

## Розділ 7. ПЛАНІМЕТРІЯ

### 7.1. Трикутники та їх елементи

#### Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Завдання 1–20 розв'яжіть УСНО.

1. На відрізку  $AB$  позначили точку  $C$ . Знайдіть довжину відрізка  $BC$ , якщо  $AB = 10$ ,  $AC = 3$ .
2. Точка  $M$  ділить відрізок  $KL = 20$  см на два відрізки  $KM$  і  $ML$ , причому перший із них на 2 см менший за другий. Знайдіть довжини відрізків  $KM$  і  $ML$ .
3. Один із двох суміжних кутів у 9 разів більший за інший. Знайдіть градусні міри цих кутів.
4. При перетині двох прямих утворилися чотири кути, причому градусна міра одного з них дорівнює  $140^\circ$ . Знайдіть градусні міри інших трьох кутів.
5. Градусна міра одного з восьми кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює  $50^\circ$ . Знайдіть градусні міри решти семи кутів.
6. Градусні міри двох кутів трикутника дорівнюють  $30^\circ$  і  $100^\circ$ . Знайдіть градусну міру третього кута цього трикутника.
7. Градусна міра одного з гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює  $44^\circ$ . Знайдіть градусну міру іншого гострого кута цього трикутника.
8. Сума двох зовнішніх кутів, взятих по одному при вершинах  $A$  і  $B$  трикутника  $ABC$ , дорівнює  $200^\circ$ . Знайдіть градусну міру зовнішнього кута при вершині  $C$ .
9. У деякому трикутнику всі три кути рівні між собою, а одна зі сторін дорівнює 2. Знайдіть площу цього трикутника.
10. Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 4, а гіпотенуза цього трикутника дорівнює 5. Знайдіть інший катет цього трикутника.
11. За умовою попередньої задачі знайдіть радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник.
12. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 7. Знайдіть радіус кола, описаного навколо цього трикутника.
13. За умовою попередньої задачі знайдіть довжину медіани, проведеної до гіпотенузи прямокутного трикутника.
14. Знайдіть площу прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 1 і 6.

15. У прямокутному трикутнику градусна міра одного з гострих кутів дорівнює  $30^\circ$ , а катет, що лежить проти цього кута, дорівнює 3. Знайдіть гіпотенузу цього трикутника.
16. У трикутнику  $ABC$   $\angle A = \angle C$ . Знайдіть периметр цього трикутника, якщо  $AB = 5$ ,  $AC = 3$ .
17. У рівнобедреному трикутнику градусна міра кута при основі дорівнює  $70^\circ$ . Знайдіть градусні міри двох інших кутів цього трикутника.
18. У деякому трикутнику дві сторони дорівнюють 2 і 5, а градусна міра кута між ними —  $30^\circ$ . Знайдіть площу цього трикутника.
19. У деякому трикутнику дві сторони дорівнюють 5 см і 8 см. У яких межах може змінюватися довжина третьої сторони цього трикутника?
20. У трикутнику  $PRS$   $\angle P = 50^\circ$ ,  $\angle R = 60^\circ$ ,  $\angle S = 70^\circ$ . Укажіть найменшу та найбільшу сторони цього трикутника.

**Завдання з вибором однієї правильної відповіді**

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Укажіть правильне твердження.

А	Будь-які три точки на площині можуть бути вершинами деякого трикутника
Б	Будь-який відрізок на площині або належить даній прямій, або не має з нею спільних точок
В	Будь-які два промені на площині обов'язково перетинаються
Г	Будь-яка точка на площині або належить даному відрізку, або не належить йому
Д	Будь-які дві прямі на площині обов'язково перетинаються

22. Укажіть НЕПРАВИЛЬНЕ твердження.

А	Будь-які дві прямі на площині перетинаються не більш ніж в одній точці
Б	Будь-яка пряма, що перетинає одну сторону даного кута, обов'язково перетне і другу його сторону
В	Через будь-яку точку на площині можна провести пряму, перпендикулярну до даної прямої
Г	Будь-яка пряма, що не проходить через вершину трикутника, перетинає не більш ніж дві його сторони
Д	Через будь-яку точку, що не належить даній прямій, можна провести пряму, що не перетинає дану

23. На рис. 1 зображено паралельні прямі  $a$  і  $b$  та дві січні  $c$  і  $d$ . Знайдіть градусну міру кута  $\alpha$ , якщо  $\beta = 135^\circ$ ,  $\gamma = 150^\circ$ .

