

1.2. Ірраціональні вирази

Найпростіші завдання з повним розв'язанням

Завдання 1–20 розв'яжіть УСНО.

1. Обчисліть: $\sqrt{625}$.

2. Обчисліть: $\sqrt[3]{27}$.

3. Обчисліть: $(\sqrt{10})^4$.

4. Обчисліть: $(\sqrt[3]{5})^6$.

5. Обчисліть: $\sqrt[5]{(-3)^{15}}$.

6. Обчисліть: $\sqrt[4]{(-4)^8}$.

7. Винесіть множник з-під знака кореня: $\sqrt{36 \cdot 7}$.
8. Винесіть множник з-під знака кореня: $\sqrt{200}$.
9. Винесіть множник з-під знака кореня: $\sqrt[3]{125 \cdot 3}$.
10. Винесіть множник з-під знака кореня: $\sqrt[3]{40}$.
11. Внесіть множник під знак кореня: $5\sqrt{2}$.
12. Внесіть множник під знак кореня: $3\sqrt[3]{2}$.
13. Внесіть множник під знак кореня: $2\sqrt[4]{3}$.
14. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{2}{\sqrt{5}}$.
15. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{10}{\sqrt{8}}$.
16. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$.
17. Спростіть вираз $\sqrt[6]{x^3 y^9}$.
18. Спростіть вираз $\sqrt[4]{a^8 b^2}$.
19. Спростіть вираз $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}$.
20. Спростіть вираз $\frac{\sqrt[6]{y}}{\sqrt[3]{y}}$.

Завдання з вибором однієї правильної відповіді

Проаналізуйте умови та вимоги завдань 21–50 та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

21. Обчисліть: $\sqrt{16+9}$.

А	Б	В	Г	Д
5	7	12	25	50

22. Обчисліть: $\sqrt{100-64}$.

А	Б	В	Г	Д
2	6	8	18	36

23. Обчисліть значення виразу $\sqrt{4} - \sqrt{(-3)^2}$.

А	Б	В	Г	Д
-5	-1	7	1	5

24. Обчисліть значення виразу $\sqrt{(-15)^2} + \sqrt{25}$.

А	Б	В	Г	Д
-10	10	15	40	20

25. $\sqrt{18} + \sqrt{8} - \sqrt{2} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{24}$	$2\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$\sqrt{28}$

26. $\sqrt{6} \cdot \sqrt{8} - \sqrt{12} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
6	$6\sqrt{3}$	$\sqrt{60}$	$2\sqrt{3}$	2

27. Обчисліть: $\sqrt[3]{5^3 \cdot 2^9}$.

А	Б	В	Г	Д
10	20	40	80	160

28. Обчисліть: $\sqrt[4]{9^4 \cdot 2^8}$.

А	Б	В	Г	Д
12	24	36	48	144

29. Якому з наведених проміжків належить число $\sqrt{2^3 \cdot 3}$?

А	Б	В	Г	Д
(2; 3)	(3; 4)	(4; 5)	(5; 6)	(6; 7)

30. Укажіть проміжок, якому належить число $\sqrt[3]{3^2 \cdot (-2)}$.

А	Б	В	Г	Д
(-5; -3)	(-3; -1)	(-1; 1)	(1; 3)	(3; 5)

31. Відомо, що $a = 4\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{10}$, $c = 6$. Укажіть правильну подвійну нерівність.

А	Б	В	Г	Д
$b < c < a$	$b < a < c$	$a < c < b$	$a < b < c$	$c < b < a$

32. Відомо, що $x = 7$, $y = 4\sqrt{3}$, $z = 5\sqrt{2}$. Укажіть правильну подвійну нерівність.

А	Б	В	Г	Д
$y < x < z$	$y < z < x$	$x < y < z$	$x < z < y$	$z < y < x$

33. Виконайте тотожне перетворення виразу $\sqrt[7]{a^2}$, якщо $a > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$a^{\frac{2}{7}}$	a^5	$a^{7,2}$	a^{-5}	$a^{\frac{7}{2}}$

34. Виконайте тотожне перетворення виразу $\sqrt{\sqrt{x^3}}$.

