.** А. **27.10.** Д. **27.11.** Г. **27.12.** Д. **27.13.** В. **27.14.** А. **27.15.** Г. **27.16.** В. **27.17.** Б. **27.18.** Д. **27.19.** Г. **27.20.** В. **27.21.** А. **27.22.** В. **27.23.** Д. **27.24.** Б.

27.25

	А	Б	В	Г	Д
1	⊠				
2		⊠			
3					⊠
4				⊠	

27.26

	А	Б	В	Г	Д
1					⊠
2			⊠		
3				⊠	
4	⊠				

27.27

	А	Б	В	Г	Д
1	⊠				
2					⊠
3				⊠	
4			⊠		

27.28

	А	Б	В	Г	Д
1					⊠
2				⊠	
3		⊠			
4			⊠		

27.29

	А	Б	В	Г	Д
1			⊠		
2	⊠				
3		⊠			
4				⊠	

27.30

	А	Б	В	Г	Д
1		⊠			
2				⊠	
3	⊠				
4					⊠

27.31

	А	Б	В	Г	Д
1					⊠
2			⊠		
3		⊠			
4	⊠				

27.32

	А	Б	В	Г	Д
1				⊠	
2	⊠				
3					⊠
4			⊠		

27.33

	А	Б	В	Г	Д
1					⊠
2		⊠			
3	⊠				
4				⊠	

27.34 1 , | **27.35** 1 0 , | **27.36** – 2 0 , | **27.37** 1 2 6 , | **27.38** 6 0 ,

27.39 7 2 , | **27.40** 1 1 4 , | **27.41** 2 4 0 , | **27.42** 7 0 0 , | **27.43** 4 9 5 ,

27.44 5 6 0 , | **27.45** 5 0 4 , | **27.46** 9 1 ,

Тема 28. Початки теорії ймовірностей та елементи статистики

28.1. Д. **28.2.** Г. **28.3.** Д. **28.4.** Д. **28.5.** В. **28.6.** А. **28.7.** В. **28.8.** Д. **28.9.** Г. **28.10.** А. **28.11.** Г. **28.12.** В. **28.13.** Д. **28.14.** А. **28.15.** Д. **28.16.** Г. **28.17.** Б. **28.18.** Б. **28.19.** Д. **28.20.** В. **28.21.** В. **28.22.** В. **28.23.** Б. **28.24.** Д.

28.25

	А	Б	В	Г	Д
1					⊠
2			⊠		
3	⊠				
4		⊠			

28.26

	А	Б	В	Г	Д
1				⊠	
2	⊠				
3			⊠		
4		⊠			

28.27

	А	Б	В	Г	Д
1					⊠
2	⊠				
3				⊠	
4			⊠		

28.28

	А	Б	В	Г	Д
1					⊠
2				⊠	
3	⊠				
4		⊠			

28.29

	А	Б	В	Г	Д
1				⊠	
2			⊠		
3					⊠
4		⊠			

28.30

	А	Б	В	Г	Д
1				⊠	
2					⊠
3		⊠			
4	⊠				

28.31

	А	Б	В	Г	Д
1		⊠			
2					⊠
3				⊠	
4	⊠				

28.32

	А	Б	В	Г	Д
1				⊠	
2					⊠
3	⊠				
4		⊠			

28.33

	А	Б	В	Г	Д
1				⊠	
2		⊠			
3	⊠				
4			⊠		

28.34

	А	Б	В	Г	Д
1			⊠		
2					⊠
3				⊠	
4		⊠			

28.35

	А	Б	В	Г	Д
1				⊠	
2	⊠				
3		⊠			
4			⊠		

28.36 0 , 5 | **28.37** 0 , 8 7 5 | **28.38** 0 , 0 6 | **28.39** 0 , 4 2 | **28.40** 0 , 0 8 8

28.41 0 , 1 | **28.42** 0 , 4 9 | **28.43** 0 , 8 6 | **28.44** 6 , | **28.45** 0 , 8