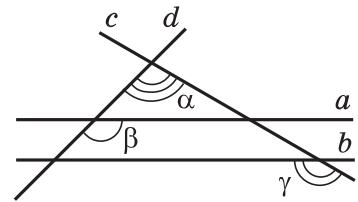


Рис. 1

А	Б	В	Г	Д
$75^\circ$	$90^\circ$	$95^\circ$	$100^\circ$	$105^\circ$

24. За рис. 1 знайдіть градусну міру кута, суміжного з кутом  $\beta$ , якщо  $\alpha = 110^\circ$ ,  $\gamma = 160^\circ$ .

А	Б	В	Г	Д
$30^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$

25.  $\alpha$  і  $\beta$  — два з восьми кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, причому  $\alpha = 70^\circ$ . Укажіть значення, якого МОЖЕ набувати градусна міра кута  $\beta$ .

А	Б	В	Г	Д
$110^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$130^\circ$	$20^\circ$

26.  $\alpha$ ,  $\beta$  і  $\gamma$  — три з восьми кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, причому  $\alpha + \beta = 100^\circ$ . Укажіть значення, якого МОЖЕ набувати градусна міра кута  $\gamma$ .

А	Б	В	Г	Д
$90^\circ$	$120^\circ$	$80^\circ$	$130^\circ$	$100^\circ$

27. Укажіть НЕПРАВИЛЬНЕ твердження.

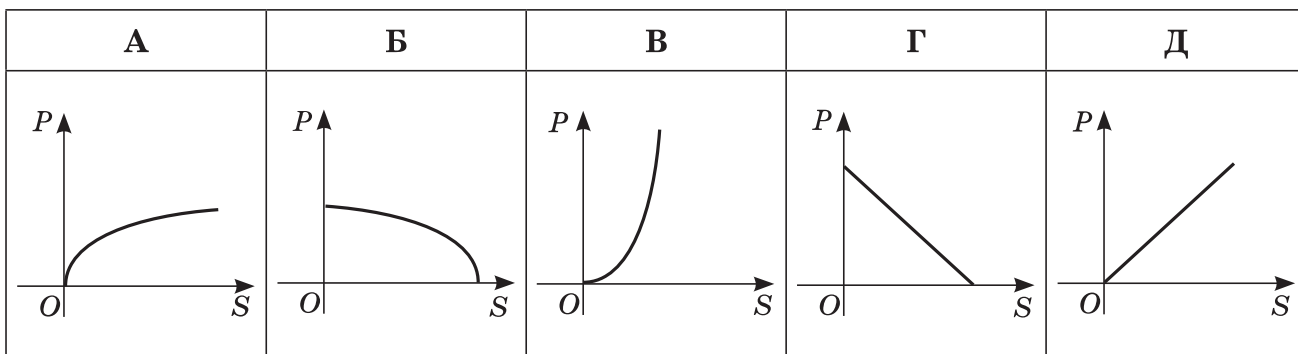
А	Навколо будь-якого трикутника можна описати коло
Б	Усі три медіани будь-якого трикутника перетинаються в одній точці, що знаходиться всередині цього трикутника
В	Усі три висоти будь-якого трикутника перетинаються в одній точці, що знаходиться всередині цього трикутника
Г	Усі три бісектриси будь-якого трикутника перетинаються в одній точці, що знаходиться всередині цього трикутника
Д	У будь-який трикутник завжди можна вписати коло

28. Дано три твердження. Які з них є правильними?

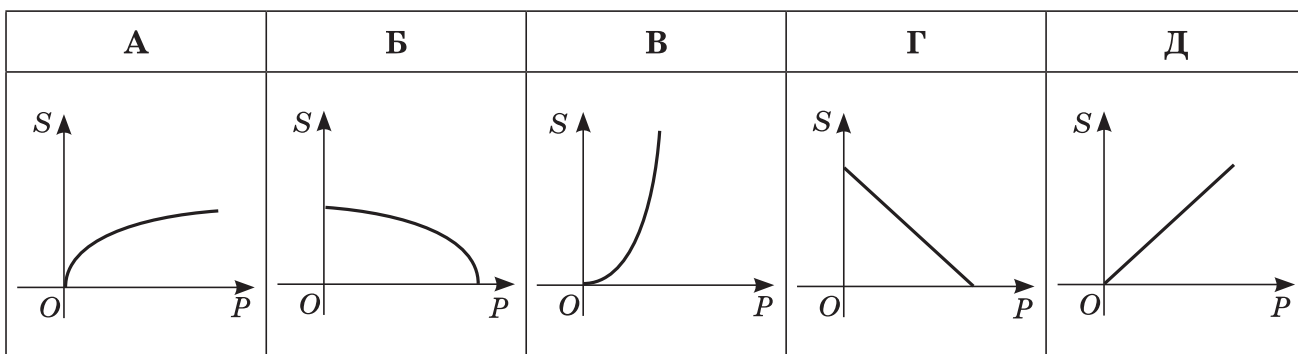
- I. У будь-якому трикутнику проти найбільшої сторони лежить найбільший кут.
- II. Площі подібних трикутників відносяться як квадрати їх периметрів.
- III. Центр кола, описаного навколо будь-якого гострокутного трикутника, знаходиться всередині цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
Тільки I	Тільки I і II	Тільки II і III	Тільки I і III	Усі твердження

