А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

АЛГЕБРА
І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

підручник для 10 класу
закладів загальної середньої освіти

Харків
«Гімназія»
2018

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 517.1]
М52

Мерзляк А. Г.

М52 Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018. — 400 с. : іл.

ISBN 978-966-474-311-9.

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 517.1]

ISBN 978-966-474-311-9

Від авторів

ЛЮБІ ДЕСЯТИКЛАСНИКИ ТА ДЕСЯТИКЛАСНИЦІ!

Ви починаєте вивчати новий шкільний предмет — **алгебру і початки аналізу**.

Цей предмет надзвичайно важливий. Мабуть, у наш час немає такої галузі науки, де не застосовують досягнень цього розділу математики. У фізиці та хімії, астрономії та біології, географії та економіці, навіть у лінгвістиці та історії використовують «математичний інструмент».

Алгебра і початки аналізу — корисний і дуже цікавий навчальний предмет. Він розвиває аналітичне й логічне мислення, дослідницькі навички, математичну культуру, кмітливість.

Ми маємо надію, що ви не розчарувалися, обравши нелегкий шлях — вивчати математику за програмою профільного рівня. Це не просто. Потрібно бути наполегливими та завзятими, уважними й акуратними, при цьому найголовніше — не бути байдужими до математики, а любити цю красиву науку. Сподіваємося, що ви з інтересом будете засвоювати нові знання. Ми віримо в те, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте в руках. Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник поділено на п'ять параграфів, кожний з яких складається з пунктів. Вивчаючи теоретичний матеріал пункту, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, ***жирним курсивом*** і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

У цій книзі ви ознайомитеся з низкою важливих теорем. Деякі з них подано з повними доведеннями. У тих випадках, коли доведення виходять за межі розглядуваного курсу, у підручнику наведено тільки формулювання теорем.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано завдання для самостійного розв'язування. Серед завдань є як прості й середні за складністю, так і важкі, особливо ті, що позначено зірочкою (*).

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете дізнатися більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, є непростим. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Для тих, хто в 7–9 класах вивчав алгебру за програмою поглибленого рівня, деякі теми цього підручника не є новими. За потреби можна звернутися до них для повторення раніше вивченого матеріалу.

Дерзайте! Бажаємо успіху!

ШАНОВНІ КОЛЕГИ ТА КОЛЕЖАНКИ!

Ми знаємо, що підготовка до уроку в класі з профільним рівнем вивчення математики — робота нелегка. Організація такого навчального процесу вимагає від вас великих зусиль, адже ви формуєте навчальний матеріал по крихтах, збираючи його в багатьох посібниках. Ми сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій та шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Матеріал рубрики «Коли зроблено уроки» може бути використаний для організації роботи математичного гуртка та факультативних занять.

Бажаємо творчого натхнення й терпіння.

Умовні позначення

n° завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} задачі для математичних гуртків і факультативів;

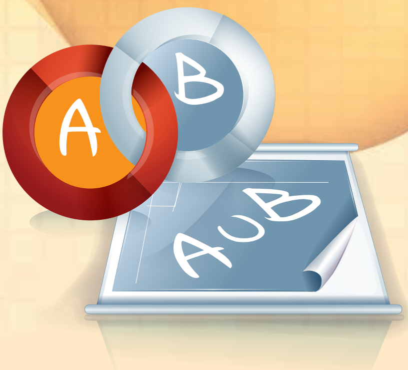
ключові задачі, результати яких можуть бути використані під час розв'язування інших задач;

◄ закінчення доведення теореми, розв'язання задачі;

рубрика «Коли зроблено уроки».

Зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які можна розв'язувати усно.

§ 1 ПОВТОРЕННЯ ТА РОЗШИРЕННЯ ВІДОМОСТЕЙ ПРО МНОЖИНИ ТА ФУНКЦІЇ



1. **Множини. Операції над множинами**
2. **Функція та її властивості**
3. **Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень**
4. **Обернена функція**
5. **Метод інтервалів**
6. **Ділення многочленів. Теорема Безу**
7. **Метод математичної індукції**

- У цьому параграфі ви повторите основні відомості про множини та функції, рівняння та нерівності; дізнаєтеся, яку функцію називають оборотною, які функції називають взаємно оберненими.
- Ознайомитеся з новими методами побудови графіків функцій за допомогою перетворень.

1. Множини. Операції над множинами

З поняттям множини ви ознайомилися в курсі алгебри 8 класу. Нагадаємо й уточнимо основні відомості.

Часто в повсякденному житті об'єднані за деякою ознакою об'єкти ми називаємо *групою, об'єднанням, колекцією, сукупністю* тощо. Для цих слів у математиці існує синонім — **множина**.

Наведемо кілька прикладів множин:

- множина літер української мови;
- множина областей України.

Окремим найважливішим множинам присвоєно загальноприйняті назви та позначення:

множина точок площини — **геометрична фігура**;

- множина натуральних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{N}$;
- множина цілих чисел, яку позначають буквою $\mathbb{Z}$;
- множина раціональних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{Q}$;
- множина дійсних чисел, яку позначають буквою $\mathbb{R}$.

Якщо елемент a належить множині A, то пишуть: $a \in A$ (читають: «a належить множині A»). Якщо елемент b не належить множині A, то пишуть: $b \notin A$ (читають: «b не належить множині A»).

Наприклад, $12 \in \mathbb{N}$, $-3 \notin \mathbb{N}$, $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $a \in \{a, b, c\}$.

Найчастіше множину задають одним із двох таких способів.

Перший спосіб полягає в тому, що множину задають указанням (переліком) усіх її елементів. Наприклад, якщо M — множина натуральних чисел, які менші від 5, то пишуть: $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

Другий спосіб полягає в тому, що вказують **характеристичну властивість** елементів множини, тобто властивість, яку мають усі елементи даної множини й тільки вони.

Якщо x — довільний елемент множини A, яку задано за допомогою характеристичної властивості її елементів, то пишуть: $A = \{x \mid \dots\}$. Тут після вертикальної риси вказують умову, яку має задовольняти елемент x, щоб належати множині A.

Розглянемо кілька прикладів.

- $\{x \mid x = 3n, n \in \mathbb{N}\}$ — множина натуральних чисел, кратних 3.
- $\{x \mid x(x^2 - 1) = 0\}$ — множина коренів рівняння $x(x^2 - 1) = 0$.

Означення. **Множину B називають підмножиною множини A, якщо кожний елемент множини B є елементом множини A.**

Це записують так: $B \subset A$ або $A \supset B$ (читають: «множина B — підмножина множини A» або «множина A містить множину B»).

Розглянемо приклади:

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$; $\mathbb{Q} \supset \mathbb{N}$; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$;
- $\{x \mid 2x - 1 = 0\} \subset \left\{x \mid x^2 = \frac{1}{4}\right\}$;
- $\{a\} \subset \{a, b\}$.

Для ілюстрації співвідношень між множинами користуються схемами, які називають **діаграмами Ейлера**.

На рисунку 1.1 зображено множину A (більший круг) і множину B (менший круг, який міститься в більшому). Ця схема означає, що $B \subset A$.

На рисунку 1.2 за допомогою діаграм Ейлера показано співвідношення між множинами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$.

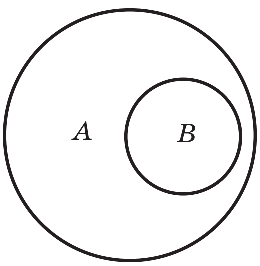


Рис. 1.1

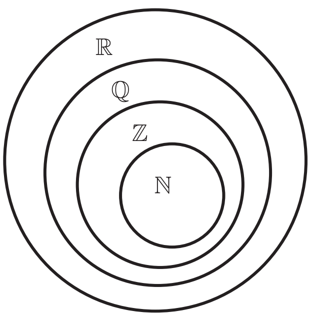


Рис. 1.2

Зауважимо, що коли $A \subset B$ і $B \subset A$, то $A = B$.

Означення. **Множину, яка не містить жодного елемента, називають порожньою множиною та позначають $\varnothing$.**

Порожню множину вважають підмножиною будь-якої множини, тобто для будь-якої множини A справедливим є твердження: $\varnothing \subset A$.

Будь-яка множина A є підмножиною самої себе, тобто $A \subset A$.

Означення. **Якщо $B \subset A$ і $B \neq A$, то множину B називають власною підмножиною множини A.**

Наприклад, множина $\mathbb{Z}$ є власною підмножиною множини $\mathbb{Q}$.

Означення. Перерізом множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать і множині A, і множині B.

Переріз множин A і B позначають так: $A \cap B$. З означення випливає, що

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}.$$

Якщо множини A і B не мають спільних елементів, то їхнім перерізом є порожня множина, тобто $A \cap B = \varnothing$. Також зазначимо, що $A \cap \varnothing = \varnothing$.

З означення перерізу двох множин випливає, що коли $A \subset B$, то $A \cap B = A$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \cap A = A$.

Наприклад, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$.

Переріз множин зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера. На рисунку 1.3 заштрихована фігура зображує множину $A \cap B$.

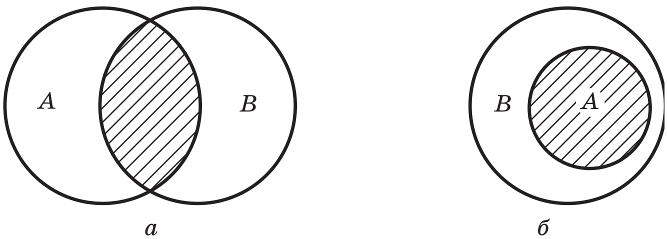


Рис. 1.3

Означення. Об'єднанням множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать хоча б одній із цих множин: або множині A, або множині B.

Об'єднання множин A і B позначають так: $A \cup B$. З означення випливає, що

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}.$$

Зауважимо, що для будь-якої множини A виконується рівність $A \cup \varnothing = A$.

З означення об'єднання двох множин випливає, що коли $A \subset B$, то $A \cup B = B$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \cup A = A$.

Об'єднання множин зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера. На рисунку 1.4 заштрихована фігура зображує множину $A \cup B$.

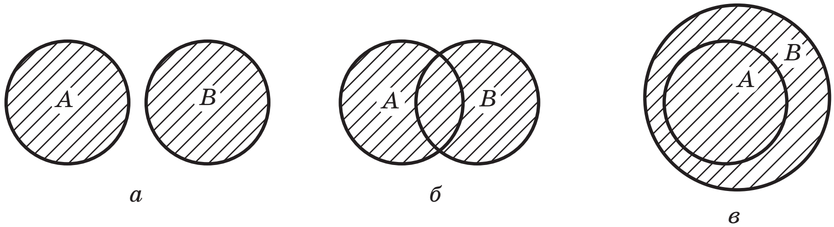


Рис. 1.4

Часто доводиться розглядати переріз та об'єднання трьох і більше множин.

Наприклад, переріз множин A, B і C — це множина всіх елементів, які належать і множині A, і множині B, і множині C (рис. 1.5).

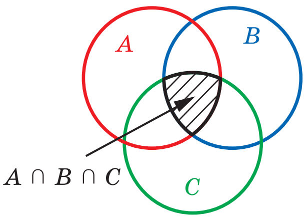


Рис. 1.5

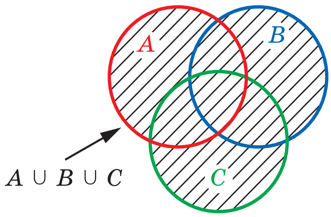


Рис. 1.6

Об'єднання множин A, B і C — це множина всіх елементів, які належать хоча б одній із цих множин: або множині A, або множині B, або множині C (рис. 1.6).

Наприклад, об'єднання множин гострокутних, тупокутних і прямокутних трикутників — це множина всіх трикутників.

Якщо з множини $\mathbb{Z}$ вилучити множину $\mathbb{N}$, то отримаємо множину цілих недодатних чисел. Вона складається з усіх елементів множини $\mathbb{Z}$, які не належать множині $\mathbb{N}$. Говорять, що множина цілих недодатних чисел є **різницею** множин $\mathbb{Z}$ і $\mathbb{N}$.

Означення. Різницею множин A і B називають множину, що складається з усіх елементів, які належать множині A, але не належать множині B.

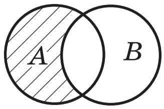
Різницю множин A і B позначають так: $A \setminus B$. З означення випливає, що

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}.$$

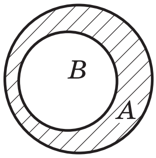
Зауважимо, що для будь-якої множини A виконується рівність $A \setminus \varnothing = A$.

З означення різниці двох множин випливає, що коли $A \subset B$, то $A \setminus B = \varnothing$, зокрема, якщо $B = A$, то $A \setminus A = \varnothing$.

Різницю множин зручно ілюструвати за допомогою діаграм Ейлера. На рисунку 1.7 заштрихована фігура зображує множину $A \setminus B$.



а



б

Рис. 1.7

У випадку, коли множина B є підмножиною множини A, різницю $A \setminus B$ називають **доповненням** множини B до множини A. На рисунку 1.7, *б* цю множину зображено штриховкою. Наприклад, доповненням множини непарних чисел до множини натуральних чисел є множина парних чисел.

?

1. Як позначають множини натуральних, цілих, раціональних і дійсних чисел?
2. Які існують способи задання множин?
3. Яку множину називають підмножиною даної множини?
4. Як наочно ілюструють співвідношення між множинами?
5. Що називають перерізом двох множин? об'єднанням двох множин? різницею двох множин? доповненням множини?

ВПРАВИ

1.1.° Нехай $A \neq \varnothing$. Які дві різні підмножини завжди має множина A?

1.2.° Чи є рівними множини A і B:

1) $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 1\}$;
2) $A = \{(0; 1)\}$, $B = \{(1; 0)\}$;
3) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \text{ кратне } 2 \text{ і } 3\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \text{ кратне } 6\}$?

1.3.° Чи є рівними множини A і B:

1) $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}\}$;
2) $A = \{x \mid x \leqslant 3, x \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid x < 4, x \in \mathbb{Z}\}$;
3) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leqslant 15, x = 19k, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3 < x < 4\}$?

1.4.° Які з наведених множин дорівнюють порожній множині:
1) $A = \{x \mid x \neq x\}$;
2) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ x - 4 = 0\}$;
3) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ |x| < 1\}$?

1.5.° Які з наведених тверджень є правильними:
1) $\{a\} \in \{a, b\}$; 2) $\{a\} \subset \{a, b\}$; 3) $a \subset \{a, b\}$; 4) $\{a, b\} \in \{a, b\}$?

1.6.° Доведіть, що коли $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$.

1.7.° Запишіть за допомогою символу $\subset$ співвідношення між множинами:
$A = \{x \mid x = 2n,\ n \in \mathbb{N}\}$;
$B = \{x \mid x = 50n,\ n \in \mathbb{N}\}$;
$C = \{x \mid x = 10n,\ n \in \mathbb{N}\}$;
$D = \{x \mid x = 5n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

1.8.° Яка з множин — A або B — є підмножиною другої, якщо $A = \{x \mid x = 4n + 2,\ n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 8n + 2,\ n \in \mathbb{N}\}$?

