

# ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ\*

О. Г. Пиріжок, викладач фізики,

С. І. Діденко, викладач математики,

Т. В. Прибилович, викладач економіки,

Коледж економіки та управління ДВНЗ «КНЕУ ім. В. Гетьмана», м. Кривий Ріг, Дніпропетровська обл.

## Мета:

- **дидактична:** поглибити й розширити знання учнів про визначений інтеграл; закріпити навички знаходити визначений інтеграл, показати його місце й значення в розв'язуванні задач фізичного, економічного, геометричного змісту; учити бачити єдину математичну модель у різних ситуаціях, складати її в нестандартних умовах; учити учнів досліджувати й оцінювати соціальні явища засобами математики; бачити необхідність планування майбутнього; допомогти сформувати особисте ставлення до діяльності, яка вимагає математичних знань;
- **розвивальна мета:** формувати вміння виступати перед аудиторією, чітко формулювати й обстоювати свою думку; розвивати спостережливість, логічне мислення, інтелектуальні здібності учнів; сприяти розширенню їх кругозору; розвивати професійне мовлення учнів;
- **виховна мета:** формувати вміння дискутувати, обґрунтовувати свою точку зору, формувати та розвивати самоактуалізацію та саморегуляцію у вивченні теми, формувати й розвивати інтерес та потреби в професійній орієнтації та самовдосконаленні, інтерес до науки шляхом звернення до історичних джерел, уміння раціонально використовувати робочий час.

**Тип заняття:** узагальнення та систематизації навчального матеріалу.

**Обладнання:** мультимедійний проектор, картки-завдання, таблиці та схеми в електронному вигляді, комп'ютер, навчальна презентація.

## ХІД ЗАНЯТТЯ

### I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ МОМЕНТ

Заняття починається з вітання вчителя з учнями, перевірки присутності учнів, створення ділової, доброзичливої атмосфери в класі.

\* Презентацію до цієї статті розміщено на нашому сайті <http://journal.osnova.com.ua>, в архіві журналу «Фізика в школах України» № 03–04 (367–368), під назвою «Застосування визначеного інтеграла для розв'язування задач».

Математика — це спосіб називати різні речі одним ім'ям».

### II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Один учень за власним вибором розв'язує рівняння з домашньої роботи.

$$\int_0^x \sin 2t dt = 3\cos^2 x,$$

$$-\frac{1}{2} \cos 2t \Big|_0^x = \frac{3}{2} (\cos 2x + 1),$$

$$-\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cos 2x + \frac{3}{2},$$

$$-2\cos 2x = 1, \quad \cos 2x = -\frac{1}{2},$$

$$2x = \pm \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь:  $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ .

### III. МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель. Ми з вами сьогодні спробуємо за допомогою математики розв'язати проблеми, що виникають на заняттях із фізики та економіки.

Шановні, прочитуйте нам, будь ласка, вислів відомого італійського вченого Галілео Галілея.

(«Філософія написана в тій книзі, яка завжди відкрита в нас перед очима (я маю на увазі Всесвіт), але яку неможливо зрозуміти, якщо заздалегідь не вивчити її мову».)

Її мова — це мова математики. Математика здавна має репутацію найточнішої галузі знань і є надійним знаряддям розкриття таємниць природи.

А якщо звернутися до висловів відомих науковців, наприклад Альберта Ейнштейна, «наш досвід переконує нас, що природа — це реалізація найпростіших математичних ідей». А відомий нам Рене Декарт стверджував: «Той, хто серйозно пра-

мує до пізнання істини, не повинен займатися якоюсь однією наукою, бо всі вони взаємозв'язані».

#### IV. ПОВІДОМЛЕННЯ ТЕМИ ТА МЕТИ ЗАНЯТТЯ

Учитель. Сподіватимемося, що за допомогою слів видатних науковців, вислови яких цитували, ми переконалися в доцільності проведення сьогоднішнього заняття, тема якого — «Застосування визначеного інтеграла до розв'язування задач».