29. Укажіть графік, який МОЖЕ бути графіком залежності  $P = f(S)$  периметра  $P$  правильного трикутника від його площі  $S$ .



30. Укажіть графік, який МОЖЕ бути графіком залежності  $S = f(P)$  площі  $S$  правильного трикутника від його периметра  $P$ .



31. У прямокутному трикутнику градусна міра одного з гострих кутів дорівнює  $25^\circ$ . Знайдіть градусну міру іншого гострого кута цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$155^\circ$	$55^\circ$	$75^\circ$	$65^\circ$	$20^\circ$

32. У рівнобедреному трикутнику градусна міра одного з кутів при основі дорівнює  $25^\circ$ . Знайдіть градусну міру кута при вершині цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$155^\circ$	$130^\circ$	$150^\circ$	$75^\circ$	$50^\circ$

33. У рівнобедреному прямокутному трикутнику з гіпотенузою  $4\sqrt{2}$  точка  $M$  є серединою одного з катетів, а точка  $N$  — серединою гіпотенузи. Знайдіть довжину відрізка  $MN$ .

А	Б	В	Г	Д
2	4	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	Знайти неможливо

34. У рівнобедреному прямокутному трикутнику з катетом  $8\sqrt{2}$  точка  $A$  є серединою одного з катетів, а точка  $B$  — серединою іншого катета. Знайдіть довжину відрізка  $AB$ .

А	Б	В	Г	Д
4	$4\sqrt{2}$	8	$8\sqrt{2}$	Знайти неможливо

35. У рівнобедреному трикутнику  $ABC$  з основою  $AC$   $\angle B = 120^\circ$ , а бічна сторона  $BC = 14$  см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
7 см	$7\sqrt{2}$ см	28 см	$14\sqrt{2}$ см	14 см

36. У трикутнику  $ABC$   $\angle A = 30^\circ$ , а  $\angle B = 105^\circ$ . Знайдіть відношення  $\frac{AB}{BC}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	2

37. Дано трикутник  $ABC$ . Висоти цього трикутника, проведені до сторін  $AC$  і  $AB$ , дорівнюють 3 см і 2 см відповідно. Знайдіть відношення  $\frac{AC}{AB}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$

38. На рис. 2 зображено рівнобедрений трикутник  $ABC$ ,  $BM$  — його медіана, проведена до основи, точка  $D$  належить відрізку  $BM$ . Знайдіть відношення площі трикутника  $ADC$  до площі трикутника  $ABC$ , якщо  $BM = 5$  см, а  $BD = 4$  см.

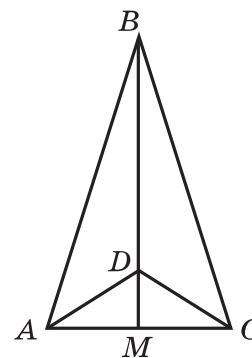


Рис. 2

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{1}{4}$

39. Якщо  $AB$  і  $AC$  — катети прямокутного трикутника  $ABC$ , то **ОБОВ'ЯЗКОВО...**

А	Б	В	Г	Д
$AB < AC$	$\angle ABC = 90^\circ$	$AC < BC$	$\angle ACB = 90^\circ$	$BC < AB$

40. Якщо у трикутнику  $ABC$  кут  $ABC$  — тупий, то **ОБОВ'ЯЗКОВО...**

А	Б	В	Г	Д
$AB < BC$	$\angle BAC$ найменший	$AC < AB$	$\angle ACB$ найменший	$BC < AC$

41. Обчисліть, якщо це можливо, площу трикутника, сторони якого дорівнюють 7, 8 і 15.

