Відділ освіти Києво-Святошинської

райдержадміністрації

Районний методичний центр

Боярська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів № 4

**Г.В.Кісіль**

**РОЗВ’ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ**

 **З ПАРАМЕТРАМИ ЯК ЗАСІБ РОЗВИТКУ РОЗУМОВИХ ЗДІБНОСТЕЙ УЧНІВ**

**Боярка**

 **2018**

**Кісіль Г.В.** Розв’язання рівнянь з параметрами як засіб розвитку розумових здібностей учнів.-Боярка: Боярська ЗОШ I-III ступенів № 4, 2018.-20 с.

*Дана збірка містить розробки уроків, де на прикладах показано, як учні можуть супроводжувати свої роздуми схемами, ідучи по яким від умови до відповіді, фіксуються обмеження, оскільки невідомість, але фіксованість параметра приводить до необхідності розгалуження розв’язків, а також до необхідного галуження відповідей.*

*Корисним для вчителів математики є те, що завдання з параметрами підібрані починаючи вже з сьомого класу. Використання цих завдань на уроках алгебри є також важливим засобом боротьби проти формалізму при розв’язуванні задач. Вони дисциплінують розум учнів, вчать їх переборювати труднощі.*

**ЗМІСТ**

[**ВСТУП** 4](#_Toc509393009)

[**Урок № 1** 6](#_Toc509393010)

[***Тема уроку:*** Лінійні рівняння з параметрами та рівняння, які зводяться до них 6](#_Toc509393011)

[**Урок № 2** 12](#_Toc509393012)

[***Тема уроку:*** Лінійні рівняння з параметрами та рівняння, які зводять до них 12](#_Toc509393013)

[**ВИСНОВКИ** 18](#_Toc509393014)

[**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ** 19](#_Toc509393015)

# **ВСТУП**

*“Хто не знає математики,*

*не може узнати ніякої*

*другої науки і навіть не*

 *може виявити своє неуцтво”*

*Роджер Бекон,*

*англійський філософ (1267 р.)*

Основною метою шкільної математичної освіти стає інтелектуальний розвиток учнів, формування якостей мислення, характерних для математичної діяльності та необхідних людині для повноцінного життя у суспільстві, умінь та навичок, необхідних для застосування в практичній діяльності, для вивчення суміжних дисциплін, для продовження освіти.

Мій власний педагогічний досвід свідчить про те, що які б нові віяння, народжені вимогами часу, не приходили до школи, як би не мінялися програми та підручники, формування інтелектуальної культури людини було та є однією з основних завдань.

Тому і існує така проблема: як активізувати інтелектуальну діяльність учнів з різними складами розуму, зробити навчання комфортним.

**Саме виходячи з цього я поставила перед собою завдання продовжити роботу над проблемою «Розв’язання рівнянь з параметрами як засіб розвитку розумових здібностей учнів».**

Вибір теми зумовлено також тим, що у школі розв’язанню задач с параметрами приділяється мало уваги, але у випускників, які складають ЗНО з математики, найбільші труднощі викликають саме завдання с параметрами.

**Мета:** створити умови для інтелектуального розвитку учнів, підвищити ефективність навчальної діяльності через розвиток здібностей школярів.

**Задачі:**

* підняти рівень як логічного так і абстрактного мислення, навчальний матеріал викладати більш об’ємно, виділяти в ньому логічні та образні компоненти;
* враховувати індивідуальні особливості учнів;
* моделювати процес навчання, як дослідницьку діяльність учнів;
* розвивати інтелектуальну, творчу особливість.

Починаючи, з 7 класу готую учнів до розв’язання задач з параметрами.

**Практична значимість** – збірник може бути використаний на уроках алгебри в 7 класі.

**Структура збірника.** Дана робота складається з вступу, розробки 2 уроків, висновків, списку використаних джерел та CD-диску.

Диск містить розробки уроків.

**Апробація.** Матеріал використаний для проведення занять з алгебри серед учнів 7-х класів Боярської загальноосвітньої школи I-III ступенів № 4.

**Плани-конспекти уроків**

# **Урок № 1**

## ***Тема уроку:*** Лінійні рівняння з параметрами та рівняння, які зводяться до них

*Дидактична мета:* сформувати в учнів поняття параметра, лінійного рівняння з параметром. Навчати їх досліджувати умову та розв’язки. Виробити в учнів навички розв’язання таких рівнянь.