1.9.° Дано множини $\{7\}$, $\{11\}$, $\{19\}$, $\{7, 11\}$, $\{7, 19\}$, $\{11, 19\}$, $\varnothing$, які є всіма власними підмножинами деякої множини A. Запишіть множину A.

1.10.° Назвіть усі підмножини множини $\{1, 2\}$.

1.11.° Які з наведених тверджень є правильними:
1) $\{a, b\} \cap \{a\} = a$;
2) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a, b\}$;
3) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{a\}$;
4) $\{a, b\} \cap \{a\} = \{b\}$?

1.12.° Які з наведених тверджень є правильними:
1) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{a, b\}$;
2) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{b\}$;
3) $\{a, b\} \cup \{a\} = \{a\}$;
4) $\{a, b\} \cup \{b\} = \{\{b\}\}$?

1.13.° Знайдіть переріз множин A і B, якщо:
1) $A = \{x \mid x < 19\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x > 11\}$;
2) $A = \{x \mid x = 4n,\ n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x = 6n,\ n \in \mathbb{N}\}$;
3) $A = \{(x, y) \mid 2x - y = 1\}$, $B = \{(x, y) \mid x + y = 5\}$.

1.14.° Знайдіть об'єднання множин A і B, якщо:
1) $A = \{x \mid x^2 - 1 = 0\}$, $B = \{x \mid (x - 1)(x - 2) = 0\}$;
2) $A = \{x \mid 2x + 3 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + 3 = 2\}$;
3) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x < 5\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x < 7\}$.

1.15.° Які з наведених тверджень є правильними:
1) $\{a, b\} \setminus \{a\} = a$;
2) $\{a, b\} \setminus \{a\} = \{a, b\}$;
3) $\{a, b\} \setminus \{a\} = \{a\}$;
4) $\{a, b\} \setminus \{a\} = \{b\}$?

1.16.° Знайдіть різницю множин A і B, якщо:
1) $A = \mathbb{N}$, $B = \{x \mid x = 2n,\ n \in \mathbb{N}\}$;
2) A — множина одноцифрових чисел, B — множина простих чисел;

3) A — множина рівносторонніх трикутників, B — множина рівнобедрених трикутників;
4) A — множина рівнобедрених трикутників, B — множина рівносторонніх трикутників.

1.17.• Нехай A — множина цифр десяткової системи числення, B — множина, що складається із цифр 1, 3 і 5. Укажіть множину, яка є доповненням множини B до множини A.

1.18.• Відомо, що для будь-якої множини B множина A є її підмножиною. Знайдіть множину A.

1.19.• Відомо, що для будь-якої множини B виконується рівність $A \cap B = A$. Знайдіть множину A.

1.20.• Відомо, що для будь-якої множини B виконується рівність $A \cup B = B$. Знайдіть множину A.

1.21.•• Знайдіть підмножини A і B множини C такі, що для будь-якої підмножини X множини C виконується рівність $X \cap A = X \cup B$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

1.22. При яких значеннях змінної має зміст вираз:

1) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$;
2) $\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{1}{x}$;
3) $\sqrt{7x-42}+\dfrac{1}{x^2-8x}$;
4) $\dfrac{x+2}{\sqrt{35+2x-x^2}}+\dfrac{2}{\sqrt{8-4x}}$?

2. Функція та її властивості

З поняттям функції та з деякими її властивостями ви ознайомились у курсі алгебри 7–9 класів.

Нехай X — множина значень незалежної змінної, Y — множина значень залежної змінної. Функція — це правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з множини X можна знайти єдине значення залежної змінної з множини Y.

Іншими словами: **функція — це правило, яке кожному елементу множини X ставить у відповідність єдиний елемент множини Y.**

Якщо розглядають функцію f із незалежною змінною x і залежною змінною y, то говорять, що змінна y **функціонально залежить** від змінної x. У такому випадку записують: $y = f(x)$.

Незалежну змінну ще називають **аргументом функції.**

Множину всіх значень, яких набуває аргумент, тобто множину X, називають **областю визначення функції** та позначають $D(f)$ або $D(y)$.

Множину всіх значень, яких набуває залежна змінна, тобто множину Y, називають **областю значень функції** та позначають $E(f)$ або $E(y)$.

Функцію можна задати одним із таких способів:

- описово;
- за допомогою формули;
- за допомогою таблиці;
- графічно.

Найчастіше функцію задають за допомогою формули. Якщо при цьому не вказано область визначення, то вважають, що областю визначення функції є множина значень аргументу, при яких формула має зміст.

Наприклад, якщо функцію задано формулою $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, то її областю визначення є область визначення виразу $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, тобто проміжок $(1; +\infty)$.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть область значень функції $y=\frac{2x}{1+x^2}$.

Розв'язання. Нехай a — довільний елемент області значень даної функції, тобто $a \in E(y)$. Тоді задача зводиться до знаходження всіх значень параметра a, при яких рівняння $\frac{2x}{1+x^2}=a$ має розв'язки.

Це рівняння рівносильне такому:

$$2x=a+ax^2, \text{ звідки } ax^2-2x+a=0.$$

Якщо $a=0$, то отримане рівняння має корінь $x=0$. Отже, число 0 входить в область значень функції.

Якщо $a \neq 0$, то це рівняння є квадратним, і наявність коренів визначається умовою $D \geqslant 0$.

Маємо: $D=4-4a^2$. Залишається розв'язати нерівність $4-4a^2 \geqslant 0$.

Отримуємо: $4a^2 \leqslant 4$; $a^2 \leqslant 1$; $|a| \leqslant 1$.

Множиною розв'язків останньої нерівності є проміжок $[-1; 1]$.

Отже, $E(y)=[-1; 1]$. ◄

У курсі алгебри 9 класу для дослідження функції ви користувалися такими поняттями, як *нулі функції, проміжки знакосталості, проміжки зростання і спадання*.

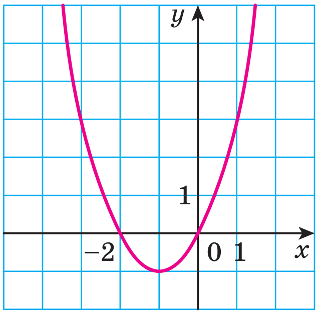


Рис. 2.1

Наприклад, для функції $y = x^2 + 2x$, графік якої зображено на рисунку 2.1, маємо:

- нулі — числа -2 і 0;
- проміжки знакосталості — функція набуває додатних значень на кожному з проміжків $(-\infty; -2)$ і $(0; +\infty)$, а від'ємних значень — на проміжку $(-2; 0)$;
- функція спадає на проміжку $(-\infty; -1]$ і зростає на проміжку $[-1; +\infty)$.

Наведений вище перелік аж ніяк не вичерпує тих властивостей, які доцільно вивчати під час дослідження функції. Розглянемо нові поняття, які допомагають повніше охарактеризувати функцію.

Означення. Число $f(x_0)$ називають найбільшим значенням функції f на множині $M \subset D(f)$, якщо існує таке число $x_0 \in M$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$.

Позначають: $\max\limits_M f(x) = f(x_0)$.

Означення. Число $f(x_0)$ називають найменшим значенням функції f на множині $M \subset D(f)$, якщо існує таке число $x_0 \in M$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \leqslant f(x)$.

Позначають: $\min\limits_M f(x) = f(x_0)$.

Розглянемо кілька прикладів.

Для $f(x) = \sqrt{x}$ і множини $M = [0; 4]$ (рис. 2.2) маємо:

$$\min_{[0;\,4]} f(x) = f(0) = 0, \quad \max_{[0;\,4]} f(x) = f(4) = 2.$$

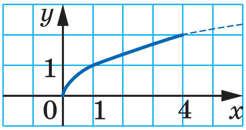


Рис. 2.2

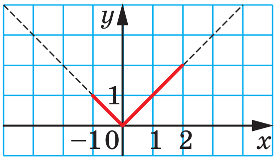


Рис. 2.3

Для $f(x) = |x|$ і множини $M = [-1;\ 2]$ (рис. 2.3) маємо:

$$\min_{[-1;\ 2]} f(x) = f(0) = 0, \quad \max_{[-1;\ 2]} f(x) = f(2) = 2.$$

Якщо c — деяке число і $f(x) = c$ для будь-якого $x \in M$, то число c є і найбільшим, і найменшим значеннями функції f на множині M.

Якщо множина M — це область визначення функції, то, записуючи найбільше і найменше значення функції, множину M можна не вказувати.

Не будь-яка функція на заданій множині M має найменше або найбільше значення. Так, для функції $f(x) = x^2$ маємо $\min x^2 = 0$. Найбільшого значення на множині $\mathbb{R}$ ця функція не має (рис. 2.4).

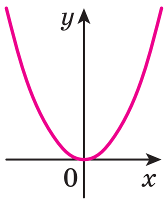


Рис. 2.4

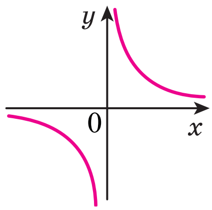


Рис. 2.5

Функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на множині $M = (0;\ +\infty)$ не має ні найбільшого, ні найменшого значень (рис. 2.5).

Часто для знаходження найбільшого і найменшого значень функції зручно користуватися такими очевидними фактами:

- *якщо функція f зростає на проміжку* $[a;\ b]$, *то* $\min\limits_{[a;\ b]} f(x) = f(a)$, $\max\limits_{[a;\ b]} f(x) = f(b)$ (рис. 2.6);
- *якщо функція f спадає на проміжку* $[a;\ b]$, *то* $\min\limits_{[a;\ b]} f(x) = f(b)$, $\max\limits_{[a;\ b]} f(x) = f(a)$ (рис. 2.7).

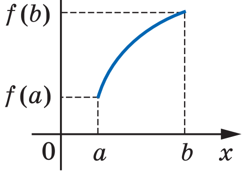


Рис. 2.6

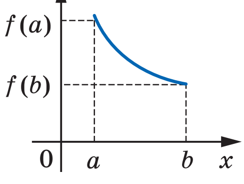


Рис. 2.7

Означення. **Функцію f називають парною, якщо для будь-якого x із області визначення виконується рівність $f(-x) = f(x)$.**

Означення. **Функцію f називають непарною, якщо для будь-якого x із області визначення виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.**

Наприклад, функція $f(x) = x^2$ — парна, а функція $g(x) = x^3$ — непарна. Справді, $D(f) = \mathbb{R}$, $D(g) = \mathbb{R}$. Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконуються рівності $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ і $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$.

Очевидно, що функція $y = 0$, у якої $D(y) = \mathbb{R}$, одночасно є і парною, і непарною.

Виконання рівності $f(-x) = f(x)$ або рівності $f(-x) = -f(x)$ для будь-якого $x \in D(f)$ означає, що область визначення функції f має таку властивість: якщо $x_0 \in D(f)$, то $-x_0 \in D(f)$. Таку область визначення функції називають **симетричною відносно початку координат**.

З наведених означень випливає, що коли область визначення функції не є симетричною відносно початку координат, то ця функція не може бути парною (непарною).

Наприклад, областю визначення функції $y = \frac{1}{x-1}$ є множина $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, яка не є симетричною відносно початку координат. Таким чином, ця функція не є ні парною, ні непарною.

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що функція $f(x) = x^3 - x$ є непарною.

Розв'язання. Оскільки $D(f) = \mathbb{R}$, то область визначення функції f є симетричною відносно початку координат.

Для будь-якого $x \in D(f)$ маємо: $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x)$.

Отже, функція f є непарною. ◄

ПРИКЛАД 3 Дослідіть на парність функцію

$$f(x) = \frac{|x-2|}{1+x} + \frac{|x+2|}{1-x}.$$

Розв'язання. Маємо: $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. Отже, область визначення функції f симетрична відносно початку координат.

Для будь-якого $x \in D(f)$ маємо:

$$f(-x) = \frac{|-x-2|}{1-x} + \frac{|-x+2|}{1-(-x)} = \frac{|x+2|}{1-x} + \frac{|x-2|}{1+x} = f(x).$$

Таким чином, функція f є парною. ◄

Теорема 2.1. ***Вісь ординат є віссю симетрії графіка парної функції.***

Доведення. Для доведення теореми достатньо показати, що коли точка $M(a; b)$ належить графіку парної функції, то точка $M_1(-a; b)$ також належить її графіку.

Якщо точка $M(a; b)$ належить графіку функції f, то $f(a) = b$. Оскільки функція f є парною, то $f(-a) = f(a) = b$. Це означає, що точка $M_1(-a; b)$ також належить графіку функції f (рис. 2.8). ◄

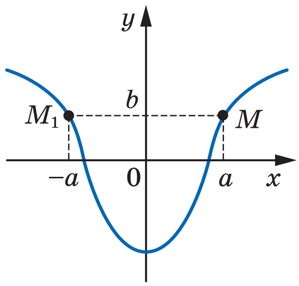


Рис. 2.8

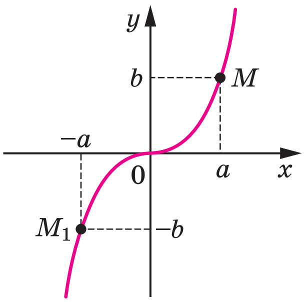


Рис. 2.9

Теорема 2.2. ***Початок координат є центром симетрії графіка непарної функції.***

Твердження теореми проілюстровано на рисунку 2.9.

Доведіть цю теорему самостійно.

Очевидно, що функція $y = 0$, у якої $D(f) = \mathbb{R}$, одночасно є і парною, і непарною.

?

1. Що називають функцією?
2. Назвіть способи задання функції.
3. Яке число називають найбільшим (найменшим) значенням функції на множині M?
4. Яку функцію називають парною? непарною?
5. Яку властивість має графік парної функції? непарної функції?

ВПРАВИ

2.1.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \dfrac{x}{|x| - 7}$;

2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2}} + \dfrac{4x-3}{x^2 - 7x + 6}$.

2.2.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{x+4} + \frac{2}{x+1}$; 2) $f(x) = \sqrt{8-x} + \frac{4}{x^2-8x}$.

2.3.° Знайдіть область значень функції:

1) $f(x) = 5 - x^2$; 2) $f(x) = |x+2| + 2$; 3) $f(x) = \sqrt{-x^2}$.

2.4.° Знайдіть область значень функції:

1) $f(x) = x^2 + 3$; 2) $f(x) = 6 - \sqrt{x}$; 3) $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$.

2.5.° Знайдіть нулі функції:

1) $y = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}$; 3) $y = |x| - x$.

2) $y = x\sqrt{x-1}$;

2.6.° Знайдіть нулі функції:

1) $y = |x| + x$; 2) $y = \frac{x^2-9}{\sqrt{x-2}}$.