А	Б	В	Г	Д
420	$\sqrt{420}$	85	$\sqrt{85}$	Обчислити неможливо, оскільки такого трикутника не існує

42. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 10, а висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 6. Обчисліть площу цього трикутника, якщо це можливо.

А	Б	В	Г	Д
15	30	60	90	Обчислити неможливо, оскільки такого трикутника не існує

43. Навколо трикутника  $ABC$  описано коло з центром у точці  $O$ , причому  $AC = 5$ ,  $OB = 6$ . Знайдіть периметр трикутника  $OAC$ .

А	Б	В	Г	Д
8	10	11	17	20

44. У трикутник  $ABC$  вписано коло з центром у точці  $I$ . Знайдіть відстань від цієї точки до прямої  $AC$ , якщо діаметр кола дорівнює 8.

А	Б	В	Г	Д
2	4	6	8	10

45. Довжини трьох сторін трикутника дорівнюють 2 см, 4 см і 5 см. Укажіть вид цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
Тупокутний	Гострокутний	Прямокутний	Однозначно визначити неможливо	Такого трикутника не існує

46. Довжини трьох сторін трикутника дорівнюють 10 см, 11 см і 13 см. Укажіть вид цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
Тупокутний	Гострокутний	Прямокутний	Однозначно визначити неможливо	Такого трикутника не існує

47. Сторони трикутника дорівнюють 1, 4 і  $\sqrt{17}$ . Знайдіть градусну міру найбільшого з кутів цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$75^\circ$	$60^\circ$	$120^\circ$	$100^\circ$	$90^\circ$

48. Сторони трикутника дорівнюють 3 см, 5 см і 6 см. Знайдіть косинус найбільшого кута цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$-\frac{2}{15}$	$\frac{13}{15}$

49. Через точку перетину медіан трикутника  $ABC$  паралельно стороні  $AB$  проведено пряму, яка перетинає сторони  $AC$  і  $BC$  у точках  $M$  і  $N$  відповідно. Знайдіть відношення периметрів трикутників  $CMN$  і  $ABC$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

50. Через точку перетину медіан трикутника  $ABC$  паралельно стороні  $AC$  проведено пряму, яка перетинає сторони  $AB$  і  $BC$  у точках  $K$  і  $L$  відповідно. Знайдіть відношення площ трикутників  $BKL$  і  $ABC$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь\*.

51. Точка  $L$  належить стороні  $BC$  прямокутника  $ABCD$  (рис. 3). Знайдіть площу цього прямокутника.  
 (1) Площа трикутника  $ALD$  дорівнює 30.  
 (2) Площа трикутника  $ABL$  дорівнює 20, а площа трикутника  $LCD$  дорівнює 10.

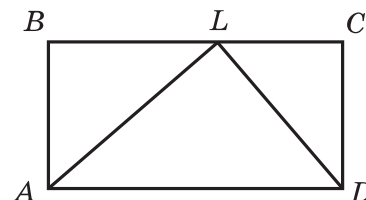


Рис. 3

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

52. Точка  $L$  належить стороні  $BC$  прямокутника  $ABCD$  (див. рис. 3). Знайдіть периметр трикутника  $ALD$ .  
 (1)  $BL = 5$ ,  $LC = 2$ .  
 (2)  $DL$  — бісектриса кута  $ADC$ .

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

\* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.



53. Дано відрізок, довжина якого дорівнює стороні  $AB$  трикутника  $ABC$  і кут, градусна міра якого дорівнює градусній мірі кута  $B$  цього трикутника. За допомогою циркуля та лінійки побудуйте трикутник  $ABC$ .
- (1) Дано кут, градусна міра якого дорівнює градусній мірі кута  $A$  трикутника  $ABC$ .
- (2) Дано відрізок, довжина якого дорівнює висоті  $CK$  трикутника  $ABC$ .

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

54. Дано відрізок, довжина якого дорівнює гіпотенузі  $KM$  прямокутного трикутника  $KLM$ . За допомогою циркуля та лінійки побудуйте цей трикутник.
- (1) Дано відрізок, довжина якого дорівнює радіусу кола, описаного навколо трикутника  $KLM$ .
- (2) Дано відрізок, довжина якого дорівнює висоті  $LH$ , проведеної до гіпотенузи  $KM$ .

