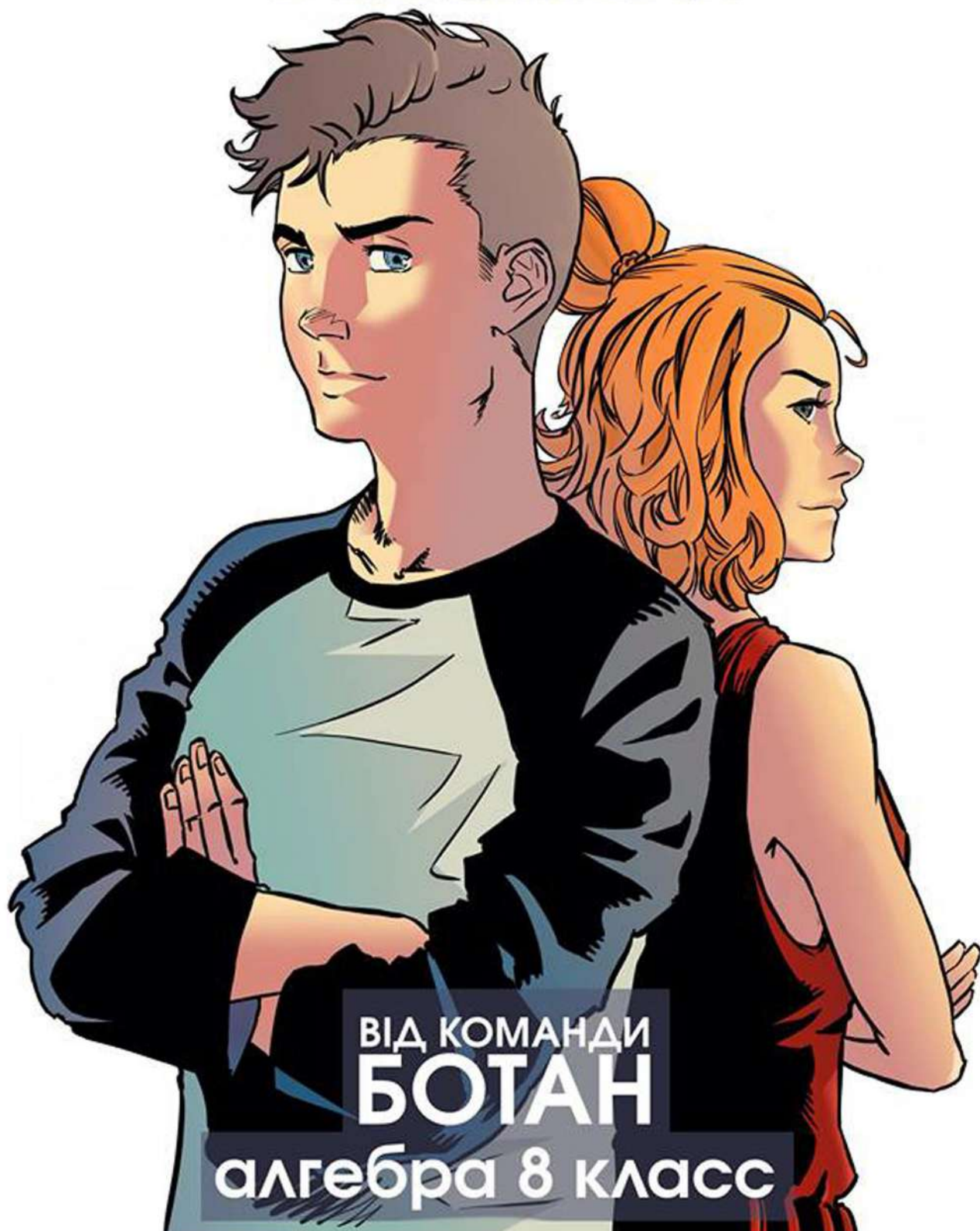


EC
EduComics
тістечко замість граніту

ОСВІТА В КОМІКСАХ



ВІД КОМАНДИ
БОТАН
алгебра 8 класс

EC
EduComics

З М І С Т

1. Цілі і дробові алгебраїчні вирази
2. Раціональні вирази.
Допустимі значення змінних
3. Основна властивість раціональних дробів.
Додавання та віднімання раціональних дробів
4. Множення й ділення раціональних дробів.
Піднесення раціональних дробів до степеня з натуральним показником
5. Тотожні перетворення раціональних виразів
6. Рівняння зі змінною в знаменнику
7. Степінь з цілим від'ємним показником.
Властивості степеня з цілим показником
8. Стандартний вигляд числа.
Запис чисел у стандартному вигляді.
Порядок числа
9. Множина. Підмножина. Числові множини.
Раціональні числа. Ірраціональні числа.
Дійсні числа



від команди

BOTAN

Алгебра 8 клас

Цілі й дробові
алгебраїчні вирази

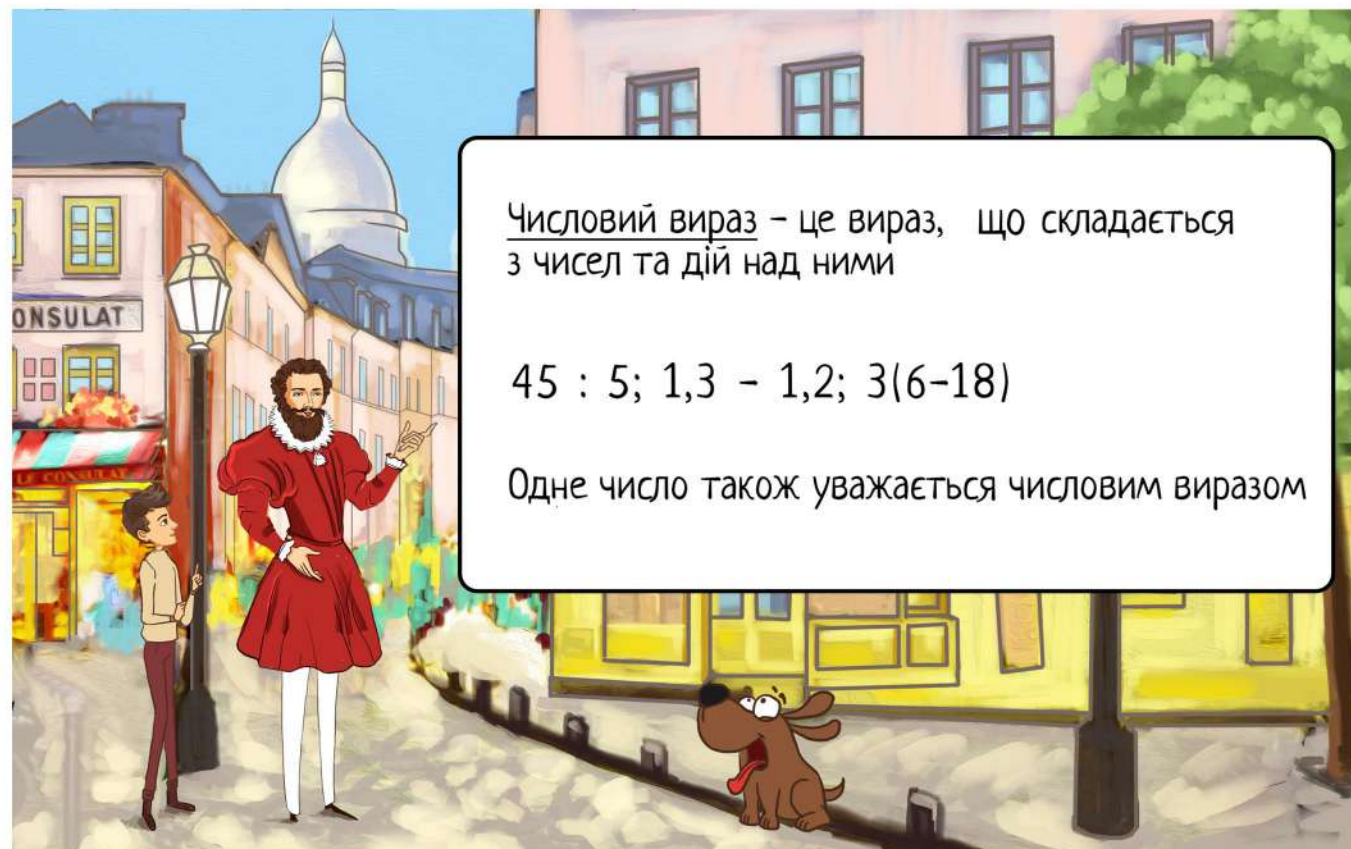




А чи ти знаєш, що саме «скорочена» алгебра створила сучасний світ. Без неї не було б електрики, радіо, телевізорів, телефонів, плеєрів, комп'ютерів, літаків, томографів, холодильників, роботів, ракет і багато інших речей і явищ.

Невідомі величини називають змінними та записують буквами, причому знак множення в алгебрі не ставиться, це спрощує запис. У математиці дужки означають групування: все, що записано в дужках, треба розглядати як одну величину.

Так, Франсуа. І це мене вражає. Настільки потужним предметом є алгебра.



Числовий вираз – це вираз, що складається з чисел та дій над ними

$$45 : 5; 1,3 - 1,2; 3(6-18)$$

Одне число також вважається числовим виразом

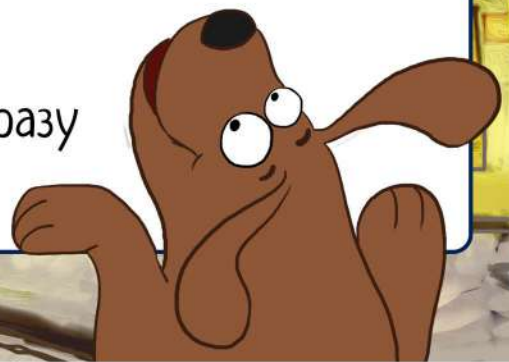


Обчисливши числовий вираз, отримаєш число,
що є значенням виразу

9 (6 - 10) числовий вираз

||

- 36 значення виразу



$7 : 0$

Ділити можна тільки на число,
що не дорівнює нулю.

