КНЗ «Черкаський обласний інститут післядипломної освіти педагогічних працівників Черкаської обласної ради»

II етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики 2024-2025 навчальний рік

Відповіді

6 клас

1. Розшифрувати рівність $A \times C \times AC = CCC$.

Вказівка: *Запишемо рівність у вигляді:* $CCC : C = A \times AC$, *тоді* $A \times AC = 111$, *ми бачимо, що* $A = 3,\ AC = 37$.

<u>Відповідь:</u> $3 \cdot 7 \cdot 37 = 777$.

2. Лікар Айболить роздав чотирьом хворим тваринкам 2024 магічні пігулки. Носоріг одержав на дві більше, ніж крокодил, бегемот на дві більше, ніж носоріг, а слон – на дві більше, ніж бегемот. Скільки пігулок доведеться з’їсти слону?

<u>Відповідь:</u> 509.

<u>Розв’язання.</u> Доки тварини не з’їли ліки, заберемо дві пігулки у носорога, чотири у бегемота та шість у слона. Тепер у всіх чотирьох їх порівну. Забрали ми 12 пігулок, тобто залишилось їх 2012 – по 503 у кожного. У слона забрали 6 пігулок, тому Айболить прописав слону 509 пігулок.

3. Скільки різних добутків, кратних 10, можна утворити з чисел 2, 3, 5, 7, 9? Відповідь обґрунтуйте.

<u>Відповідь:</u> 8**.**

<u>Розв’язання.</u>

Щоб добуток вибраних чисел ділився на 10, серед співмножників мають бути числа 2 і 5. З трьох чисел, що лишились, можна скласти 8 груп. Одна з них містить три числа: 3, 7, 9; три містять по два числа: 3, 7; 7, 9; 3, 9 і три по одному числу: 3, 7, 9. Восьма група не містить жодного з цих чисел. Отже, з цих п’яти добутків можна скласти 8 шуканих добутків.

4. Є по 25 фігурок типу ***L*** та ***O***, що зображені на рис. 1. Треба повністю покрити квадрат 10×10 фігурками одного з типів. Які з фігурок підходять для виконання завдання? Відповідь обґрунтуйте.

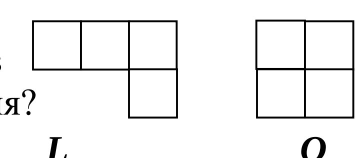


Рис. 1

<u>Відповідь:</u> Тільки фігурки типу ***O***.

<u>Розв'язання</u>. Те, що квадрат можна покрити фігурками типу ***O*** зрозуміло, бо кожна сторона квадрату ділиться на 2, тому весь квадрат 10×10 розрізається на квадратики 2×2 (рис. 2).

Покажемо тепер, що фігурками типу ***L*** це зробити неможливо. Для фігурки типу ***L*** зробимо фарбування усіх клітин дошки 10×10 у два кольори горизонтальними смугами – біла, чорна, біла, чорна... (рис. 3, тоді при будь-якому своєму розташуванні фігурка типу ***L*** покриває 3 клітини одного кольору та 1 – іншого, тому 25 таких фігур покриють різну кількість чорних та білих квадратиків, а їх з самого початку рівна кількість.