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини  $X$  і  $Y$  та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. На рис. 4 зображено трикутник  $ABC$ , у якому  $BC = 4$ ,  $AC = 8$ ,  $\angle ABC = 120^\circ$ .  
Величина  $X$ : площа трикутника  $ABC$ .  
Величина  $Y$ : 16.

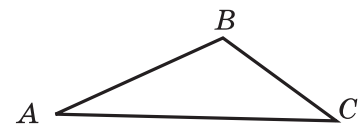


Рис. 4

А	Б	В	Г
Величина $X$ більша за величину $Y$	Величина $Y$ більша за величину $X$	Величини $X$ і $Y$ рівні між собою	Для порівняння величин $X$ і $Y$ недостатньо даних

56. У трикутнику  $PQS$   $PQ = 3$  см,  $QS = 7$  см.

Величина  $X$ : 9 см

Величина  $Y$ : довжина сторони  $PS$ .

А	Б	В	Г
Величина $X$ більша за величину $Y$	Величина $Y$ більша за величину $X$	Величини $X$ і $Y$ рівні між собою	Для порівняння величин $X$ і $Y$ недостатньо даних

### Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. Установіть відповідність між тригонометричними функціями гострих кутів прямокутного трикутника (1–4) і числовими значеннями цих функцій (А–Д), якщо катет прямокутного трикутника дорівнює 2 см, а його гіпотенуза —  $\sqrt{5}$  см.

1 Тангенс меншого гострого кута

2 Тангенс більшого гострого кута

3 Косинус меншого гострого кута

4 Косинус більшого гострого кута

А  $\frac{1}{2}$

Б  $\frac{1}{\sqrt{5}}$

В  $\sqrt{5}$

Г 2

Д  $\frac{2}{\sqrt{5}}$

58. Установіть відповідність між величинами (1–4), пов'язаними з прямокутним трикутником, і числовими значеннями цих величин (А–Д), якщо катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 і 8.

1 Площа трикутника

2 Півпериметр трикутника

3 Радіус описаного кола

4 Радіус вписаного кола

А 2

Б 5

В 10

Г 12

Д 24

59. Установіть відповідність між твердженнями (1–4) і множинами геометричних фігур (А–Д), для КОЖНОГО елемента яких виконуються ці твердження.
- |   |  |   |   |
|---|--|---|---|
| 1 | Центр описаного кола є точкою перетину медіан  | А | Множина всіх правильних трикутників                             |
| 2 | Основа однієї з висот належить продовженню однієї зі сторін                                    | Б | Множина всіх гострокутних трикутників, що не є правильними      |
| 3 | Центр описаного кола знаходиться на одній із сторін  | В | Множина всіх прямокутних трикутників                            |
| 4 | Точка перетину висот не збігається з точкою перетину медіан і знаходиться всередині трикутника | Г | Множина всіх тупокутних трикутників                             |
|   |  | Д | Множина всіх рівнобедрених трикутників, що не є рівносторонніми |
60. Установіть відповідність між множинами геометричних фігур (1–4) і властивостями (А–Д), які має КОЖНИЙ елемент цих множин.
- |   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | Множина всіх рівносторонніх трикутників                         | А | Центри вписаного та описаного кіл лежать на одній із медіан і не збігаються |
| 2 | Множина всіх рівнобедрених трикутників, що не є рівносторонніми | Б | Один із зовнішніх кутів є гострим   |
| 3 | Множина всіх прямокутних трикутників                            | В | Сума всіх внутрішніх кутів дорівнює $360^\circ$                             |
| 4 | Множина всіх тупокутних трикутників                             | Г | Один із кутів дорівнює сумі двох інших                                      |
|   |   | Д | Центри вписаного та описаного кіл збігаються                                |

### Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. Як поділити даний відрізок  $AB$  навпіл за допомогою циркуля та лінійки?
- А Через точки  $A$  і  $B$  провести по дві довільні прямі:  $AA_1$ ,  $AA_2$ ,  $BB_1$ ,  $BB_2$ .
- Б Побудувати два кола  $\omega_1$  і  $\omega_2$  довільного, але того самого радіуса  $r > \frac{1}{2}AB$  з центрами в точках  $A$  та  $B$  відповідно.