Якщо у виразі трапляється ділення
на нуль, то говорять, що вираз не
має змісту (на нуль ділити не
можна)

Вираз зі змінною – це вираз, що складається з чисел, букв та дій над ними

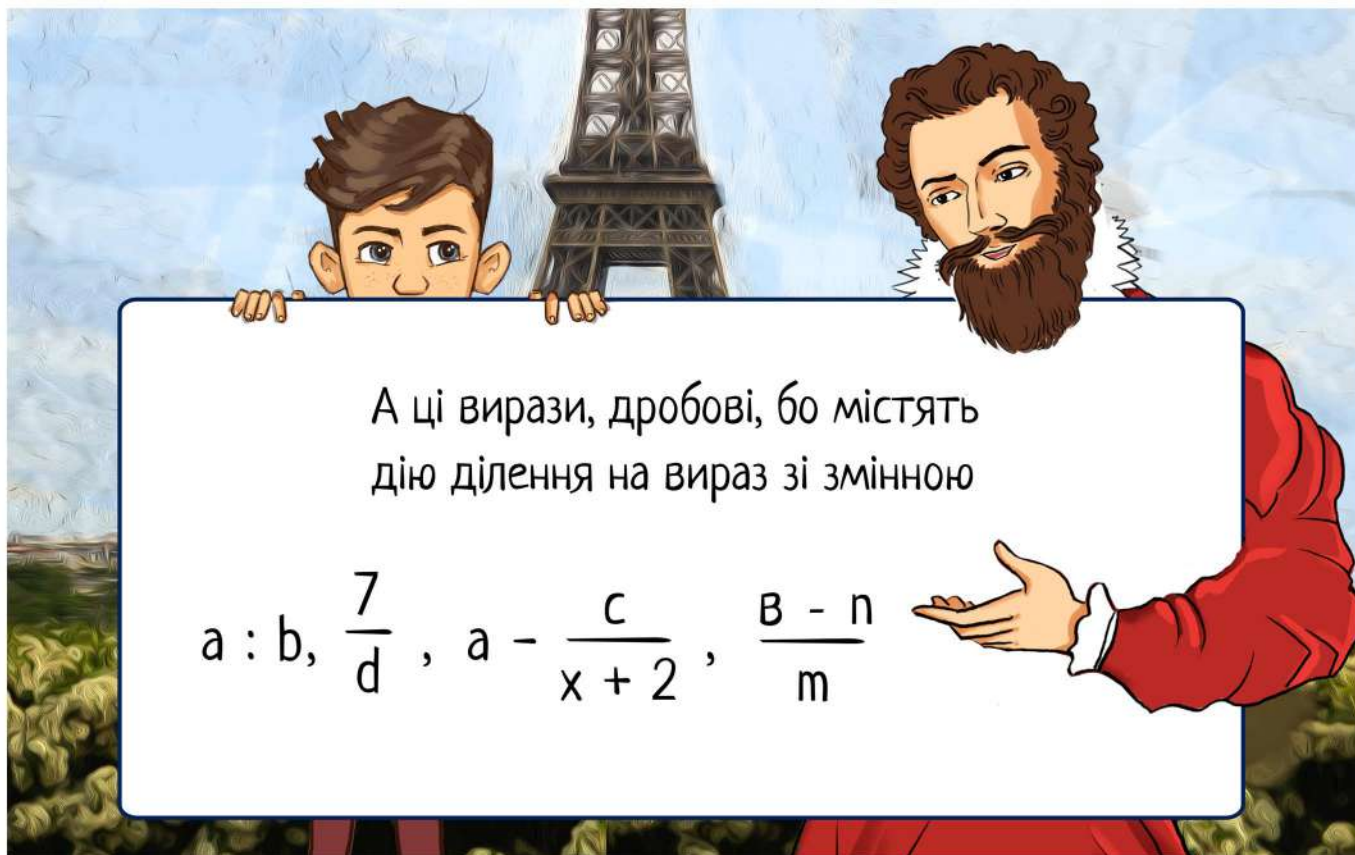
$$2(a + b); 3 \cdot a + 2 \cdot b; 9ab$$

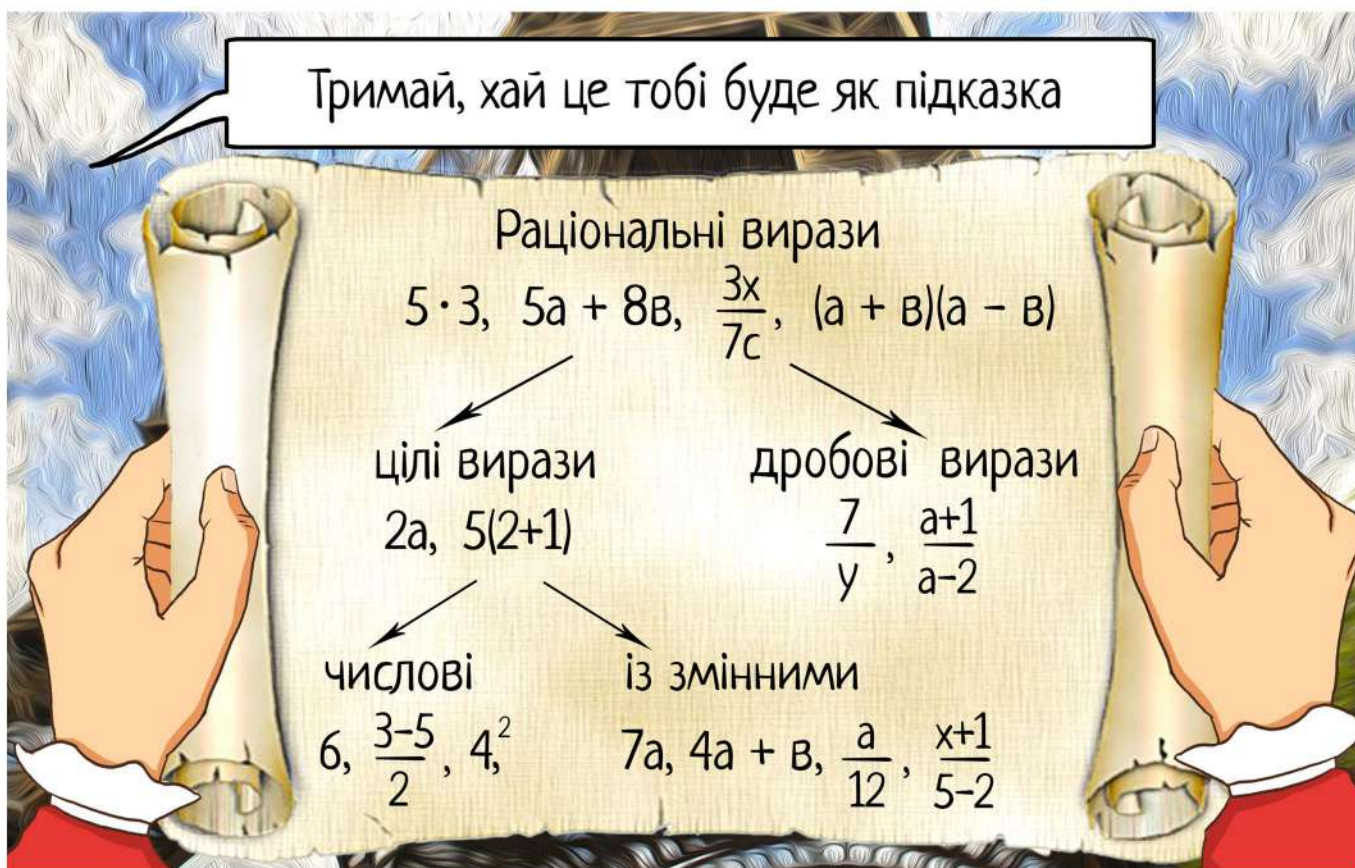
Для скороченого запису знак множення “ \cdot ” часто опускають

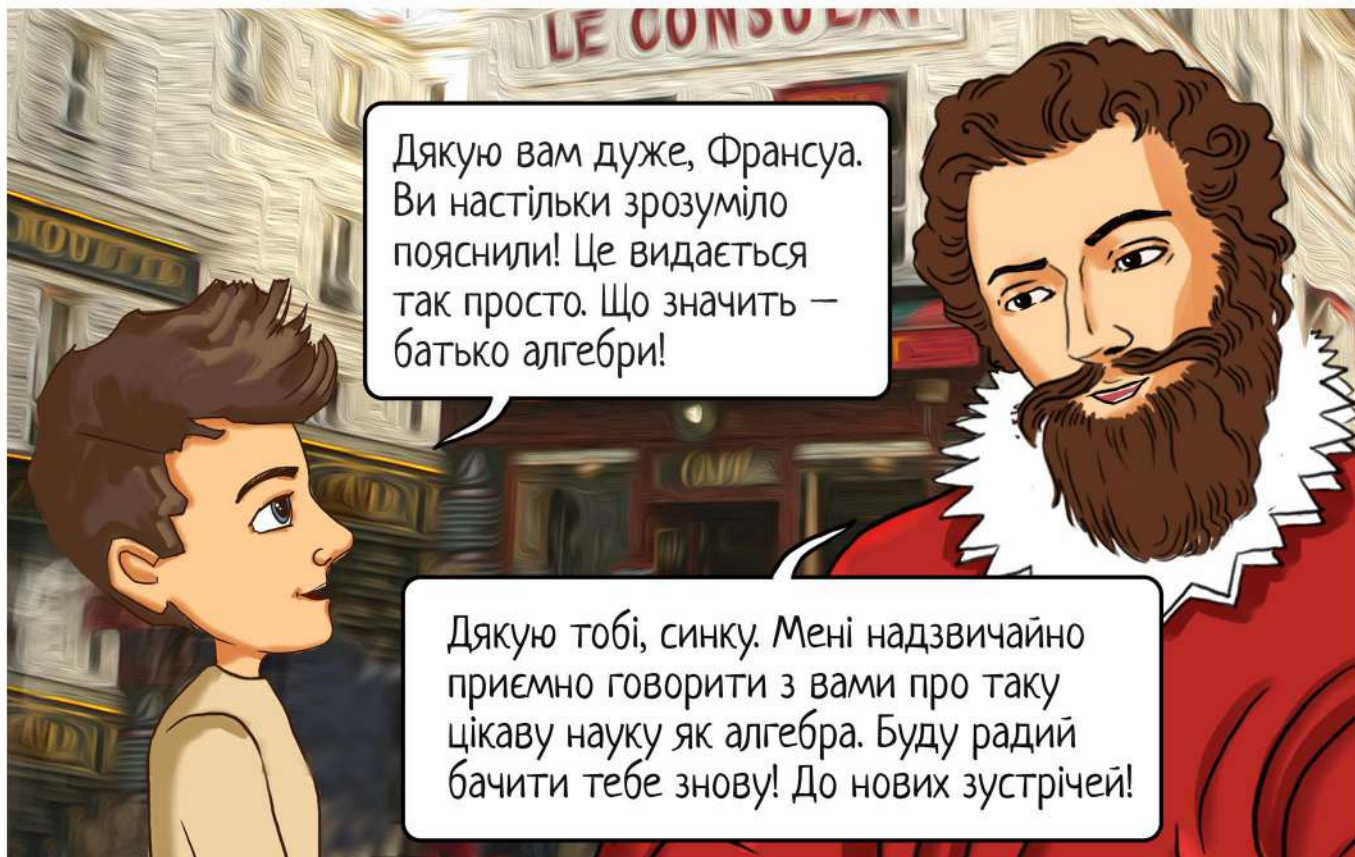
Замість $3 \cdot a + 2 \cdot b$ пишуть $3a+2b$

Вирази першої групи не містять дії ділення на вираз зі змінними.
Такі вирази називають **цілими**

$$\begin{aligned} a + b, \\ 8a, \\ a - \frac{c}{2}, \\ \frac{x - y}{4} \end{aligned}$$









від команди

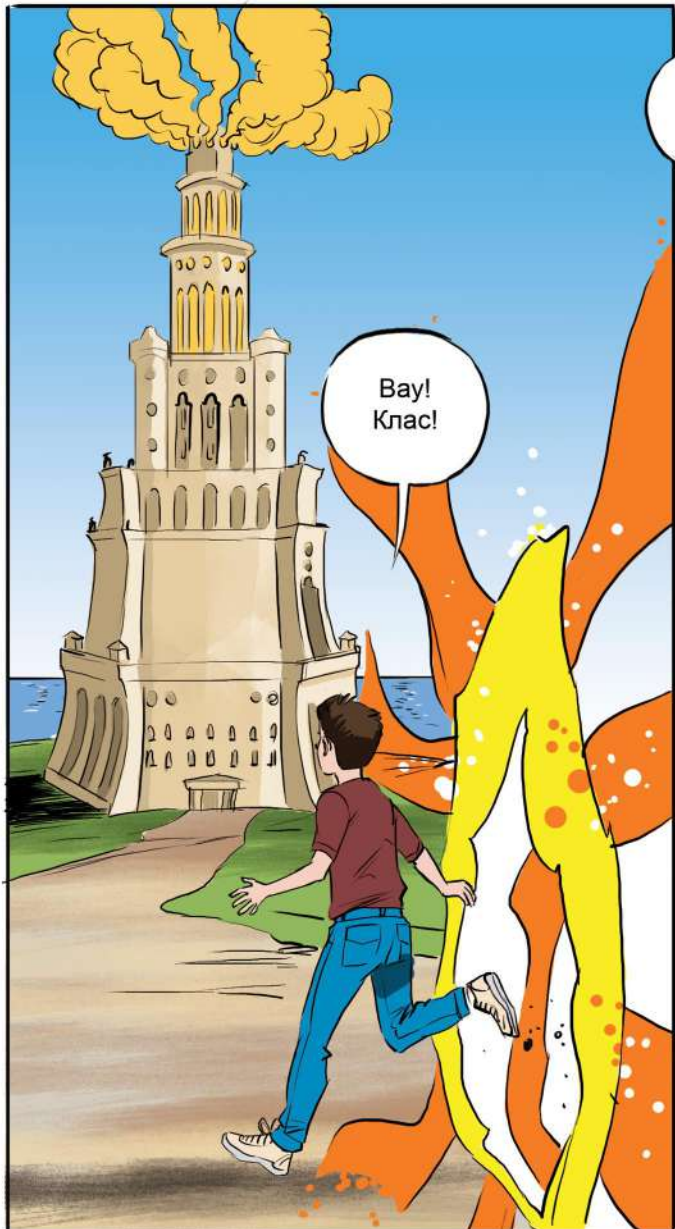
BOTAN

Алгебра 8 клас

Раціональні вирази.
Допустимі значення
змінних



Привіт! Гайда до Єгипту в III століття. Відвідаємо давньогрецького математика Діофанта Александрійського.