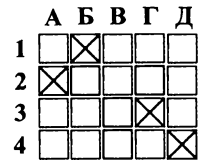
28.46 0 , 9 4 | **28.47** 0 , 3 4 | **28.48** 0 , 6 7 | **28.49** 1 0 , | **28.50** 0 , 6

ГЕОМЕТРІЯ

Тема 29. Трикутник

29.1. Г. **29.2.** В. **29.3.** А. **29.4.** Д. **29.5.** Д. **29.6.** В. **29.7.** Д. **29.8.** Г. **29.9.** А. **29.10.** Г. **29.11.** Д. **29.12.** Г. **29.13.** Б. **29.14.** В. **29.15.** Г. **29.16.** Г. **29.17.** Д. **29.18.** Б. **29.19.** Г. **29.20.** Б. **29.21.** А.

29.22



29.23

29.24

29.25

29.26 65,

29.27 1,5

29.28 5,

29.29 6,5

29.30 7,5

29.31 50,

29.32 0,73

29.33 336,

29.34 5,

29.35 60,

29.36 4,44

29.37 72,

29.38 4,

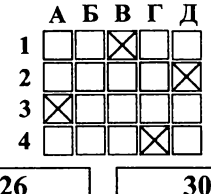
29.39 2,4

29.40 40,

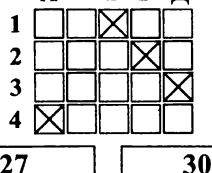
Тема 30. Прямокутний трикутник

30.1. Г. **30.2.** Д. **30.3.** Б. **30.4.** В. **30.5.** В. **30.6.** Д. **30.7.** В. **30.8.** А. **30.9.** А. **30.10.** В. **30.11.** Б. **30.12.** Д. **30.13.** Г. **30.14.** А. **30.15.** В. **30.16.** Д. **30.17.** Б. **30.18.** В. **30.19.** Г. **30.20.** Г. **30.21.** В.

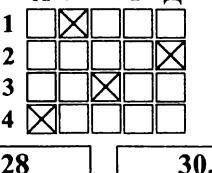
30.22



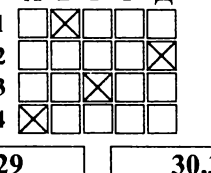
30.23



30.24



30.25



30.26 40,

30.27 10,

30.28 53,

30.29 120,

30.30 244,

30.31 10,

30.32 5,

30.33 30,

30.34 2,

30.35 600,

30.36 3,36

30.37 12,25

30.38 0,6

30.39 17,5

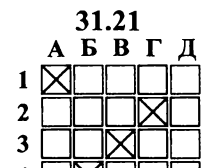
30.40 149,76

30.41 15,

Тема 31. Рівнобедрений трикутник

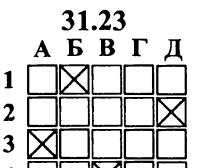
31.1. Г. **31.2.** В. **31.3.** Д. **31.4.** А. **31.5.** Г. **31.6.** Б. **31.7.** Д. **31.8.** В. **31.9.** В. **31.10.** А. **31.11.** В. **31.12.** А. **31.13.** Г. **31.14.** В. **31.15.** А. **31.16.** Г. **31.17.** Д. **31.18.** Г. **31.19.** Б. **31.20.** Б.

31.21



31.22

31.23



31.24

31.25 8,

31.26 60,

31.27 6,

31.28 4,

31.29 170,

31.30 10,

31.31 3,

31.32 7,8

31.33 1,2

31.34 36,

31.35 72,45

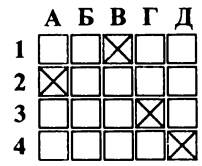
31.36 8,

31.37 7,

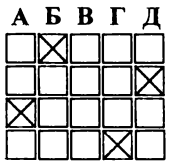
Тема 32. Чотирикутники

32.1. Г. **32.2.** Д. **32.3.** А. **32.4.** Б. **32.5.** Б. **32.6.** Г. **32.7.** В. **32.8.** Г. **32.9.** Д. **32.10.** А. **32.11.** В. **32.12.** Д. **32.13.** Б. **32.14.** Д. **32.15.** В. **32.16.** Г. **32.17.** Д. **32.18.** В. **32.19.** А. **32.20.** Г. **32.21.** Б. **32.22.** Д. **32.23.** Г. **32.24.** Б.