До речі, задача (англ. *problem*) означає «проблема». Проблема розв'язування задач ускладнюється в тому випадку, якщо вміння побачити єдину математичну модель у різних ситуаціях недостатньо розвинене. Але ж іще Анрі Пуанкаре, французький математик, слова якого ми взяли як епіграф до нашого заняття, сказав: «Математика — це спосіб називати різні речі одним ім'ям». Можливість розвивати ці вміння ви й матимете сьогодні, розв'язуючи задачі, пов'язані з геометрією, фізичними явищами, економічними процесами. І ви матимете чудову нагоду закріпити й розвинути навички знаходити визначений інтеграл, застосовувати його під час розв'язування практичних задач.

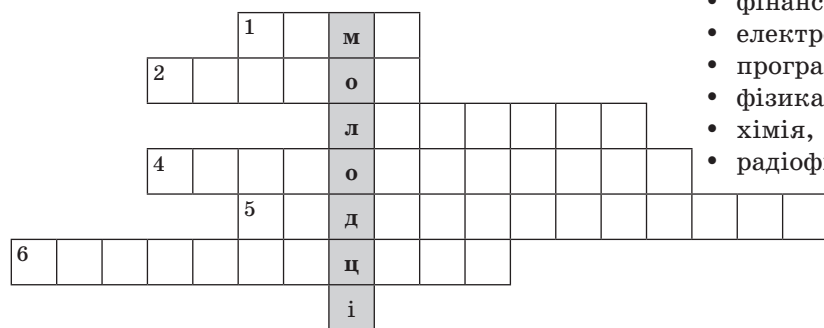
#### V. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ УЧНІВ

- ♦ Пригадаймо, з яким поняттям нерозривно пов'язане поняття визначеного інтеграла? (*Площа.*)

А зараз, відповідаючи на запитання вікторини «Що? Де? Як? Чому?», ми налаштуємося на розгляд більш складних проблем (кресворд).

#### Запитання кресворду

1. Першу букву якого слова нагадує знак інтеграла? (*Сумма — сума.*)
2. Хто з відомих математиків-фізиків розглянув фізичний зміст інтеграла? (*Ньютон.*)
3. Хто з відомих математиків розглянув математичний зміст інтеграла? (*Лейбніц.*)
4. Як називається трапеція, площу якої ми знаходимо за допомогою визначеного інтеграла? (*Криволінійна.*)



5. Як називається функція, яка стоїть під знаком інтеграла? (*Підінтегральна.*)
6. Як називається множник  $dx$  у підінтегральному виразі? (*Диференціал.*)
7. Як називається операція, обернена до операції диференціювання? (*Інтегрування.*)

#### VI. ТЕСТИ-ТРЕНІНГИ (5 хв)

Учитель. А зараз ми ще раз звернемося до визначених інтегралів і перевіримо, як ви вмієте їх знаходити.

**Тести ідентифікації** (слайди 1–2).

**Робота в групах** (слайди 3–4).

#### VII. УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ЗНАТЬ, УМІНЬ ТА НАВИЧОК

Учитель. Зараз прослухаймо повідомлення про виникнення терміна «інтеграл», науковців, пов'язаних із цим поняттям, а також використання визначеного інтеграла.

Поняття інтеграла — важливе як у шкільному курсі математики, так і в курсі вищої математики, що розгалужується на низку цікавих, хоч і складних математичних дисциплін.

Назву вам лише кілька з них:

- математичний аналіз,
- функціональний аналіз,
- теорія функції комплексної змінної,
- диференціальні рівняння,
- теорія ймовірностей,
- теорія оптимізації математичних процесів.

Окрім математичних, є науки, що широко використовують математичний апарат і нині дуже популярні, оскільки необхідні для ведення різноманітних справ, для гармонійного розвитку галузей виробництва тощо. У цих науках також використовують поняття інтеграла.

Серед них такі, як:

- політична економія,
- фінансова справа,
- електроніка,
- програмування,
- фізика,
- хімія,
- радіофізика тощо.

З'ясуймо, як саме ми можемо застосувати визначений інтеграл у таких науках, як фізика, економіка.

- ♦ А де саме визначений інтеграл застосовують у фізиці?