2.7.° Знайдіть проміжки знакосталості функції:

1) $y = \sqrt{x-1}$; 2) $y = |x+1|$; 3) $y = \sqrt{x(x-1)^2}$.

2.8.° Знайдіть проміжки знакосталості функції:

1) $y = \sqrt{x} + 2$; 2) $y = |x^2 - 4|$; 3) $y = \sqrt{(x-1)(x-3)^2}$.

2.9.• Функція f є парною. Чи може виконуватися рівність:

1) $f(2) - f(-2) = 1$; 2) $f(5)\ f(-5) = -2$;

3) $\frac{f(1)}{f(-1)} = 0$?

2.10.• Функція f є непарною. Чи може виконуватися рівність:

1) $f(1) + f(-1) = 1$; 2) $f(2)\ f(-2) = 3$; 3) $\frac{f(-2)}{f(2)} = 0$?

2.11.• Доведіть, що функція є парною:

1) $f(x) = -3x^2 + |x| - 1$;

2) $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}}$;

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5} + \sqrt{x^2 + 3x + 5}$;

4) $f(x) = (x+2)|x-4| - (x-2)|x+4|$.

2.12.• Доведіть, що функція є непарною:

1) $g(x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}$; 3) $g(x) = \frac{|4x-1| - |4x+1|}{x^4 - 1}$;

2) $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{3-x} - \sqrt{3+x}}$; 4) $g(x) = \frac{3x+2}{x^2-x+1} + \frac{3x-2}{x^2+x+1}$.

2.13.• Дослідіть на парність функцію:

1) $y = \dfrac{x-1}{x-1}$; 2) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2-1}$; 3) $y = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}$.

2.14.• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{4-|x|} + \dfrac{1}{x+2}$; 3) $y = \sqrt{|x+1|(x-3)}$.

2) $y = \sqrt{|x|-3} + \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$;

2.15.• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x|-1}} + \sqrt{x+4}$; 3) $y = \sqrt{(x+4)^2(x-3)}$.

2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^2(x+3)}}$;

2.16.•• Знайдіть $\max\limits_M f(x)$ і $\min\limits_M f(x)$, якщо:

1) $f(x) = x^2 - 6x + 10$, $M = \mathbb{R}$; 2) $f(x) = \sqrt{16-x^2}$, $M = D(f)$.

2.17.•• Знайдіть $\max\limits_M f(x)$ і $\min\limits_M f(x)$, якщо:

1) $f(x) = -x^2 - 8x - 3$, $M = \mathbb{R}$; 2) $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$, $M = D(f)$.

2.18.•• Непарна функція f є такою, що $0 \in D(f)$. Знайдіть $f(0)$.

2.19.•• Непарна функція f має 4 нулі. Доведіть, що $0 \notin D(f)$.

2.20.•• Непарна функція f має 7 нулів. Знайдіть $f(0)$.

2.21.•• Парна функція f має 7 нулів. Знайдіть $f(0)$.

2.22.•• Функція f є парною, $\min\limits_{[1;\,3]} f(x) = 2$ і $\max\limits_{[1;\,3]} f(x) = 5$. Знайдіть $\min\limits_{[-3;\,-1]} f(x)$, $\max\limits_{[-3;\,-1]} f(x)$.

2.23.•• Функція f є непарною, $\min\limits_{[2;\,5]} f(x) = 1$ і $\max\limits_{[2;\,5]} f(x) = 3$. Знайдіть $\min\limits_{[-5;\,-2]} f(x)$, $\max\limits_{[-5;\,-2]} f(x)$.

2.24.•• Знайдіть область значень функції:

1) $y = -2x^2 + 3x - 4$; 2) $y = \dfrac{3x+1}{2x+3}$; 3) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$.

2.25.•• Знайдіть область значень функції:

1) $y = 5x^2 - x + 1$; 2) $y = \dfrac{2x-1}{5x+4}$; 3) $y = 4x + \dfrac{1}{x}$.

2.26.•• Знайдіть:

1) $\min\limits_{\mathbb{R}}\left(|x-1|+|x-3|\right)$;

2) $\max\limits_{\mathbb{R}}\left(|x+2|-|x|\right)$;

3) $\max\limits_{\mathbb{R}}\dfrac{1}{x^2+1}$.

2.27.* Розв'яжіть рівняння $|x+1|-|x|=\sqrt{x^4+1}$.

2.28.* Розв'яжіть рівняння $|x-1|+|x+2|=\sqrt{9-x^2}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

2.29. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{x^2}{x-4}=\dfrac{4x}{x-4}$;

2) $\dfrac{4}{(x+1)^2}+\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{1}{1-x}=0$.

2.30. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2+x-6\leqslant 0, \\ x>0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2-x-12\geqslant 0, \\ 10-3x-x^2>0. \end{cases}$

3. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень

У 9 класі ви навчилися за допомогою графіка функції $y=f(x)$ будувати графіки функцій $y=f(x)+b$, $y=f(x+a)$, $y=kf(x)$.

Покажемо, як можна побудувати графік функції $y=f(kx)$, якщо відомо графік функції $y=f(x)$.

Розглянемо випадок, коли $k>0$. Якщо точка $(x_0;\ y_0)$ належить графіку функції $y=f(x)$, то точка $\left(\dfrac{x_0}{k};\ y_0\right)$ належить графіку функції $y=f(kx)$. Справді, при $x=\dfrac{x_0}{k}$ маємо: $f(kx)=f\left(k\cdot\dfrac{x_0}{k}\right)=f(x_0)=y_0$.

Отже, кожній точці $(x_0;\ y_0)$ графіка функції $y=f(x)$ відповідає єдина точка $\left(\dfrac{x_0}{k};\ y_0\right)$ графіка функції $y=f(kx)$. Аналогічно кожна точка $(x_1;\ y_1)$ графіка функції $y=f(kx)$ є відповідною єдиній точці $(kx_1;\ y_1)$ графіка функції $y=f(x)$.

Таким чином, ***графік функції $y = f(kx)$, де $k > 0$, можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f(x)$ на точку з тією самою ординатою та з абсцисою, поділеною на k.***

На рисунку 3.1 показано, як можна використати це правило для побудови графіків функцій $y = \sqrt{2x}$ і $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$.

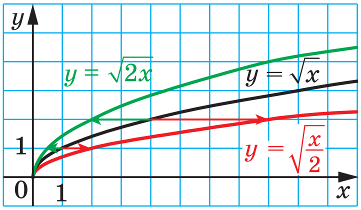


Рис. 3.1

Говорять, що графік функції $y = f(kx)$ отримано з графіка функції $y = f(x)$ у результаті **стискання в k разів до осі ординат**, якщо $k > 1$, або в результаті **розтягнення в $\frac{1}{k}$ раза від осі ординат**, якщо $0 < k < 1$.

Так, графік функції $y = \sqrt{2x}$ отримано в результаті стискання графіка функції $y = \sqrt{x}$ у 2 рази до осі ординат, а графік функції $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$ — у результаті розтягнення графіка функції $y = \sqrt{x}$ у 2 рази від осі ординат.

Покажемо, як побудувати графік функції $y = f(-x)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$.

Якщо точка $(x_0;\ y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$, то точка $(-x_0;\ y_0)$ належить графіку функції $y = f(-x)$. Справді, $f(-(-x_0)) = f(x_0) = y_0$.

Отже, кожній точці $(x_0;\ y_0)$ графіка функції $y = f(x)$ відповідає єдина точка $(-x_0;\ y_0)$ графіка функції $y = f(-x)$. Аналогічно можна показати, що кожна точка $(x_1;\ y_1)$ графіка функції $y = f(-x)$ є відповідною єдиній точці $(-x_1;\ y_1)$ графіка функції $y = f(x)$.

Таким чином, ***графік функції $y = f(-x)$ можна отримати, відобразивши графік функції $y = f(x)$ симетрично відносно осі ординат.***

Таке перетворення графіка функції $y = f(x)$ називають **симетрією відносно осі ординат**.

На рисунку 3.2 показано, як за допомогою графіка функції $y = \sqrt{x}$ побудовано графік функції $y = \sqrt{-x}$.

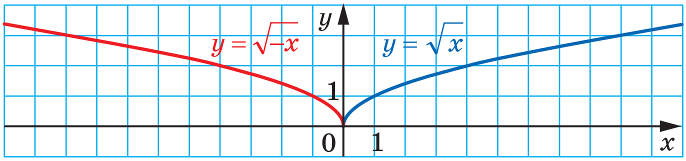


Рис. 3.2

Тепер стає зрозумілим, що правило побудови графіка функції $y = f(kx)$, де $k < 0$, є таким самим, як і для випадку $k > 0$. Наприклад, на рисунку 3.3 показано, як за допомогою графіка функції $y = \sqrt{x}$ можна побудувати графіки функцій $y = \sqrt{-3x}$ і $y = \sqrt{-\frac{x}{2}}$.

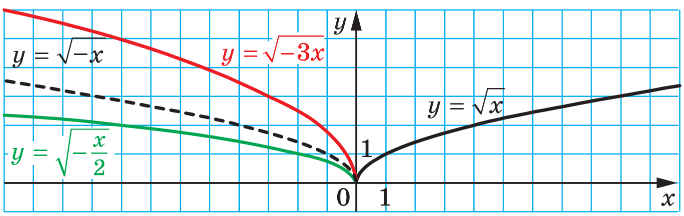


Рис. 3.3

ПРИКЛАД 1 Побудуйте графік функції $y = \sqrt{3x - 2}$.

Розв'язання. Схема побудови має такий вигляд:

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{перенесення вправо на 2 од.}} y = \sqrt{x - 2} \xrightarrow{\text{стискання в 3 рази до осі ординат}} y = \sqrt{3x - 2}$$

На рисунку 3.4 показано побудову шуканого графіка.

Якщо дану функцію подати у вигляді $y = \sqrt{3\left(x - \frac{2}{3}\right)}$, то побудову графіка можна вести й за такою схемою:

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{стискання в 3 рази до осі ординат}} y = \sqrt{3x} \xrightarrow{\text{перенесення вправо на } \frac{2}{3} \text{ од.}} y = \sqrt{3\left(x - \frac{2}{3}\right)}$$

На рисунку 3.5 показано побудову, проведену за цією схемою.

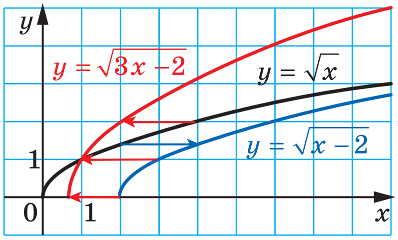


Рис. 3.4

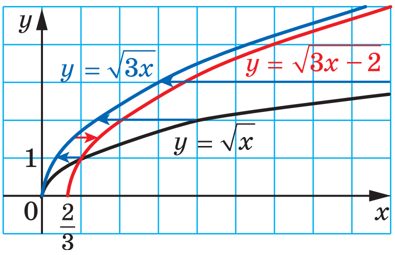


Рис. 3.5

ПРИКЛАД 2 Побудуйте графік функції $y=\sqrt{1-3x}$.

Розв'язання. Побудову графіка можна вести за такою схемою:

$$y=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{перенесення вліво на 1 од.}} y=\sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{симетрія відносно осі ординат}} y=\sqrt{-x+1} \xrightarrow{\text{стискання в 3 рази до осі ординат}} y=\sqrt{-3x+1}$$

На рисунку 3.6 показано побудову шуканого графіка.

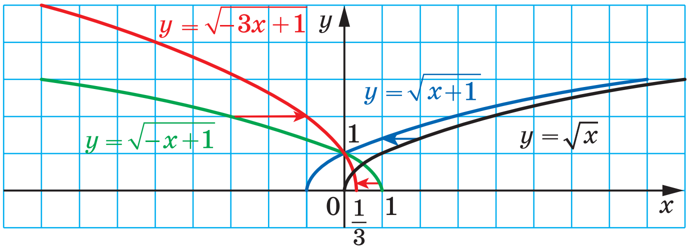


Рис. 3.6

Зауважимо, що можливі й інші схеми розв'язування цієї задачі, наприклад така:

$$y=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{перенесення вліво на 1 од.}} y=\sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{стискання в 3 рази до осі ординат}} y=\sqrt{3x+1} \xrightarrow{\text{симетрія відносно осі ординат}} y=\sqrt{-3x+1}$$

Цій схемі відповідає рисунок 3.7.

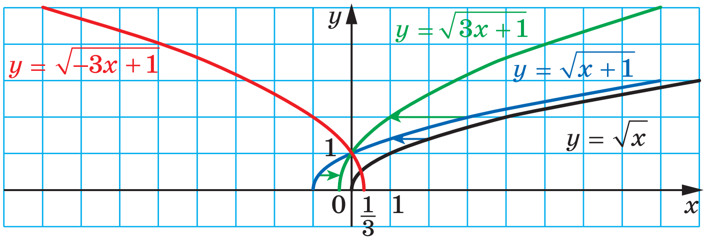


Рис. 3.7

Скориставшись означенням модуля, можна записати:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ f(-x), & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Звідси можна зробити висновок, що графік функції $y = f(|x|)$ при $x \geqslant 0$ збігається з графіком функції $y = f(x)$, а при $x < 0$ — з графіком функції $y = f(-x)$.

Тоді побудову графіка функції $y = f(|x|)$ можна проводити так:

1) побудувати ту частину графіка функції $y = f(x)$, усі точки якої мають невід'ємні абсциси;
2) побудувати ту частину графіка функції $y = f(-x)$, усі точки якої мають від'ємні абсциси.

Об'єднання цих двох побудованих фігур є графіком функції $y = f(|x|)$.

Зауважимо, що функція $y = f(|x|)$ є парною; тому вісь ординат є віссю симетрії її графіка. Тоді графік функції $y = f(|x|)$ можна отримати ще й таким чином:

1) побудувати ту частину графіка функції $y = f(x)$, усі точки якої мають невід'ємні абсциси;
2) побудувати фігуру, симетричну отриманій відносно осі ординат.

Об'єднання двох побудованих фігур є графіком функції $y = f(|x|)$.

На рисунку 3.8 показано, як за допомогою графіка функції $y = (x-2)^2$ побудовано графік функції $y = (|x|-2)^2$.

Для функції $y = |f(x)|$ запишемо:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) < 0. \end{cases}$$

Звідси можна дійти такого висновку: графік функції $y = |f(x)|$ при всіх x, для яких $f(x) \geqslant 0$, збігається з графіком функції

$y = f(x)$, а при всіх x, для яких $f(x) < 0$, — з графіком функції $y = -f(x)$.