32.25

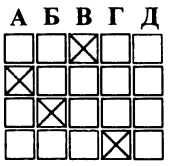


32.26



32.27

32.28



32.29 300,

32.30 18,

32.31 9,

32.32 30,

32.33 32,

32.34 19,2

32.35 1,5

32.36 21,

32.37 204,

32.38 45,

32.39 96,

32.40 12,

32.41 9,

32.42 0,83

32.43 48,

32.44 40,

32.45 6,89

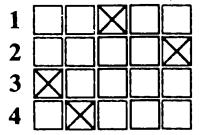
32.46 81,

32.47 31,

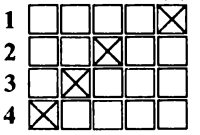
Тема 33. Многокутники

33.1. Д. **33.2.** А. **33.3.** В. **33.4.** А. **33.5.** Г. **33.6.** В. **33.7.** Г. **33.8.** Г. **33.9.** А. **33.10.** Д. **33.11.** Д. **33.12.** Г. **33.13.** А. **33.14.** Б. **33.15.** В. **33.16.** В. **33.17.** Б. **33.18.** Б. **33.19.** В. **33.20.** Г.

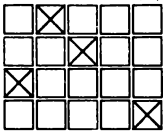
33.21



33.22



33.23



33.24 6,

33.25 5,

33.26 6,

33.27 900,

33.28 20,

33.29 8,

33.30 2,

33.31 1,5

33.32 72,

33.33 0,5

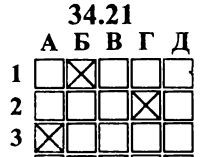
33.34 1,

33.35 301,

Тема 34. Коло, круг та їх елементи

34.1. В. **34.2.** Б. **34.3.** Д. **34.4.** Д. **34.5.** Б. **34.6.** Г. **34.7.** А. **34.8.** Б. **34.9.** Б. **34.10.** Д. **34.11.** А. **34.12.** В. **34.13.** В. **34.14.** Б. **34.15.** В. **34.16.** Г. **34.17.** Д. **34.18.** Д. **34.19.** Г. **34.20.** А.

34.21



34.22

34.23

34.24 12,

34.25 15,

34.26 2,

34.27 27,

34.28 27,

34.29 0,75

34.30 0,5

34.31 10,

34.32 0,75

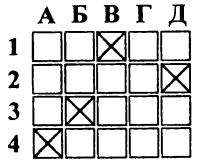
34.33 0,07

34.34 471,

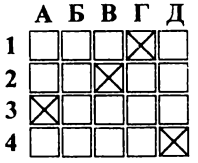
Тема 35. Аксіоми стереометрії. Прямі та площини в просторі

35.1. В. **35.2.** Д. **35.3.** Б. **35.4.** Д. **35.5.** Д. **35.6.** В. **35.7.** Г. **35.8.** В. **35.9.** А. **35.10.** В. **35.11.** Д. **35.12.** А. **35.13.** Д. **35.14.** Г. **35.15.** В. **35.16.** Г. **35.17.** Д. **35.18.** Б. **35.19.** В. **35.20.** А. **35.21.** Г. **35.22.** Г.

