

Розділ 2. ФУНКЦІЇ ТА ЇХ ГРАФІКИ

2.1. Поняття функції. Основні властивості функцій

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Розв'яжіть УСНО завдання 1–10, користуючись тим, що функцію $y = f(x)$ задано графіком (рис. 1).

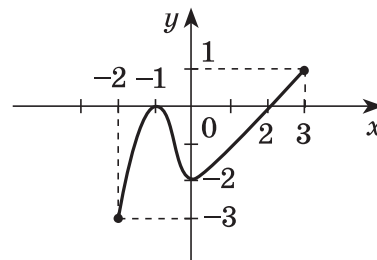


Рис. 1

1. Укажіть область визначення $D(y)$ функції $y = f(x)$.
2. Укажіть множину значень $E(y)$ функції $y = f(x)$.
3. Знайдіть за графіком функції $y = f(x)$ значення $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$.
4. Для функції $y = f(x)$ знайдіть усі значення аргументу $x \in D(y)$, при яких виконується рівність $f(x) = 0$.
5. Скільки існує значень аргументу $x \in D(y)$ функції $y = f(x)$, при яких виконується рівність $f(x) = -1$?
6. Укажіть проміжки значень аргументу функції $y = f(x)$, на яких виконується нерівність $f(x) > 0$; $f(x) < 0$.
7. Чи є функція $y = f(x)$ парною? непарною?
8. Укажіть проміжки, на яких функція $y = f(x)$ зростає; спадає.
9. Укажіть найбільше та найменше значення функції $y = f(x)$ на області визначення.
10. Укажіть проміжки, на яких до функції $y = f(x)$ існує обернена функція.

Розв'яжіть УСНО завдання 11–15, користуючись тим, що функцію $y = f(x)$ задано формулою $f(x) = x^2 - 4x + 4$.

11. Укажіть область визначення $D(y)$ функції $y = f(x)$.
12. Знайдіть значення $f(0)$, $f(-1)$, $f(1)$ функції $y = f(x)$.

13. Для функції $y = f(x)$ знайдіть усі значення аргументу $x \in D(y)$, при яких виконується рівність $f(x) = 0$.
14. Скільки існує значень аргументу $x \in D(y)$ функції $y = f(x)$, при яких виконується рівність $f(x) = 4$?
15. Чи є функція $y = f(x)$ парною? непарною?

Розв'яжіть УСНО завдання 16–20, користуючись тим, що функцію $y = f(x)$ задано таблицею:

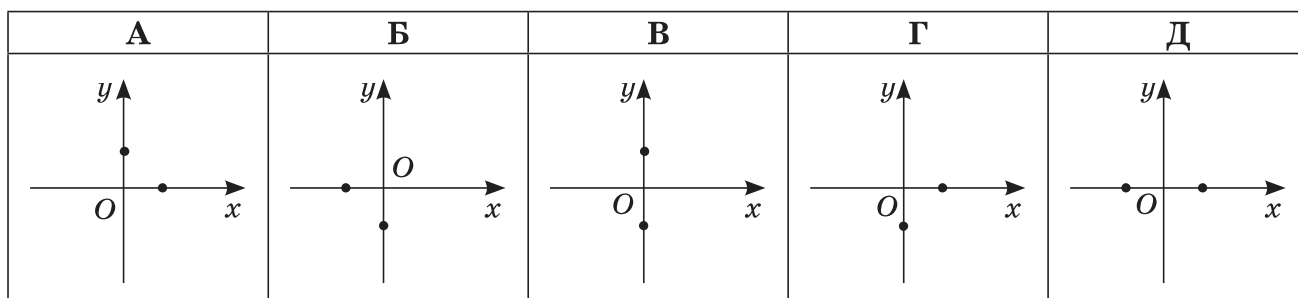
x	5	10	15	20	25	30	35
$f(x)$	-1	0	1	0	-1	0	1

16. Укажіть область визначення $D(y)$ функції $y = f(x)$.
17. Укажіть множину значень $E(y)$ функції $y = f(x)$.
18. Знайдіть значення $f(5)$, $f(20)$, $f(35)$ функції $y = f(x)$.
19. Для функції $y = f(x)$ знайдіть усі значення аргументу $x \in D(y)$, при яких виконується рівність $f(x) = 0$.
20. Скільки існує значень аргументу $x \in D(y)$ функції $y = f(x)$, при яких виконується рівність $f(x) = -1$?