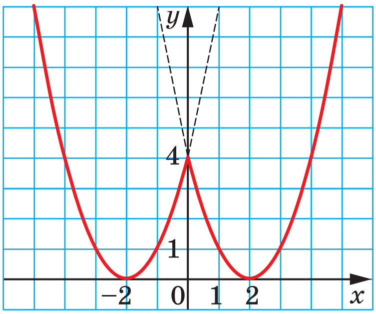


Рис. 3.8

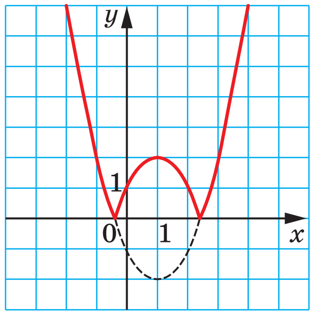


Рис. 3.9

Тоді побудову графіка функції $y = |f(x)|$ можна проводити так:

1) побудувати ту частину графіка функції $y = f(x)$, усі точки якої мають невід'ємні ординати;
2) побудувати ту частину графіка функції $y = -f(x)$, усі точки якої мають додатні ординати.

Об'єднання двох побудованих фігур є графіком функції $y = |f(x)|$.

Оскільки графіки функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$ симетричні відносно осі абсцис, то шуканий графік можна отримати ще й таким чином:

1) ту частину графіка функції $y = f(x)$, точки якої мають невід'ємні ординати, залишити без змін;
2) побудувати фігуру, симетричну відносно осі ординат тій частині графіка функції $y = f(x)$, точки якої мають від'ємні ординати.

Об'єднання цих двох побудованих фігур і становитиме графік функції $y = |f(x)|$.

На рисунку 3.9 показано, як за допомогою графіка функції $y = (x - 1)^2 - 2$ побудовано графік функції $y = |(x - 1)^2 - 2|$.

ПРИКЛАД 3 Побудуйте графік функції $y = \left|\sqrt{|x+1|} - 1\right|$.

Розв'язання. Побудову шуканого графіка можна подати у вигляді такої схеми:

$$y = \sqrt{|x|} \longrightarrow y = \sqrt{|x+1|} \longrightarrow y = \sqrt{|x+1|} - 1 \longrightarrow y = \left|\sqrt{|x+1|} - 1\right|$$

На рисунку 3.10 показано етапи побудови шуканого графіка. ◄

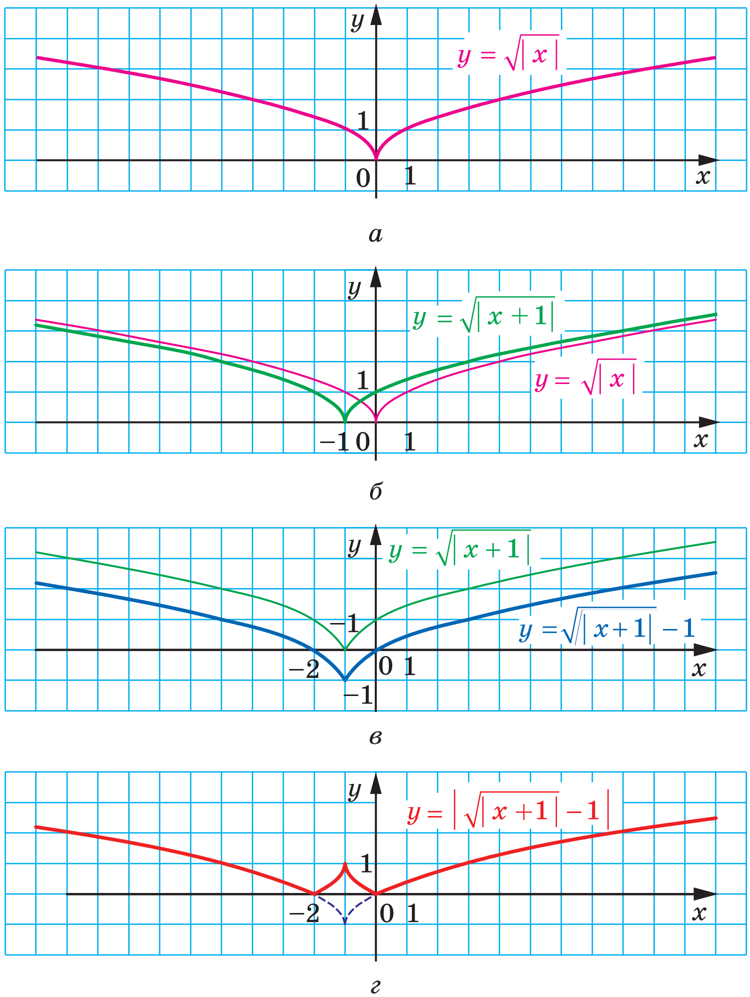


Рис. 3.10

ПРИКЛАД 4 При яких значеннях параметра a рівняння $|2|x|-1| = x - a$ має три корені?

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = |2|x|-1|$. Проведемо побудову її графіка за такою схемою:

$$y = 2x - 1 \to y = 2|x| - 1 \to y = |2|x| - 1|.$$

Графік функції f зображено на рисунку 3.11 червоним кольором.

Розглянемо функцію $g(x) = x - a$. Її графіком є пряма.

Задача зводиться до того, щоб знайти таке положення прямої $g(x) = x - a$, при якому графіки функцій f і g мають три спільні точки.

Ця умова виконується лише тоді, коли пряма $g(x) = x - a$ проходить через точку $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ або через точку (0; 1) (рис. 3.11).

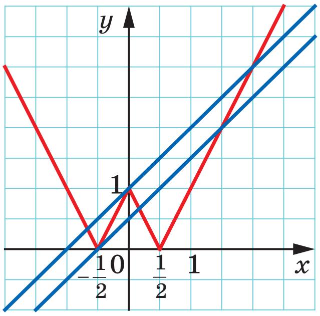


Рис. 3.11

Знайдемо значення параметра a, які відповідають цим положенням прямої.

Маємо: $\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} - a = 0, \\ 0 - a = 1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} a = -\frac{1}{2}, \\ a = -1. \end{array}\right.$

Відповідь: $a = -\frac{1}{2}$ або $a = -1$. ◄

?

1. Як можна побудувати графік функції $y = f(kx)$, використовуючи графік функції $y = f(x)$, якщо $k > 0$? $k < 0$?
2. Як можна побудувати графік функції $y = f(|x|)$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?
3. Як можна побудувати графік функції $y = |f(x)|$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?

ВПРАВИ

3.1.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{\frac{x}{5}}$; 2) $y = \sqrt{-2x}$; 3) $y = (2x - 1)^2 - 4$; 4) $y = \frac{1}{4x + 1}$.

3.2.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{5x}$; 2) $y = \sqrt{-\frac{x}{3}}$; 3) $y = (2x + 1)^2 + 4$; 4) $y = \frac{1}{1 - 3x}$.

3.3.° Побудуйте графік функції:

1) $y = |x^2 - 1|$; 2) $y = \left|\frac{2}{x - 1}\right|$; 3) $y = \left|\frac{x - 4}{x + 1}\right|$.

3.4.° Побудуйте графік функції:

1) $y = |\sqrt{x} - 1|$; 2) $y = \left|\frac{4}{x - 2}\right|$; 3) $y = \left|\frac{x + 2}{x - 3}\right|$.

3.5.• Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{2x-1}$;
2) $y=\sqrt{3-4x}$;
3) $y=\sqrt{\frac{1}{2}x+2}$;
4) $y=2\sqrt{3x-1}+1$.

3.6.• Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{3x+1}$; 2) $y=\sqrt{5-2x}$; 3) $y=2\,(3x-1)^2+1$.

3.7.• Побудуйте графік функції:

1) $y=(|x|-1)^2$; 2) $y=\sqrt{|x|+2}$; 3) $y=\dfrac{1}{|x|-3}$.

3.8.• Побудуйте графік функції:

1) $y=(|x|+2)^2$; 2) $y=\sqrt{|x|-3}$; 3) $y=\sqrt{2-|x|}$.

3.9.• Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{|x+2|}$; 2) $y=(|x-2|-1)^2$; 3) $y=\sqrt{|x-1|+2}$.

3.10.• Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{|x-3|}$; 2) $y=\sqrt{|x-2|-3}$; 3) $y=\dfrac{1}{|x-1|-4}$.

3.11.• Скільки коренів має рівняння залежно від значення параметра a:

1) $||x|-1|=a$;
2) $|(|x|-1)^2-1|=a$;
3) $|\sqrt{x}-2|=a$?

3.12.• Скільки коренів має рівняння залежно від значення параметра a:

1) $|x^2-1|=a$;
2) $|(x+2)^2-3|=a$;
3) $|(|x|-2)^2-3|=a$?

3.13.• Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{2|x|-1}$; 2) $y=\sqrt{1-3|x|}$; 3) $y=\sqrt{|2x-1|}$.

3.14.• Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{3|x|+1}$; 2) $y=\sqrt{|3x+1|}$.

3.15.•• При яких значеннях параметра a рівняння $||x-1|-1|=x-a$ має безліч коренів?

3.16.•• При яких значеннях параметра a рівняння $|3|x+1|-2|=a-x$ має 3 корені?

3.17.•• При яких значеннях параметра a рівняння $|2|x+a|-1|=x-1$ має єдиний корінь?

3.18.•• При яких значеннях параметра a рівняння $|3|x-a|-2|=2-x$ має єдиний корінь?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

3.19. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y - 7x = 3, \\ x^2 + 6xy - y^2 = 9; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy = 100, \\ y + x = 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y + xy = -15, \\ x^2y + xy^2 = -54. \end{cases}$

3.20. Із двох селищ, відстань між якими дорівнює 66 км, виїхали одночасно назустріч один одному два велосипедисти і зустрілися через 3 год. Знайдіть швидкість руху кожного велосипедиста, якщо один з них витрачає на весь шлях з одного селища в друге на 1 год 6 хв більше за другого учасника руху.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

3.21. Виразіть:

1) із рівності $y = \frac{x+7}{3}$ змінну x через змінну y;

2) із рівності $y = \frac{10}{x-2} + 6$ змінну x через змінну y;

3) із рівності $y = \frac{\sqrt{x+2}}{5} - 1$ змінну x через змінну y.

4. Обернена функція

На рисунках 4.1, 4.2 зображено графіки функцій f і g.

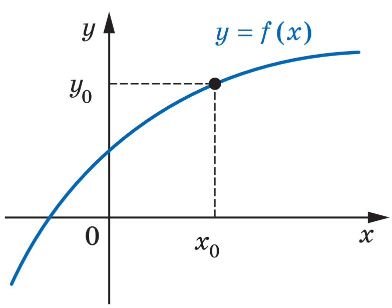


Рис. 4.1

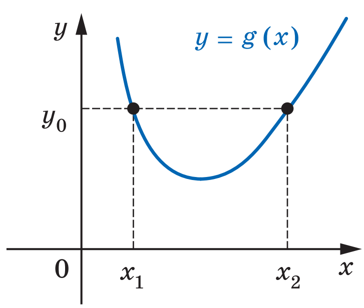


Рис. 4.2

Будь-яка горизонтальна пряма перетинає графік функції f не більше ніж в одній точці. Це означає, що кожному числу $y_0 \in E(f)$ відповідає єдине число $x_0 \in D(f)$ таке, що $y_0 = f(x_0)$. Функція g такої властивості не має. Справді, з рисунка 4.2 видно, що значенню y_0 відповідають два значення аргументу x_1 і x_2 такі, що $y_0 = g(x_1)$ і $y_0 = g(x_2)$.

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають оборотною, якщо для будь-якого $y_0 \in E(f)$ існує єдине $x_0 \in D(f)$ таке, що $y_0 = f(x_0)$.

Функція f (рис. 4.1) є оборотною. Функція g (рис. 4.2) не є оборотною.

Функції $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$ є прикладами оборотних функцій (рис. 4.3).

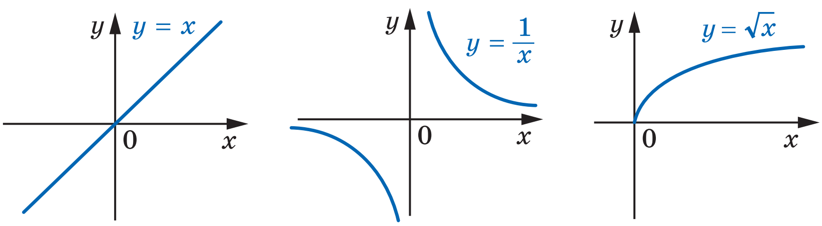


Рис. 4.3

Функція $y = x^2$ не є оборотною. Наприклад, значенню функції, яке дорівнює 4, відповідають два значення аргументу $x_1 = -2$ і $x_2 = 2$.

Теорема 4.1. ***Якщо функція є зростаючою (спадною), то вона є оборотною.***

Доведення. Припустимо, що існує зростаюча функція f, яка не є оборотною. Тоді знайдеться $y_0 \in E(f)$, для якого існують x_1 і x_2 ($x_1 < x_2$) такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y_0$. Разом з тим функція f — зростаюча, і з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $f(x_1) < f(x_2)$. Отримали суперечність.

Аналогічно можна розглянути випадок, коли функція f є спадною. ◄

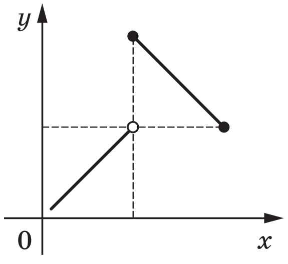


Рис. 4.4

Зазначимо, що твердження, обернене до сформульованого в теоремі 4.1, не є правильним, тобто не будь-яка оборотна функція є зростаючою (спадною). Наприклад, на рисунку 4.4 зображено графік оборотної функції, яка не є ні зростаючою, ні спадною.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, задану таблично:

x	**5**	**6**	**7**
y	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$

Функція f є оборотною.

Поміняємо рядки таблиці місцями та розглянемо функцію $y = g(x)$, задану отриманою таблицею:

x	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$
y	**5**	**6**	**7**

Функції f і g зв'язані такими властивостями:

1) $D(f) = E(g)$ і $E(f) = D(g)$;

2) $f(5) = \sqrt{5}$, $g\left(\sqrt{5}\right) = 5$;

$f(6) = \sqrt{6}$, $g\left(\sqrt{6}\right) = 5$;

$f(7) = \sqrt{7}$, $g\left(\sqrt{7}\right) = 7$.

Ці рівності означають, що коли $f(x_0) = y_0$, то $g(y_0) = x_0$.

Означення. Функції f і g називають взаємно оберненими, якщо:

1) $D(f) = E(g)$ і $E(f) = D(g)$;

2) для будь-якого $x_0 \in D(f)$ із рівності $f(x_0) = y_0$ випливає, що $g(y_0) = x_0$, тобто $g(f(x_0)) = x_0$.

У таких випадках говорять, що функція g є **оберненою** до функції f, а функція f — **оберненою** до функції g. Функції f і g називають **взаємно оберненими**.

Таблично задані функції f і g, які розглянуто вище, є прикладами взаємно обернених функцій.