А	Б	В	Г	Д
$x^{\frac{4}{3}}$	$x^{\frac{3}{2}}$	$x^{3,4}$	$x^{\frac{2}{3}}$	$x^{\frac{3}{4}}$

35. Виконайте тотожне перетворення виразу $c^{\frac{2}{3}}$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{c^3}$	$\frac{2}{c^3}$	$\sqrt[3]{c^2}$	$\frac{3}{c^2}$	$\frac{2}{\sqrt[3]{c}}$

36. Виконайте тотожне перетворення виразу $a^{-\frac{1}{2}}$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{\sqrt{a}}$	$-\frac{1}{\sqrt{a}}$	$\frac{1}{a^2}$	$-\sqrt{a}$

37. $x^2 : x^{-\frac{1}{2}} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{x^3}$	$\sqrt{x^5}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^4}$	$\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

38. $\sqrt[3]{y} : \sqrt{y} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$y^{-\frac{1}{6}}$	$y^{\frac{1}{6}}$	$y^{-\frac{2}{3}}$	$y^{\frac{2}{3}}$	$y^{\frac{3}{2}}$

39. Спростіть вираз $\frac{a - a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - 1}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{a^2} + 1$	$\frac{1}{a^2}$	$a^{-\frac{1}{2}}$	$-a^{\frac{1}{2}}$	$1 - a^{\frac{1}{2}}$

40. Спростіть вираз $\frac{b-1}{1-b^{\frac{1}{2}}}$.

А	Б	В	Г	Д
$1 - b^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}$	$1 + b^{\frac{1}{2}}$	$-b^{\frac{1}{2}}$	$-1 - b^{\frac{1}{2}}$

41. Укажіть знаки змінних a і b , якщо $\sqrt{b \cdot a^2} = -a\sqrt{b}$.

А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a \geq 0, \\ b \leq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a \leq 0, \\ b \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a \leq 0, \\ b \leq 0 \end{cases}$	Наведена рівність неможлива

42. Укажіть знаки змінних a і b , якщо $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$.

А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a \geq 0, \\ b \leq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a \leq 0, \\ b \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a \leq 0, \\ b \leq 0 \end{cases}$	Наведена рівність неможлива

43. Якщо $x > 4$, то $\sqrt{(4-x)^2} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$4 - x$	$(x - 4)^2$	$x + 4$	$(x + 4)^2$	$x - 4$

44. Якщо $y < 0$, то $\sqrt{4y^2} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$4y$	$2y$	$2y^2$	$-2y$	$-4y$

45. Відомо, що $x < 0$. Тоді $2\sqrt[3]{(-x)^3} + \sqrt[4]{x^4} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$-x$	$-3x$	x	$3x$	0

46. Відомо, що $a > b$. Тоді $\sqrt{(a-b)^2} - \sqrt[3]{(b-a)^3} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$-2a - 2b$	$2a - 2b$	$2a + 2b$	$2b - 2a$	0

47. $\sqrt{(3-\sqrt{12})^2} + \sqrt{(3+\sqrt{12})^2} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$4\sqrt{3}$	$6 + 2\sqrt{3}$	6	$6 + 4\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$

48. $\sqrt{(\sqrt{24}-5)^2} - \sqrt{(\sqrt{24}+5)^2} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$-8\sqrt{6}$	-10	10	0	$-4\sqrt{6}$

49. $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$2 - 2\sqrt{3}$	$\sqrt{3} - 1$	$2 - \sqrt{2\sqrt{3}}$	$1 - \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

50. $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{2} - \sqrt{3}$	$1 - \sqrt{6}$	$\sqrt{3} - \sqrt{2}$	$\sqrt{6} - 1$	$\sqrt{5} - \sqrt{2\sqrt{6}}$

У завданнях 51–54 сформульовано проблему (питання), яку потрібно розв'язати (отримати однозначну відповідь на питання), використовуючи для цього додаткові дані — твердження (1) і (2). Визначте, чи достатньо цих даних для розв'язання проблеми, і оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь*.

51. Знайдіть значення виразу $3a + \sqrt{-a}$.

(1) $|a| = 4$.

(2) $3a = -12$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

52. Знайдіть значення виразу $\frac{\sqrt{9a} + 6a}{2a + \sqrt{a}}$.

(1) $a > 0$.

(2) $4a = 4$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

53. Знайдіть x .

(1) $(-x)^6 = 64$.

(2) $(-x)^9 = 512$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

54. Знайдіть $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

(1) $a + 2\sqrt{ab} + b = 4$.

(2) $a - b = 1$.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні	Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні	І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо	Даних (1) і (2) тільки разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

* Саму проблему розв'язувати не обов'язково.

У завданнях 55–56 порівняйте величини X і Y та оберіть одну правильну, на вашу думку, відповідь.

55. Відомо, що $\sqrt{\frac{-a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}$.

Величина X : значення параметра a .

Величина Y : значення параметра b .

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

56. Відомо, що $\sqrt{\frac{a}{-4}} = \frac{\sqrt{-a}}{2}$.

Величина X : значення параметра a .

Величина Y : 0.

А	Б	В	Г
Величина X більша за величину Y	Величина Y більша за величину X	Величини X і Y рівні між собою	Для порівняння величин X і Y недостатньо даних

Завдання на встановлення відповідності

У завданнях 57–60 до кожного рядка, позначеного цифрою, доберіть один відповідник, позначений літерою.

57. Установіть відповідність між виразами (1–4) і тотожно рівними їм виразами (А–Д) при $a \geq 0$.