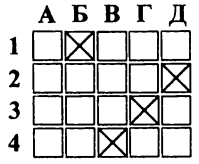
35.23



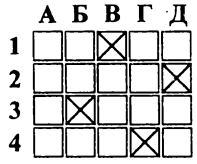
35.24



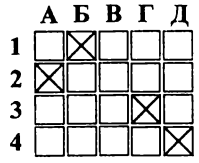
35.25



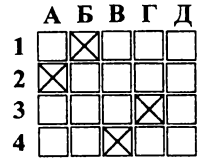
35.26



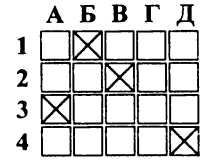
35.27



35.28



35.29



35.30 4,8

35.31 3,

35.32 24,

35.33 2,

35.34 5,

35.35 3,

35.36 3,

35.37 8,

35.38 60,

35.39 12,5

35.40 36,

35.41 1,30

35.42 28,

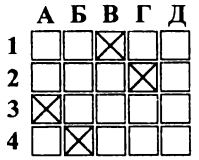
35.43 2,5

35.44 3,75

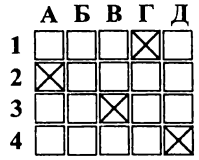
Тема 36. Призма

36.1. Д. **36.2.** Г. **36.3.** Д. **36.4.** Д. **36.5.** Б. **36.6.** А. **36.7.** Г. **36.8.** Г. **36.9.** Д. **36.10.** Д. **36.11.** В. **36.12.** Г. **36.13.** Б. **36.14.** В. **36.15.** В. **36.16.** Б. **36.17.** В. **36.18.** Д. **36.19.** А. **36.20.** Д. **36.21.** В. **36.22.** А.

36.23



36.24



36.25 72,

36.26 30,

36.27 4,5

36.28 4,

36.29 48,

36.30 8,

36.31 350,

36.32 108,

36.33 32,

36.34 200,

36.35 126,

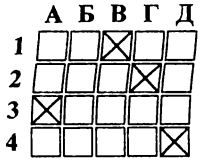
36.36 48,

36.37 1,25

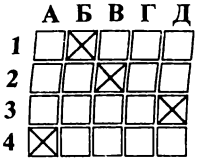
Тема 37. Піраміда

37.1. Б. **37.2.** Д. **37.3.** В. **37.4.** А. **37.5.** Д. **37.6.** Д. **37.7.** В. **37.8.** А. **37.9.** Г. **37.10.** В. **37.11.** Б. **37.12.** А. **37.13.** А. **37.14.** Б. **37.15.** Д. **37.16.** Б. **37.17.** Д. **37.18.** А. **37.19.** Б. **37.20.** Д. **37.21.** Г. **37.22.** Б.

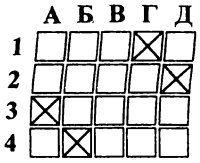
37.23



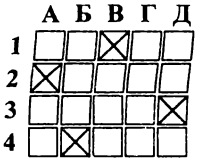
37.24



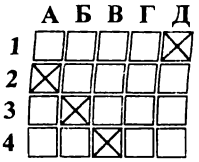
37.25



37.26



37.27



37.28 12,

37.29 6,

37.30 24,

37.31 1,

37.32 3,

37.33 60,

37.34 0,5

37.35 96,

37.36 0,75

37.37 7,

37.38 0,6

37.39 3,

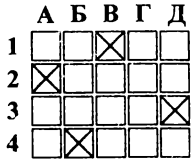
37.40 7,

37.41 9,

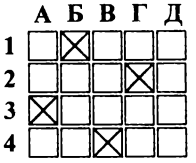
Тема 38. Циліндр

38.1. Г. **38.2.** В. **38.3.** Д. **38.4.** Б. **38.5.** Г. **38.6.** Б. **38.7.** Д. **38.8.** В. **38.9.** Б. **38.10.** Д. **38.11.** А. **38.12.** Г. **38.13.** В. **38.14.** Г. **38.15.** Б. **38.16.** Б. **38.17.** А. **38.18.** А. **38.19.** Б. **38.20.** Д.