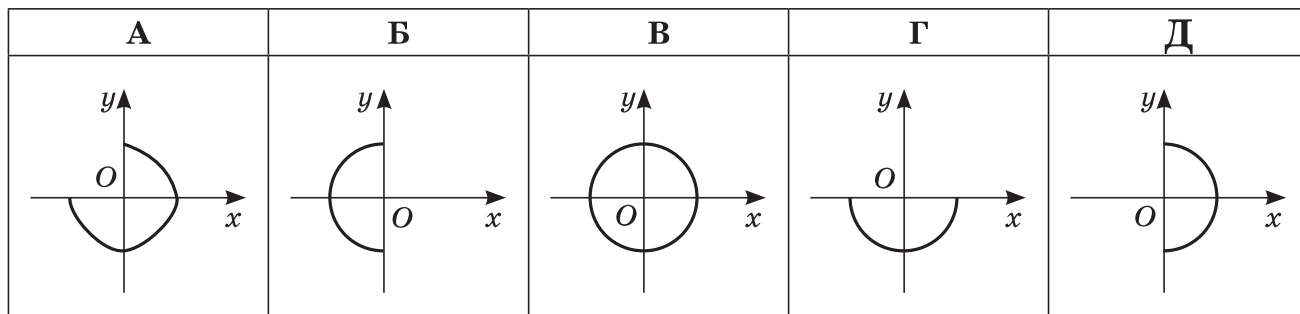
Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Укажіть рисунок, на якому позначено множину точок, що НЕ МОЖЕ належати графіку деякої функції.



22. Укажіть рисунок, на якому зображено графік деякої функції.



23. Укажіть точку, яка належить графіку функції $y = \frac{x^3 + x^2}{x}$.

А	Б	В	Г	Д
(0; 0)	(1; 1)	(-1; 0)	(-1; -1)	(2; 1)

24. Укажіть точку, яка НЕ НАЛЕЖИТЬ графіку функції $y = \sqrt{4 - x^2}$.

А	Б	В	Г	Д
(0; 2)	$(-2; \sqrt{8})$	(2; 0)	$(\sqrt{2}; \sqrt{2})$	$(-1; \sqrt{3})$

25. Функцію $y = f(x)$ задано графіком (рис. 2).
Знайдіть її область визначення.

А	Б	В
$[-4; 0) \cup (0; 4]$	$(-3; 0) \cup (0; 3)$	$[-4; 4]$
Г	Д	
$(-3; 3)$	$\{-4; -3; 3; 4\}$	

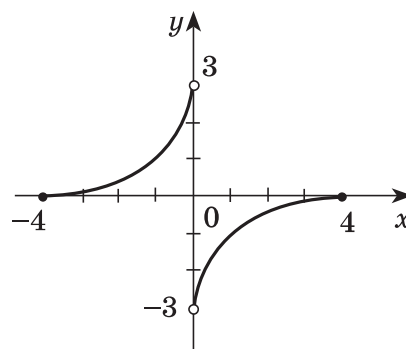


Рис. 2

26. За умовою попередньої задачі знайдіть множину значень функції $f(x)$.

А	Б	В	Г	Д
$[-4; 0) \cup (0; 4]$	$(-3; 0) \cup (0; 3)$	$[-4; 4]$	$(-3; 3)$	$\{-4; -3; 3; 4\}$

27. Функцію $y = g(x)$ задано графіком (рис. 3). Знайдіть її область визначення.