**Елементи інтегрування для фізичних величин**

| Величини  | Співвідношення                     | Інтегрування                                       |
|---|------------------------------------|--|
| $A$ — робота;<br>$F$ — сила;<br>$N$ — потужність; | $dA = f(x)dx$ ;<br>$dA = N(t)dt$ ; | $A = \int_a^b F(x)dx$ ;<br>$A = \int_a^b N(t)dt$ ; |
| $m$ — маса стрижня;<br>$\rho$ — лінійна густина   | $dm = \rho(x)dx$                   | $m = \int_a^b \rho(x)dx$                           |
| $q$ — електричний заряд;<br>$I$ — сила струму     | $dq = I(t)dt$                      | $q = \int_a^b I(t)dt$                              |
| $s$ — переміщення;<br>$v$ — швидкість             | $ds = v(t)dt$                      | $s = \int_a^b v(t)dt$                              |
| $Q$ — кількість теплоти;<br>$c$ — теплоємність    | $dQ = c(t)dt$                      | $Q = \int_a^b c(t)dt$                              |

Розгляньмо на прикладі фізики.

Нехай швидкість руху тіла задана рівнянням  $v(t) = 3t^2 - 2t + 1$  (у метрах на секунду). Знайдемо шлях руху тіла, який відбувся за 10 секунд від початку руху.

За умовою задачі позначимо, що дано:  $t_0 = 0$  секунд,  $t_1 = 10$  секунд.

$$v(t) = 3t^2 - 2t + 1.$$

Застосуємо формулу, що виражає фізичний зміст визначеного інтеграла.

Знайдемо шлях як функцію від  $x$ .

$$s(x) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt.$$

Обчислимо, враховуючи подане рівняння швидкості:

$$s = \int_0^{10} (3t^2 - 2t + 1)dt = (t^3 - t^2 + t) \Big|_0^{10} = 910 \text{ (м)}.$$

**Відповідь:** тіло за десять секунд пододало 910 м.

**Учитель.** Розгляньмо, коли нам може знадобитися визначений інтеграл під час розв'язування задач з економіки.

На заняттях з економіки ви познайомилися з деякими термінами. Згадаймо їх. Дайте відповіді на запитання:

1. Що таке попит на товар?
2. Дайте визначення терміна «пропозиція».
3. Схематично зобразіть графіки функції попиту та пропозиції в одній системі координат.
4. Покажіть на цих графіках точку, що означає ринкову рівновагу.

Творча група учнів підготувала нам матеріал про використання визначеного інтеграла в економіці.

Учні доповідають.

**Приклад 1.** Функції попиту та пропозиції поданого товару описувані рівняннями  $Q_D = 30 - P$ ,  $Q_S = -15 + 2P$ . Визначте вигоду споживача та виробника.

*Розв'язання*

Спочатку визначимо рівноважну ціну  $P^*$  та обсяг продажу  $Q^*$ :  $30 - P = -15 + 2P$ ,  $P^* = 15$ ,  $Q^* = 15$ .

Визначимо вигоду споживача:

$$CS = \int_0^{Q^*} f(Q)dQ - P^*Q^* = \int_0^{15} (30 - Q)dQ - 15 \cdot 15 = \left( 30Q - \frac{Q^2}{2} \right) \Big|_0^{15} - 225 = 30 \cdot 15 - \frac{15^2}{2} - 225 = 112,5.$$

Визначимо вигоду виробника:

$$DS = P^*Q^* - \int_0^{Q^*} f(Q)dQ = 15 \cdot 15 - \int_0^{15} (0,5Q + 7,5)dQ = 225 - \left( \frac{Q^2}{4} + 7,5Q \right) \Big|_0^{15} = 225 - \left( \frac{15^2}{4} + 7,5 \cdot 15 \right) = 56,25.$$

Також інтеграл застосовують для визначення продуктивності праці. Розглянемо приклад. Якщо  $f(t)$  — продуктивність праці в момент  $t$ , то  $Q = \int_0^T f(t)dt$  — обсяг продукції, яку випускають за проміжок часу  $[0; T]$ .