1 $\sqrt[6]{a^3}$	А $a^{\frac{1}{3}}$;
2 $\sqrt[3]{\sqrt{a^6}}$	Б $a^{\frac{1}{2}}$
3 $\sqrt[3]{a^6}$	В a
4 $\sqrt{a^6}$	Г a^2
	Д a^3

58. Установіть відповідність між виразами (1–4) і тотожно рівними їм виразами (А–Д) при $a \geq 0$.

1 $\sqrt{a+a+a}$	А a
2 $\sqrt[3]{27a}$	Б $\sqrt{3a}$
3 $\sqrt[3]{a \cdot a \cdot a}$	В $3\sqrt{3a}$
4 $\sqrt{9a}$	Г $3 \cdot \sqrt[3]{a}$
	Д $3\sqrt{a}$

59. Установіть відповідність між властивостями чисел (1–4) і числами (А–Д), які мають ці властивості.

- | | |
|--|------------------------|
| 1 Число є натуральним | А $\sqrt[9]{(-0,5)^3}$ |
| 2 Число є цілим, але не є натуральним | Б $\sqrt[4]{(-0,5)^2}$ |
| 3 Число є раціональним, але не є цілим | В $\sqrt{(-0,5)^2}$ |
| 4 Число є ірраціональним і додатним | Г $\sqrt[3]{(-5)^3}$ |
| | Д $\sqrt{(-5)^2}$ |

60. Установіть відповідність між властивостями чисел (1–4) і числами (А–Д), які мають ці властивості.

- | | |
|--|-----------------------------|
| 1 Число є натуральним | А $\sqrt[3]{3-30}$ |
| 2 Число є цілим, але не є натуральним | Б $\sqrt[4]{16-1}$ |
| 3 Число є раціональним, але не є цілим | В $\sqrt[3]{3 \cdot (-30)}$ |
| 4 Число є ірраціональним і від'ємним | Г $\sqrt[4]{1:16}$ |
| | Д $\sqrt[3]{30-3}$ |

Завдання на встановлення послідовності

У завданнях 61–62 виберіть тільки необхідні для розв'язання поставленої задачі дії і розмістіть їх у правильній послідовності. У відповідь запишіть отриману послідовність літер.

61. Як знайти показник a у рівності $\frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}}{x^2} = x^a$?

- А Знайти m як суму 3 і 4.
- Б Знайти m як добуток 3 і 4.
- В Позначити $n = -m$.
- Г Позначити $n = \frac{1}{m}$.
- Д Від n відняти 2.
- Е Поділити n на 2.
- Є Піднести n до другого степеня.

62. Як знайти показник b у рівності $\sqrt[3]{\frac{a^2}{a^3 \cdot a^4}} = a^b$?
- А Знайти m як суму 3 і 4.
 Б Знайти m як добуток 3 і 4.
 В Позначити $n = 2 - m$.
 Г Позначити $n = \frac{2}{m}$.
 Д Від n відняти 3.
 Е Помножити n на 3.
 Є Поділити n на 3.

Завдання з короткою відповіддю

Розв'яжіть завдання 63–92 і запишіть відповідь **ОДНИМ ЧИСЛОМ**.

63. Обчисліть: $\sqrt{0,09 \cdot 64}$.
64. Обчисліть: $\sqrt[4]{0,0016 \cdot 16^4}$.
65. Обчисліть: $\frac{3}{\sqrt[3]{250}} \cdot \sqrt[3]{2}$.
66. Обчисліть: $\frac{\sqrt[3]{135}}{4 \cdot \sqrt[3]{-5}}$.
67. Знайдіть a , якщо $\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{5}}} = 5^a$.
68. Знайдіть b , якщо $\sqrt[4]{\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{7}} = 7^b$.
69. Знайдіть n , якщо $\sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} = 2^n$.
70. Знайдіть n , якщо $\sqrt{\frac{1}{3} \sqrt{3 \sqrt{\frac{1}{3}}}} = 3^n$.
71. Спростіть вираз $\frac{a-1}{\frac{1}{a^4}-1}$ і знайдіть його значення при $a = 16$.
72. Спростіть вираз $\frac{b+1}{\frac{2}{b^3}-1}$ і знайдіть його значення при $b = 64$.