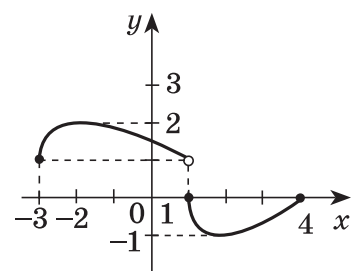


Рис. 3

А	Б	В
$[-3; 4]$	$[-1; 2]$	$[-3; 1) \cup (1; 4]$
Г		Д
$[-1; 0] \cup [1; 2]$		$[-3; 0] \cup [1; 2]$

28. За умовою попередньої задачі знайдіть множину значень функції $g(x)$.

А	Б	В	Г	Д
$[-3; 4]$	$[-1; 2]$	$[-3; 1) \cup (1; 4]$	$[-1; 0] \cup [1; 2]$	$[-3; 0] \cup [1; 2]$

29. Укажіть функцію, областю визначення якої є проміжок $(-\infty; 1)$.

А	Б	В	Г	Д
$y = \sqrt{1-x}$	$y = \ln(x-1)$	$y = \frac{1}{1-x}$	$y = \sqrt{x-1}$	$y = \ln(1-x)$

30. Укажіть функцію $y = f(x)$, для якої $D(y) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
$y = \sqrt{x^2 - 1}$	$y = \ln(x^2 - 1)$	$y = \frac{1}{x^2 - 1}$	$y = \ln(1 - x^2)$	$y = \sqrt{1 - x^2}$

31. Укажіть рисунок, на якому може бути зображений фрагмент графіка парної функції.

А	Б	В	Г	Д

2.1. Поняття функції. Основні властивості функцій

32. Укажіть рисунок, на якому може бути зображений фрагмент графіка непарної функції.

А	Б	В	Г	Д

33. Укажіть парну функцію.

А	Б	В	Г	Д
$y = x^4 + x$	$y = x^4 + x^2 + 1$	$y = x^3 + x$	$y = x^4 + x^3 + 1$	$y = x^3 + x^2 + 1$

34. Укажіть непарну функцію.

А	Б	В	Г	Д
$y = -\frac{1}{x^2 + 1}$	$y = \frac{1}{x^3 - x}$	$y = -\frac{1}{x^2 - 1}$	$y = \frac{1}{x^3 + 1}$	$y = -\frac{1}{x^3 - 1}$

35. На рис. 4 зображено фрагмент графіка функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $(-\infty; +\infty)$ і періодичної з періодом $T = 2$. Укажіть рисунок, на якому може бути зображений інший фрагмент графіка цієї функції.

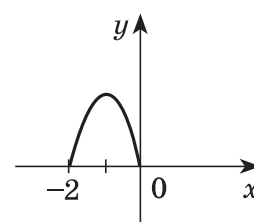


Рис. 4

А	Б	В	Г	Д

36. На рис. 5 зображено фрагмент графіка функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $(-\infty; +\infty)$ і періодичної з періодом $T = 1$. Укажіть рисунок, на якому може бути зображений інший фрагмент графіка цієї функції.

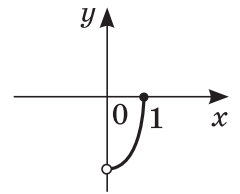


Рис. 5

А	Б	В	Г	Д

37. На рис. 6 зображено фрагмент графіка функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $(-\infty; +\infty)$ і періодичної з періодом $T = 8$. Укажіть проміжок, для всіх точок якого виконується нерівність $f(x) < 0$.

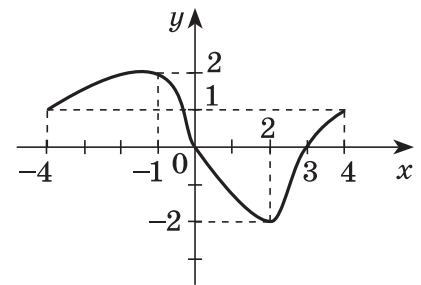


Рис. 6

А	Б	В	Г	Д
(4; 8)	(8; 12)	(10; 13)	(16; 19)	(11; 15)