Зазначимо, що другу умову в означенні взаємно обернених функцій можна замінити на таку: для будь-якого $x_0 \in D(g)$ із рівності $g(x_0) = y_0$ випливає, що $f(y_0) = x_0$, тобто $f(g(x_0)) = x_0$.

ПРИКЛАД Доведіть, що функції $f(x) = 2x - 1$ і $g(x) = \frac{x+1}{2}$ є взаємно оберненими.

Розв'язання. Маємо: $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$, $E(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

Нехай $f(x_0) = y_0$, тобто $y_0 = 2x_0 - 1$. Доведемо, що $g(y_0) = x_0$.

Справді, $g(y_0) = \frac{y_0 + 1}{2} = \frac{2x_0 - 1 + 1}{2} = x_0$. ◄

Коли функція f не є оборотною, то не існує функції, оберненої до неї. Будь-яка оборотна функція має обернену.

Нехай f — оборотна функція, а функція g — обернена до неї. Функція f — це деяке правило, що дає змогу за значеннями змінної x із множини $D(f)$ знайти відповідне значення змінної y із множини $E(f)$. Тоді з означення взаємно обернених функцій випливає, що обернена функція g — це правило, згідно з яким за значеннями змінної y можна знайти відповідне значення змінної x.

У розглянутому вище прикладі було доведено, що оберненою до функції $y = 2x - 1$ є функція $y = \frac{x+1}{2}$. Проте розв'язання цієї задачі не розкриває, як за даною функцією знайти обернену до неї. Покажемо, як це можна зробити, на прикладі функції $y = 2x - 1$.

Функція $y = 2x - 1$ зростаюча, тому вона є оборотною.

Щоб визначити обернену функцію, треба задати правило, згідно з яким за кожним значенням змінної y можна знайти таке значення змінної x, що $y = 2x - 1$.

Маємо: $2x = y + 1$, $x = \frac{y+1}{2}$.

Остання рівність задає функцію з аргументом y і залежною змінною x.

Традиційно незалежну змінну позначають літерою x, а залежну — літерою y. Дотримуючись цих позначень, можна сказати, що ми знайшли функцію, яку задано формулою $y = \frac{x+1}{2}$. Вона і є шуканою.

Розглянемо ще один приклад. Функція $y = x^2$ не є оборотною. Разом з тим ця функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Отже, функція $f(x) = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$, є оборотною. Також прийнято говорити, що функція $y = x^2$ є **оборотною на множині** $[0; +\infty)$. Знайдемо функцію, обернену до функції f.

Маємо: $y = x^2$, де $x \in [0; +\infty)$. Звідси $\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x$. Рівність $\sqrt{y} = x$ задає функцію з аргументом y і залежною змінною x.

Скориставшись традиційними позначеннями, отримаємо функцію $y = \sqrt{x}$, обернену до функції f.

Теорема 4.2. ***Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.***

Доведення. Нехай точка $M(a; b)$ належить графіку функції $y = f(x)$. Тоді $b = f(a)$. Якщо функція g є оберненою до функції f, то $g(b) = a$, тобто точка $N(b; a)$ належить графіку функції $y = g(x)$.

Покажемо, що точки M і N є симетричними відносно прямої $y = x$.

Якщо $a = b$, то точки M і N збігаються та належать прямій $y = x$.

При $a \neq b$ маємо (рис. 4.5): $ON = \sqrt{a^2 + b^2}$, $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$, тобто точка O рівновіддалена від кінців відрізка MN, а отже, належить серединному перпендикуляру відрізка MN. Середина K відрізка MN має координати $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$, тобто належить прямій $y = x$. Отже, пряма $y = x$ і є серединним перпендикуляром відрізка MN. ◀

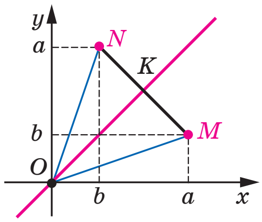


Рис. 4.5

Доведену теорему ілюструють графіки взаємно обернених функцій, які ми розглянули вище (рис. 4.6).

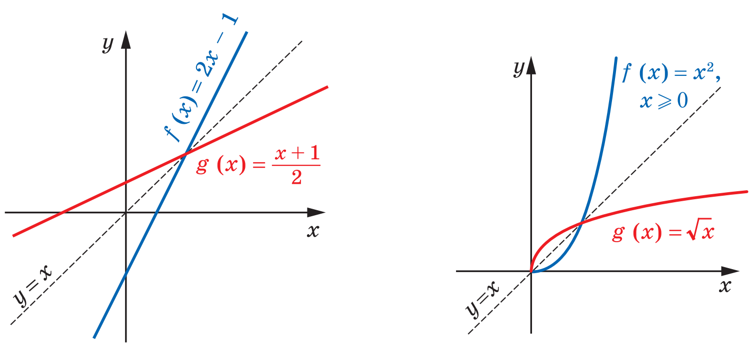


Рис. 4.6

Теорема 4.3. ***Якщо функція f є зростаючою (спадною), то обернена до неї функція g є також зростаючою (спадною).***

Доведення. Припустимо, що функція f зростаюча, але обернена до неї функція g не є зростаючою. Тоді знайдуться такі $y_1 \in D(g)$ і $y_2 \in D(g)$, що з нерівності $y_1 < y_2$ випливатиме нерівність $g(y_1) \geqslant g(y_2)$. Нехай $g(y_1) = x_1$, $g(y_2) = x_2$, тому $x_1 \geqslant x_2$. Оскільки функція f зростаюча, то $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, тобто $y_1 \geqslant y_2$. Отримали суперечність.

Для спадної функції міркуємо аналогічно. ◀

?

1. Яку функцію називають оборотною?
2. Сформулюйте теорему про оборотність зростаючої (спадної) функції.
3. Які дві функції називають взаємно оберненими?
4. Як розташовані графіки взаємно обернених функцій?
5. Якою є функція, обернена до зростаючої функції? до спадної функції?

ВПРАВИ

4.1.° Доведіть, що дана функція не є оборотною:

1) $y = |x|$; 2) $y = \frac{1}{x^4}$; 3) $y = 5$.

4.2.° Доведіть, що функції f і g є взаємно оберненими:

1) $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$, $g(x) = 3x - 1$;

2) $f(x) = \sqrt{x+2}$, $g(x) = x^2 - 2$, $D(g) = [0;\ +\infty)$.

4.3.° Доведіть, що функції f і g є взаємно оберненими:

1) $f(x) = 4x + 2$, $g(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$;

2) $f(x) = (x-3)^2$, $D(f) = [3;\ +\infty)$, $g(x) = \sqrt{x} + 3$.

4.4.° Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 3x - 1$; 2) $y = \frac{1}{x}$; 3) $y = \frac{1}{2x+1}$.

4.5.° Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 0{,}2x + 3$; 2) $y = \frac{1}{x-1}$; 3) $y = \frac{4}{x+2}$.

4.6.• Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 2\sqrt{x} - 1$; 2) $y = x^2$, $D(y) = (-\infty;\ 0]$.

4.7.• Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; 2) $y = \sqrt{x^2 - 4}$, $D(y) = [2;\ +\infty)$.

4.8.• Побудуйте в одній системі координат графік даної функції та графік функції, оберненої до неї:

1) $y = -0{,}5x + 2$; 2) $y = \sqrt{x+1}$; 3) $y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ 2x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$

4.9.• Побудуйте в одній системі координат графік даної функції та графік функції, оберненої до неї:

1) $y = 3x - 1$; 2) $y = x^2 - 4$, якщо $x \geqslant 0$.

4.10.•• Доведіть, що функція, обернена до непарної функції, також є непарною.

4.11.•• Нехай g — функція, обернена до функції $f(x) = x^5 + 6x^3$.
1) Знайдіть $g(7)$.
2) Розв'яжіть рівняння $g(x) = -1$.
3) Скільки коренів має рівняння $g(x) = c$ залежно від значення параметра c?

4.12.•• Нехай g — функція, обернена до функції $f(x) = x^3 + \sqrt{x-2}$.
1) Знайдіть $g(28)$.
2) Розв'яжіть рівняння $g(x) = 1$.
3) Чи існує таке значення c, що рівняння $g(x) = c$ має два корені?

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

4.13. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-5)^2 > 0$;
2) $(x-5)^2 \geqslant 0$;
3) $(x-5)^2 < 0$;
4) $(x-5)^2 \leqslant 0$;
5) $\left(\dfrac{x-5}{x+5}\right)^2 > 0$;
6) $\left(\dfrac{x-5}{x+5}\right)^2 \geqslant 0$;
7) $\dfrac{x+5}{x+5} > \dfrac{1}{2}$;
8) $\dfrac{x^2+1}{x^2} \geqslant 0$;
9) $\dfrac{x^2}{x^2+1} \geqslant 0$.

4.14. Яким числом, додатним чи від'ємним, є значення виразу $x - 2$, якщо:
1) $x \in (2; +\infty)$;
2) $x \in (-3; -2)$;
3) $x \in (-\infty; -3)$;
4) $x \in (5; 9)$?

4.15. Розкладіть на множники квадратний тричлен:
1) $x^2 + x - 6$;
2) $35 - 2x - x^2$;
3) $2x^2 + 9x - 18$;
4) $5x^2 - 16x + 3$.

5. Метод інтервалів

На рисунку 5.1 зображено графік деякої функції f, у якої $D(f) = \mathbb{R}$ і нулями є числа x_1, x_2 і x_3. Ці числа розбивають область визначення функції на проміжки знакосталості $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$.

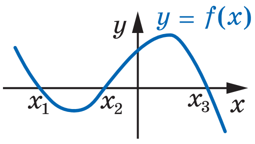


Рис. 5.1

А чи завжди нулі функції розбивають її область визначення на проміжки знакосталості? Відповідь на це питання заперечна. Для функції g, графік якої зображено на рисунку 5.2, проміжок $(x_2; x_3)$ не є проміжком знакосталості. Справді, якщо $x \in (x_2; x_0)$, то $g(x) > 0$, а якщо $x \in [x_0; x_3)$, то $g(x) < 0$.

Принципова відмінність між функціями f і g полягає в тому, що графіком функції f є **неперервна крива**, а графік функції g такої властивості не має. Говорять, що функція f **неперервна в кожній точці області визначення**, або **неперервна на $D(f)$**. Функція g у **точці $x_0 \in D(g)$ має розрив**.

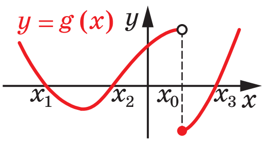


Рис. 5.2

Таке уявлення про неперервну функцію інтуїтивно зрозуміле. Детальніше з неперервними функціями ви ознайомитеся в § 5.

Для подальших міркувань нам буде потрібна така теорема.

Теорема 5.1. ***Якщо функція неперервна на деякому проміжку і не має на ньому нулів, то вона на цьому проміжку зберігає сталий знак.***

Наприклад, функція $y = x^2 - 1$ неперервна на кожному з проміжків $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$ і не має на них нулів. Отже, розглядувана функція на вказаних проміжках зберігає знак (рис. 5.3).

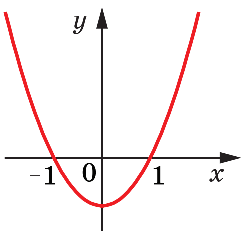


Рис. 5.3

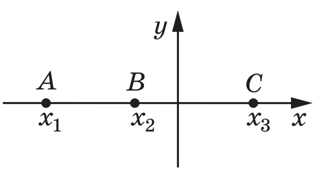


Рис. 5.4

Теорема 5.1 є основою загального методу розв'язування нерівностей виду $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$, де f — функція, неперервна на $D(f)$.

Роз'яснимо застосування цього методу на прикладі функції, графік якої зображено на рисунку 5.1.

Уявимо собі, що із цього рисунка «зникли» всі точки графіка функції f, за винятком точок $A(x_1; 0)$, $B(x_2; 0)$, $C(x_3; 0)$ (рис. 5.4). Кожний із проміжків $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$ не містить нулів функції f.

Функція f є неперервною на цих проміжках. Отже, за теоремою 5.1 зазначені проміжки є проміжками знакосталості функції f.

Залишається з'ясувати, якого знака набувають значення функції f на кожному із зазначених проміжків. Це можна зробити за допомогою «пробних точок».

Нехай, наприклад, $a \in (-\infty; x_1)$ і $f(a) > 0$. Оскільки $(-\infty; x_1)$ — проміжок знакосталості функції, то для будь-якого $x \in (-\infty; x_1)$ значення функції має той самий знак, що $f(a)$, отже, виконується нерівність $f(x) > 0$. Вибираючи по одній точці на кожному проміжку знакосталості та знаходячи значення функції в цій точці, можна визначити знак функції на розглядуваних проміжках.

Описаний метод розв'язування нерівностей називають **методом інтервалів**.

Наведена нижче теорема дає змогу застосовувати метод інтервалів для нерівностей виду $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ або $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, де $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени.

Теорема 5.2. ***Функція*** $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, ***де*** $f(x)$ ***і*** $g(x)$ ***— многочлени, є неперервною на*** $D(y)$.

Наприклад, функція $y = \frac{1}{x}$ неперервна в кожній точці множини $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, тобто на $D(y)$.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $(x+3)(x-1)(x-2) > 0$.

Розв'язання. Числа -3, 1 і 2 є нулями функції $f(x) = (x+3) \times (x-1)(x-2)$, яка є неперервною на $D(f) = \mathbb{R}$. Ці числа розбивають множину $\mathbb{R}$ на проміжки знакосталості функції f: $(-\infty; -3)$, $(-3; 1)$, $(1; 2)$, $(2; +\infty)$ (рис. 5.5).

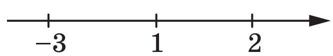


Рис. 5.5

За допомогою «пробних точок» визначимо знаки функції f на зазначених проміжках.

Маємо:

$3 \in (2; +\infty)$; $f(3) > 0$, тому $f(x) > 0$ при будь-якому $x \in (2; +\infty)$;

$\frac{3}{2} \in (1; 2)$; $f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, тому $f(x) < 0$ при будь-якому $x \in (1; 2)$;

$0 \in (-3; 1)$; $f(0) > 0$, тому $f(x) > 0$ при будь-якому $x \in (-3; 1)$;

$-4 \in (-\infty; -3)$; $f(-4) < 0$, тому $f(x) < 0$ при будь-якому $x \in (-\infty; -3)$.

Результати дослідження знака функції f показано на рисунку 5.6.

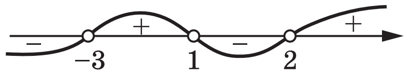


Рис. 5.6

Тепер можна записати відповідь.
Відповідь: $(-3; 1) \cup (2; +\infty)$. ◀

Досліджувати знак функції можна усно, фіксуючи результати у вигляді схеми, показаної на рисунку 5.6.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $\frac{(x-1)^3(x+2)^4(x-5)}{(2x+1)(x-4)^2} < 0$.