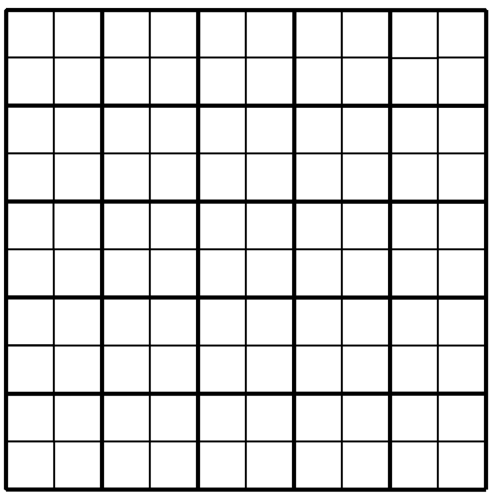


Рис. 2

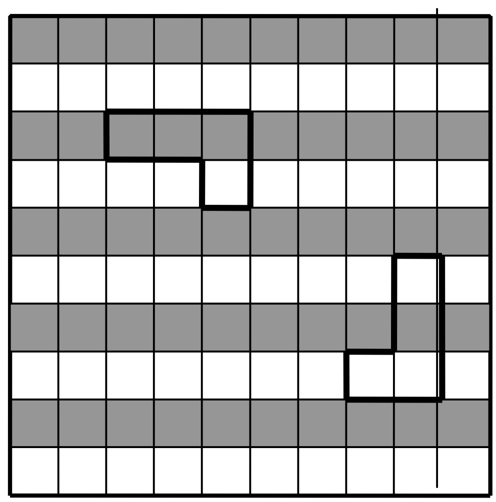


Рис. 3

7 клас

1. Яке з двох наступних чисел більше:

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 98 \cdot 99$ або $(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot ... \cdot 96 \cdot 98)^2$?

Розв'язання

Після скорочення ми маємо порівнювати:

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot 99$ та $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot ... \cdot 96 \cdot 98$, а тут ми маємо, що 3>2, 5>4, …, 99>98.

Відповідь: Перше число більше.

2. Обчисліть: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2024\cdot 2025}$

Відповідь: $\mathbf{\frac{2024}{2025}}$

3. Петрик записав на дошці перше та друге число. Після цього Оксана записала на дошці третє число як суму першого та другого, далі – четверте число як суму другого та третього, п'яте – сума третього та четвертого і так далі до десятого числа, як суму восьмого та дев'ятого. Прийшла Дарина додала усі числа, записала на дошці їхню суму, яка виявилася рівною 2222, а далі витерла усі попередні записані 10 чисел. Василю сказали, як утворилося записане число, чи зможе він записати принаймні одне з раніше написаних десяти чисел? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: 202 – сьоме число.

Розв'язання. Якщо виписати перші 10 чисел, то вони мають такий вигляд:
a, b, a+b, a+2b, 2a+3b, 3a+5b, 5a+8b, 8a+13b, 13a+21b та 21a+34b.
Сума цих десяти чисел дорівнює 55a+88b=2222. Тоді 5a+8b=202 – сьоме число.

4. Площа перетину круга і трикутника становить 45% від площі їх об'єднання. Площа трикутника за межами круга становить 40% від площі їх об'єднання. Скільки відсотків площі круга лежить за межами трикутника?

Відповідь: **25%**

Розв'язання

Нехай площа перетину трикутника і круга дорівнює x, площа частини трикутника поза кругом дорівнює y, а площа частини круга поза трикутником дорівнює z. Тоді x=0,45(x+y+z), y=0,4(x+y+z), звідси z=0,15(x+y+z). Тому $\frac{z}{x+z} = \frac{0,15(x+y+z)}{0,6(x+y+z)}$=0,25

5. На прямій дано чотири різні точки, які утворюють шість значень відстаней між собою. Чи може статися так, що п'ять з цих відстаней дорівнюють 1 см, 2 см, 3 см, 6 см та 12 см? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: Не може.

Розв'язання. Нехай точки A, B, C, D розташовані на прямій послідовно. Яку б відстань з шести ми не пропустили, ми повинні мати не менше двох трійок відстаней, в яких одне значення дорівнює сумі двох інших. Наприклад, якщо пропущено відстань AD, ми маємо, що AB+BC=AC, BC+CD=BD. Аналогічно розглядаються інші випадки. Серед поданих чисел немає двох трійок з вказаними властивостями.