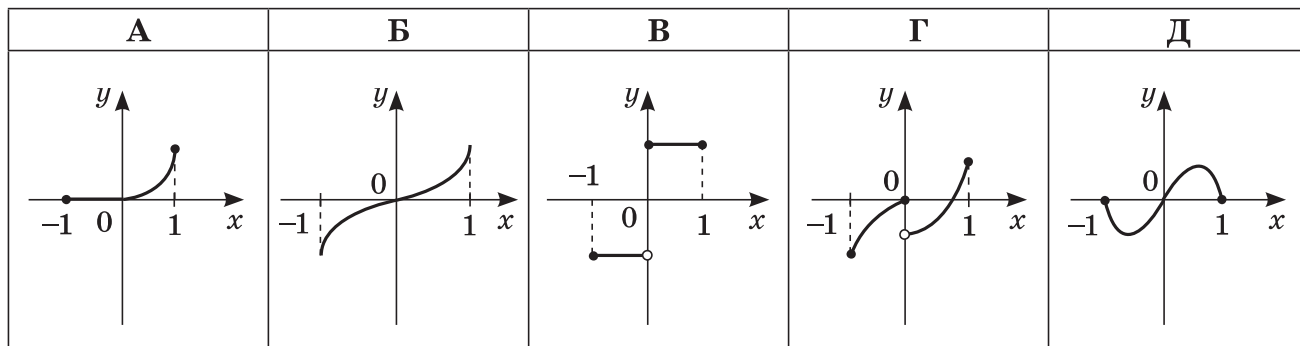
38. За умовою попередньої задачі укажіть проміжок, на якому функція $f(x)$ є зростаючою.

А	Б	В	Г	Д
(-12; -8)	(-7; -4)	(7; 10)	(11; 15)	(16; 19)

39. Укажіть графік функції, що є спадною на проміжку $[-1; 1]$.

А	Б	В	Г	Д

40. Укажіть графік функції, що є зростаючою на проміжку $[-1; 1]$.



41. Функція $y = f(x)$ є зростаючою на проміжку $[-1; +\infty)$, причому $f(-1) = -3$. Укажіть рівність, яка НЕ МОЖЕ бути правильною.

А	Б	В	Г	Д
$f(10) = -1$	$f(0) = 0$	$f(5) = -4$	$f(15) = -2$	$f(8) = 8$

42. Функція $y = f(x)$ є спадною на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Укажіть правильну нерівність.

А	Б	В	Г	Д
$f(-2) < f(2)$	$f(-1) > f(-3)$	$f(5) < f(10)$	$f(-5) > f(-10)$	$f(3) < f(-3)$

43. Функції $f(x)$ і $g(x)$ є зростаючими на проміжку $(0; +\infty)$. Які з наведених тверджень є правильними?

I. Функція $f(x) + g(x)$ ЗАВЖДИ є зростаючою на проміжку $(0; +\infty)$.

II. Функція $f(x) \cdot g(x)$ ЗАВЖДИ є зростаючою на проміжку $(0; +\infty)$.

III. Функція $\frac{f(x)}{g(x)}$ МОЖЕ БУТИ зростаючою на проміжку $(0; +\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
Тільки I	Тільки I і II	Тільки II і III	Тільки I і III	Усі твердження

44. Функція $\varphi(x)$ є спадною на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Які з наведених тверджень є правильними?

I. Функція $\frac{1}{\varphi(x)}$ ЗАВЖДИ є зростаючою на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

II. Функція $(-\varphi(x))$ ЗАВЖДИ є зростаючою на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

III. Функція $(\varphi(x))^2$ МОЖЕ БУТИ зростаючою на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
Тільки II	Тільки I і II	Тільки II і III	Тільки I і III	Усі твердження

45. Дано дві функції $f(x) = \sqrt{x}$ і $g(x) = \cos x$. Укажіть функцію $y = g(f(x))$.

А	Б	В	Г	Д
$y = \sqrt{\cos x}$	$y = \cos \sqrt{x}$	$y = \sqrt{x} \cdot \cos x$	$y = \cos(x\sqrt{x})$	$y = \sqrt{x \cdot \cos x}$

46. Дано функцію $h(x) = \frac{1}{x-1}$. Укажіть функцію $y = h(h(x))$.