Вау! Клас!



Привіт, хлопче?

Вау!!!
Це ж він!

Вітаю вас, Діофанте!
Я школяр з України і дуже прошу вас допомогти з роз'ясненням. Розкажіть, будь ласка, про раціональні вирази. Ви, як ніхто інший, зробіте це добре.



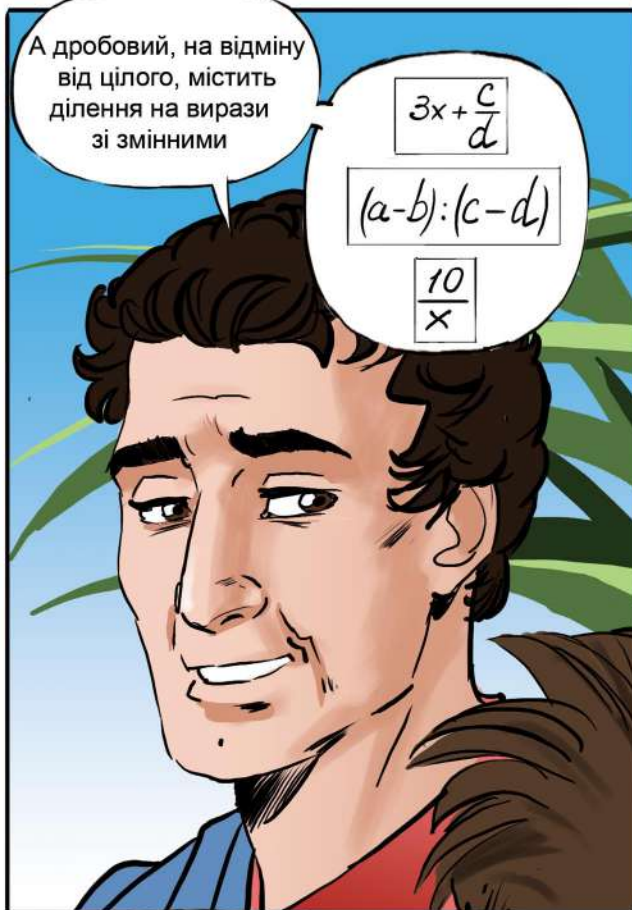
Щиро дякую!
Звичайно ж. Ти і сам зараз зрозумієш, як це просто.

В алгебрі раціональними виразами називають цілі і дробові вирази. Нагадаю, що цілий вираз не містить дії ділення на змінні й добування кореня зі змінних.



$$x-y \quad \frac{a}{5}-7 \quad \frac{a-b}{3} \quad x \quad 7$$

А дробовий, на відміну від цілого, містить ділення на вирази зі змінними



$$3x + \frac{c}{d}$$

$$(a-b):(c-d)$$

$$\frac{10}{x}$$

Крутяк!
Виявляється,
це так просто
запам'ятати!



Є таке поняття як ОДЗ - область допустимих значень змінної. Тобто значення змінної, при яких вираз має зміст (числове значення).



ОДЗ?

Так.



Цілий раціональний вираз завжди має числове значення при будь-якому значенні змінної, тобто ОДЗ – множина дійсних чисел.

Круто!
Я ще знаю, що дійсні числа позначають літерою R.



Правильно.
А ось дробовий раціональний вираз не має числового значення, якщо вираз у знаменнику дроба при певних значеннях змінної перетворюється на нуль або з самого початку дорівнює нулю.

Значить ОДЗ дробового виразу, це коли знаменник не дорівнює нулю, бо на нуль ділити НЕ можна!



Так це, справді, елементарно!
І треба завжди пам'ятати, що:
- Цілі вирази – ОДЗ множина дійсних чисел;
- Дробові вирази – ОДЗ множина дійсних чисел, окрім тих, при яких знаменник дорівнює нулю.

Саме так



Як чудово, що я відвідав вас і ви так добре й зрозуміло все мені пояснили.
Тепер все стало зрозуміло.
Щиро вам дякую, пане Діофант!

Будь ласка!
Був радий допомогти. Якщо виникнуть іще запитання, заходь. Частіше звертайтеся до математичної родини, про цю науку я готовий розповідати вічно.

Звісно!
Дякуємо!

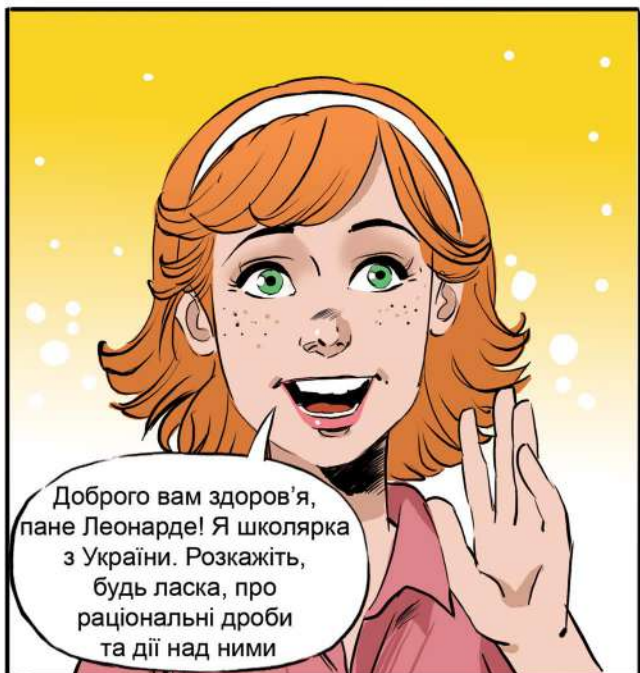


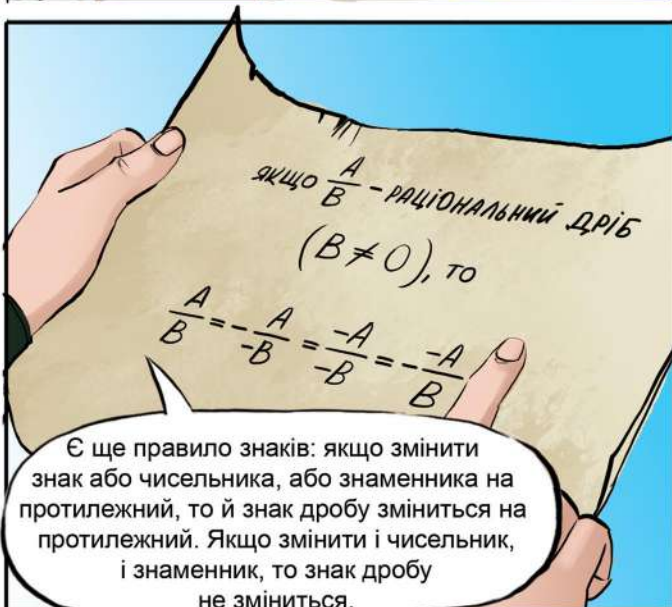
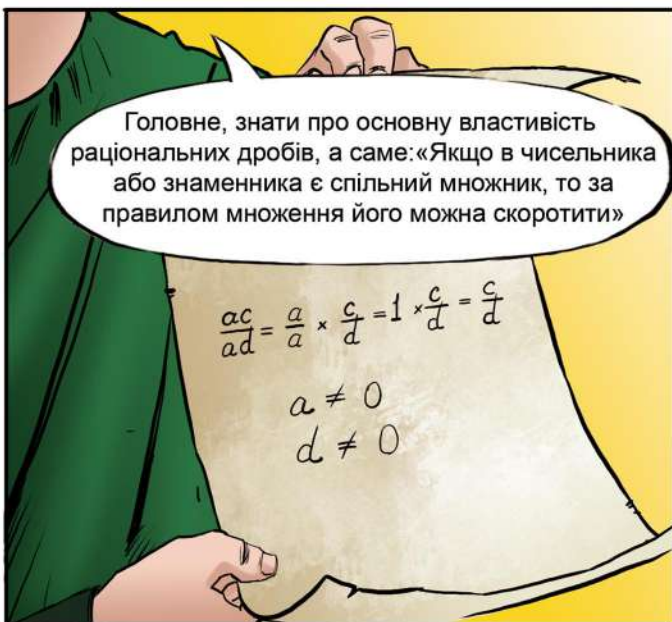
від команди

BOTAN

Алгебра 8 клас

Основна властивість раціональних дробів. Додавання та віднімання раціональних дробів.