**Приклад 2.** Продуктивність праці робітника протягом дня задається функцією  $z(t) = -0,00645t^2 + 0,05t + 0,5$  (грош. од./год), де  $t$  — час в годинах від початку роботи,  $0 \leq t \leq 8$ . Знайти функцію  $Q = Q(t)$ , яка показує обсяг продукції (у вартісному вираженні) та його величину за робочий день.

*Розв'язання:*

$$Q = \int_0^8 z(t)dt = \int_0^8 (-0,00645t^2 + 0,05t + 0,5)dt = \left( -0,00645 \frac{t^3}{3} + 0,05 \frac{t^2}{2} + 0,5t \right) \Big|_0^8 = (-0,00215t^3 + 0,025t^2 + 0,5t) \Big|_0^8 = 4,4992 \approx 4,5 \text{ (грош. од.)}.$$

**Відповідь:** 4,5 грош. од.

### VIII. РОБОТА В ГРУПАХ

Учитель. А зараз, панове, перенесімося в майбутнє, років на 20 вперед. Ви дорослі, солідні люди, знайшли своє місце в житті: конструктори, інженери, металурги, будівельники, економісти, плановики, науковці. І в процесі своєї роботи ви стикаєтеся з різними проблемами, які вам необхідно вирішити.

Створимо три робочі групи, кожна з яких отримує певне завдання і через 10 хвилин звітує про виконану роботу.

#### Маркетологи

1. Продаж молочної продукції в південному регіоні описано формулою  $f(t) = 3t^2 - 2t + 7$ . Визначте обсяг продажу товару за останні три місяці (тис. од.).

#### Фінансисти

На полі пшениці після приземлення космічного корабля залишився слід, який нагадує фігуру, обмежену лініями  $y = 8 - x^2$  та  $y = 4$ . Необхідно визначити збитки, завдані агрокомплексом, якщо з  $1 \text{ м}^2$  отримують у середньому  $3,8 \text{ кг}$  пшениці, яка коштує  $1,4 \frac{\text{грн}}{\text{кг}}$ .

Знаходимо межі інтегрування:

$$8 - x^2 = 4;$$

$$x^2 = 4;$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -2;$$

$y = 8 - x^2$  — графік парабола з вершиною  $(0; 8)$ ;

$y = 4$  — графік пряма.

$$S = \int_{-2}^2 (8 - x^2 - 4) dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left( 4x - \frac{x^3}{3} \right) =$$

$$= 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3} = 10 \frac{1}{3} (\text{м}^2).$$

Тоді збитки становитимуть

$$10 \frac{1}{3} \cdot 3,8 \cdot 1,4 = 53,2 (\text{грн}).$$

Відповідь:  $53,2$  грн.

#### Археологи

Нещодавно археологи під час розкопування давніх поселень знайшли жертвоне місце, яке їх дуже зацікавило. Після досліджень було з'ясовано, що це тіло, утворене обертанням навколо осі  $Ox$  криволінійної трапеції, обмеженої лініями  $y = x^2 + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$  ( $x$  науковці вимірювали в метрах). Причому виготовлений він був

із каменю густиною  $2500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ . Яка масу каменя використали на виготовлення цього жертovníка давні майстри?

Об'єм тіла, яке утворюється внаслідок обертання графіка функції навколо осі  $Ox$ , обчислюють за формулою

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

$$V = \pi \int_0^3 (-x^2 + 2x + 3)^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^3 (x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9) dx =$$

$$\pi \left( \frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{2x^3}{3} + 6x^2 + 9x \right) \Big|_0^3 =$$

$$= 3,14 \cdot (48,6 - 81 - 18 + 54 + 27) = 3,14 \cdot 30,6 = 96,084 (\text{м}^3).$$

$$m = V\rho; \quad m = 96,084 \cdot 2500 = 240\,210 (\text{кг}).$$

Відповідь:  $240\,210$  кг.

#### Фізики

Для кращого обслуговування заїзду гонок серії «Формула-1» майстри визначили найкращий закон зміни швидкості руху автомобіля прямою трасою:  $v(t) = 2(t+2)^{\frac{5}{2}}$ . Який шлях проїде пілот цієї гонки за  $7$  с від початку руху? Який шлях він проїде за сьомою секунду?