Розв'язання. Областю визначення функції $f(x) = \frac{(x-1)^3(x+2)^4(x-5)}{(2x+1)(x-4)^2}$ є множина $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 4\right) \cup (4; +\infty)$. Функція f є неперервною на кожному з проміжків $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; 4\right)$, $(4; +\infty)$, тому нулі -2, 1, 5 функції f розбивають $D(f)$ на такі проміжки знакосталості: $(-\infty; -2)$, $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$, $(1; 4)$, $(4; 5)$, $(5; +\infty)$.

Результат дослідження знака функції f на кожному із цих проміжків показано на рисунку 5.7.

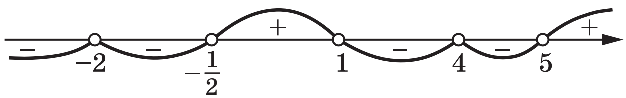


Рис. 5.7

Відповідь: $(-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; 4) \cup (4; 5)$. ◀

За допомогою методу інтервалів можна розв'язувати й нестрогу нерівність $f(x) \geqslant 0$ (або $f(x) \leqslant 0$). Множина розв'язків такої нерівності — це об'єднання множини розв'язків нерівності $f(x) > 0$ (або $f(x) < 0$) і множини коренів рівняння $f(x) = 0$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $\frac{4x^2+4x+1}{x^2+2x-3} \geqslant 0.$

Розв'язання. Радимо, якщо це можливо, многочлени, записані в чисельнику та знаменнику дробу, розкладати на множники. Тоді набагато зручніше досліджувати знак функції на проміжках знакосталості.

Маємо: $\frac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)} \geqslant 0.$

Установлюємо (рис. 5.8), що множиною розв'язків нерівності $\frac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)} > 0$ є множина $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty).$

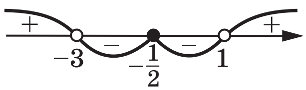


Рис. 5.8

Рівняння $\frac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)} = 0$ має єдиний корінь $x = -\frac{1}{2}.$

Об'єднавши множини розв'язків рівняння і нерівності, отримаємо відповідь.

Відповідь: $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty) \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\}.$ ◄

?

1. Чи завжди нулі функції розбивають її область визначення на проміжки знакосталості?
2. Яку властивість має функція, що є неперервною на проміжку та не має на ньому нулів?
3. Опишіть, як розв'язувати нерівності методом інтервалів.

ВПРАВИ

5.1.° Розв'яжіть нерівність:

1) $x(x-3)(x+2) < 0;$
2) $(x+7)(x+5)(x-9) \leqslant 0;$
3) $(2x-1)(3-x)(x+1) < 0;$
4) $(x-6)(7x+1)(2-9x) \geqslant 0.$

5.2.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+3)(x-1)(x+4) < 0;$
2) $(x-7)(x+8)(x-12) \geqslant 0;$
3) $(1-3x)(x+2)(3-x) < 0;$
4) $x(5-x)(6-x) \leqslant 0.$

5.3.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\frac{x-8}{x+7} < 0;$
2) $\frac{x+9}{x-11} > 0;$
3) $\frac{x+5{,}2}{x-1{,}4} \leqslant 0;$

4) $\frac{5-x}{x-6} \geqslant 0$; 5) $\frac{(x+15)(x-2)}{x-15} \geqslant 0$; 6) $\frac{x-3{,}8}{(x+5)(x-16)} \leqslant 0$.

5.4.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\frac{x+3}{x-1} > 0$; 3) $\frac{(x-2)(x+1)}{x-4} < 0$; 5) $\frac{(3x-2)(4-x)}{(x+3)(x-1)} > 0$;

2) $\frac{x-4}{x} \geqslant 0$; 4) $\frac{(x+1{,}2)(x-1{,}6)}{x-1{,}4} \leqslant 0$; 6) $\frac{(x+1)(3-x)}{(3x-2)(4-3x)} \geqslant 0$.

5.5.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x^2-4}{x^2-9} > 0$; 2) $\frac{x^2-3x}{x^2-8x+7} \leqslant 0$; 3) $\frac{2x^2-5x+2}{x^2-3x-4} \geqslant 0$.

5.6.• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $(x^2+7x)(x^2-7x+6) < 0$; 3) $\frac{3x^2+2x-1}{4x^2-x-3} \geqslant 0$.

2) $\frac{x^2-x-12}{x^2-36} \leqslant 0$;

5.7.• Розв'яжіть нерівність:

1) $(2x+1)(x-3)(x^2+4) < 0$; 2) $(2-x)(3x+5)(x^2-x+1) > 0$.

5.8.• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^4+1)(5-6x)(x-2) < 0$; 2) $(3x^2-5x-2)(2x^2+x+1) < 0$.

5.9.• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-4)^2(x^2-7x+10) < 0$; 3) $(x-4)^2(x^2-7x+10) > 0$;

2) $(x-4)^2(x^2-7x+10) \leqslant 0$; 4) $(x-4)^2(x^2-7x+10) \geqslant 0$.

5.10.• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-3)^2(x^2+x-2) < 0$; 3) $(x-3)^2(x^2+x-2) > 0$;

2) $(x-3)^2(x^2+x-2) \leqslant 0$; 4) $(x-3)^2(x^2+x-2) \geqslant 0$.

5.11.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x^2+x-20}{x^2-6x+9} > 0$; 3) $\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x-8} > 0$; 5) $\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x-8} < 0$;

2) $\frac{x^2+x-20}{x^2-6x+9} \leqslant 0$; 4) $\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x-8} \geqslant 0$; 6) $\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x-8} \leqslant 0$.

5.12.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x^2+3x}{x-5} \geqslant \frac{28}{x-5}$; 3) $\frac{x}{x+3} > \frac{1}{2}$; 5) $\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} > 1$;

2) $\frac{1}{x} < 1$; 4) $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}$; 6) $\frac{x-3}{x+3} \leqslant \frac{2x-5}{4x-3}$.

5.13.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{1}{x+2} \leqslant 1$; 2) $\frac{x}{x+1} \geqslant 2$; 3) $\frac{5x+8}{4-x} < 2$; 4) $\frac{2}{x+3} \geqslant \frac{1}{x-1}$.

5.14.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $(1-3x)^3(x+2)^2(x+4)^5(x-3)>0$;
2) $(x^2+2x-15)(x^2-4x+3)(x-1)\leqslant 0$.

5.15.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $(3-x)^3(x+2)^2(x-1)(2x-5)<0$;
2) $(x^2-4)(x^2+x-2)\leqslant 0$.

5.16.•• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\dfrac{(x-2)(2x+1)^3}{(3-x)^4(1-5x)^5}>0$;
2) $\dfrac{(x-3)(5x+2)(x+3)}{(x-1)(x+4)^2}\geqslant 0$;
3) $\dfrac{x^5\,|3x-1|\,(x+3)}{x-2}\leqslant 0$;
4) $\dfrac{(2-x)(4x+3)}{(x-3)^3(x+1)^2}\leqslant 0$.

5.17.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{(x-1)(x-2)^2}{(x-3)^3}\leqslant 0$;
2) $\dfrac{(x-1)^2(x+2)^3}{x-5}\geqslant 0$;
3) $\dfrac{x^2(x^2-1)}{x-4}>0$.

5.18.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}\geqslant\dfrac{3}{x}$;
2) $\dfrac{12}{x^2-4}-\dfrac{7}{x^2-9}\leqslant 0$.

5.19.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{2(x-3)}{x(x-6)}<\dfrac{1}{x-1}$;
2) $\dfrac{2x+3}{x^2+x-12}<\dfrac{1}{2}$.

5.20.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}\leqslant 0$;
2) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}\geqslant 0$;
3) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}\leqslant 0$;
4) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}\geqslant 0$.

5.21.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}>0$;
2) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}\leqslant 0$;
3) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2}>0$;
4) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2}\geqslant 0$.

5.22.•• Для кожного значення a розв'яжіть нерівність:

1) $(x-3)(x-a)<0$;
2) $(x-3)(x-a)^2>0$;
3) $(x-3)(x-a)^2\geqslant 0$;
4) $(x-a)(x+5)^2<0$;
5) $(x-a)(x+5)^2\leqslant 0$;
6) $\dfrac{(x+1)(x-a)}{x-a}\leqslant 0$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

5.23. Розкладіть на множники вираз:

1) x^3+8;
2) $16-x^4$;
3) $2x^4+9x^2-18$;
4) x^3-4x^2+2x-8.

6. Ділення многочленів. Теорема Безу

Ви вмієте додавати, віднімати та множити многочлени. У цьому пункті ми введемо дію ділення многочленів.

Означення. **Говорять, що многочлен $A(x)$ *ділиться націло* на тотожно не рівний нулю многочлен $B(x)$, якщо існує такий многочлен $Q(x)$, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$.**

Многочлен $A(x)$ називають **діленим**, многочлен $B(x)$ — **дільником**, многочлен $Q(x)$ — **часткою**.

Якщо многочлен $A(x)$ ділиться націло на многочлен $B(x)$, то це позначають так: $A(x) \vdots B(x)$.

Розглянемо кілька прикладів.

Многочлен $x^3 + 1$ ділиться націло на многочлен $x + 1$. Справді, $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. Тут діленим є многочлен $x^3 + 1$, дільником — многочлен $x + 1$, часткою — многочлен $x^2 - x + 1$.

Многочлен $6x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x$ ділиться націло на многочлен $2x^2 - x + 1$. Справді, $6x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x = (2x^2 - x + 1)(3x^2 - x)$.

Зауважимо, що коли ділене — це нульовий многочлен, то він ділиться націло на будь-який многочлен, який тотожно не дорівнює нулю. При цьому частка дорівнює нульовому многочлену.

Пошук частки від ділення двох многочленів можна здійснювати за алгоритмом ділення «куточком», аналогічно тому, як це роблять при діленні чисел:

$$
\begin{array}{r|l}
-\,x^3 + 1 & x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 + x^2} & x^2 - x + 1 \\
-\,-x^2 + 1 & \\
\underline{-x^2 - x} & \\
-\,x + 1 & \\
\underline{x + 1} & \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
-\,6x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x & 2x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{6x^4 - 3x^3 + 3x^2} & 3x^2 - x \\
-\,-2x^3 + x^2 - x & \\
\underline{-2x^3 + x^2 - x} & \\
0 &
\end{array}
$$

Якщо $A(x) \vdots B(x)$, тобто існує такий многочлен $Q(x)$, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$, і многочлен $A(x)$ ненульовий, то ненульовими є многочлени $B(x)$ і $Q(x)$, причому степінь многочлена $A(x)$ дорівнює сумі степенів многочленів $B(x)$ і $Q(x)$. Отже, для того щоб ненульовий многочлен $A(x)$ ділився націло на ненульовий многочлен $B(x)$, необхідно, щоб степінь діленого був не меншим від степеня дільника. Проте ця умова не є достатньою. Так, многочлен $x^3 + 1$, степінь якого дорівнює 3, не ділиться націло на многочлен $x - 1$, степінь якого дорівнює 1. Справді, якби існував многочлен $Q(x)$ такий, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконувалася б рівність $x^3 + 1 = (x - 1)\,Q(x)$, то при $x = 1$ отримали б неправильну рівність $1^3 + 1 = 0$.

Теорема 6.1. ***Для будь-якого многочлена $A(x)$ і ненульового многочлена $B(x)$ існує єдина пара многочленів $Q(x)$ і $R(x)$ таких, що***

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

де степінь многочлена $R(x)$ менший від степеня многочлена $B(x)$ або $R(x)$ — нульовий многочлен.

У цій рівності многочлен $Q(x)$ називають **неповною часткою**, а многочлен $R(x)$ — **остачею.**

Доведення цієї теореми виходить за межі розглядуваного курсу.

Розглянемо многочлени $A(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - 1$ і $B(x) = x^2 - 3x + 2$. Знайдемо для цих многочленів неповну частку й остачу. Це можна зробити за допомогою ділення «куточком»:

$$\begin{array}{r|l}
2x^4 - x^3 + x^2 - 1 & x^2 - 3x + 2 \\
\cline{2-2}
-\ \underline{2x^4 - 6x^3 + 4x^2} \qquad\quad & 2x^2 + 5x + 12 \quad \text{(неповна частка)} \\
5x^3 - 3x^2 - 1 \qquad & \\
-\ \underline{5x^3 - 15x^2 + 10x} \qquad & \\
12x^2 - 10x - 1 & \\
-\ \underline{12x^2 - 36x + 24} & \\
26x - 25 & \text{(остача)}
\end{array}$$

Тепер можна записати:

$$2x^4 - x^3 + x^2 - 1 = (x^2 - 3x + 2)\,(2x^2 + 5x + 12) + 26x - 25. \qquad (1)$$

Означення. Число α називають коренем многочлена $A(x)$, якщо $A(\alpha) = 0$.

Корінь многочлена $A(x)$ — це корінь рівняння $A(x) = 0$.

Легко знайти множину коренів рівняння

$$(3x - 7)\,(5x + 1)\,(2x - 9)\,(x + 1) = 0.$$

Проте якщо ліву частину рівняння подати у вигляді многочлена $30x^4 - 169x^3 + 75x^2 + 337x + 63$, то задача пошуку його коренів стає непростою.

Таким чином, під час розв'язування рівнянь виду $A(x) = 0$, де $A(x)$ — ненульовий многочлен, важливо навчитися виділяти в многочлені лінійний множник, тобто подавати многочлен у вигляді добутку $A(x) = (x - \alpha) B(x)$, де $B(x)$ — деякий многочлен, степінь якого на 1 менший від степеня многочлена $A(x)$.

Цьому сприятимуть такі теореми.

Теорема 6.2 (теорема Безу). ***Остача від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $x - \alpha$ дорівнює $A(\alpha)$.***

Доведення. Оскільки степінь дільника (двочлена $x - \alpha$) дорівнює 1, то степінь остачі має дорівнювати нулю або остача має бути нульовим многочленом, тобто шукана остача — це деяке число r. Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ маємо:

$$A(x) = (x - \alpha) Q(x) + r.$$

Поклавши в цій рівності $x = \alpha$, отримаємо:

$$A(\alpha) = (\alpha - \alpha) Q(\alpha) + r.$$

Звідси $A(\alpha) = r$. ◀

Теорема 6.3. ***Число α є коренем многочлена $A(x)$ тоді і тільки тоді, коли многочлен $A(x)$ ділиться націло на двочлен $x - \alpha$.***

Доведення. Нехай $A(\alpha) = 0$. Доведемо, що $A(x) \vdots (x - \alpha)$.

За теоремою Безу $A(\alpha)$ є остачею від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $x - \alpha$. Проте $A(\alpha) = 0$, отже, $A(x) \vdots (x - \alpha)$.

Нехай тепер $A(x) \vdots (x - \alpha)$. Доведемо, що $A(\alpha) = 0$.