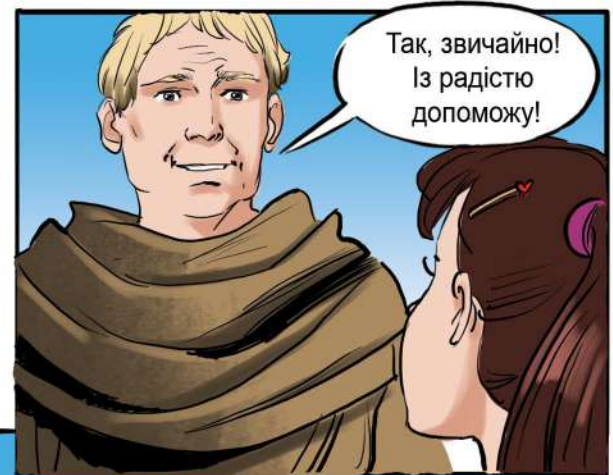


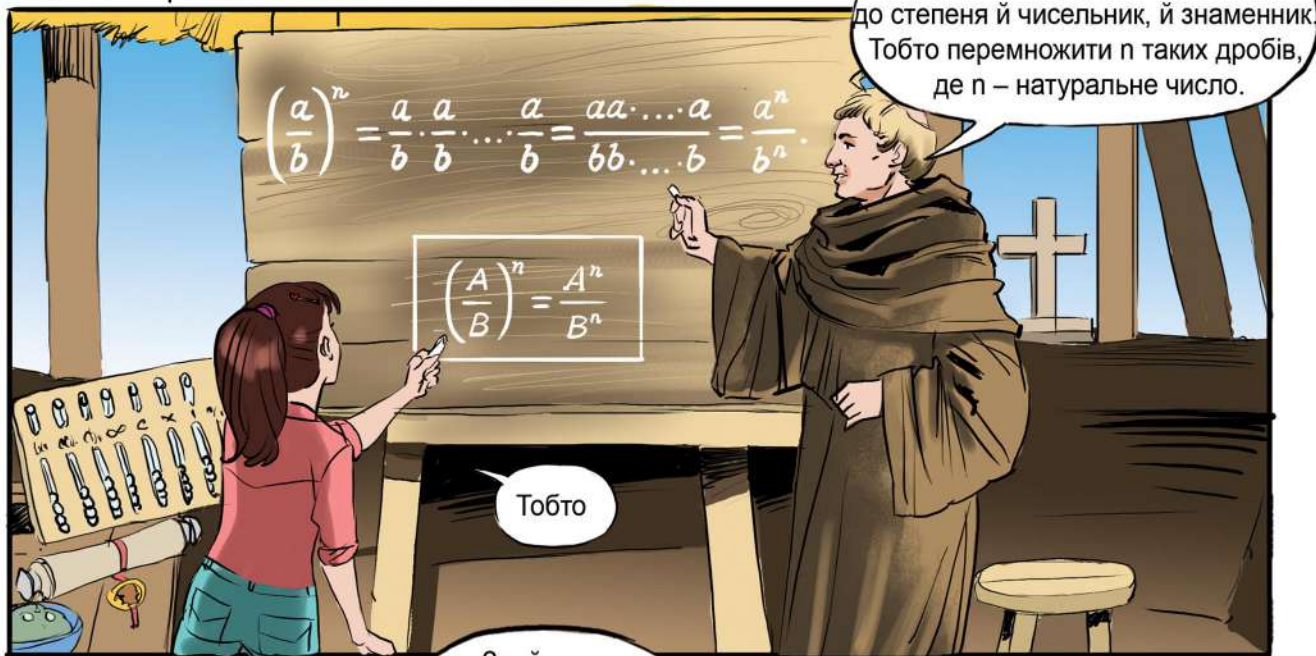
від команди

BOTAN

Алгебра 8 клас

Множення й ділення раціональних дробів. Піднесення раціональних дробів до степеня з натуральним показником.









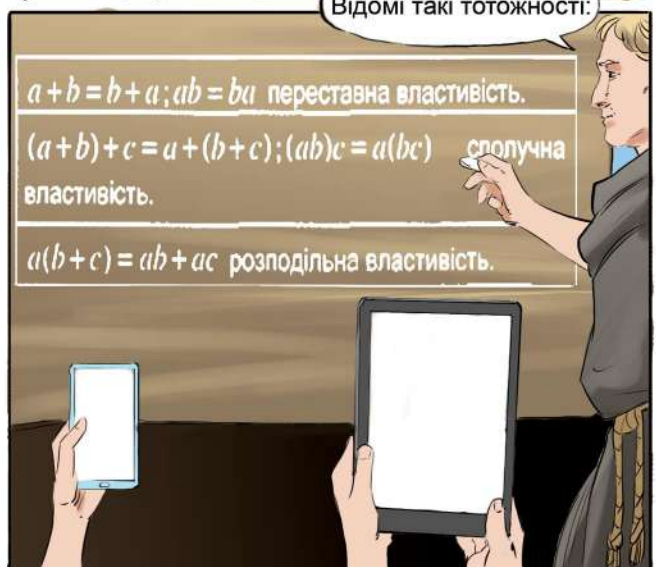
від команди

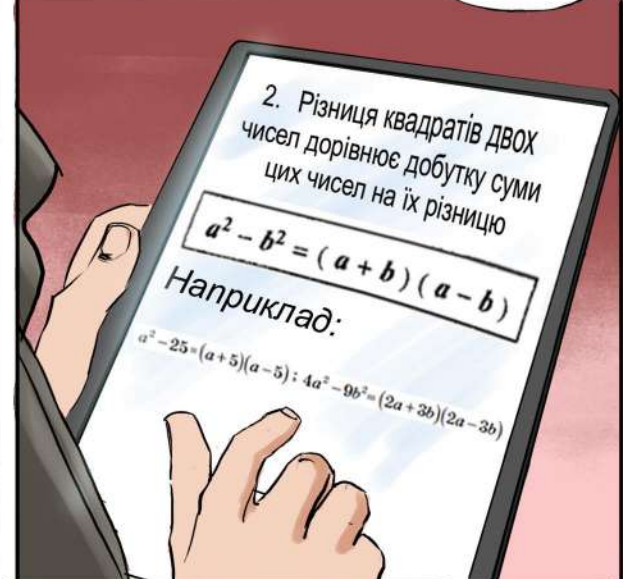
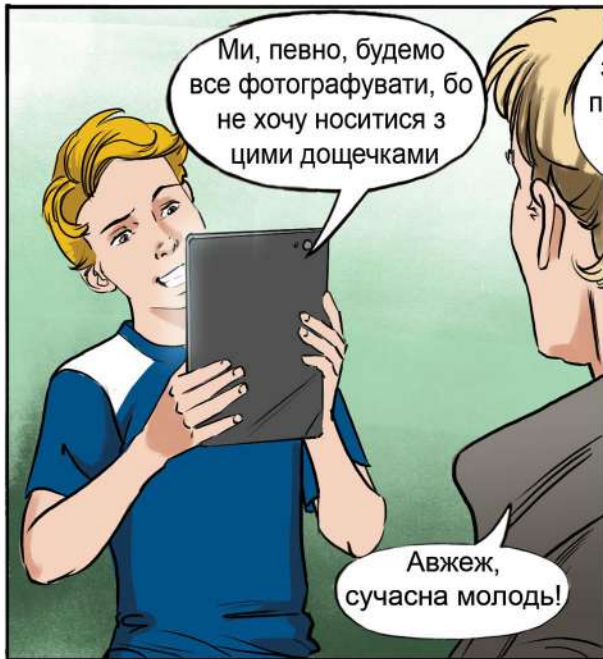
BOTAN

Алгебра 8 клас

Тотожні перетворення
раціональних виразів.







Я знайшла таке визначення.

3. Куб суми (різниці) двох чисел дорівнює кубові першого числа плюс (мінус) потроєний добуток квадрата першого числа на друге, плюс потроєний добуток першого числа на квадрат другого і плюс (мінус) куб другого числа.

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$, $(a-2)^3 = a^3 - 6a^2 + 12a - 8$

Тут навіть складно зрозуміти хто кого навчає...

Ми одне одного!

4. Сума (різниця) кубів двох чисел дорівнює добутку суми (різниці) цих чисел на неповний квадрат різниці (суми) цих чисел.

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

Наприклад,
 $8 + 1 = (2+1)(4-2+1)$, $8a^3 - 27 = (2a-3)(4a^2 + 6a + 9)$

Цей пристрій ще й говорити вміє?!

Звісно, це крутий девайс, я без нього нікуди. От скажіть йому що-небудь.

Квадрат суми

5. Квадрат суми кількох виразів дорівнює сумі квадратів усіх доданків плюс усі подвоєні добутки кожного виразу на кожний наступний

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Наприклад,

$$(2a + 3b + 5c)^2 = 4a^2 + 9b^2 + 25c^2 + 12ab + 20ac + 30bc$$



Оце техніка!

Так, прогрес - він такий!
Знаєте, я зараз зрозумів,
що ці формули всі настільки
прості, головне - засвоїти принцип.
Засвоїти саму техніку тотожних
перетворень, бо до зустрічі з
вами, я просто зазубрював
ці букви та знаки.



Так, хлопче, ти
правий. Зрозумій суть і це
стане потужним інструментом у
розв'язанні подібних задач.



Ой, нам
треба йти, бо урок
починається.



Так, біжіть діти.
Дякую вам за спілкування,
я аж помолодшав

Дяаяякуємо!!!



Круть! Ото подорож!
Прикольний старий

Так!

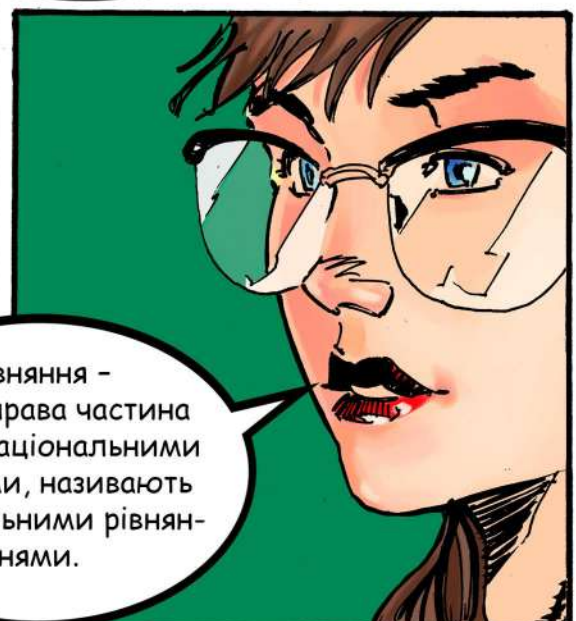
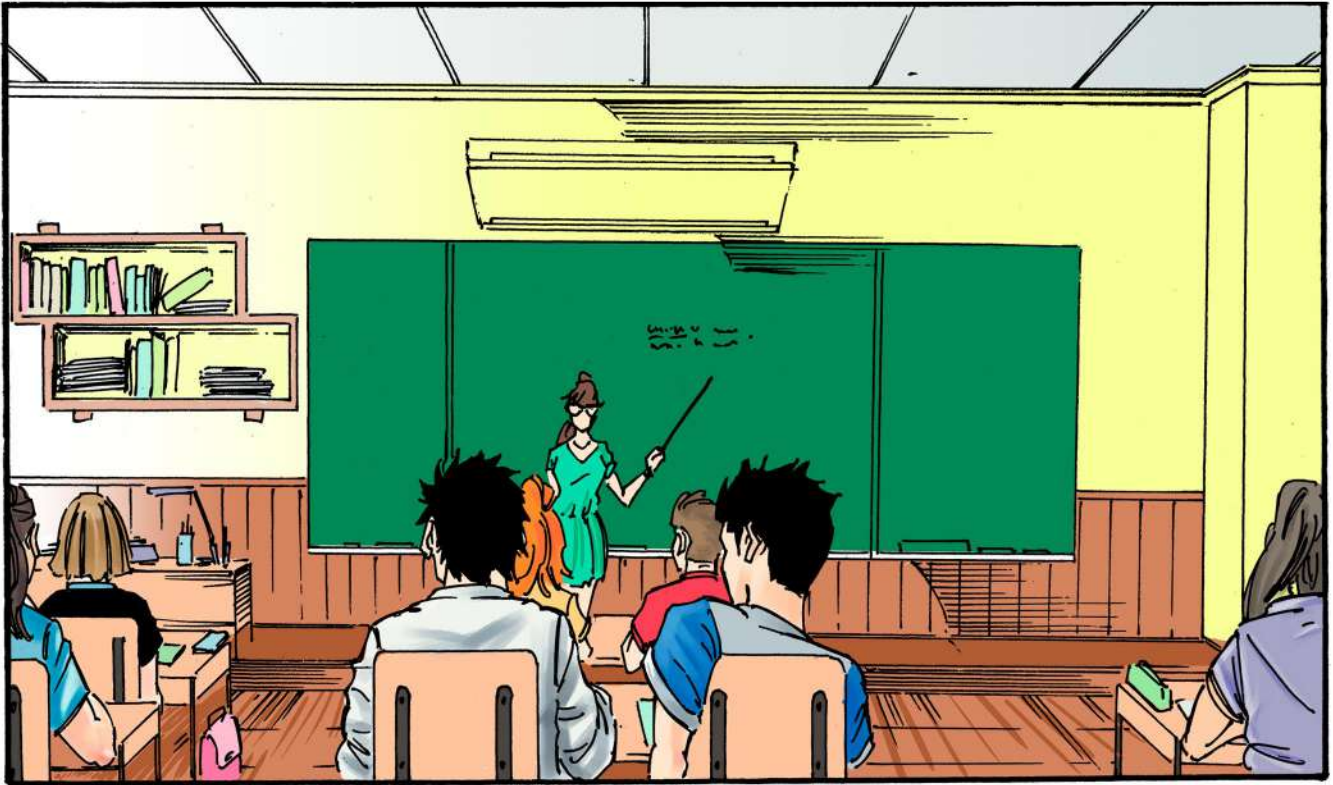


від команди

BOTAN

Алгебра 8 клас

Рівняння зі змінною в
знаменнику





Як це не цікаво ...