А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{x-1}{2-x}$	$y = \frac{1}{(x-1)^2}$	$y = 1$	$y = \frac{2-x}{x-1}$	$y = x-1$

47. На рис. 7 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної і спадної на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Укажіть рисунок, на якому може бути зображений графік функції, оберненої до функції $f(x)$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

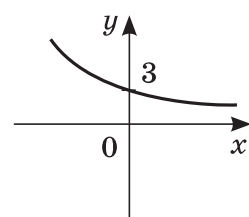


Рис. 7

А	Б	В	Г	Д

48. На рис. 8 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної і зростаючої на проміжку $(-\infty; 0]$. Укажіть рисунок, на якому може бути зображений графік функції, оберненої до функції $f(x)$ на проміжку $(-\infty; 0]$.

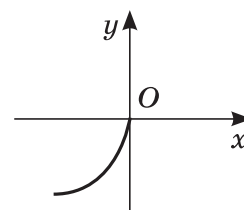


Рис. 8

А	Б	В	Г	Д

49. Укажіть функцію, яка є оберненою до функції $y = 3x - 2$.

А	Б	В	Г	Д
$y = -3x + 2$	$y = \frac{1}{3x - 2}$	$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$	$y = \sqrt{3x - 2}$	$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

50. Укажіть функцію, що є оберненою до функції $y = 10^{1-x}$.

А	Б	В	Г	Д
$y = 10^{x-1}$	$y = \lg(1-x)$	$y = 1 - \sqrt[10]{x}$	$y = -10^{1-x}$	$y = 1 - \lg x$

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. Знайдіть значення $f(0)$.

- (1) Графік функції $y = f(x)$ проходить через точку $(5; 0)$.
 (2) Графік функції $y = f(x)$ проходить через точку $(0; 5)$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

52. Функція $y = f(x)$, визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$, є періодичною з найменшим додатним періодом $T = 5$. Знайдіть значення $f(10)$.

(1) $f(0) = -1$.

(2) $f(15) = -1$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

53. Чи є функція $y = f(x)$, визначена на проміжку $[-2; 2]$, зростаючою на цьому проміжку?

(1) $f(2) > f(0) > f(-2)$.

(2) Функція $f(x)$ є непарною.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

54. Чи є функція $y = f(x)$, визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$, парною?

(1) $f(-n) = f(n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

(2) Функція $f(x)$ спадає на проміжку $(-\infty; 0)$ і зростає на проміжку $(0; +\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. На рис. 9 зображено фрагмент графіка непарної функції $y = f(x)$.

Величина X : значення $f(-1)$.

Величина Y : значення $f(1)$.

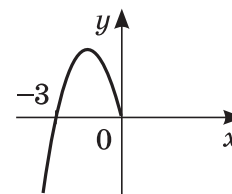


Рис. 9

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. На рис. 10 зображено фрагмент графіка парної функції $y = f(x)$.

Величина X : значення $f(-1)$.

Величина Y : значення $f(1)$.

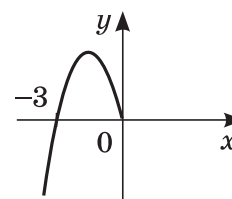


Рис. 10

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

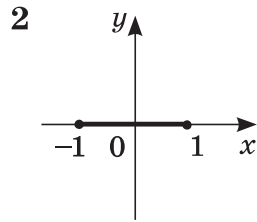
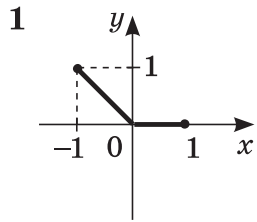
Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка або рисунка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

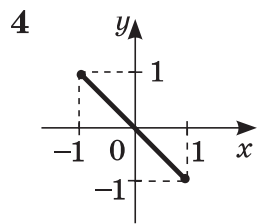
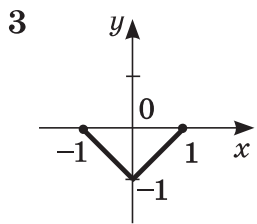
57. Установіть відповідність між функціями (1–4) і точками (А–Д), які належать графікам цих функцій.