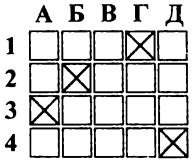
38.21



38.22



38.23



38.24 30,

38.25 8,

38.26 60,

38.27 4,

38.28 0,5

38.29 40,

38.30 0,25

38.31 1,

38.32 40,

38.33 120,

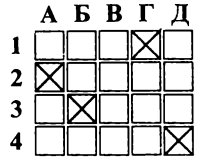
38.34 0,61

38.35 2,26

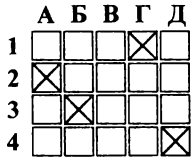
Тема 39. Конус

39.1. Д. **39.2.** Б. **39.3.** Б. **39.4.** А. **39.5.** Д. **39.6.** А. **39.7.** Г. **39.8.** Д. **39.9.** Б. **39.10.** Д. **39.11.** Г. **39.12.** А. **39.13.** А. **39.14.** Б. **39.15.** В. **39.16.** В. **39.17.** Г. **39.18.** Д. **39.19.** Д. **39.20.** Г. **39.21.** Б.

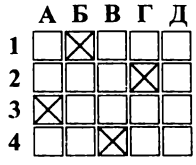
39.22



39.23



39.24



39.25 50,

39.26 0,9

39.27 1,

39.28 11,

39.29 9,

39.30 0,25

39.31 4,

39.32 504,

39.33 1,5

39.34 288,

39.35 6,25

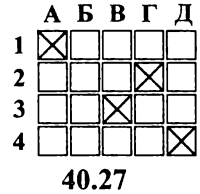
39.36 5,

39.37 2,

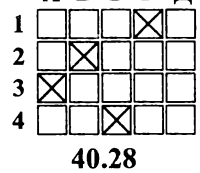
Тема 40. Куля

40.1. Г. **40.2.** В. **40.3.** Г. **40.4.** Б. **40.5.** Д. **40.6.** В. **40.7.** А. **40.8.** Г. **40.9.** Б. **40.10.** Г. **40.11.** Б. **40.12.** В. **40.13.** Д. **40.14.** Б. **40.15.** Б. **40.16.** А. **40.17.** Г. **40.18.** А. **40.19.** В. **40.20.** В. **40.21.** Г.

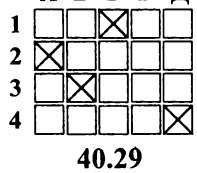
40.22



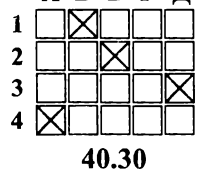
40.23



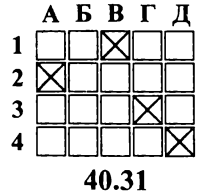
40.24



40.25



40.26



40.27 676,

40.28 676,

40.29 13,

40.30 3,

40.31 15,

40.32 1,2

40.33 2,

40.34 3,

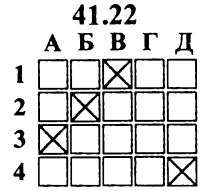
40.35 4,

40.36 2,

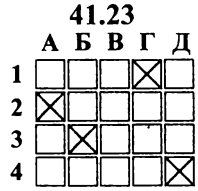
Тема 41. Координати

41.1. Г. **41.2.** В. **41.3.** Г. **41.4.** Б. **41.5.** Д. **41.6.** А. **41.7.** В. **41.8.** Г. **41.9.** А. **41.10.** В. **41.11.** Д. **41.12.** Д. **41.13.** Б. **41.14.** Г. **41.15.** В. **41.16.** Д. **41.17.** Г. **41.18.** В. **41.19.** В. **41.20.** В. **41.21.** В.

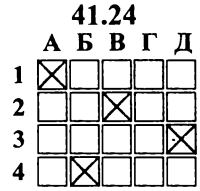
41.22



41.23



41.24



41.25

		5	,		

41.26

	–	7	,		

41.27

	2	4	,		

41.28

	1	5	,	5	

41.29

		2	,		

41.30

		5	,		

41.31

	1	4	,		

41.32

		5	,		

Тема 42. Вектори

42.1. Г. **42.2.** В. **42.3.** В. **42.4.** Г. **42.5.** А. **42.6.** Б. **42.7.** Д. **42.8.** Г. **42.9.** Г. **42.10.** Д. **42.11.** Б. **42.12.** Б. **42.13.** Б. **42.14.** Г. **42.15.** В. **42.16.** В. **42.17.** Д. **42.18.** Б. **42.19.** Б. **42.20.** Г. **42.21.** Б. **42.22.** А. **42.23.** А. **42.24.** Б.