8 клас

1. Для яких натуральних $\boldsymbol{n}$ число $\boldsymbol{2n^3 - 3n^2 + 5n - 2}$ є простим? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: **n=1**

Розв'язання. Якщо розкласти задане число на множники, то матимемо, що $2n^3 - 3n^2 + 5n - 2 = (n^2 - n + 2)(2n - 1)$.

Зрозуміло, що при n=1 воно дійсно просте, а при n>1 є добутком двох чисел, кожне з яких більше 1, а тому простим не буде.

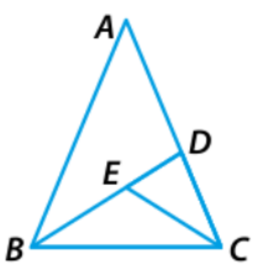
2. На дошці записане число 12341234123412341234. Які цифри з нього слід викреслити, щоб отримати найбільше число, що ділиться на 9? У відповіді наведіть число, що отримаємо.

Відповідь: 234123412341234123.

Розв'язання

Найбільше число можна отримати, якщо викреслити найменшу кількість цифр. Усього це число має суму цифр 50 . Щоб отримати число, що кратне 9, треба викреслити цифри з сумою 5 . Одну цифру викреслити не достатньо, тому слід викреслити цифри 1 та 4 або 2 та 3. Кількість цифр буде однаковою, тому слід зробити першу цифру максимальною з можливих. Якщо викреслити 2 та 3, то перша залишиться 1. Якщо викреслити першу 1, то 4 треба викреслити останньою. Матимемо число 234123412341234123.

3. Рівнобедрений трикутник ABC, де AB = AC, розбивається на три менших рівнобедрених трикутники, як показано на рисунку. AD = DB, CE = CD і BE = EC. Яка величина кута BAC?



Відповідь: $\mathbf{36^0}$

Розв'язання

Нехай ∠BAD = x, тоді ∠ABD = x, а ∠BDC = 2x, як зовнішній кут трикутника ABD. Далі, ∠DEC=∠BDC=2x – зовнішній кут рівнобедреного трикутника BEC.

Тому ∠EBC=∠ECB=0,5∠DEC=x. Тоді ∠ACB=∠ABC=∠ABD+∠EBC=2x.

Отже, $x+2x+2x=180^0$ і $x=36^0$.

4. Петрик розв'язав на тестуванні 33 задачі. За розв'язання меншої частини з них, серед яких була перша задача, він отримав a балів, за розв'язання усіх інших він отримав b балів. Відомо, що натуральні числа a та b задовольняють умову: $1 \le b < a \le 10$. По завершенні Петрик порахував середній бал за розв'язання усіх задач і він виявився цілим числом. За розв'язання скількох задач Петрик отримав a балів?

Відповідь: 11.

Розв'язання

Нехай Петрик на бал a розв'язав n задач, а на бал b розв'язав $(33-n)$ задач.

Тоді середній результат Петрика дорівнював: $S=(na+(33-n)b)/33=(n(a-b)+33b)/33=(n(a-b))/33+b$.

Щоб це число було цілим треба, щоб $n(a-b)\vdots 11\cdot 3$. Оскільки $1\le a-b\le 10$, та $n<33$, то $n=11$ або $n=22$. Оскільки на бал a він розв'язав меншу частину задач, то залишається можливим єдиний варіант $n=11$.

5. Прямокутник розрізаний на 6 квадратів, як це показане на рис. 1. Сірий квадрат всередині має сторону, що дорівнює 1. Чому дорівнює площа прямокутника?

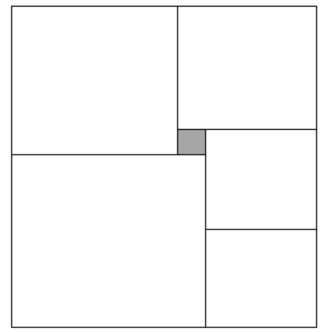


Рис. 1

Відповідь: 143.