*Розвивальна мета:* розвивати логічні мислення учнів при дослідженні і розв’язанні лінійних рівнянь з параметрами.

*Тип уроку:* засвоєння нових знань, вироблення умінь.

Хід уроку:

I.Організаційний момент.

II.Перевірка домашнього завдання.

III. Актуалізація опорних знань учнів.

Три учні коло дошки розв’язують такі рівняння:

2 (x-3)=8 5(x-1)=5x+8 8-4x=2(4-2x)

Запитання до учнів; відповіді на які корегуємо в разі необхідності:

1. Як називаються рівняння, які ви тільки що розв’язали?
2. Дайте означення лінійного рівняння з одним невідомим.
3. Як називають числа a і b в рівнянні ax=b (числовими коефіцієнтами).
4. Скільки коренів можуть мати такі рівняння? (Один, не має коренів безліч).

II Сприйняття і усвідомлення поняття лінійного рівняння з параметрами, дослідження його умови та розв’язків.

Повідомимо учням, що букви a і b в лінійному рівнянні ax=b називають також параметрами. А саме таке рівняння є лінійним рівнянням з параметрами. Параметри a і b розглядають як величини, числа, значення, яких фіксовані, але невідомі тому, хто розв’язує задачу. Фіксованість цих чисел дозволяє оперувати ними, як відомими числами, а невідомість вносить в розв’язання задачі деякі ускладнення, пов’язані з тим, що не будь-яку дію можна виконувати з будь-яким числом, наприклад, не можна ділити на нуль.

Вивчення багатьох фізичних процесів і геометричних закономірностей приводить до задач, що містять параметри. При цьому виникає необхідність у дослідженні процесу залежно від значень параметрів. Тому ми будемо розв’язувати не тільки рівняння, але й нерівності, які містять рівняння і нерівності з параметрами.

Розв’язавши рівняння при різних значеннях a і b, бачимо, що вони мають один корінь (I рівняння), не мають розв’язків (друге рівняння), або безліч розв’язків (III рівняння).

Таким чином ми встановили, що:

* Розв’язати рівняння з параметрами означає знайти всі значення параметрів, при кожному з яких рівняння має один розв’язок, або не має розв’язань, або має безліч роз в’язків.
* Отже, розв’язання рівнянь з параметрами має відмінності: воно супроводжується дослідженням. Важливо те, що невідомість для того, хто розв’язує задачу, фіксованих значень параметрів приводить до необхідності «галуження» розв’язування, а також і до відповідного «галуження» відповіді. Тому можна скласти схему:

*ax = b*

*якщо a = 0, то*

*0x = b*

*якщоa ≠ 0, то*

** -** *єдиний розв’язок*

*якщоb = 0, то*

*0 x = 0*

*x – будь-яке число*

*якщоb ≠ 0, то коренів немає*

Наводимо приклади лінійних рівнянь, що містять параметри. Підкреслимо, що параметри можуть позначатися будь-якими буквами.

$$\left(k+2\right)∙x=k^{2}m^{2}x=x+m-1$$

$$\frac{ax}{2}+a=a^{2}x-1$$

$$\frac{x}{b}=\frac{bx-1}{2}$$

1. Колективне розв’язання рівняння

(a$²$-1)x= a$²$+a

Запитання до класу:

* Назвіть параметр цього рівняння
* Чи є рівняння лінійним і чому?
* Що означає розв’язати рівняння з параметром?
* Які ваші пропозиції щодо розв’язання цього рівняння?

(Можна звернути увагу ще раз на схему).

x(a$²$-1)=a$²$+a

$$x=\frac{a²+a}{a^{2}-1}=\frac{a\left(a+1\right)}{\left(a+1\right)\left(a-1\right)}$$

$a²-1\ne 0$; a≠1; a≠-1, тому одержимо $x=\frac{a}{a-1}$

Як встановити, що буде, коли a$²$-1=0, а=1, а=-1?