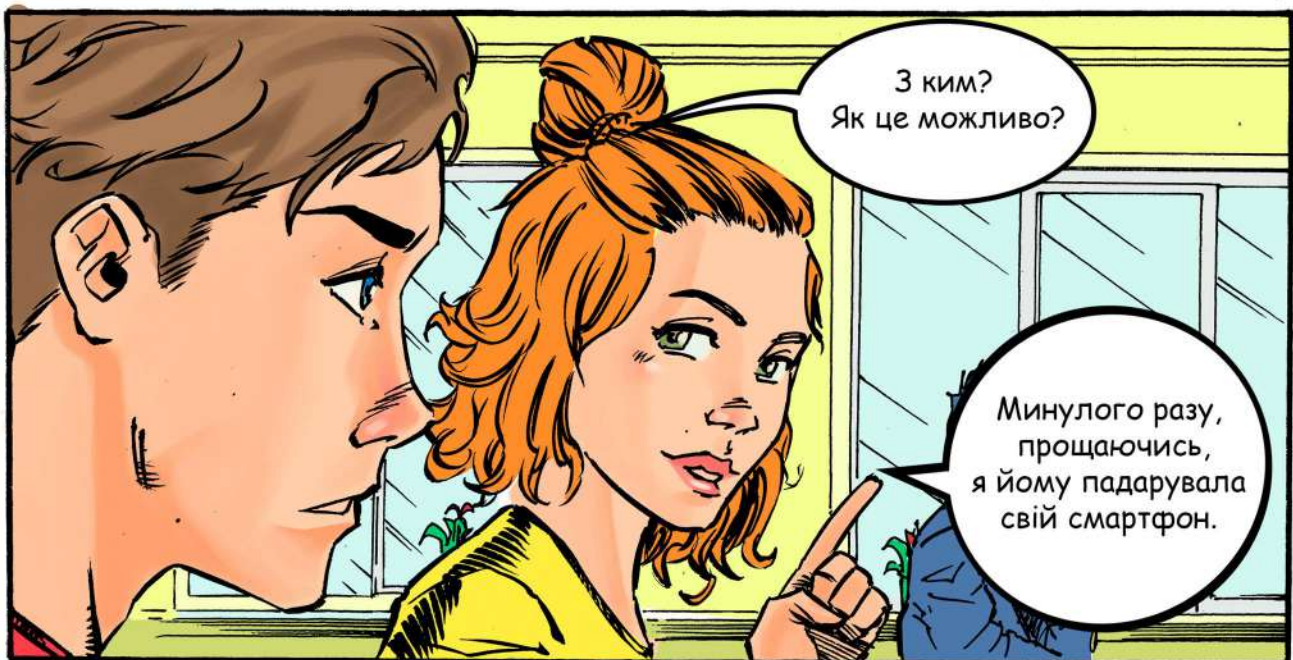
Якщо в рівнянні хоча б одна частина є дробовим виразом, то таке рівняння називають дробовим раціональним, тобто рівнянням зі змінною в знаменнику.



$$5(x+1) + 5(x-1)$$

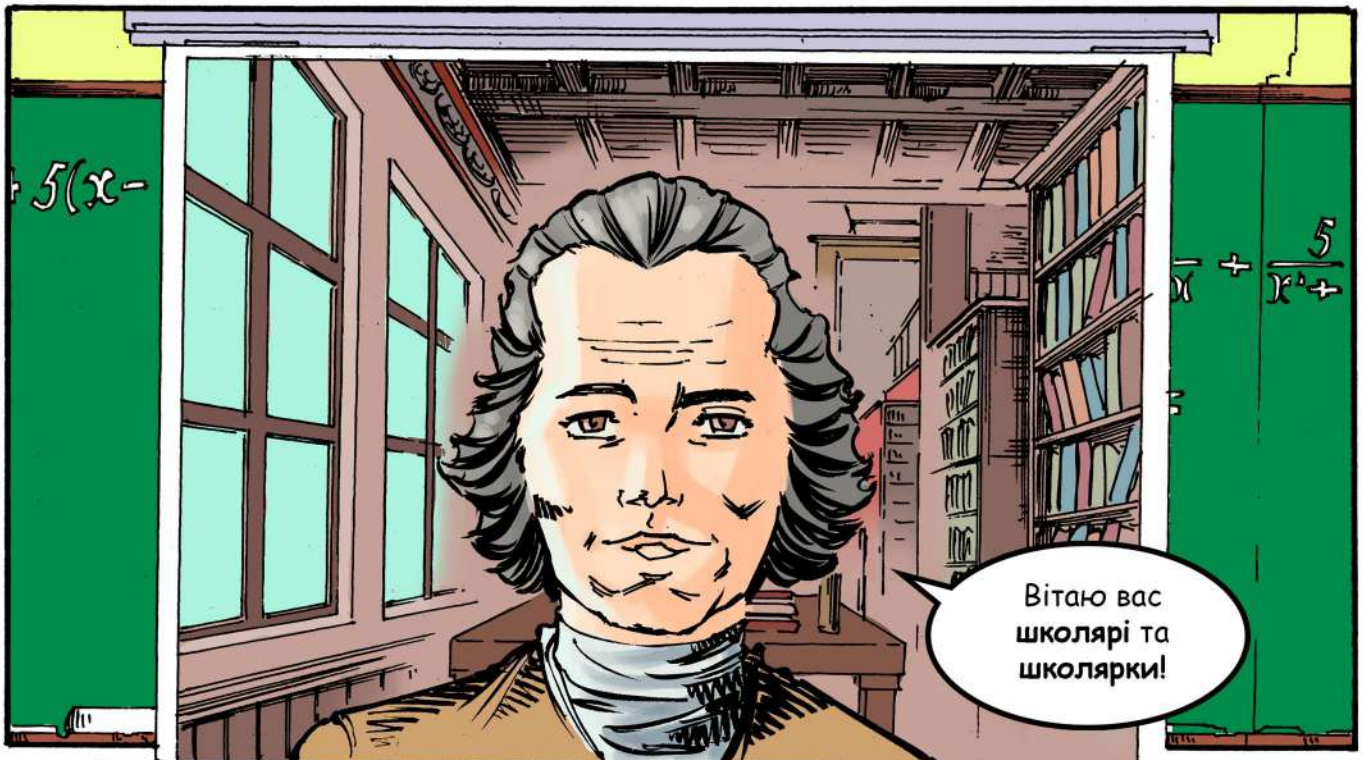
$$\frac{x-2}{x^2-1} = \frac{5}{x^2-1} + \frac{5}{x^2-1}$$

А зараз у мене є для вас сюрприз. Наразі ми маємо змогу поспілкуватися за допомогою Skype зв'язку з видатним математиком



З ким?
Як це можливо?

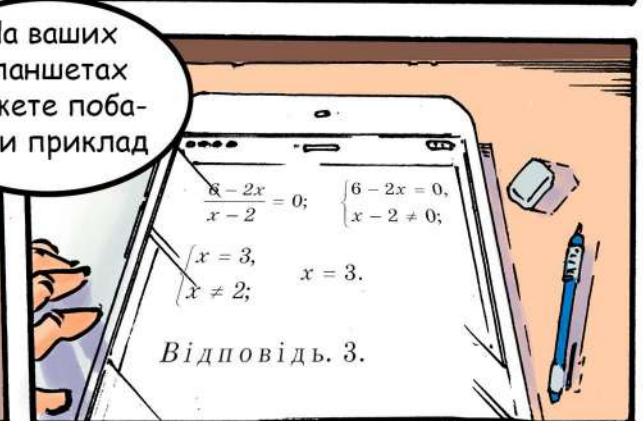
Минулого разу, прощаючись, я йому подарувала свій смартфон.



Розглянемо способи розв'язування таких рівнянь: використання умови рівності дроба



На ваших планшетах можете побачити приклад



Використання основної властивості пропорції

Якщо $\frac{P}{Q} = \frac{M}{N}$, то
 $PN = MQ$, де
 $Q \neq 0, N \neq 0$

1) Знайти область допустимих значень (ОДЗ) змінної в рівнянні цього рівняння

2) Звести рівняння до вигляду

$$\frac{P}{Q} = \frac{M}{N}$$

3) Записати ціле рівняння
 $P \cdot N = M \cdot Q$ і розв'язати його

4) Виключити з отриманих коренів ті, що не належать ОДЗ і записати відповідь.

Чудовий приклад цюгорівняння ви можете переглянути у своєму підручнику.

$$\frac{2x+1}{x-1} = \frac{2x-2}{x-2}; \quad \begin{cases} (2x+1)(x-2) = (2x-2)(x-1), \\ x-1 \neq 0, \\ x-2 \neq 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x^2 - 4x + x - 2 = 2x^2 - 2x - 2x + 2, & x = 4, \\ x \neq 1, & x \neq 1, \quad x = 4, \\ x \neq 2, & x \neq 2; \end{cases}$$

Відповідь: 4.

Друзі, залишився ще один метод. Головне, налаштуватися на позитивне сприйняття, й ви все зрозумієте та запам'ятаєте

3. Метод множення обох частин рівняння на спільний знаменник дробів. Ось послідовність ваших дій. Перед вами пам'ятка, за допомогою якої ви зможете зрозуміти хід розв'язання, при цьому згадані дії закарбуються самі собою.

- 1) Знайти ОДЗ змінної в рівнянні;
- 2) Знайти найпростіший спільний знаменник дробів, що входять до рівняння;
- 3) Помножити обидві частини рівняння на цей спільний знаменник;
- 4) Розв'язати одержане ціле рівняння;
- 5) Виключити з його коренів ті, що не належать ОДЗ змінної рівняння.



$$\frac{x-2}{x^2-1} = \frac{5}{x^2-x} + \frac{5}{x^2+x}$$
$$\frac{x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{5}{x(x-1)} + \frac{5}{x(x+1)}$$

ОДЗ $x \neq 0, x \neq 1, x \neq -1$

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{5}{x(x-1)} + \frac{5}{x(x+1)}$$

$\cdot x(x-1)(x+1)$

$$x(x-2) = 5(x+1) + 5(x-1)$$

Після спрощення

$$x^2 - 12x = 0, \text{ тобто } x(x-12) = 0. \text{ Звідки } x = 0 \text{ або } x = 12.$$

Відповідь: 12.





від команди

BOTAN

Алгебра 8 клас

Степінь з цілим від'ємним показником.
Властивості степеня з цілим
показником.



Не розумію, нащо потрібні ці степені із від'ємними показниками?!

О! Точно, у моєму ж планшеті є нова функція «Віртуальне питання».

Цікаво, де це я опинився?!

Якраз скористаюся!

Привіт, хлопче. Ти знаходишся в Самаркандській обсерваторії. Мене звать Аль Каші. Ходімо, проведеу екскурсію.