42.25

	А	Б	В	Г	Д
1		☒			
2				☒	
3					☒
4			☒		

42.26

	А	Б	В	Г	Д
1		☒			
2	☒				
3				☒	
4			☒		

42.27

	А	Б	В	Г	Д
1		☒			
2	☒				
3				☒	
4			☒		

42.28

	А	Б	В	Г	Д
1			☒		
2				☒	
3	☒				
4					☒

42.29

	2	0	,		

42.30

	2	2	,		

42.31

	–	1	,		

42.32

2	1	2	,		

42.33

		0	,	1	9

42.34

		5	,	5	7

42.35

		0	,	8	3

42.36

	–	2	,	4	

42.37

	2	5	,		

42.38

	4	5	,		

42.39

		3	,	5	

42.40

		0	,	6	5

42.41

		0	,	4	5

42.42

		0	,	9	9

42.43

		2	,	7	8

Тема 43. Перетворення фігур

43.1. В. **43.2.** Г. **43.3.** Д. **43.4.** Г. **43.5.** Г. **43.6.** А. **43.7.** Д. **43.8.** Б. **43.9.** В. **43.10.** Б. **43.11.** Г. **43.12.** Б. **43.13.** Д. **43.14.** А. **43.15.** Г. **43.16.** В. **43.17.** Б. **43.18.** А. **43.19.** Д. **43.20.** А.

43.21

	А	Б	В	Г	Д
1					☒
2			☒		
3	☒				
4				☒	

43.22

	А	Б	В	Г	Д
1				☒	
2					☒
3	☒				
4			☒		

43.23

	А	Б	В	Г	Д
1			☒		
2	☒				
3					☒
4		☒			

43.24

	А	Б	В	Г	Д
1					☒
2	☒				
3				☒	
4		☒			

43.25

	А	Б	В	Г	Д
1			☒		
2				☒	
3	☒				
4					☒

43.26

	А	Б	В	Г	Д
1				☒	
2					☒
3	☒				
4		☒			

43.27

	А	Б	В	Г	Д
1			☒		
2					☒
3	☒				
4				☒	

43.28

	А	Б	В	Г	Д
1		☒			
2				☒	
3			☒		
4	☒				

43.29

	1	0	,		

43.30

	2	8	,		

43.31

1	1	2	,		

43.32

	1	2	,		

Тема 44. Найпростіші геометричні фігури на площині

44.1. Г. **44.2.** Д. **44.3.** В. **44.4.** Б. **44.5.** А. **44.6.** Г. **44.7.** Д. **44.8.** В. **44.9.** Г. **44.10.** Б. **44.11.** Д. **44.12.** Г. **44.13.** Г. **44.14.** В. **44.15.** В. **44.16.** Д. **44.17.** А. **44.18.** Г. **44.19.** В.