Розв'язання. Позначимо сторону двох однакових квадратів через a, далі послідовно знаходимо сторони інших квадратів, використовуючи ці позначення (рис. 2). Таким чином $HI=IG=GF=FH=1$, $ID=IJ=a \Rightarrow GB=GK=2a-1 \Rightarrow KF=FM=2a-2 \Rightarrow MH=HJ=2a-3$. Тепер запишемо двома варіантами довжину відрізка HJ: $HJ=2a-3=HI+IJ=a+1 \Rightarrow a=4$.

Залишається знайти сторони прямокутника: $AC=KF+HJ=4a-5=11$, $AL=GB+FM=4a-3=13$.

Таким чином шукана площа прямокутника дорівнює $13\cdot 11=143$.

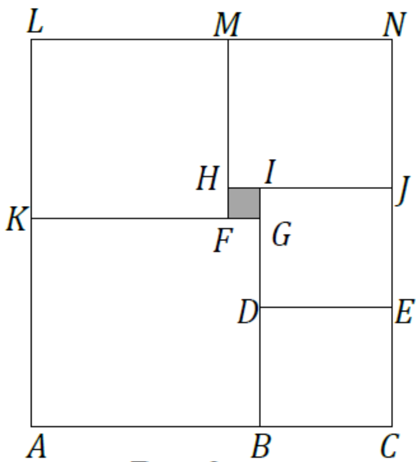


Рис. 2

9 клас

1. Знайдіть ціле число, що є найближчим до значення виразу:

$$((7+\sqrt{48})^{2025}+(7-\sqrt{48})^{2025})^2-((7+\sqrt{48})^{2025}-(7-\sqrt{48})^{2025})^2$$

Відповідь: 4

Розв'язання

Зробимо такі перетворення заданого виразу:

$((7+\sqrt{48})^{2025}+(7-\sqrt{48})^{2025})^2-((7+\sqrt{48})^{2025}-(7-\sqrt{48})^{2025})^2=$ $((7+\sqrt{48})^{2025}+(7-\sqrt{48})^{2025}-(7+\sqrt{48})^{2025}+(7-\sqrt{48})^{2025})\cdot((7+$ $+\sqrt{48})^{2025}+(7-\sqrt{48})^{2025}+(7+\sqrt{48})^{2025}-\left(7-\sqrt{48}\right)^{2025}\big)=2(7-$ $-\sqrt{48})^{2025}\cdot 2(7+\sqrt{48})^{2025}=4(49-48)^{2025}=4.$

Тобто вираз дорівнює 4.

2. Довжина основи *AB* трапеції *ABCD* вдвічі більша довжини основи *CD* і вдвічі більша бічної сторони *AD*. Довжина діагоналі *AC* дорівнює *a*, довжина бічної сторони *BC* дорівнює *b*. Знайдіть площу трапеції *ABCD*.

Відповідь: $\frac{3}{4}ab$.

Вказівка. Чотирикутник *ADCM* є ромб, діагоналі якого дорівнюють *a* і *b*, M – середина основи *AB*.

3. Відомо, що квадратні рівняння: $x^2+a_1x+b_1=0$, $x^2+a_2x+b_2=0$ та $x^2+a_3x+b_3=0$ мають відповідно корені $\{x_0,x_1\}$, $\{x_0,x_2\}$ та $\{x_0,x_3\}$. Визначте корені рівняння $3x^2+(a_1+a_2+a_3)x+(b_1+b_2+b_3)=0$ через значення x_0, x_1, x_2 і x_3.

Відповідь: x_0; $x'=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$.

Розв'язання. Позначимо другий корінь досліджуваного рівняння через x'. Це рівняння можна отримати, якщо додати задані три рівняння:

$$3x^2+(a_1+a_2+a_3)x+(b_1+b_2+b_3)=0,$$

тому воно очевидно має один з коренів x_0. З теореми Вієта $x'+x_0=-\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)$.