73. Спростіть вираз $\frac{xy^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}}}{yx^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}$ і знайдіть його значення при $x=25$ та $y=81$.
74. Спростіть вираз $\frac{m^{\frac{3}{2}} - m^{\frac{1}{2}}k}{m - 2m^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}} + k}$ і знайдіть його значення при $m=25$ та $k=9$.
75. Знайдіть значення виразу $\sqrt{(a+2,5)^2} + \sqrt{(a-3)^2}$ при $a=1$.
76. Знайдіть значення виразу $\sqrt{x^2} - \sqrt{(x-4,1)^2}$ при $x=1$.
77. Обчисліть значення виразу $y \cdot \sqrt{y^2 + 2y + 1}$ при $y=-21$.
78. Обчисліть значення виразу $\frac{\sqrt{b^2 - 8b + 16}}{b + 6,9}$ при $b=3,1$.
79. Знайдіть значення виразу $\frac{(\sqrt{x})^3 + 2x + \sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 1)^2}$ при $x=0,49$.
80. Знайдіть значення виразу $\frac{(2\sqrt{a} - 6)^2}{(\sqrt{a})^3 - 6a + 9\sqrt{a}}$ при $a=0,25$.
81. Знайдіть значення виразу $\sqrt{x+75} + \sqrt{x}$, якщо $\sqrt{x+75} - \sqrt{x} = 5$.
82. Знайдіть значення виразу $\sqrt{z+120} - \sqrt{z}$, якщо $\sqrt{120+z} + \sqrt{z} = 20$.
83. Обчисліть: $\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{9} + \sqrt{8}} + \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{8} + \sqrt{7}} + \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{7} + \sqrt{6}} + \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{5} + \sqrt{4}}$.
84. Обчисліть: $\frac{40}{8 - \sqrt{24}} + \frac{10}{\sqrt{34} + \sqrt{24}} + \frac{110}{12 + \sqrt{34}}$.
85. Обчисліть: $\sqrt{5\sqrt{6} + \sqrt{29}} \cdot \sqrt{5\sqrt{6} - \sqrt{29}}$.
86. Обчисліть: $\sqrt[3]{4\sqrt{35} - 4\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{4\sqrt{35} + 4\sqrt{3}}$.
87. Обчисліть: $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$.
88. Обчисліть: $\sqrt{28 - 10\sqrt{3}} + \sqrt{28 + 10\sqrt{3}}$.

89. Обчисліть: $(\sqrt{2} - 3)\sqrt{5 + 6\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}$.

90. Обчисліть: $(\sqrt{2} - 1)\sqrt{4 + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}}}$.

91. Обчисліть: $\sqrt{71 - 16\sqrt{7}} + \sqrt{11 - 4\sqrt{7}}$.

92. Обчисліть: $\sqrt{41 + 12\sqrt{5}} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$.

Завдання з повним розв'язанням

Завдання 93–100 розв'яжіть із повним обґрунтуванням, посилаючись на відповідні означення, твердження, формули. У разі потреби проілюструйте розв'язання таблицями, діаграмами, графіками тощо.

93. Спростіть вираз і доведіть, що його значення не залежить від значення змінної:

а) $\left(\frac{\sqrt[4]{x} - 5}{\sqrt[4]{x} + 5} - \frac{\sqrt[4]{x} + 5}{\sqrt[4]{x} - 5}\right) : \frac{10\sqrt[4]{x}}{25 - \sqrt{x}}$;

б) $\left(\frac{\sqrt[8]{y} + 4}{\sqrt[8]{y} - 4} + \frac{\sqrt[8]{y} - 4}{\sqrt[8]{y} + 4}\right) : \frac{4\sqrt[4]{y} + 64}{16 - \sqrt[4]{y}}$.

94. Доведіть, що значення виразу є раціональним числом:

а) $\sqrt[3]{4 + 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - 3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + 3}$; б) $(\sqrt{10} - \sqrt{6}) \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}} \cdot (4 + \sqrt{15})$.

95. Знайдіть значення виразу:

а) $\sqrt[3]{5 - 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt[6]{49 + 20\sqrt{6}}$;

б) $\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{3 - 2\sqrt{2}}$.

96. Обчисліть: $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}$.

97. Спростіть вираз $\frac{\sqrt{(5x+2)^2 - 40x}}{5\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}}$ і знайдіть його значення при $x = 0,04$.

98. Спростіть вираз $\frac{a^2 + 1}{\sqrt{\left(\frac{a^2 - 1}{2a}\right)^2 + 1}}$ і знайдіть його значення при $a = -9$.

99. Спростіть вираз:

а) $\left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} - \frac{4\sqrt{a}}{a - 1}\right) : \frac{\sqrt{a} - 1}{a + \sqrt{a}}$;

б) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} : \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} - \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)$.

100. Спростіть вираз:

$$\text{а) } \frac{9b^{\frac{4}{3}} - \frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^2}}{\sqrt{a^{\frac{3}{2}}b^{-2} + 6a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{3}} + 9b^{\frac{4}{3}}}} \cdot \frac{b^2}{a^{\frac{3}{4}} - 3b^{\frac{5}{3}}}, \text{ якщо } a > 0, b > 0;$$

$$\text{б) } \frac{(a-b)^3(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{-3} + 2a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} + \frac{3(\sqrt{ab} - b)}{a-b}.$$