Вау! Я читав про вас!

Ви визначний математик. Круто! Мене звать Остап, я школяр з України.





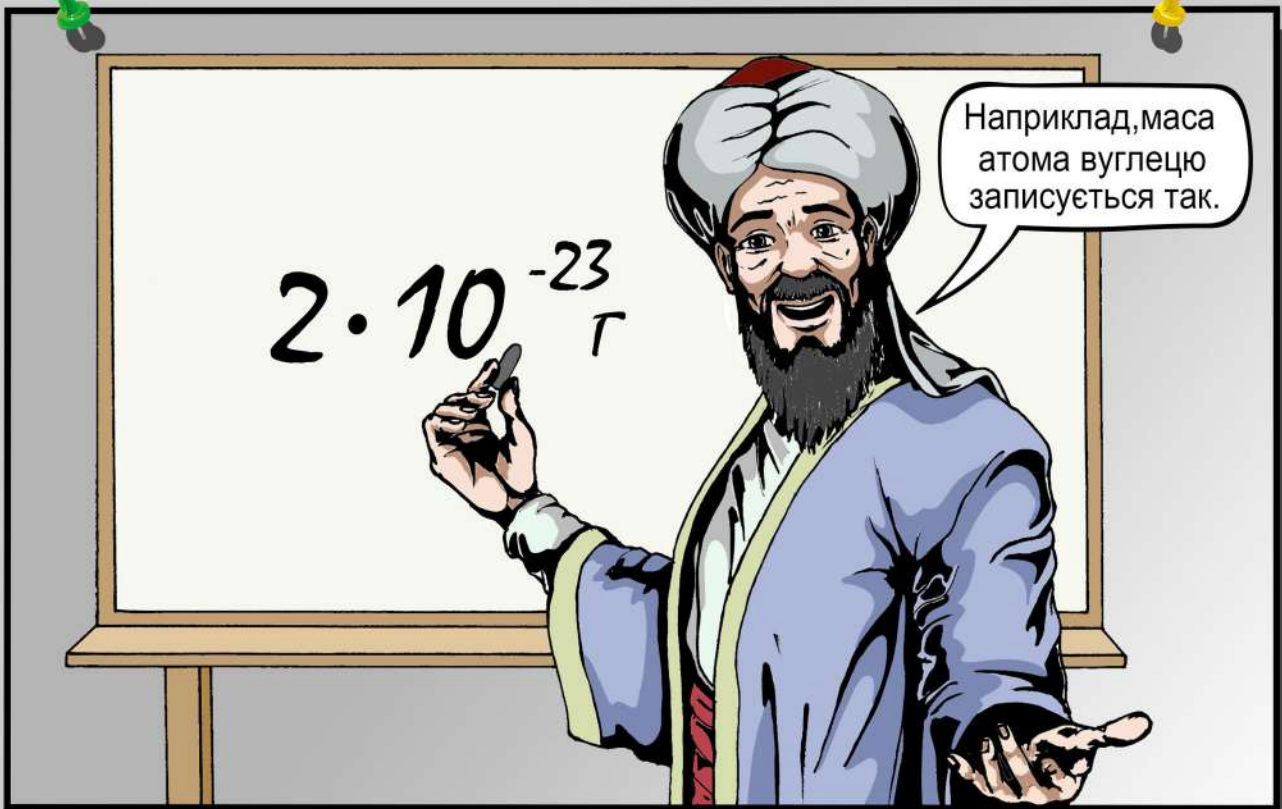
Розумієте, у 7 класі я вивчав степінь із цілим додатнім або натуральним показником.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n,$$

П множників
де n - натуральне число,
 $n > 1$ і $a^1 = a$.

А тут від'ємні. Навіщо вони?

Так, існують степені із цілим від'ємним показником. Їх використовують для практичних розрахунків, наприклад, із фізики або хімії та в астрономії.



$$2 \cdot 10^{-23} \text{ г}$$

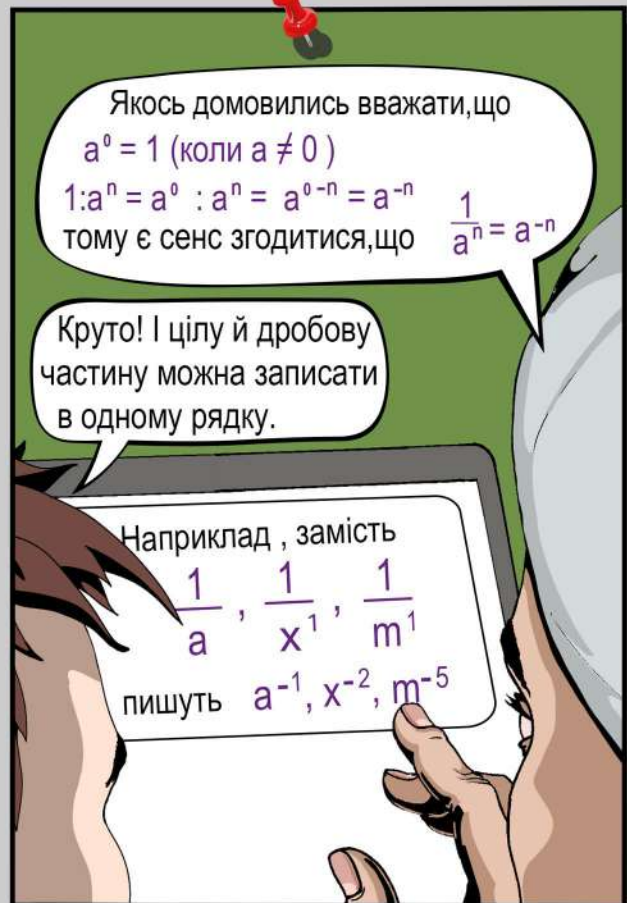
Наприклад, маса атома вуглецю записується так.



О, якщо треба щось записати, ви можете скористатися моїм планшетом.

Дякую, прямо-таки космічна штука!

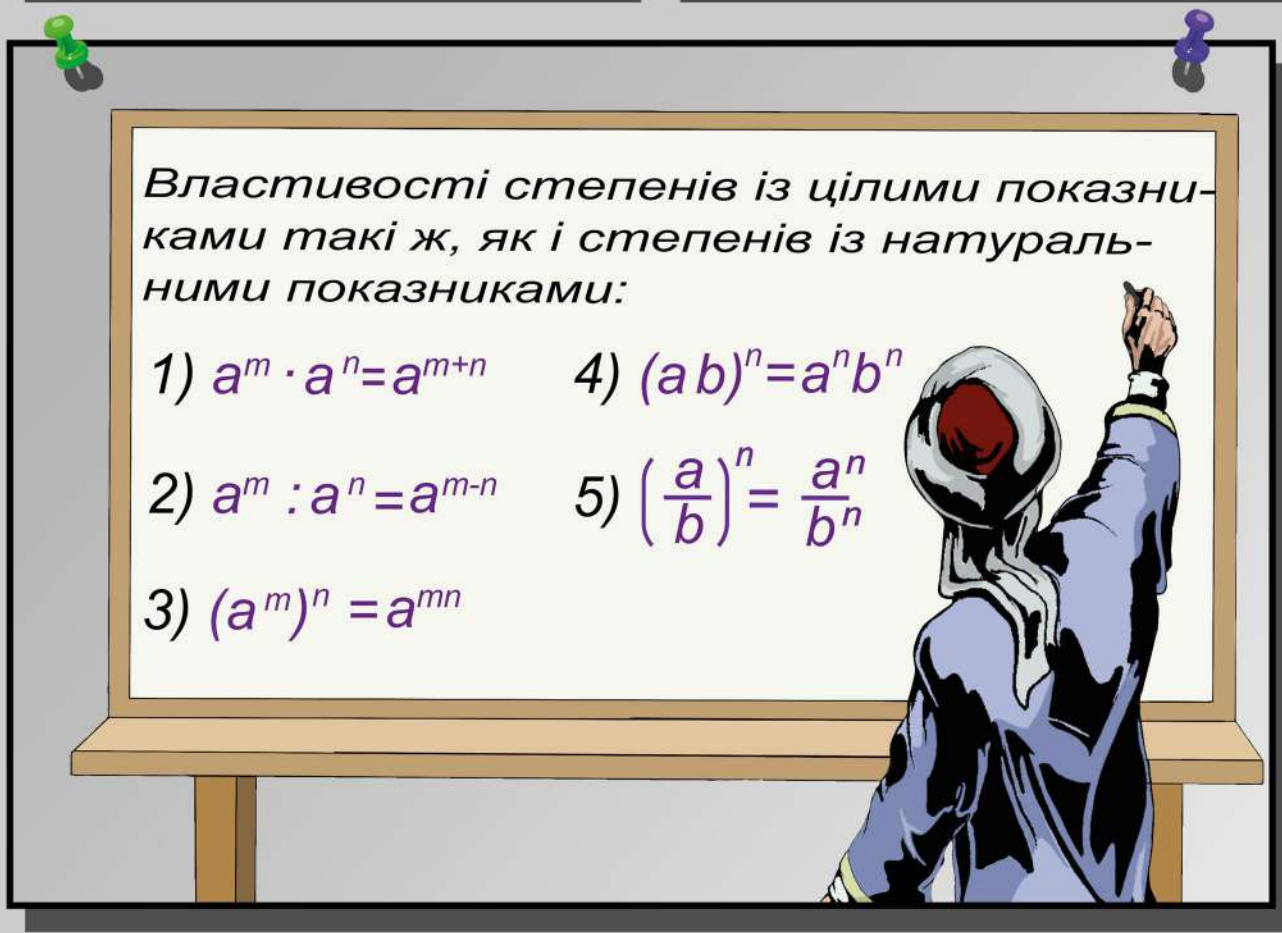
$$2 \cdot 10^{-23} \text{ г}$$



Якось домовились вважати, що $a^0 = 1$ (коли $a \neq 0$)
 $1: a^n = a^0 : a^n = a^{0-n} = a^{-n}$
тому є сенс згодитися, що $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

Круто! І цілу й дробову частину можна записати в одному рядку.

Наприклад, замість $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{x^1}$, $\frac{1}{m^1}$
пишуть a^{-1} , x^{-2} , m^{-5}





А, та це марсіани, ми з ними співпрацюємо.

Вау! Хто це?!



Ось дивись!


Корисні зауваження:

Будь-який степінь числа $a > 0$ є число додатне.
 $5^{11} > 0$; $(1.2)^7 > 0$.

При піднесенні до парного степеня від'ємного числа в результаті отримуємо додатне, до непарного - від'ємне.
 $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 3^4 = 81$; $(-3)^4 > 0$
 $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$; $(-3)^3 < 0$.

Степені з від'ємними показниками визначені тільки для $a > 0$.
 $0^{-3} = \frac{1}{0^3}$ - не визначено. $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} > 0$.

Я тепер зрозумів, від'ємний степінь існує суто для зручності в обчисленнях. І для уяви настільки це велика або мала величина.



Круто тут у вас. Можна з вами зробити селфі, а то друзі й подруги нізащо не повірять мені? Щиро вам вдячний, що все розтлумачили.

Будь ласка!

Тепер мені треба якось повернутись додому. Ніколи не користувався цією функцією, певно, треба натиснути кнопку «Додому».



Крута функція!