Так само з теореми Вієта для заданих трьох рівнянь маємо, що $x_1+x_0=-a_1$, $x_2+x_0=-a_2$ та $x_3+x_0=-a_3$, звідки

$$(x_1+x_2+x_3)+3x_0=-(a_1+a_2+a_3) \Rightarrow \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)+x_0=-\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3) \Rightarrow$$

$$x'=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3).$$

4. На відрізку AB вибрана точка C, далі на відрізках AC та CB як на діаметрах побудовані кола. Пряма BM дотикається першого кола в точці M, а пряма AN дотикається другого кола в точці N. Позначимо через $\alpha = \angle NAB$ та $\beta = \angle ABM$. Знайдіть значення величини $3\sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha + \sin\beta$.

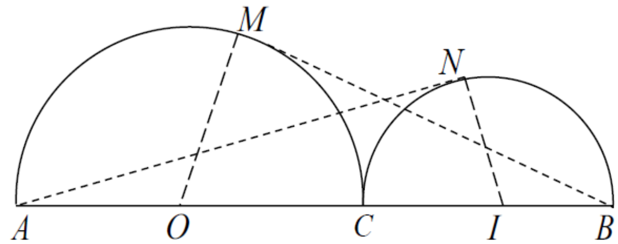


Рис. 4

Відповідь: 1.

Розв'язання. Позначимо центри кіл через O та I (рис. 4), а радіуси через R та r відповідно. Якщо провести радіуси OM та IN у точки дотику, то легко зрозуміти, що $\sin\alpha = \frac{r}{2R+r}$, $\sin\beta = \frac{R}{R+2r}$. Далі маємо, що

$$3\sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha + \sin\beta = \frac{3Rr}{(r+2R)(R+2r)} + \frac{R}{R+2r} + \frac{r}{r+2R} = \frac{3Rr + Rr + 2R^2 + Rr + 2r^2}{Rr + 4Rr + 2R^2 + 2r^2} = 1.$$

5. Доведіть, що нерівність $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 3 \geq 0$ є правильною для всіх x і y.

Вказівка. $x^2 + 2xy + y^2 + 2(x+y) + 1 + 2y^2 + 4y + 2 \geq 0$,
$(x+y+1)^2 + 2(y+1)^2 \geq 0$.

10 клас

1. Знайдіть ціле число, що є найближчим до значення виразу:

$$\left(\left(3+\sqrt{1}\right)^{2025}-\left(\frac{1}{3-\sqrt{1}}\right)^{2025}\right)\cdot\left(\left(3+\sqrt{2}\right)^{2025}-\left(\frac{1}{3-\sqrt{2}}\right)^{2025}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\left(3+\sqrt{3}\right)^{2025}-\left(\frac{1}{3-\sqrt{3}}\right)^{2025}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\left(3+\sqrt{8}\right)^{2025}-\left(\frac{1}{3-\sqrt{8}}\right)^{2025}\right)$$

Відповідь: **0**

Розв'язання. Розглянемо від'ємник останнього множника:

$$\left(\frac{1}{3-\sqrt{8}}\right)^{2025}=\left(\frac{3+\sqrt{8}}{9-8}\right)^{2025}=\left(3+\sqrt{8}\right)^{2025}$$

Отже, останній множник дорівнює 0, а тому весь добуток дорівнює 0.

2. Знайдіть найменше шестицифрове число, що має попарно різні цифри та ділиться націло на 2017.

***Відповідь*:** 102867.

Розв'язання. Оскільки усі числа, що діляться на 2017, можна подати у вигляді $2017n$, то нам достатньо знайти найменше n , для якого справджується нерівність:

$2017n \geq 10^5$. Якщо поділити на 2017, матимемо, що $n \geq 50$. Тому шукане число має вигляд 100850. Воно, на жаль, має однакові цифри. Тому додамо до нього ще раз 2017 і матимемо шукане число 102867.