Розв'язання

$$s(7) = \int_0^7 2(t+2)^{\frac{5}{2}} dt = \frac{4}{7} (t+2)^{\frac{7}{2}} \Big|_0^7 =$$

$$= \frac{4}{7} (2187 - 8\sqrt{2}) = 1243 (\text{м}).$$

$$s(7) = \int_6^7 2 \cdot (t+2)^{\frac{5}{2}} dt = \frac{4}{7} (t+2)^{\frac{7}{2}} \Big|_6^7 =$$

$$= \frac{4}{7} (2187 - 1024\sqrt{2}) = 422 (\text{м}).$$

Відповідь:  $1243$  м;  $422$  м.

#### Енергетики

Навантаження на Криворізьку теплоелектростанцію задається функцією

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 2.$$

Визначити витрати електроенергії протягом доби.

Розв'язання

$$\int_0^{24} (3x^2 + 4x - 2) dx = (x^3 + 2x^2 - 2x) \Big|_0^{24} = 13\,824 + 576 - 48 = 14\,343 \text{ (кВт} \cdot \text{год)}.$$

Відповідь: 14 343 кВт·год.

**Біологи**

Знайти площу пелюстки ромашки, яка розміщена між дугами парабол  $y = x^2$  та  $y = \sqrt{x}$ .

Ця фігура обмежена графіками двох функцій:  $y = x^2$  та  $y = \sqrt{x}$ . Шукана площа за допомогою інтеграла обчислюється так:

$$S = \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - x^2) dx = \left( \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь:  $\frac{1}{3}$  кв. од.

**Екологи**

У копальнях Кривбасу розпочинають переробку бідних руд, що були засипані в терикони. Після переробки цих руд звільниться місце, площу якого можна обчислити як площу фігури, що обмежена лініями  $y = x^2$  і  $y = -x + 2$ . На скільки поповниться запас кисню Кривого Рогу за добу, якщо на звільненій території буде розбито парк (дерев будуть посаджені згідно зі стандартом: на  $100 \text{ м}^2$  — 6 дерев. Одне дерево за добу виділяє 0,016 кг кисню).

**ІХ. ТЕСТУВАННЯ**

Розв'язування тестових завдань «Перевір себе».

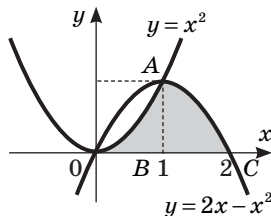
1. За якою з наведених формул визначають площу поданої фігури?

1)  $S = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2x - x^2) dx;$

2)  $S = \int_0^2 (2x - x^2) dx - \int_1^2 x^2 dx;$

3)  $S = \int_0^1 x^2 dx - \int_1^2 (2x - x^2) dx;$

4)  $S = \int_0^2 (2x - x^2) dx.$



2. Знайдіть, у яких записах є помилка.

5)  $\int_0^1 3x^2 dx = 9x \Big|_0^1;$

6)  $\int_0^1 6x^2 dx = \frac{x^3}{2} \Big|_0^1;$

7)  $\int_0^1 3x^2 dx = x^3 \Big|_0^1;$

8)  $\int_0^1 6x^7 dx = \frac{3x^8}{4} \Big|_0^1.$

3. За якою з наведених формул обчислюють роботу змінної сили, заданої формулою  $F(x) = 3x^2 - 4x + 8$ , уздовж відрізка довжиною 2 м?

9)  $A = \int_2^4 (3x^2 - 4x + 8) dx;$

10)  $A = \int_0^2 (3x^2 - 4x + 8) dx.$

11)  $A = (3x^2 - 4x + 8)';$

12)  $A = \int_0^2 (3x^3 - 4x + 8) dx.$

4. За якою з формул обчислюють обсяг виготовленої за 4 години продукції, якщо продуктивність праці задається формулою  $f(x) = 4x^3$ ?

13)  $\int_2^6 4x^3 dx;$

14)  $\int_0^4 4x^3 dx;$

15.  $(4x^3)';$

16)  $\int_0^4 12x^2 dx.$

5. У якому випадку правильно обчислено навантаження електростанції за 3 години, якщо її витрати визначаються функцією  $f(x) = \frac{8}{t^4} + 7t$ ?