- | | |
|---------------------|----------|
| 1 $y = 4$ | А (4; 0) |
| 2 $y = \frac{4}{x}$ | Б (0; 4) |
| 3 $y = \log_4 x$ | В (1; 0) |
| 4 $y = 4^x$ | Г (0; 1) |
| | Д (2; 2) |

58. Установіть відповідність між графіками (1–4), якими задані функції, визначені на проміжку $[-1; 1]$, і множинами значень цих функцій (А–Д).

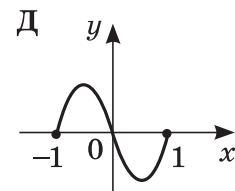
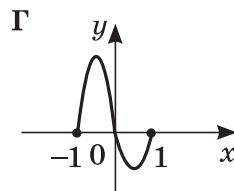
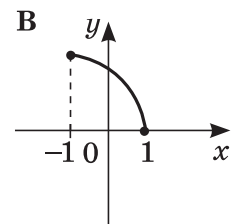
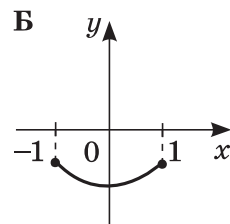
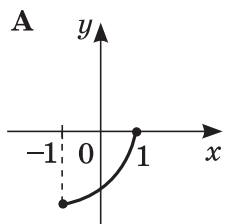


- А $\{0\}$
- Б $[-1; 0]$
- В $[-1; 1]$
- Г $[0; 1]$
- Д $\{1\}$



59. Установіть відповідність між властивостями (1–4), які мають функції, і графіками (А–Д), якими задані ці функції, визначені на проміжку $[-1; 1]$.

- 1 Функція є парною
- 2 Функція є непарною
- 3 Функція зростає на проміжку $[-1; 1]$
- 4 Функція спадає на проміжку $[-1; 1]$



60. Установіть відповідність між властивостями (1–4), які мають функції, і цими функціями (А–Д).

- 1 Функція є парною
- 2 Функція є непарною
- 3 Графік функції проходить через точку $(2; 0)$
- 4 Графік функції проходить через точку $(0; 2)$

- А $y = 2 - x + \sin(x^2)$.
- Б $y = \frac{x - 2}{x^2 + 1}$
- В $y = \sqrt{x^2 + 1}$
- Г $y = \sin(x^3 - x)$
- Д $y = \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. Як довести, що функція $y = f(x)$ є зростаючою на проміжку $[a; b]$?
- А Знайти значення $f(a)$ і $f(b)$.
 - Б Знайти значення $f(x_1)$ і $f(x_2)$.
 - В Знайти різницю $f(b) - f(a)$.
 - Г Знайти різницю $f(x_1) - f(x_2)$.
 - Д Розглянути довільні $x_1 < x_2$, $x_1 \in [a; b]$, $x_2 \in [a; b]$.
 - Е Довести, що ця різниця є від'ємною.
 - Є Довести, що ця різниця є додатною.
62. Як перевірити, чи є функція $y = f(x)$ непарною?
- А Знайти множину M — область визначення функції $D(y)$.
 - Б Знайти множину M — множину значень функції $E(y)$.
 - В Перевірити, чи містить множина M точку $x = 0$.
 - Г Перевірити, чи є множина M симетричною відносно точки $x = 0$.
 - Д Розглянути дві довільні точки x_1 і $x_2 = -x_1$, які належать множині M .
 - Е Позначити $A = f(x_1) + f(x_2)$.
 - Є Позначити $A = f(x_1) - f(x_2)$.
 - Ж Зробити висновок — якщо $A = 0$, то функція $f(x)$ є непарною.
 - З Зробити висновок — якщо $A > 0$, то функція $f(x)$ є непарною.
 - И Зробити висновок — якщо $A < 0$, то функція $f(x)$ є непарною.

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

63. Знайдіть значення виразу $f(-1) - f(1)$, якщо $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.
64. Знайдіть значення виразу $g(1) \cdot g(4,5)$, якщо $g(x) = \sqrt{2x+7}$.