$\left(a^{2}-1\right)∙x=a^{2}+a$

$$x=\frac{a(a+1)}{\left(a+1\right)\left(a-1\right)}$$

$$x=\frac{1}{a-1}$$

0x=0 – вірно при будь-якому х

0х=2 - невірно

єдиний розв’язок

безліч розв’язків

немає розв’язків

Чи розв’язано дане рівняння?

Як записати відповідь?

Звернути увагу на те, що спочатку у відповіді, як правило записують знайдені значення параметрів, а потім відповідний результат.

Відповідь: 1) якщо a≠±1, то $x=\frac{a}{a-1}$;

 2) якщо а=1, то рівняння не має розв’язань;

 3) якщо а=-1, то рівняння має безліч розв’язків, або х- будь-яке дійсне число.

Щоб краще засвоїти процес розв’язання лінійних рівнянь. Які містять параметри, одному, або кільком учням можна запропонувати відтворити всю схему дослідження і розв’язування.

III. Формування умінь і навичок розв’язання лінійних рівнянь з параметрами.

Запропонувати учням декілька таких рівнянь, поступово укладаючи їх, що надасть можливість не тільки засвоїти процес розв’язання, а й буде сприяти розвитку розумової діяльності учнів, варіативності мислення.

Розв’язати рівняння:a²x-1=x+a

$$x=\frac{\left(a+1\right)}{\left(a+1\right)\left(a-1\right)}$$

$$x=\frac{1}{a-1}$$

0x=0 – вірно при будь-якому х

0х=2 - невірно

єдиний розв’язок

безліч розв’язків

немає розв’язків

Відповідь 1) якщо a≠±1, то $x=\frac{1}{a-1}$ єдиний розв’язок;

 2) якщо а=1, то не має розв’язків;

 3) якщо а=-1, то безліч розв’язків.

Розв’язати рівняння:

$$\frac{ax-a}{a+2}=\frac{x+a}{a}$$

Чим відрізняється це рівняння від попередніх? (Воно записане у вигляді пропорції).

Знайдемо область допустимих значень параметра.

ОДЗ параметра: а=-2; а≠0.

Отже область допустимих значень параметра – це множина всіх дійсних значень параметрів, при яких рівняння має зміст.

Яку властивість пропорцій можна застосувати, щоб спростити рівняння? (Основну властивість пропорції)

a(ax-a)=(x+a)(a+2)

a²x-a²=ax+a²+2x+2a

a²x-ax-2x=2a²+2a

(a²-a-2)x=2a(a+1)

(a+1)(a-2)x=2a(a+1)

$$x=\frac{2a(a+1)}{\left(a+1\right)\left(a-2\right)}$$

$$x=\frac{1}{a-1}$$

0x=12 – невірно

0х=0 - вірно

єдиний розв’язок

Немає розв’язків

безліч розв’язків

При запису відповіді треба нагадати учням, що числа а=-1 і а=2 не увійшли до ОДЗ параметра, тому, це треба врахувати у відповіді.

Відповідь: Якщо а≠±2, а≠0, а≠-1, то рівняння має єдиний розв’язок $x=\frac{2a}{a-2}$

Якщо а=0; а=±2, то рівняння не має розв’язків

Якщо а =-1, то рівняння має безліч розв’язків.

Підсумки уроку: На уроці ми засвоїли поняття лінійного рівняння з параметрами, виробили деякі навички і уміння розв’язати такі рівняння, а також рівняння, що зводилися до лінійних і містили параметри у знаменниках. Навчилися досліджувати його розв’язки і правильно записувати відповіді.

Домашнє завдання:

1. Вивчити означення, розібрати схему дослідження лінійного рівняння з параметрами.
2. Розв’язати рівняння.

1) (а²-1) х=х-а

 2) а²х=а(х+1)

 3) а(х+4)=12+3х.

# **Урок № 2**

## ***Тема уроку:*** Лінійні рівняння з параметрами та рівняння, які зводять до них

*Дидактична мета*: Навчити учнів розв’язувати лінійні рівняння з параметрами та рівняння, які зводяться до них.

*Розвивальна мета:* Виробити у учнів уміння і навички розв’язання лінійних рівнянь з параметрами та рівнянь, які зводяться до них.

*Тип уроку:* формування умінь і навичок.

Хід уроку

1. Організаційний момент.
2. Перевірка домашнього завдання.