- В** Побудувати два кола  $\omega_1$  і  $\omega_2$  довільного, але того самого радіуса  $r < \frac{1}{2}AB$  з центрами в точках  $A$  та  $B$  відповідно.
- Г** Визначити точки  $C_1$  і  $C_2$  як точки перетину прямих  $AA_1$  і  $BB_1$  та  $AA_2$  і  $BB_2$  відповідно.
- Д** Визначити точки  $C_1$  і  $C_2$  як точки перетину кіл  $\omega_1$  і  $\omega_2$ .
- Е** Визначити середину відрізка  $AB$  як точку перетину відрізків  $C_1C_2$  і  $AB$ .
- Є** Визначити середину відрізка  $AB$  як точку перетину відрізків  $AC_1$  і  $BC_2$ .
- 62.** Як поділити даний кут  $A$  навпіл за допомогою циркуля та лінійки?
- А** Провести дві довільні прямі, що перетинають різні сторони кута в точках  $B$  і  $C$ .
- Б** Провести коло довільного радіуса  $R$  з центром у точці  $A$ , яке перетинає різні сторони кута в точках  $B$  і  $C$ .
- В** Через точки  $B$  і  $C$  провести довільні прямі  $BB_1$  і  $CC_1$ , які перетинаються в точці  $M$ .
- Г** Побудувати два кола  $\omega_1$  і  $\omega_2$  довільного, але того самого радіуса  $r < R$  з центрами в точках  $B$  і  $C$  відповідно.
- Д** Побудувати два кола  $\omega_1$  і  $\omega_2$  радіуса  $R$  з центрами в точках  $B$  і  $C$  відповідно.
- Е** Визначити точку  $M$  як одну з точок перетину кіл  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , відмінну від точки  $A$ .
- Є** Промінь  $AM$  є шуканим, тобто він ділить кут з вершиною в точці  $A$  навпіл.
- Ж** Промінь  $BC$  є шуканим, тобто він ділить кут з вершиною в точці  $A$  навпіл.

### Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

- 63.** З вершини прямого кута  $KLM$ , зображеного на рис. 5, проведено два промені  $LP$  і  $LN$  так, що  $\angle KLN = 54^\circ$ , а  $\angle PLM = 68^\circ$ . Знайдіть градусну міру кута  $PLN$ .

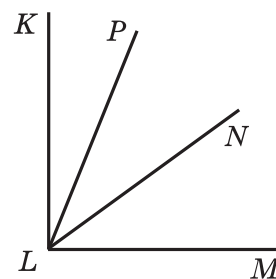


Рис. 5

64. На відрізку  $AB=110$  см (рис. 6) позначили точки  $C$  і  $D$  так, що  $AD=89$  см, а  $BC=56$  см. Знайдіть довжину відрізка  $CD$ .



Рис. 6

65. У правильному трикутнику  $ABC$  проведено бісектриси  $AK$  і  $BL$ . Точка  $O$  — точка їх перетину. Знайдіть площу трикутника  $LOK$ , якщо  $AC=8\sqrt{3}$ .
66. Сторона правильного трикутника дорівнює  $20\sqrt{3}$ . Знайдіть проекцію однієї медіани цього трикутника на іншу.
67. У рівнобедреному трикутнику  $ABC$  ( $AB=BC$ ) проведено бісектрису  $BL$ . Периметр трикутника  $ABC$  дорівнює 90, а периметр трикутника  $ABL$  дорівнює 60. Знайдіть довжину бісектриси  $BL$ .
68. У рівнобедреному трикутнику  $ABC$  ( $AB=BC$ ) проведено медіану  $BM$ . Периметр трикутника  $ABC$  дорівнює 36, а периметр трикутника  $ABM$  дорівнює 30. Знайдіть довжину медіани  $BM$ .
69. Градусна міра кута при вершині  $B$  рівнобедреного трикутника  $ABC$  ( $AB=BC$ ) дорівнює  $40^\circ$ . Знайдіть градусну міру більшого кута між висотами цього трикутника, проведеними з вершин  $A$  і  $B$ .
70. У рівнобедреному трикутнику  $ABC$  ( $AB=BC$ ) проведено висоти  $AK$  і  $BM$ , градусна міра кута між якими дорівнює  $100^\circ$ . Знайдіть градусну міру кута  $ABC$ .
71. Центр кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, ділить його висоту у відношенні  $10:3$ , а бічна сторона дорівнює 60. Знайдіть периметр цього трикутника.
72. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до основи, дорівнює 30, а висота, проведена до бічної сторони, дорівнює 48. Знайдіть периметр цього трикутника.
73. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 60 см, а периметр дорівнює 192 см. Обчисліть відстань (у см) між точками перетину медіан і бісектрис цього трикутника.
74. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 144 см, а периметр дорівнює 384 см. Обчисліть відстань (у см) між точками перетину медіан і серединних перпендикулярів цього трикутника.
75. У прямокутному трикутнику градусна міра одного з кутів дорівнює  $38^\circ$ . Знайдіть градусну міру кута між медіаною та висотою, які проведені з вершини прямого кута.