65. Знайдіть значення аргументу x , при якому значення функції $y = \frac{5+9x}{x}$ дорівнює 11.
66. Знайдіть значення аргументу x , при якому значення функції $y = \frac{8-3x}{x}$ дорівнює 1.
67. Знайдіть НАЙМЕНШЕ значення аргументу x , при якому $f(x) = 0$, якщо $f(x) = \arccos(x^2 - 15)$.
68. Знайдіть НАЙБІЛЬШЕ значення аргументу t , при якому $\varphi(t) = 0$, якщо $\varphi(t) = \arcsin(t^2 - 64)$.
69. Область визначення функції $y = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+5}$ є відрізком. Знайдіть довжину цього відрізка.
70. Скільки цілих чисел містить область визначення функції $y = \log_2(x+4) - \log_3(5-2x)$?
71. Укажіть найбільше число, яке НЕ належить області визначення функції $y = \frac{3x-12}{x^2+10x+16}$.
72. Укажіть найменше число, яке НЕ належить області визначення функції $y = \frac{4+x}{x^2-10x+21}$.
73. На рис. 11 зображено фрагмент графіка парної функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Знайдіть значення виразу $f(0) + 5 \cdot f(5)$, якщо $f(-5) = 4$.

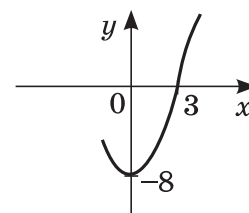


Рис. 11

74. На рис. 12 зображено фрагмент графіка непарної функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Знайдіть значення виразу $9 \cdot f(-4) - 5 \cdot f(2)$, якщо $f(-2) = -2$.

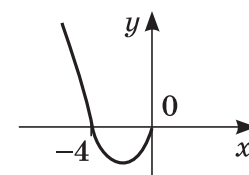


Рис. 12

75. Дано п'ять функцій: 1) $y = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x}$; 2) $y = \frac{x^3 + x - 1}{x}$; 3) $y = \sqrt{-x} + \sqrt{x}$; 4) $y = \frac{\lg(2-x) - \lg(2+x)}{x^2 + 1}$; 5) $y = \sqrt{x+7} + \sqrt{7-x}$. Скільки з них є парними?
76. За умовою попередньої задачі укажіть суму номерів функцій, які є непарними.
77. Функцію $y = x^2 + 10x + 2$ подайте у вигляді суми двох функцій $f(x) + g(x)$, де $f(x)$ — парна функція, а $g(x)$ — непарна функція. У відповідь запишіть значення виразу $f(-3) + g(2)$.
78. Функцію $y = 4x - 3|x| - 1$ подайте у вигляді суми двох функцій $f(x) + g(x)$, де $f(x)$ — парна функція, а $g(x)$ — непарна функція. У відповідь запишіть значення виразу $f(5) + g(-3)$.
79. Число $T = 5$ є періодом функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Знайдіть значення виразу $6 - 3 \cdot f(11)$, якщо $f(1) = 7$.
80. Число $T = 3$ є періодом функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Знайдіть значення виразу $f(-5) + 3 \cdot f(4)$, якщо $f(-2) = 2$.
81. Функцію $y = x^3 + 2 + \cos x + x$ подайте у вигляді суми двох функцій $f(x) + g(x)$, де $f(x)$ — періодична функція, а $g(x)$ — непарна функція. У відповідь запишіть значення $g(-2)$.
82. Функцію $y = x^5 - 2x^3 + 5$ подайте у вигляді суми двох функцій $f(x) + g(x)$, де $f(x)$ — періодична функція, а $g(x)$ — непарна функція. У відповідь запишіть значення $g(2)$.
83. На рис. 13 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 4]$. Знайдіть суму $m + k$, якщо m — кількість проміжків зростання функції $y = f(x)$, k — кількість точок локального мінімуму цієї функції.