44.20

	А	Б	В	Г	Д
1				☒	
2					☒
3	☒				
4		☒			

44.21

	А	Б	В	Г	Д
1				☒	
2			☒		
3	☒				
4		☒			

44.22

	А	Б	В	Г	Д
1				☒	
2			☒		
3	☒				
4		☒			

44.23

	А	Б	В	Г	Д
1				☒	
2			☒		
3	☒				
4					☒

44.24

	А	Б	В	Г	Д
1					☒
2				☒	
3		☒			
4	☒				

44.25

	2	1	,		

44.26

		8	,		

44.27

	1	0	,		

44.28

1	2	0	,		

44.29

	1	0	,		

44.30

	6	0	,		

44.31

1	0	5	,		

44.32

	3	0	,		

44.33

	7	0	,		

44.34

1	7	2	,	5	

ЗМІСТ

Передмова ... 3

АЛГЕБРА ТА ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Тема 1. Обчислення. Арифметичні задачі ... 4
Тема 2. Відсотки ... 18
Тема 3. Цілі вирази ... 26
Тема 4. Дробово-раціональні вирази ... 35
Тема 5. Ірраціональні вирази ... 44
Тема 6. Логарифмічні та показникові вирази ... 54
Тема 7. Тригонометричні вирази ... 64
Тема 8. Цілі рівняння ... 78
Тема 9. Цілі нерівності ... 91
Тема 10. Раціональні рівняння ... 102
Тема 11. Раціональні нерівності ... 112
Тема 12. Ірраціональні рівняння ... 123
Тема 13. Ірраціональні нерівності ... 133
Тема 14. Показникові рівняння ... 144
Тема 15. Показникові нерівності ... 154
Тема 16. Логарифмічні рівняння ... 165
Тема 17. Логарифмічні нерівності ... 175
Тема 18. Тригонометричні рівняння ... 185
Тема 19. Тригонометричні нерівності ... 200
Тема 20. Системи рівнянь ... 214
Тема 21. Арифметична та геометрична прогресії ... 225
Тема 22. Елементарні функції та їхні властивості ... 237
Тема 23. Побудова графіків функцій методом геометричних перетворень ... 252
Тема 24. Похідна функції, її геометричний і механічний зміст ... 272
Тема 25. Застосування похідної для дослідження функцій ... 285
Тема 26. Первісна. Інтеграл ... 298
Тема 27. Елементи комбінаторики ... 314
Тема 28. Початки теорії ймовірностей та елементи статистики ... 325

ГЕОМЕТРІЯ

Тема 29. Трикутник ... 344
Тема 30. Прямокутний трикутник ... 356
Тема 31. Рівнобедрений трикутник ... 364
Тема 32. Чотирикутники ... 373
Тема 33. Многокутники ... 385
Тема 34. Коло, круг та їх елементи ... 392
Тема 35. Аксіоми стереометрії. Прямі та площини в просторі ... 403
Тема 36. Призма ... 418
Тема 37. Піраміда ... 429
Тема 38. Циліндр ... 439
Тема 39. Конус ... 447
Тема 40. Куля ... 458
Тема 41. Координати ... 466
Тема 42. Вектори ... 474
Тема 43. Перетворення фігур ... 486
Тема 44. Найпростіші геометричні фігури на площині ... 498
Відповіді (алгебра та початки аналізу) ... 511
Відповіді (геометрія) ... 522

Навчальне видання

Укладачі

Капіносов *Анатолій Миколайович*
Білоусова *Галина Миколаївна*
Гап'юк *Галина Володимирівна*
Кондратьєва *Лариса Іванівна*
Мартинюк *Олеся Миронівна*
Мартинюк *Сергій Володимирович*
Олійник *Лариса Іванівна*
Ульшин *Петро Іванович*
Чиж *Олег Йосипович*

МАТЕМАТИКА

Комплексна підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання

За чинною програмою ЗНО

Літературний редактор *Людмила Олійник*
Дизайнер обкладинки *Віталій Нехай*

Формат 60×84/8. 61,58 ум. др. арк., 49,56 обл.-вид. арк. Тираж 2000. Замовлення №13-294.
Видавець і виготовлювач Редакція газети «Підручники і посібники».
46000, м. Тернопіль, вул. Поліська, 6а. Тел.: (0352) 43-15-15; 43-10-21.
Збут: zbut@pp-books.com.ua Редакція: red@pp-books.com.ua
Виробництво: print@pp-books.com.ua www.pp-books.com.ua
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК № 765 від 11.01.2002 р.
Книга-поштою: а/с 376, Тернопіль, 46011. Тел.: (0352) 42-43-76; 097-50-35-376
post@pp-books.com.ua