17)  $\int_0^3 (8t^4 + 7t) dt;$

18)  $\int (8t^4 + 7t) dt;$

19)  $\left( \frac{8}{t^4} + 7t \right)';$

20)  $\int_0^3 \left( \frac{8}{t^4} + 7t \right) dt; \int_0^2 (2x - x^2) dx.$

6. У якому з наведених випадків правильно визначений середній час, витрачений на засвоєння одного виробу від 10 до 20 виробів, якщо функція  $t = 3x$  описує зміни витрат часу  $t$  на виготовлення виробів залежно від ступеня засвоєння виробництва.

21)  $t_{\text{сеп}} = \frac{1}{20-10} \int 3x dx;$

22)  $t_{\text{сеп}} = \frac{1}{20-10} \int_{10}^{20} 3x dx;$

23)  $t_{\text{сеп}} = (20-10) \int_0^{10} 3x dx;$

24)  $t_{\text{сер}} = (20 - 10) \int_{10}^{20} 3x dx.$

Номери правильних відповідей закресліть у бланку відповідей.

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  |
| 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 |    |

Виконують взаємоперевірку тестування. Виставляють оцінку кожному учню за заняття.

### Х. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ ЗАНЯТТЯ

Учитель. Скажіть, будь ласка, що саме ми з вами робили сьогодні на занятті? (Розв'язували задачі з геометрії, фізики, економіки, перекладали мовою математики проблеми, які стоять перед іншими науками.)

На сьогоднішньому занятті ми ще раз переконалися в тому, що математичні теорії є надійним знаряддям у розкритті таємниць природи, законів економічних процесів.

#### Закон

Дозвольте зачитати постанову про введення в силу закону «Про інтеграл та його застосування у фізиці, техніці, економіці».

Учнівська рада класу постановила:

1. Затвердити закон «Про інтеграл та його застосування у фізиці, техніці, економіці» у такій редакції.

Усім учням класу:

*Стаття 1.* Знати визначення первісної, невизначеного інтеграла, визначеного інтеграла, геометричного, фізичного та економічного змісту інтеграла, правила інтегрування, таблицю первісних, формулу Ньютона — Лейбніца.

*Стаття 2.* Застосовувати названі формули під час розв'язування задач навчального та практичного змісту.

*Стаття 3.* Впроваджувати інтеграл в економіку шляхом розв'язування задач.

2. Оцінити роботу учнів по підготовці до уроку та участі в ньому.
3. Закон вступає в силу з моменту його оголошення.

### ХІ. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Скласти кросворд (не менше 10 слів) або 3 ребуси з теми «Первісна. Інтеграл. Застосування визначеного інтеграла».

Учитель. Вважають, що математика дуже складна, і ми, математики, визнаємо це.

Математичні образи, на жаль, менш звичні, ніж ті, які ми зустрічаємо на картині, в опері або в романі. Однак для вишуканого смаку вони не менш привабливі.

Ми сподіваємося, що це заняття допоможе увійти до світу математики тим, хто, не маючи особливих математичних здібностей, хотів би пізнати очевидний зв'язок математики з іншими видами людської діяльності, які разом утворюють те, що ми називаємо цивілізацією.

| Картка самооцінки учня                               |      |
|--|------|
| Етап   | Бали |
| 1. Домашнє завдання (0–0,5–1 бал)                    |      |
| 2. Інтелектуальна розминка — кросворд (0–0,5–3 бали) |      |
| 3. Тести-тренінги (0–1–5 балів)                      |      |
| 4. Робота в групах (0–1–2 бали)                      |      |
| 5. Презентація (2–4 бали)                            |      |
| 6. Творча робота в групах (0–3 бали)                 |      |
| 7. Тести (0–1–6 балів)                               |      |
| Сума балів   |      |

- 0–6 — незадовільно (1–3);
- 7–13 — задовільно (4–6);
- 14–19 — добре (7–9);
- 20–24 — відмінно (10–12).