Оскільки $A(x) \vdots (x - \alpha)$, то остача від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $x - \alpha$ дорівнює 0, тобто $A(\alpha) = 0$. ◀

Наслідок 1. ***Якщо $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ — множина коренів многочлена $A(x)$, то $A(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n) \cdot Q(x)$, де $Q(x)$ — деякий многочлен.***

Доведіть цю теорему самостійно.

Наслідок 2. ***Множина коренів многочлена степеня n містить не більше ніж n елементів.***

Доведіть цю теорему самостійно.

Етьєн Безу́
(1730–1783)

Французький математик, основні роботи якого стосуються вищої алгебри. Викладав математику в училищі гардемаринів, Королівському артилерійському корпусі. Автор шеститомної праці «Курс математики».

Наслідок 3. ***Якщо множина коренів многочлена $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ містить більше ніж n елементів, то $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$, тобто цей многочлен тотожно дорівнює нулю.***

Доведення. Якщо припустити, що даний многочлен ненульовий, то його степінь не перевищує n. Тоді множина його коренів не може містити більше n елементів. Отже, даний многочлен є нульовим. ◀

ПРИКЛАД 1 Остачі від ділення многочлена $P(x)$ на двочлени $x - 2$ і $x - 3$ відповідно дорівнюють 5 і 7. Знайдіть остачу від ділення многочлена $P(x)$ на многочлен $x^2 - 5x + 6$.

Розв'язання. Оскільки степінь многочлена $x^2 - 5x + 6$ дорівнює 2, то степінь шуканої остачі не більший за 1 або остача є нульовим многочленом, а тому остача — це многочлен виду $ax + b$.

Маємо: $P(x) = (x^2 - 5x + 6)\,Q(x) + ax + b$. Звідси

$$P(x) = (x - 2)(x - 3)\,Q(x) + ax + b.$$

Підставимо по черзі в цю рівність $x = 2$ і $x = 3$. Отримуємо:

$$P(2) = 2a + b,\ P(3) = 3a + b.$$

З урахуванням умови та теореми Безу $P(2) = 5$ і $P(3) = 7$. Тоді

$$\begin{cases} 2a + b = 5, \\ 3a + b = 7. \end{cases}$$

Звідси $a = 2$, $b = 1$. Отже, шуканою остачею є многочлен $2x + 1$.

Відповідь: $2x + 1$. ◀

Розглянемо многочлен $A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Рівняння виду $A(x) = 0$ називають **цілим раціональним рівнянням.**

Числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ називають **коефіцієнтами** цілого раціонального рівняння, число a_0 — **вільним членом** цього рівняння.

Можна довести, що справедливою є така теорема.

Теорема 6.4. ***Якщо ціле раціональне рівняння із цілими коефіцієнтами має цілий корінь, то він є дільником вільного члена.***

Теорема 6.4 допомагає розв'язувати цілі раціональні рівняння із цілими коефіцієнтами, які мають цілі корені.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $2x^4 - 5x^3 - 2x^2 - x - 6 = 0$.

Розв'язання. Щоб перевірити, чи має це рівняння цілі корені, випишемо всі дільники його вільного члена: 1; −1; 2; −2; 3; −3; 6; −6.

Перевіркою встановлюємо, що $x = -1$ є коренем даного рівняння. Отже, многочлен $A(x)$, який стоїть у лівій частині рівняння, ділиться націло на двочлен $x + 1$, тобто рівняння можна переписати так: $(x+1)\,B(x)=0$. Многочлен $B(x)$ можна знайти, виконавши ділення «куточком» многочлена $A(x)$ на двочлен $(x+1)$. Отримуємо $B(x)=2x^3-7x^2+5x-6$.

З'ясуємо, чи має цілі корені рівняння $2x^3-7x^2+5x-6=0$. Випишемо дільники вільного члена: 1; −1; 2; −2; 3; −3; 6; −6.

Перевіркою встановлюємо, що число 3 є коренем цього рівняння. Тоді $B(x)=(x-3)\,C(x)$. Діленням «куточком» знайдемо многочлен $C(x)$. Отримуємо $C(x)=2x^2-x+2$.

Очевидно, що рівняння $C(x)=0$ коренів не має. Таким чином, початкове рівняння має два корені −1 і 3.

Відповідь: −1; 3. ◄

?

1. У якому разі говорять, що многочлен $A(x)$ ділиться націло на многочлен $B(x)$?
2. Якою є необхідна умова ділення націло одного многочлена на другий?
3. Сформулюйте теорему про ділення многочленів з остачею.
4. Що називають коренем многочлена?
5. Сформулюйте теорему Безу.
6. Сформулюйте необхідну і достатню умову, за якої число α є коренем многочлена $A(x)$.

ВПРАВИ

6.1.° Доведіть, що многочлен x^4-1 ділиться націло на многочлен x^3+x^2+x+1.

6.2.° Доведіть, що многочлен $A(x)=2x^4-x^3+2x^2+1$ ділиться націло на многочлен $B(x)=x^2-x+1$.

6.3.° Поділивши «куточком» многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$, знайдіть неповну частку й остачу:

1) $A(x)=x^4+x+1$, $B(x)=x^2+x+1$;
2) $A(x)=x^4+x^2+1$, $B(x)=x+5$.

6.4.° Поділивши «куточком » многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$, знайдіть неповну частку й остачу:

1) $A(x)=x^7-1$, $B(x)=x^3+x+1$;
2) $A(x)=x^3+5x^2-6x-6$, $B(x)=x-2$.

6.5.° Знайдіть остачу від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $B(x)$:

1) $A(x)=x^3+2x^2+3x+1$, $B(x)=x-1$;
2) $A(x)=2x^4-4x^3-x-1$, $B(x)=x+2$.

6.6.• Доведіть, що многочлен $A(x)$ ділиться націло на двочлен $B(x)$:
1) $A(x) = 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$, $B(x) = x + 2$;
2) $A(x) = 5x^5 - 6x^4 - x^2 + x + 1$, $B(x) = x - 1$.

6.7.• Доведіть, що $(x^n - a^n) \,\vdots\, (x^k - a^k)$, якщо $n \,\vdots\, k$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$.

6.8.• Доведіть, що многочлен, який тотожно дорівнює виразу $(x + 1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$, де $n \in \mathbb{N}$, ділиться націло на многочлен, який тотожно дорівнює виразу $x(x + 1)(2x + 1)$.

6.9.• Доведіть, що многочлен, який тотожно дорівнює виразу $(x^2 + x - 1)^{2n} + (x^2 - x + 1)^{2n} - 2$, де $n \in \mathbb{N}$, ділиться націло на многочлен $x^2 - x$.

6.10.•• При якому значенні параметра a остача від ділення многочлена $2x^4 - 3x^3 - ax^2 - x - 2$ на двочлен $x + 1$ дорівнює 3?

6.11.•• При яких значеннях параметра b многочлен $x^3 + 3x^2 - bx + 6$ ділиться націло на двочлен $x + 2$?

6.12.•• При яких значеннях параметрів a, b і c многочлен $x^3 + ax^2 + bx + c$ ділиться націло на двочлени $x - 1$ і $x + 2$, а при діленні на двочлен $x + 1$ дає в остачі 10?

6.13.•• При яких значеннях параметрів a і b многочлен $x^3 + ax^2 + bx + ab$ при діленні на двочлен $x - 2$ дає в остачі 15, а при діленні на двочлен $x + 1$ дає в остачі 0?

6.14.•• Розв'яжіть рівняння:
1) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = 0$;
2) $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$;
3) $3x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$;
4) $5x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 4x - 8 = 0$.

6.15.•• Розв'яжіть рівняння:
1) $x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$;
2) $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$;
3) $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$;
4) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + 1 = 0$.

6.16.* Доведіть, що вираз $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$ ділиться націло на вираз $(a - b)(b - c)(c - a)$.

6.17.* Доведіть, що вираз $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ ділиться націло на вираз $x + y + z$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

6.18. Одна людина, що працює, може виконати деяке виробниче завдання за 20 год, а друга — за 30 год. За який час вони виконають це завдання, працюючи разом?

6.19. Через першу трубу басейн можна наповнити водою за 9 год, а через другу — за 12 год. Спочатку 3 год була відкрита перша труба, потім її закрили, але відкрили другу. За скільки годин було наповнено басейн?

7. Метод математичної індукції

Вивчаючи навколишній світ, ми часто робимо висновки за результатами спостережень і дослідів.

Загальні висновки, отримані на підставі вивчення окремих випадків, називають **індуктивними**, а сам метод таких міркувань — **індуктивним методом** або **індукцією** (від латин. *inductio* – наведення).

Наприклад, задовго до відкриття законів руху Землі люди дійшли висновку, що Сонце вранці встає на сході, а ввечері зникає за обрієм на заході. Цей висновок є індуктивним, адже він ґрунтувався лише на спостереженнях.

Звісно, за допомогою індукції не завжди можна дійти правильних висновків. Так, якщо у вашій і сусідній школах серед учителів початкових класів немає чоловіків, то це не означає, що в початкових класах працюють тільки жінки.

Незважаючи на те що індуктивні висновки до певної міри потрібно брати під сумнів, індуктивний метод може допомогти сформулювати правильні гіпотези.

Розглянемо два приклади.

- Спробуємо підмітити закономірність у поведінці сум n перших непарних натуральних чисел. Позначимо через S_n суму n перших непарних чисел. Домовимося, що $S_1 = 1$. Маємо:

$S_1 = 1 = 1;$
$S_2 = 1 + 3 = 4;$
$S_3 = 1 + 3 + 5 = 9;$
$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16;$
$S_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$

Числа 1, 4, 9, 16, 25 є квадратами послідовних натуральних чисел.

Можна зробити таке припущення: для будь-якого натурального n

$$S_n = n^2. \qquad (1)$$

- Розглянемо значення многочлена $f(n) = n^2 - n + 41$ при значеннях n, які дорівнюють 1, 2, 3, 4, 5. Маємо:

$f(1) = 41$ — просте число;
$f(2) = 43$ — просте число;
$f(3) = 47$ — просте число;
$f(4) = 53$ — просте число;
$f(5) = 61$ — просте число.

Можна зробити таке припущення: для будь-якого натурального n значення многочлена $f(n)$ є простим числом.

Два наведених припущення є лише гіпотезами, які належить або довести, або спростувати.

Один зі способів спростувати гіпотезу — навести контрприклад. Для другого припущення такий контрприклад легко знайти. Маємо: $f(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ — складене число. Таким чином, гіпотезу спростовано.

Спроба знайти контрприклад для першого індуктивного висновку може привести до таких рівностей:

$S_6 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2$;

$S_7 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49 = 7^2$;

$S_8 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64 = 8^2$.

Отримані рівності лише зміцнюють упевненість у тому, що висунута гіпотеза є правильною.

Зрозуміло, що обчислення суми із черговим доданком не наближує до доведення гіпотези: скільки б сум ми не обчислили, неможливо гарантувати, що серед нескінченної кількості сум, що залишаться, не трапиться така, для якої рівність (1) не виконується.

Щоб довести справедливість висловленої гіпотези, потрібно провести деякі загальні міркування.

Нехай рівність (1) є справедливою для k доданків, тобто

$$S_k = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2.$$

Розглянемо суму, яка містить $k + 1$ доданок:

$$S_{k+1} = \underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)}_{S_k} + (2k + 1) = S_k + (2k + 1).$$

З урахуванням припущення $S_k = k^2$ маємо: $S_{k+1} = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

Наведені міркування гарантують, що коли *рівність* (1) *є правильною для $n = k$, то вона залишається правильною і для $n = k + 1$*.

Тепер можна стверджувати, що рівність (1) доведено для будь-якого натурального значення n. Пояснимо це.

Оскільки $S_1 = 1$, то рівність (1) є правильною для $n = 1$. Отже, вона є правильною для $n = 1 + 1 = 2$, а тоді вона є правильною при $n = 2 + 1 = 3$, при $n = 3 + 1 = 4$, при $n = 4 + 1 = 5$ і т. д. Таким чином можна досягти будь-якого натурального значення n. Отже, рівність (1) є правильною при всіх натуральних значеннях n.

Розглянутий метод доведення називають **методом математичної індукції**. У загальному вигляді його можна описати так.

Нехай потрібно довести, що деяке твердження є правильним для будь-якого натурального значення n.

Доведення цього факту методом математичної індукції складається з двох частин (теорем):

1) *доводять (перевіряють) справедливість твердження для* $n = 1$;

2) *роблять припущення, що твердження є правильним для* $n = k$, $k \in \mathbb{N}$, *і на підставі цього доводять, що воно є правильним для* $n = k + 1$.

Теорему, яку доводять у першій частині, називають **базою індукції**.

Наприклад, під час доведення рівності (1) базою індукції було твердження, що рівність (1) виконується при $n = 1$.

Теорему, яку доводять у другій частині методу, називають **індуктивним переходом**.

ПРИКЛАД 1 Виведіть формулу для обчислення значення суми

$$S_n = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!}, \text{ де } n \in \mathbb{N}.$$

Розв'язання. Для $n = 1$ маємо: $S_1 = \frac{1}{2!}$.

Для $n = 2$ маємо: $S_2 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} = \frac{5}{3!}$.

Для $n = 3$ маємо: $S_3 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} = \frac{23}{4!}$.

Для $n = 4$ маємо: $S_4 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} = \frac{119}{5!}$.

Можна зробити таке припущення: для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність

$$S_n = \frac{(n+1)! - 1}{(n+1)!}. \qquad (2)$$

Доведемо цю гіпотезу методом математичної індукції.

Раніше ми перевірили справедливість формули (2) для $n = 1$, тим самим довівши теорему «база індукції».

Тепер доведемо теорему «індуктивний перехід».

Нехай формула (2) є правильною при $n = k$, тобто $S_k = \frac{(k+1)! - 1}{(k+1)!}$.

Отримуємо:

$$S_{k+1} = \underbrace{\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{k}{(k+1)!}}_{S_k} + \frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{(k+1)! - 1}{(k+1)!} + \frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{(k+2)! - 1}{(k+2)!}.$$

Отже, припустивши, що формула (2) є правильною при $n = k$, ми довели, що вона є правильною і при $n = k + 1$.

Теорему «індуктивний перехід» доведено.

Таким чином, гіпотеза (2) є правильною. ◄

Отриману формулу можна подати в такому вигляді: $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$. Зауважимо, що при необмеженому збільшенні n значення виразу $\frac{1}{(n+1)!}$ прямує до числа 0, а отже, значення суми S_n прямує до числа 1. Ці міркування дають змогу розглядати суму $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} + \ldots$, яка містить безліч доданків, і вважати, що її значення дорівнює 1. Суму виду $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$, де (a_n) — нескінченна числова послідовність, називають **рядом**. Нагадаємо, що з рядами ви стикалися під час вивчення нескінченної геометричної прогресії, у якої модуль знаменника менший від одиниці.

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ значення виразу $5^n - 3^n + 2n$ кратне 4.