3. *Піфагоровим* називається прямокутний трикутник, у якого всі сторони виражаються натуральними числами, наприклад, трикутник зі сторонами 3, 4 та 5. Чи може периметр піфагорового трикутника бути непарним числом? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: не може.

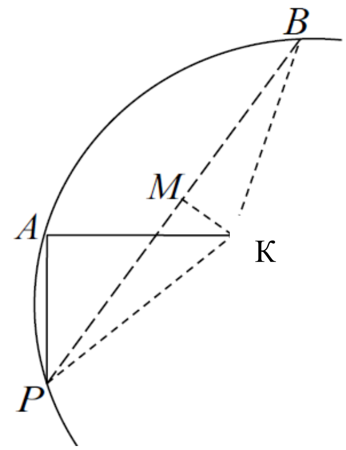
Розв'язання. Позначимо катети трикутника через ***a, b*** , а гіпотенузу через ***c*** . Тоді
$P^2=(a+b+c)^2= a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)=2a^2+2b^2+$
$2(ab+ac+bc)=2(a^2+b^2+ab+ac+bc)$.

Отже, P^2- парне число, але тоді і сам периметр так само парне число.

4. На колі розташовані точки P, A, B , а всередині кола – точка K таким чином, що $\angle PAK=90°$ і PK=KB та точки P i B лежать по різні боки від прямої AK.
Доведіть, що $\angle AKB-\angle PKA=2\angle APB$.

Розв'язання

Позначимо через M -- середину відрізку PB (рисунок).



$\angle PMK = \angle PAK = 90°$ і чотирикутник $PAMK$ вписаний. Звідси $\angle APM = \angle AKM$. Звідси маємо, що $\angle AKB - \angle PKA = \angle AKM + \angle MKB - \angle AKP =$ $\angle AKM + (\angle MKP - \angle AKP) = 2\angle AKM = 2\angle APM$, що й треба було довести.

5. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} x^2 + 3xy = 3y + x \\ y^2 - yx = 3x + y \end{cases}$

Відповідь: $(0;\ 0)$, $(1;\ -1)$, $(1;\ 3)$ та $(6;\ -2)$.

Вказівки до розв'язання

Додамо ці рівняння і одержимо, що

$$x^2 + 2xy + y^2 = 4y + 4x \text{ або } (x+y)^2 = 4(x+y).$$

Тоді $x + y = 0$ або $x + y = 4$.

Якщо $x = -y$, то з другого рівняння маємо, що

$$2y^2 = -2y\text{, звідки } y = 0 \text{ або } y = -1.$$

Звідси маємо, що $(0;\ 0)$, $(1;\ -1)$ – розв'язки системи.

Якщо $x = 4 - y$, то знову з першого рівняння маємо, що

$$y^2 - y(4-y) = 3(4-y) + y\text{, звідки } y^2 - y - 6 = 0.$$

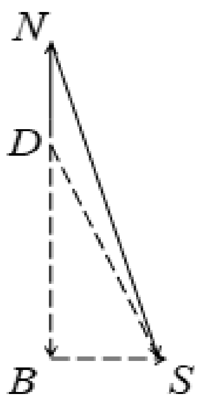
Знайдемо корені останнього рівняння: $y = 3$ та $y = -2$. Одержуємо пари $(1;\ 3)$ та $(6;\ -2)$

Перевіркою переконуємось, що вони задовольняють систему рівнянь, а тому є розв'язками.

11 клас

1. Близнюки Петрик та Остап посварилися і стали ходити з дому до школи різними шляхами. Петрик спочатку йде 210 метрів на південь, а далі 70 метрів на схід і потрапляє до школи. Остап спочатку йде певний час на північ, а далі по прямій до школи. Скільки саме метрів Остап йде на північ, якщо близнюки ходять з однаковою швидкістю і приходять до школи одночасно?