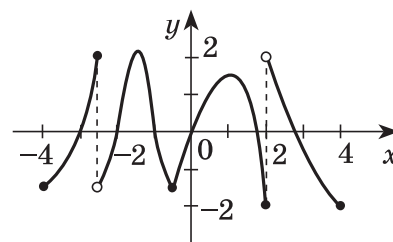


Рис. 13

84. За умовою попередньої задачі знайдіть частку $\frac{a}{b}$, якщо a — кількість проміжків спадання функції $y = f(x)$, b — кількість точок локального максимуму цієї функції.
85. Задано дві функції $f(x) = \frac{8}{x}$ і $g(x) = x + 4$. Знайдіть значення $h(4)$, якщо $h(x) = g(f(x))$.
86. Задано дві функції $f(x) = \frac{8}{x}$ і $g(x) = x + 4$. Знайдіть значення $u(4)$, якщо $u(x) = f(g(x))$.
87. Знайдіть усі значення аргументу x , при яких $\varphi(\psi(x)) = 25$, якщо $\psi(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $\varphi(x) = x^4$. У відповідь запишіть ДОБУТОК цих значень.
88. Знайдіть усі значення аргументу x , при яких $g(h(x)) = 36$, якщо $h(x) = \log_2(x^2)$, $g(x) = 2^x$. У відповідь запишіть НАЙМЕНШЕ з цих значень.
89. Функція $g(x)$ є оберненою до функції $f(x) = 2x - 15$. Знайдіть значення $g(1)$.
90. Функція $\psi(x)$ є оберненою до функції $\varphi(x) = x^2 + 9$ на проміжку $(-\infty; 0]$. Знайдіть значення $\psi(25)$.
91. Графік функції $g(x)$ симетричний графіку функції $f(x)$ відносно прямої $y = x$. Знайдіть значення $f(5)$, якщо $20 - 4 \cdot g(3) = 0$.
92. Графік функції $\psi(x)$ симетричний графіку функції $\varphi(x)$ відносно прямої $y = x$. Знайдіть значення $\varphi(10)$, якщо $50 - 5 \cdot \psi(17) = 0$.

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. Доведіть твердження: «Якщо число T є періодом функції $y = f(x)$, то для довільних значень $a > 0$, $b \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$ число $\frac{T}{a}$ є періодом функції $y = f(ax + b) + c$ ».

94. Доведіть твердження: «Якщо для функції $y = f(x)$ виконується рівність $f(x+2) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}$ при всіх $x \in \mathbf{R}$, то число $T = 4$ є періодом функції $y = f(x)$ ».
95. Дано прямокутник, діагональ якого дорівнює 10, а одна із сторін — x . Знайдіть функцію $S(x)$, яка описує залежність площі прямокутника S від довжини сторони x . Знайдіть область визначення і множину значень функції $S(x)$. Дослідіть функцію $S(x)$ на парність та періодичність.
96. Дано правильний трикутник, площа якого дорівнює x . Знайдіть функцію $a(x)$, яка описує залежність довжини сторони a від площі x . Знайдіть область визначення і множину значень функції $a(x)$. Дослідіть функцію $a(x)$ на парність та періодичність.
97. Відомо, що $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Знайдіть область визначення і множину значень функції $g(x) = f(f(x))$. Побудуйте її графік.
98. Відомо, що $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Знайдіть область визначення та множину значень функції $g(x) = f(f(f(x)))$. Побудуйте її графік.
99. Дано дві функції: $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ і $g(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$. Знайдіть:
- функцію $h(x)$, яка є оберненою до функції $f(x)$;
 - найменший додатний період T функції $g(x)$ (див. завдання 93);
 - область визначення і множину значень функції $\varphi(x) = h(g(x))$; дослідіть цю функцію на парність.
100. Дано дві функції: $f(x) = \cos(2\pi x)$ і $g(x) = \frac{1}{x-1}$. Знайдіть:
- функцію $h(x)$, яка є оберненою до функції $g(x)$;
 - найменший додатний період T функції $f(x)$ (див. завдання 93);
 - область визначення і множину значень функції $\psi(x) = f(h(x))$; дослідіть цю функцію на парність.