Розв'язання. При $n = 1$ отримуємо $5^1 - 3^1 + 2 \cdot 1 = 4$. Оскільки число 4 ділиться націло на 4, тобто $4 \vdots 4$, то теорему «база індукції» доведено.

Нехай при $n = k$ твердження є правильним, тобто

$$(5^k - 3^k + 2k) \vdots 4.$$

Доведемо, що тоді це твердження є правильним при $n = k + 1$, тобто

$$(5^{k+1} - 3^{k+1} + 2(k+1)) \vdots 4.$$

Для доведення достатньо показати, що різниця $(5^{k+1} - 3^{k+1} + 2k + 2) - (5^k - 3^k + 2k)$ кратна 4.

Перепишемо цю різницю таким чином:

$$5^k(5-1) - 3^k(3-1) + 2 = 4 \cdot 5^k - 2(3^k - 1).$$

Оскільки 3^k — непарне число, то $3^k - 1$ — парне число, тобто $(3^k - 1) \vdots 2$. Через це значення отриманого виразу кратне 4.

Отже, використовуючи метод математичної індукції, доведено, що твердження $5^n - 3^n + 2n \vdots 4$, $n \in \mathbb{N}$, є правильним. ◄

Методом математичної індукції можна користуватися і в тих випадках, коли $n \geqslant n_0$, де $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > 1$. У цьому разі теорему «база індукції» доводять (перевіряють) для $n = n_0$.

ПРИКЛАД 3 Доведіть, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ і $n > 4$ виконується нерівність $2^n > n^2$.

Розв'язання. При $n = 5$ маємо правильну нерівність $2^5 > 5^2$.

Нехай нерівність, яку треба довести, є правильною при $n = k$, тобто $2^k > k^2$, де $k \in \mathbb{N}$, $k > 4$. Маємо:

$$2 \cdot 2^k > 2k^2;$$

$$2^{k+1} > 2k^2.$$

Легко показати (переконайтеся в цьому самостійно), що при $k > 1 + \sqrt{2}$, а тим більше при $k > 4$, справджується нерівність $2k^2 > (k+1)^2$. Звідси

$$2^{k+1} > (k+1)^2.$$

Ми показали, що при $n = 5$ виконується теорема «база індукції», і при $n > 4$ довели теорему «індуктивний перехід». Отже, розглядувана нерівність є правильною при будь-яких натуральних n таких, що $n > 4$. ◄

?

1. Які висновки називають індуктивними?
2. Опишіть схему доведення методом математичної індукції.
3. З яких двох теорем складається доведення методом математичної індукції?

ВПРАВИ

7.1.° Числа 24, 44, 64, 84 кратні 4. Чи можна на цій підставі зробити висновок, що число, яке закінчується цифрою 4, кратне 4?

7.2.° Доведіть, що значення многочлена $f(n) = n^2 + n + 17$ є простим числом при $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$. Чи можна на цій підставі зробити висновок, що $f(n)$ є простим числом при будь-якому натуральному значенні n?

7.3.• Доведіть, що при будь-якому натуральному n виконується рівність:

1) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$;

3) $1^2+2^2+3^2+\ldots.+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

4) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$.

7.4.$^{\bullet}$ Доведіть, що при будь-якому натуральному n виконується рівність:

1) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

2) $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$;

3) $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$.

7.5.$^{\bullet\bullet}$ Виведіть формулу для обчислення суми

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)},\text{ де } n\in\mathbb{N}.$$

7.6.$^{\bullet\bullet}$ Виведіть формулу для обчислення суми

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)},\text{ де } n\in\mathbb{N}.$$

7.7.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть нерівність $2^n>2n+1$, де $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$.

7.8.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть нерівність $3^n>4n+1$, де $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$.

7.9.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що для будь-якого натурального n:

1) $(3^{2n+1}+2^{n+2})\;\vdots\;7$; 2) $(6^{2n}+19^n-2^{n+1})\;\vdots\;17$.

7.10.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що для будь-якого натурального n:

1) $(7^{n+1}+8^{2n-1})\;\vdots\;19$; 2) $(7\cdot 24^n-5\cdot 13^n-2^{n+1})\;\vdots\;11$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

7.11. Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y-x^2=0, \\ 2x+5y=10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=x^2, \\ 3x+2y=-6. \end{cases}$

7.12. Побудуйте графік функції $y=\begin{cases} -\frac{6}{x}, \text{ якщо } x\leqslant -1, \\ x^2, \text{ якщо } x>-1. \end{cases}$ Користуючись побудованим графіком, знайдіть проміжки зростання та проміжки спадання даної функції.

ЛЬВІВСЬКА МАТЕМАТИЧНА ШКОЛА

Ви тримаєте в руках підручник «Алгебра і початки аналізу». У назві з'явилося нове словосполучення – «початки аналізу». Що ж приховано за цією назвою? Відповідь дуже проста — математичний аналіз вивчає функції. Цього року ви починаєте ознайомлюватися з елементами аналізу: вам доведеться розглядати все нові й нові класи функцій, вивчати їхні властивості, опановувати методи дослідження функцій.

У першій половині XX ст. вивчення певних класів функцій привело до появи нової математичної дисципліни — «функціонального аналізу». Важливу, фактично головну, роль у створенні цієї дисципліни відіграли науковці Львівської математичної школи.

У 20–30 рр. XX ст. місто Львів було справжньою світовою математичною столицею. У той час у його наукових закладах працювали такі легендарні математики, як Казимир Куратовський, Станіслав Мазур, Владислав Орліч, Вацлав Серпінський, Станіслав Улам, Юлій Шаудер, Гуґо Штейнгауз і багато інших. Кваліфікація науковців Львова була настільки високою, що всесвітньо відомий математик, автор видатних теорем у математичній логіці та теорії множин Альфред Тарський не пройшов за конкурсом на вакантну посаду професора Львівського університету.

Математики Львова створили міцний науковий колектив, відомий як Львівська математична школа. Її керівником вважають геніального математика Стефана Банаха.

Стефан Банах
(1892–1945)

Підручник Банаха
«Курс функціонального аналізу»

Сьогодні світова математична спільнота із цілковитою підставою вважає С. Банаха засновником функціонального аналізу. Один із перших у світі підручників із цієї дисципліни написав саме Банах. Багато результатів Банаха та введених ним понять стали класичними. Наприклад, досліджені вченим множини одержали назву «простори Банаха» й зараз входять до необхідного мінімуму знань усіх, хто навчається у вищому навчальному закладі з математики, фізики, кібернетики та ін.

Розповідають, що багато теорем львівські математики доводили... у кав'ярні. С. Банах з учнями облюбували «Шкотську (шотландську) кав'ярню», де маленькі столики мали мармурове покриття — дуже зручне для запису математичних формул і теорем. Господар кав'ярні був незадоволений таким свавіллям науковців, але ситуацію врятувала дружина Банаха, яка придбала великий зошит для записів. Так з'явилася знаменита «Шкотська книга» — збірка математичних проблем, над якими працювала група С. Банаха. Як винагороду за розв'язання складних задач автори з гумором пропонували то кухлі пива, то вечерю в ресторані. Наприклад, одна з проблем, за яку автор пообіцяв живого гусака (1936 р.), була розв'язана лише в 1972 р., тоді ж і було вручено винагороду.

Проблеми, порушені в «Шкотській книзі», є настільки важливими та складними, що кожний, кому вдається розв'язати хоча б одну з них, одразу дістає світового визнання. Сама ж «Шкотська книга» є однією з найвідоміших і найцінніших реліквій світової науки.

Вручення гусака

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1

Підмножина

Множину B називають підмножиною множини A, якщо кожний елемент множини B є елементом множини A.
Якщо $B \subset A$ і $B \neq A$, то множину B називають власною підмножиною множини A.

Операції над множинами

Перерізом множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать і множині A, і множині B.
Об'єднанням множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, що належать хоча б одній із цих множин: або множині A, або множині B.
Різницею множин A і B називають множину, яка складається з усіх елементів, які належать множині A, але не належать множині B. У випадку, коли множина B є підмножиною множини A, різницю $A \setminus B$ називають доповненням множини B у множині A.

Функція

Нехай X — множина значень незалежної змінної, Y — множина значень залежної змінної. Функція — це правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з множини X можна знайти єдине значення залежної змінної з множини Y.

Найбільше і найменше значення функції

Число $f(x_0)$ називають найбільшим значенням функції f на множині $M \subset D(f)$, якщо існує таке число $x_0 \in M$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$.
Число $f(x_0)$ називають найменшим значенням функції f на множині $M \subset D(f)$, якщо існує таке число $x_0 \in M$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \leqslant f(x)$.

Парні і непарні функції

Функцію f називають парною, якщо для будь-якого x із області визначення виконується рівність $f(-x) = f(x)$.
Функцію f називають непарною, якщо для будь-якого x із області визначення виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.

Область визначення парної (непарної) функції є симетричною відносно початку координат.
Вісь ординат є віссю симетрії графіка парної функції.
Початок координат є центром симетрії графіка непарної функції.

Перетворення графіків функцій

Графік функції $y = f(kx)$ можна отримати з графіка функції $y = f(x)$ у результаті стискання в k разів до осі ординат, якщо $k > 1$, або в результаті розтягнення в $\frac{1}{k}$ раза від осі ординат, якщо $0 < k < 1$.
Графік функції $y = f(-x)$ можна отримати, відобразивши графік функції $y = f(x)$ симетрично відносно осі ординат.

Оборотна функція

Функцію $y = f(x)$ називають оборотною, якщо для будь-якого $y_0 \in E(f)$ існує єдине $x_0 \in D(f)$ таке, що $y_0 = f(x_0)$.
Якщо функція є зростаючою (спадною), то вона є оборотною.

Взаємно обернені функції

Функції f і g називають взаємно оберненими, якщо:
1) $D(f) = E(g)$ і $E(f) = D(g)$;
2) для будь-якого $x_0 \in D(f)$ із рівності $f(x_0) = y_0$ випливає, що $g(y_0) = x_0$, тобто $g(f(x_0)) = x_0$.

Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.
Якщо функція є зростаючою (спадною), то обернена до неї функція є також зростаючою (спадною).

Ділення многочленів

Говорять, що многочлен $A(x)$ ділиться націло на тотожно не рівний нулю многочлен $B(x)$, якщо існує такий многочлен $Q(x)$, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$.
Многочлен $A(x)$ називають діленим, многочлен $B(x)$ — дільником, многочлен $Q(x)$ — часткою.
Для будь-якого многочлена $A(x)$ і ненульового многочлена $B(x)$ існує єдина пара многочленів $Q(x)$ і $R(x)$ таких, що $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, де степінь многочлена $R(x)$ менший від степеня многочлена $B(x)$ або $R(x)$ — нульовий многочлен. У цій рівності многочлен $Q(x)$ називають неповною часткою, а многочлен $R(x)$ — остачею.

Корінь многочлена

Число α називають коренем многочлена $A(x)$, якщо $A(\alpha) = 0$.

Властивості коренів многочлена

Число α є коренем многочлена $A(x)$ тоді й тільки тоді, коли многочлен $A(x)$ ділиться націло на двочлен $x - \alpha$.

Якщо $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ — множина коренів многочлена $A(x)$, то $A(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n) \cdot Q(x)$, де $Q(x)$ — деякий многочлен.

Множина коренів многочлена степеня n містить не більше ніж n елементів.

Якщо множина коренів многочлена $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ містить більше ніж n елементів, то $a_n = a_{n-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$, тобто цей многочлен тотожно дорівнює нулю.

Якщо ціле раціональне рівняння із цілими коефіцієнтами має цілий корінь, то він є дільником вільного члена.

Теорема Безу

Остача від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $x - \alpha$ дорівнює $A(\alpha)$.

Метод математичної індукції

Нехай потрібно довести, що деяке твердження є правильним для будь-якого натурального значення n.

Доведення цього факту методом математичної індукції складається з двох частин (теорем):

1) База індукції. Доводять (перевіряють) справедливість твердження для $n = 1$.
2) Індуктивний перехід. Роблять припущення, що твердження є правильним для $n = k$, $k \in \mathbb{N}$, і на підставі цього доводять, що воно є правильним для $n = k + 1$.

§ 2 СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ

8. **Степенева функція з натуральним показником**

9. **Степенева функція із цілим показником**

10. **Означення кореня n–го степеня. Функція $y = \sqrt[n]{x}$**

11. **Властивості кореня n–го степеня**

12. **Степінь з раціональним показником та його властивості**

13. **Ірраціональні рівняння**

14. **Різні прийоми розв'язування ірраціональних рівнянь та їхніх систем**

15. **Ірраціональні нерівності**

- У цьому параграфі ви дізнаєтеся, яку функцію називають степеневою функцією із цілим показником, які властивості має ця функція; що називають коренем n-го степеня, які властивості має корінь n-го степеня; що називають степенем з раціональним показником і які його властивості; які рівняння називають ірраціональними.
- Ви навчитеся добувати корені n-го степеня, виконувати піднесення до степеня з раціональним показником; перетворювати вирази, які містять степені з раціональним показником і корені n-го степеня; розв'язувати ірраціональні рівняння.

8. Степенева функція з натуральним показником

Властивості та графіки функцій $y = x$ і $y = x^2$ добре відомі вам з курсу математики попередніх класів. Ці функції є окремими випадками функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, яку називають **степеневою функцією з натуральним показником.**

Оскільки вираз x^n, $n \in \mathbb{N}$, має зміст при будь-якому x, то *областю визначення степеневої функції з натуральним показником є множина* $\mathbb{R}$.

Очевидно, що розглядувана *функція має єдиний нуль* $x = 0$.

Подальше дослідження властивостей функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, проведемо для двох випадків: n — парне натуральне число і n — непарне натуральне число.

• Перший випадок: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.

Зазначимо, що при $k = 1$ отримуємо функцію $y = x^2$, властивості та графік якої було розглянуто в курсі алгебри 8 класу.

Оскільки при будь-якому x вираз x^{2k} набуває тільки невід'ємних значень, то область значень розглядуваної функції не містить жодного від'ємного числа.

Можна показати, що для будь-якого $a \geqslant 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{2k} = a$.

Сказане означає, що *областю значень функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число, є множина* $[0; +\infty)$.

Якщо $x \neq 0$, то $x^{2k} > 0$.

Отже, *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число.*

Функція $y = x^n$, де n — парне натуральне число, є парною. Справді, для будь-якого x із області визначення виконується рівність $(-x)^{2k} = x^{2k}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty; 0]$, $x_2 \in (-\infty; 0]$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 \geqslant 0$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо: $(-x_1)^{2k} > (-x_2)^{2k}$. Звідси $x_1^{2k} > x_2^{2k}$.

Отже, *функція $y = x^n$, де n — парне натуральне число, спадає на проміжку* $(-\infty; 0]$. Аналогічно можна показати, що ця функція *зростає на проміжку* $[0; +\infty)$.

Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число (рис. 8.1). Зокрема, графік функції $y = x^4$ зображено на рисунку 8.2.