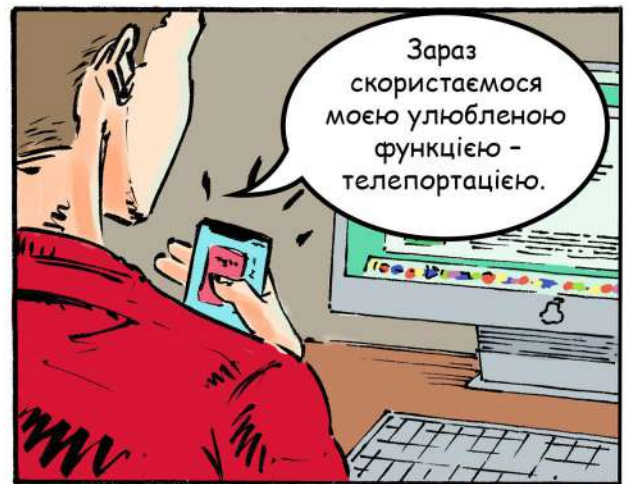


від команди

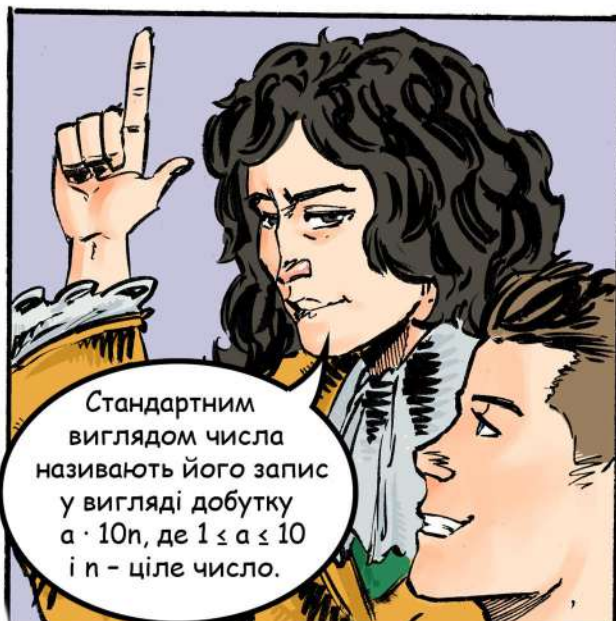
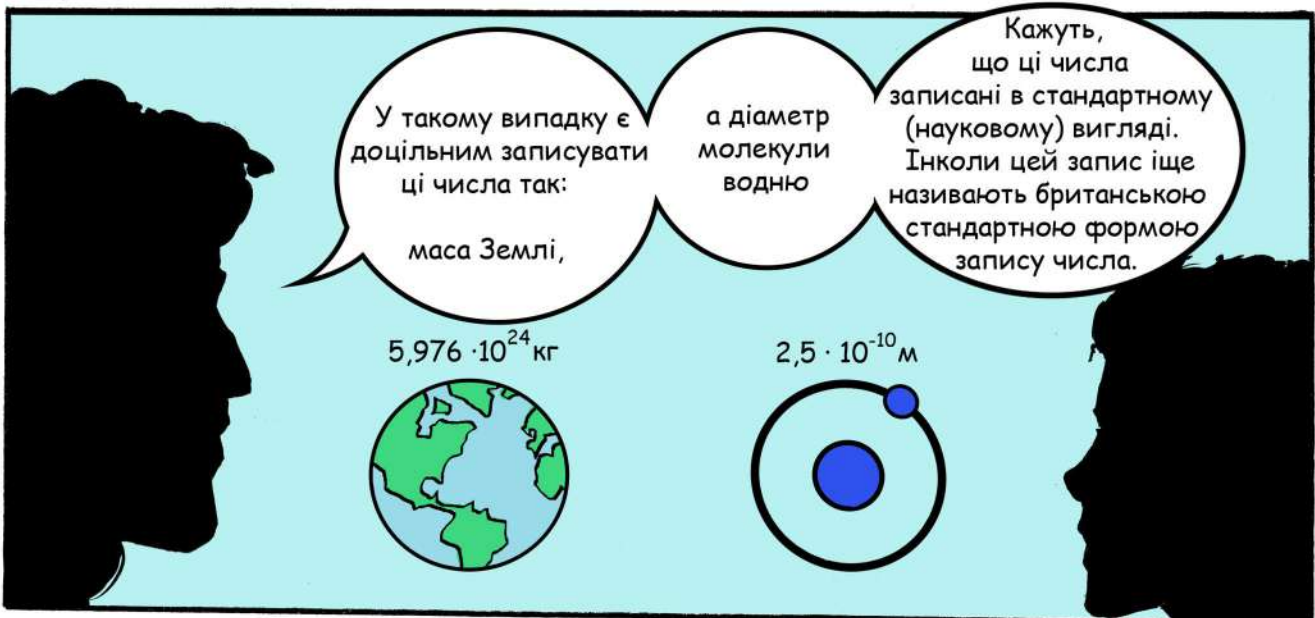
BOTAN

Алгебра 8 клас

Стандартний вигляд числа.
Запис чисел у стандартному
вигляді. Порядок числа.









Показник степеня
п називають порядком
числа.

Наприклад:
порядок числа, яким запи-
сано масу Землі в кілограмах,
дорівнює 24, а порядок числа, яким
записано діаметр молекули водню
в метрах, дорівнює -10.



Отже, якщо
кажуть, що одне
число на порядок біль-
ше за друге, то це озна-
чає, що воно у 10
разів більше за друге,
якщо на два порядки - у
100 разів більше
і т.д.



Числа, записані у стандартному
вигляді, виражають переважно
наближені значення величин.
Найчастіше записують значення
відстаней, площ, мас, об'ємів і т.ін.
Як правило, усі нулі поставлено
замість невідомих нам точних
цифр, вони є результатом
округлення.



Щиро вам
дякую, сер Ісак
Ньютон.

Ніяка
книжка у світі
не замінить зустріч
та розмову з вами.
Ви все доступно
пояснили. Можна
зробити з вами
селфі?



Звісно!
Ох же й це
покоління 21
століття.



Дякую вам!
Повинен уже йти, бо час
телепортації обмежений.
Радий був знайомству.
Ви крутий!

Будь ласка! Навзаєм!

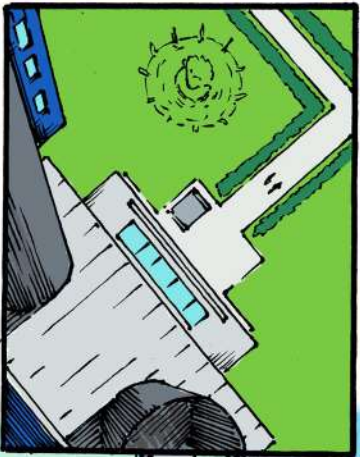


від команди

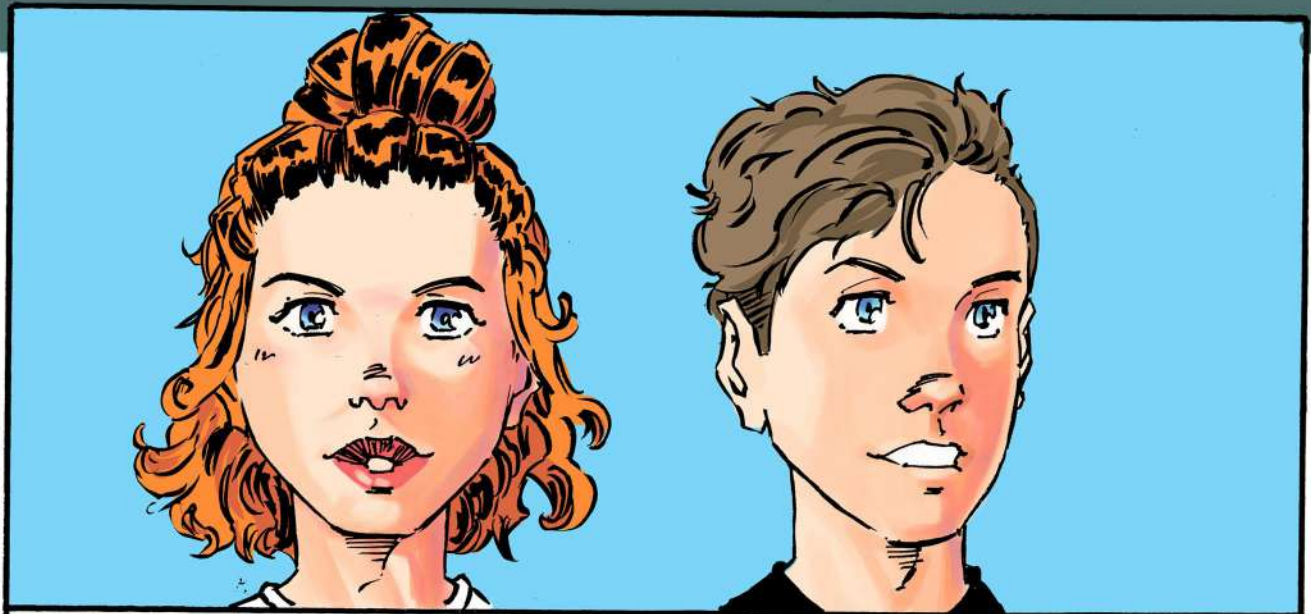
BOTAN

Алгебра 8 клас

Множина. Підмножина.
Числові множини. Раціональні
числа. Ірраціональні числа.
Дійсні числа.



Проходьте





Вау!
Доброго дня! Ми
українські
школярі.

Ласкаво
просимо до світу число-
вих множин! Мене звати
Георг Кантор. Вас вітає
корпорація «Chiffre»



Як тут цікаво!



У житті нас скрізь
оточують
множини.

У математиці
будь-які сукуп-
ності називають
множинами.

Множини
квартир у будинку,
учнівства в класі,
групи у Facebook
тощо.

Множини
позначають
великими латинськи-
ми буквами: А, В, С... і
записують за допомо-
гою фігурних
дужок.

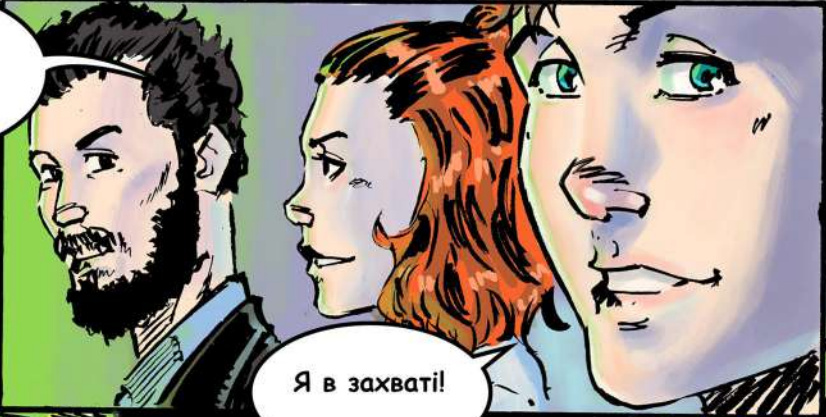
Елемент a належить множині A	$a \in A$
Елемент b не належить множині A	$b \notin A$
У множини немає елементів	\emptyset

Кожний об'єкт, що входить до множини A , називається елементом цієї множини. Множина, що не містить жодного елемента, називається порожньою множиною. Це, наприклад, множина коренів рівняння $|x| = -1$.



$S = \{\square, \emptyset, O\}$ - множина фігур
 \square, \emptyset, O
 $M = \{1, 3, 5, 9\}$ - множина непарних одноцифрових чисел.

Як цікаво!



Я в захваті!

Є і множини чисел. Числа, які ми використовуємо при лічбі, складають множину НАТУРАЛЬНИХ чисел і позначають літерою N .





Якщо кількість елементів множини можна виразити натуральним числом, то така множина є скінченною.

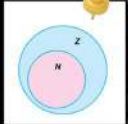
Якщо ж виразити її натуральним числом не можна, і якщо множина не є порожньою, то вона є нескінченною.