76. У прямокутному трикутнику градусна міра кута між медіаною та висотою, проведеними з вершини прямого кута, дорівнює  $16^\circ$ . Знайдіть градусну міру більшого гострого кута цього трикутника.
77. Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо бісектриса його прямого кута ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 4 і 8.
78. Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо бісектриса його гострого кута ділить катет на відрізки завдовжки 9 і 15.
79. Катет прямокутного трикутника дорівнює 12, а медіана, проведена до іншого катета, дорівнює 13. Знайдіть радіус кола, описаного навколо цього трикутника.
80. Катет прямокутного трикутника дорівнює 24, а медіана, проведена до цього катета, дорівнює  $2\sqrt{61}$ . Знайдіть радіус кола, вписаного в цей трикутник.
81. З точки  $M$  до прямої  $l$  проведено дві похилі  $MA$  і  $MB$  та перпендикуляр  $MC$ . Відомо, що  $\angle AMB = 90^\circ$ . Знайдіть довжину відрізка  $AB$  (у см), якщо  $MC = 2\sqrt{3}$  см, а проекція похилої  $MA$  на пряму  $l$  на 1 см більша за проекцію похилої  $MB$  на ту саму пряму.
82. З точки  $S$  до прямої  $a$  проведено перпендикуляр  $SA$  і похилу  $SB$ . Відомо, що проекція цієї похилої на пряму  $a$  на 14 см більша за перпендикуляр і на 2 см менша за саму похилу. Знайдіть площу трикутника  $ASB$  (у  $\text{см}^2$ ).
83. Дано прямокутний трикутник  $ABC$ , у якому гіпотенуза  $AB$  дорівнює 10, а катет  $BC$  дорівнює 6. Знайдіть радіус кола з центром на відрізку  $AC$ , яке дотикається до гіпотенузи  $AB$  і проходить через вершину  $C$ .
84. Гіпотенуза  $AB$  прямокутного трикутника  $ABC$  дорівнює 12, а його катет  $AC$  дорівнює 8. Знайдіть радіус кола з центром на гіпотенузі, яке дотикається до катета  $BC$  і проходить через вершину  $A$ .
85. Сума градусних мір зовнішніх кутів трикутника  $KLM$ , взятих по одному при вершинах  $K$  і  $L$ , дорівнює  $330^\circ$ . Знайдіть градусну міру внутрішнього кута  $M$  цього трикутника.
86. У трикутнику  $ABC$   $\angle A = 40^\circ$ . Знайдіть суму градусних мір зовнішніх кутів цього трикутника, взятих по одному при вершинах  $B$  і  $C$ .
87. Площа трикутника  $ABC$  дорівнює  $54 \text{ см}^2$ . Знайдіть висоту, проведenu з вершини  $C$ , якщо  $AB = 9$  см.
88. Площа трикутника  $ABC$  дорівнює  $16 \text{ см}^2$ . Знайдіть  $\sin \angle B$ , якщо  $BC = 8$  см,  $AB = 10$  см.

89. У трикутнику  $ABC$  проведено медіани  $AK$  і  $BM$ , які перетинаються в точці  $O$  (рис. 7). Площа трикутника  $ABC$  дорівнює 120. Знайдіть площу чотирикутника  $MCKO$ .

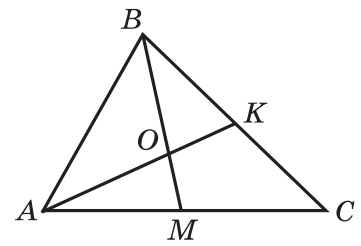


Рис. 7

90. У трикутнику  $ABC$  проведено медіану  $BM$  (рис. 8), потім у трикутниках  $ABM$  і  $MBC$  проведено медіани  $AK$  і  $ML$  відповідно. Знайдіть площу чотирикутника  $AKLM$ , якщо площа трикутника  $ABC$  дорівнює 40.