Відповідь: **30.**



Вказівки до розв'язання

Позначимо точки таким чином:

домівка – D, місце школи – S, точка де Петрик повертає на схід – B, точка, де повертає Остап – N (рисунок). Тоді за умовою $DB = 210$ м, $BS = 70$ м, $DN = x$, $NS = y$. Крім того, з умов задачі випливає, що $x + y = 280$.

Запишемо теорему Піфагора: $BN^2 + BS^2 = NS^2$ або

$(210 + x)^2 + 70^2 = y^2 \Rightarrow (210 + x)^2 + 70^2 = (280 - x)^2$.

$44100 + 420x + x^2 + 4900 = 78400 - 560x + x^2$, звідки $x = 30$.

2. Знайдіть усі такі натуральні числа n, що задовольняють нерівностям:

$$-46 \le \frac{2023}{46-n} \le 46 - n$$

Відповідь: 1 та 90

Розв'язання. Позначимо через $x = 46 - n$ і знайдемо відповідні цілі значення x, що задовольняють таку умову: $-46 \le \frac{2023}{x} \le x$. Розглянемо два випадки.

Випадок 1. $x > 0$. Ліва нерівність справджується для усіх зазначених x, права переписується таким чином:

$$2023 \le x^2 \Rightarrow x \ge 45 \Rightarrow 46 - n \ge 45 \Rightarrow n \le 1 \Rightarrow n = 1.$$

Випадок 2. $x < 0$. Нерівність переписується таким чином:

$$x^2 \le 2023 \le -46x \Rightarrow -44 \le x \le 44 \text{ та } x \le -44 \Rightarrow x = -44 \Rightarrow 46 - n = -44 \Rightarrow n = 90.$$

Неважко переконатися, що ці два значення задовільняють умові

3. Доведіть, що для довільних дійсних $a;\ b$ завжди має розв'язки рівняння

$$(a^2-b^2)x^2+2(a^3-b^3)x+(a^4-b^4)=0$$

Розв'язання. При $a=b$ будь-яке число є розв'язком рівняння. Для випадку $a\neq b$ обчислимо дискримінант цього рівняння:

$$\tfrac{1}{4}D=(a^3-b^3)^2-(a^2-b^2)(a^4-b^4)=a^2b^4-2a^3b^3+a^4b^2=(ab)^2(a-b)^2\geq 0,$$

звідки й остаточно випливає твердження задачі.

4. При яких a корені рівняння $2x^2-(2a-5)x+a-3=0$ розташовані між числами 0 і 1?

Відповідь: $a\in(3;4)$

Розв'язання

$$\begin{cases} f(0)>0\\ f(1)>0\\ D\geq 0\\ 0<x_b<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a-3>0\\ 4-a>0\\ (2a-7)^2\geq 0\\ 0<\dfrac{2a-5}{4}<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a>3\\ a<4\\ a>2{,}5\\ a<4{,}5\end{cases}\Leftrightarrow a\in(3;4)$$

5. З вершини *B* паралелограма *ABCD* проведено його висоти *BK* і *BH*. Відомо, що *KH*=*a*, *BD*=*b*. Знайдіть відстань від точки В до точки перетину висот трикутника *BKH*.

Відповідь: $\sqrt{b^2-a^2}$

Розв'язання

Нехай H_1 – точка перетину висот трикутника *BKH*. Оскільки $HH_1\perp BK$ і $KH_1\perp BH$, $HH_1\parallel AD$ *і* $KH_1\parallel DC$, то H_1HDK –паралелограм.

Тому при паралельному переносі на вектор $\overrightarrow{H_1H}$точка *K* переходить у точку *D*, а точка *B* переходить у деяку точку *P*.

Оскільки *PD*‖*BK*, то *BPDK* – прямокутник і *PK*=*BD*=*b*. Так як $BH_1\perp KH$, то $PH\perp KH$.

Також очевидно, що $PH=BH_1$. В прямокутному трикутнику *PKH* відомі гіпотенуза $KP=b$ і катет $KH=a,$ тому $BH_1=PH=\sqrt{b^2-a^2}$.