Як багато тут різноманітних чисел!

Ого, скільки їх!



Якщо N частина множини Z , то її називають підмножиною множини N і записують $N \subset Z$.
Наприклад, натуральні числа є підмножиною цілих чисел. Z - множина цілих чисел, що містить у собі натуральні числа й число 0



$$Z = \{\dots, -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$$



Множина раціональних чисел позначається Q . Будь-яке раціональне число можна подати або у вигляді скінченного десяткового дробу, або у вигляді нескінченного десяткового періодичного дробу.

Числа - цілі й дробові, додатні й від'ємні - становлять множину раціональних чисел. Раціональними їх називають тому, що кожне з них можна записати у вигляді частки, відношення двох чисел (m/n , де m - число ціле, а n - натуральне), а слово «відношення» латинською мовою - ratio.

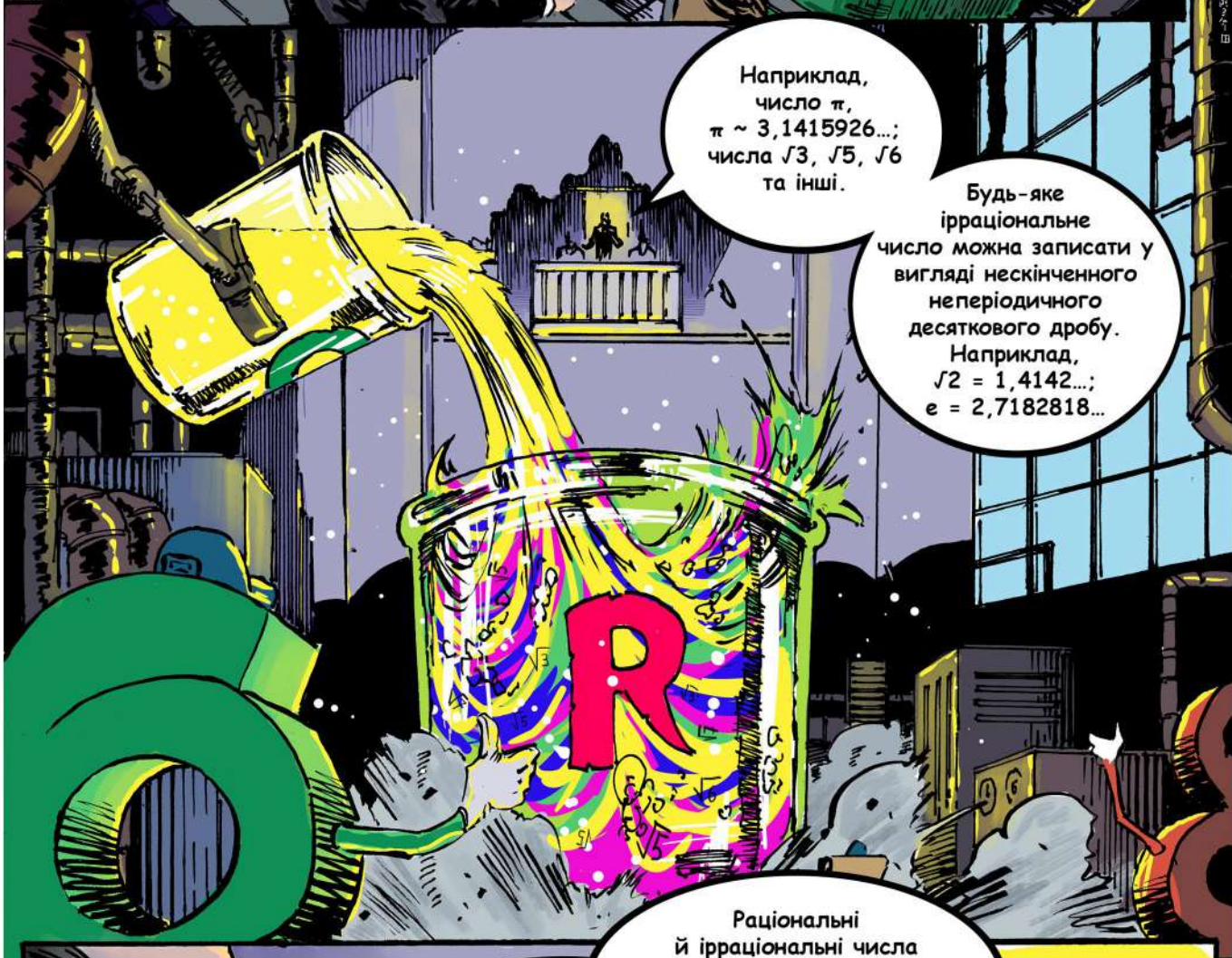


Числа, які не можна записати у вигляді m/n , де m - ціле число, а n - натурльне, називають ірраціональними числами.

Префікс ір означає заперечення, не раціональні.

Це неймовірно!

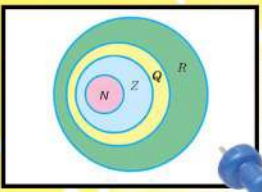
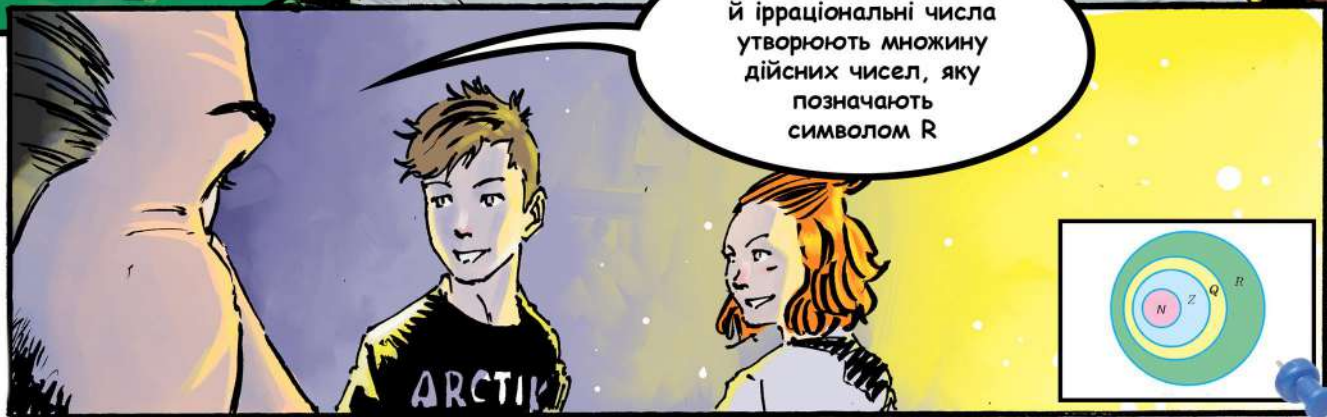
Оце так!



Наприклад, число π , $\pi \sim 3,1415926\dots$; числа $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ та інші.

Будь-яке ірраціональне число можна записати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу. Наприклад, $\sqrt{2} = 1,4142\dots$; $e = 2,7182818\dots$

Раціональні й ірраціональні числа утворюють множину дійсних чисел, яку позначають символом R





Я й увати собі не міг, як це захопливо! Наразі це найдивовижніша екскурсія для мене.

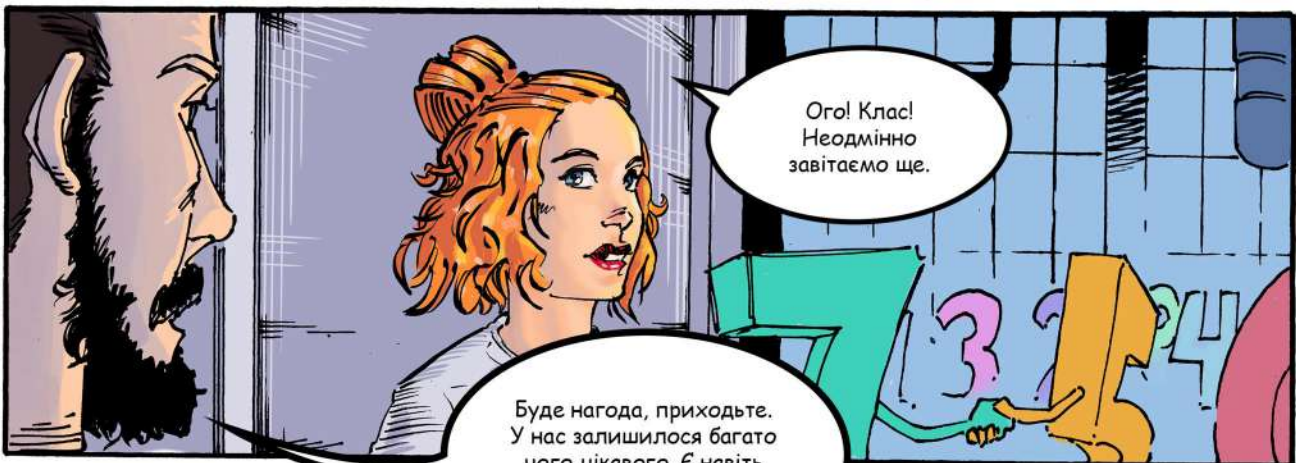
Ти поглянь, скільки там найрізноманітніших чисел! Вони всі існують. Це неймовірно!



Ось ми з вами й приготували множину дійсних чисел. Наша фабрика величезна, за день її не обійти.

Плюс у нас є дуже багато філій, оскільки щодня числами користуються мільйони жителів планети, тому корпорація працює й удень, і вночі.

Так, світ чисел вразив нас своєю багатогранністю.



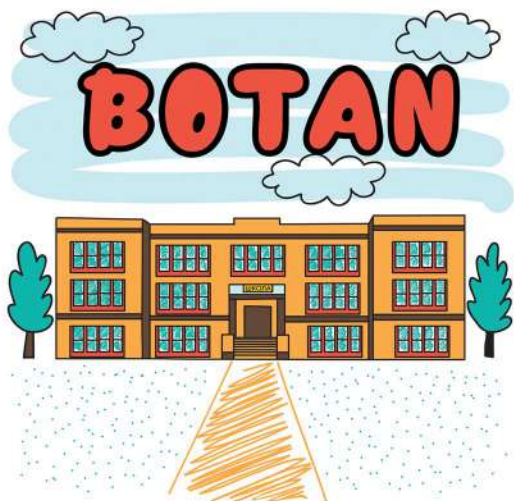
Ого! Клас! Неодмінно завітаємо ще.

Буде нагода, приходьте. У нас залишилося багато чого цікавого. Є навіть машина часу.



Щиро дякуємо вам за екскурсію.

Щастя вам, діти!



www.educomics.com.ua

Привіт. Ми, команда Ботан. Для нас Ботани, це тип людей, в яких є жага пізнавати все нове. Які зачитуються книжок, засиджуються в інтернеті, читаючи статті або дивлячись наукові фільми. Люди, які відкриті до всього нового, бо навчання для них, то цікавий процес.

Команда ботанів хоче донести до українських школярів та школярок, що в школі навчатися теж цікаво. Можна досліджувати будь-яку шкільну (і не тільки) тему глибше. А ще, можна змінити формат подання матеріалу, наприклад, вивчати шкільні предмети в коміксах. Серія перших українських освітніх коміксів від команди BOTAN має назву EDU Comics. Тож дивіться на світ ширше і руйнуйте шаблони. Про складне можна говорити просто та цікаво.

Ботан, він не гризе граніт науки. Ботан ласує ніжним та солодким бізе (або тістечком) ;)



facebook.com/botan.osvita



Євген Вознюк

т.097-77-85-182



Світлана Вознюк

т.097-77-85-183