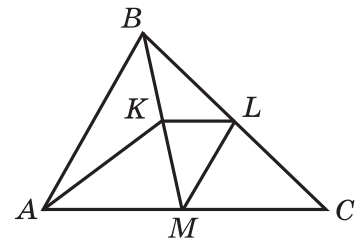


Рис. 8

91. Сторони трикутника дорівнюють 5, 7 і 9. На більшій стороні позначено точку, рівновіддалену від двох інших сторін. Знайдіть довжину більшого з відрізків, на які ця точка ділить більшу сторону.
92. Дано трикутник  $PRS$ , в якому  $PR=4$ ,  $PS=6$ ,  $RS=8$ ;  $PL$  — бісектриса трикутника; точка  $I$  — точка перетину бісектрис трикутника. Знайдіть відношення  $\frac{PI}{IL}$ .

### Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. На сторонах правильного трикутника  $ABC$  зі стороною 3 см позначили точки  $L$ ,  $K$ ,  $M$  так, що  $LB = KC = AM = 1$  см (рис. 9).
- а) Доведіть, що трикутник  $LKM$  правильний.
- б) Знайдіть довжину сторони трикутника  $LKM$ .

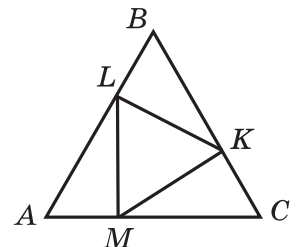


Рис. 9

94. На продовженнях сторін  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  правильного трикутника  $ABC$  відкладено відрізки  $AL$ ,  $BK$ ,  $CM$  так, що  $AL = BK = CM = AB$  (рис. 10).  
 а) Доведіть, що трикутник  $LKM$  правильний.  
 б) Знайдіть, у скільки разів площа трикутника  $LKM$  більша за площу трикутника  $ABC$ .

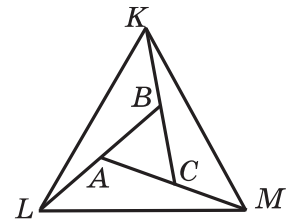


Рис. 10

95. У трикутнику  $ABC$  відомі довжини сторін:  $AB = 4$ ,  $BC = 6$ ,  $AC = a$ .  
 а) Яких значень може набувати параметр  $a$ ?  
 б) При яких значеннях параметра  $a$  трикутник  $ABC$  буде прямокутним? гострокутним? тупокутним?
96. Дано трикутник  $ABC$ , на сторонах  $AB$  і  $AC$  якого позначені точки  $D$  і  $E$  відповідно. Відомо, що  $EC = AB = 4$ ,  $AD = 1$ ,  $BC = 8$ ,  $AC = 6$ . Знайдіть:  
 а) косинус кута  $BAC$ ;  
 б) довжину відрізка  $DE$ .
97. Дано трикутник  $ABC$ , на сторонах  $AB$  і  $AC$  якого позначені точки  $M$  і  $N$  відповідно. Відомо, що  $AN = MB = 3$ ,  $AM = 5$ ,  $NC = a$ ,  $\angle ANM = 90^\circ$ .  
 а) Знайдіть значення параметра  $a$ , при якому трикутники  $ABC$  і  $AMN$  будуть подібними.  
 б) Виразіть довжину відрізка  $BC$  через параметр  $a$ .
98. а) Користуючись рис. 11, знайдіть відношення  $AK : KF$ .  
 б) Користуючись рис. 12, знайдіть відношення  $KN : NC$ .

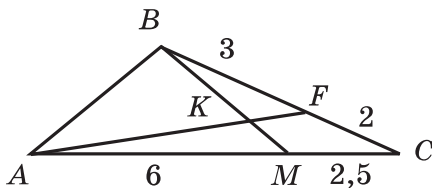


Рис. 11

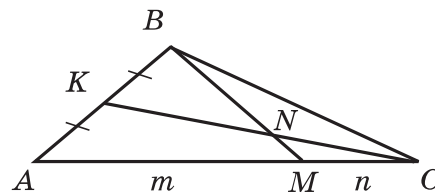


Рис. 12

99. У трикутнику  $KLM$  точка  $F$  — точка перетину бісектриси, проведеної з вершини  $M$ , зі стороною  $KL$ , причому  $\frac{1}{KM} + \frac{1}{LM} = \frac{1}{FM}$ . Доведіть, що  $\angle KML = 120^\circ$ .
100. У трикутнику  $PRS$  проведено медіани  $PK$  і  $SM$ , причому  $\angle SMP = \angle PKS$ . Доведіть, що трикутник  $PRS$  рівнобедрений.