III. Актуалізація опорних знань учнів.

Фронтальне опитування:

1. Що називається параметром? (Параметр – це число, значення якого фіксоване, але невідоме тому, що розв’язує задачу.
2. Що значить розв’язати рівняння з параметрами? (Це означає знайти всі значення параметрів, при кожному з яких рівняння має один розв’язок, або не має розв’язків, або має безліч розв’язків.
3. Що таке область допустимих значень параметра? (Це множина всіх дійсних значень параметрів, при яких рівняння має зміст)
4. Розв’язати рівняння.
5. ах=3 2)mx=-5 3) (a-2)x=(a-2)a

Відповіді: 1) якщо а≠0, то $x=\frac{3}{a}$ - єдиний розв’язок

якщо а=0, то немає розв’язків;

1. якщо m≠0, то рівняння має єдиний розв’язок х=-5,

 якщо m=0, то рівняння має безліч розв’язків;

1. якщо а≠2, то рівняння має єдиний розв’язок х=а,

якщо а=2, то рівняння має безліч розв’язків.

Формування умінь і навичок розв’язання лінійних рівнянь з параметрами.

1. Розв’язати рівняння.

(два учні розв’язують рівняння коло дошки, інші на місцях).

№1. 5ах-а=ах+а

Відповідь:

Якщо а≠0, то $x=\frac{1}{2}$ єдиний розв’язок.

Якщо а=0, то рівняння має безліч розв’язків.

№2. 4-ах=2х+7а

Відповідь:

Якщо а≠-2, то рівняння має безліч розв’язків.

Якщо х=-2, то рівняння не має розв’язків.

№3. 4-m+ $\frac{3m}{x-2}=0$

Знайдемо ОДЗ рівняння, тому що х міститься в знаменнику.

ОДЗ: х≠2.

Приведемо його до спільного знаменника, помноживши обидві частини на

(х-2)≠0

(4-m)(x-2)+3m=0

4x-mx-8+2m+3m=0

4x-mx+5m-8=0

(4-m)x=8-5m

$$x=\frac{8-5m}{4-m}$$

Якщо 4-m≠0, m≠4, то

Якщо m=4, то

0x=8-20 - невірно

$$x=\frac{8-5m}{4-m}$$

Не має розв’язків

Чи розв’язано це рівняння?

І якщо ніхто з учнів не здогадається, що забули ОДЗ рівняння х≠2, то треба звернути на це увагу.

Можливо існують значення m, при яких рівняння матиме коренем число 2, тому ці значення не треба виключити.

Отже,

х≠2

$$\frac{8-5m}{4-m}\ne 2$$

8-5m≠8-2m

-5m+2m≠0

-3m≠0

m≠0

Доповнимо відповідь, що при m=0, x=2, що не входить до ОДЗ рівняння.

Відповідь: якщо m≠4, m≠0, то $x=\frac{8-5m}{4-m}$ - єдиний розв’язок.

Якщо m=4, або m=0, то розв’язань немає.

№4 Розв’язати рівняння.

$$\frac{m}{mx+1}+\frac{1}{mx-1}=\frac{1}{1-m^{2}x^{2}}$$

ОДЗ рівняння mx+1≠0 і mx-1≠0,

Тобто mx≠±1.

Звертаємо увагу учнів, що невідоме і параметр пов’язані у знаменниках між собою.

Спростимо його помноживши обидві частини на (mx+1)(mx-1)≠0

m(mx-1)+1(mx+1)=-1

m²x+mx=m-2

(m²+m)x=m-2;m(m+1)x=m-2

Після цього учні проводять дослідження рівняння

$$x=\frac{m-2}{m(m+1)}$$

$$x=\frac{m-2}{m\left(m+1\right)}$$

$$x=\frac{m-2}{m(m+1)}$$

0x=-2 – невірно

0х=-3 - невірно

єдиний розв’язок

Не має розв’язків

Не має розв’язків

Нагадуємо, що корінь $x=\frac{m-2}{m(m+1)}$ повинен задовольняти умові

1. mx≠1 $m∙\frac{m-2}{m\left(m+1\right)}\ne 1, m\ne 0; \frac{m-2}{m+1}\ne 1, \left(m\ne -1\right)$

m-2=m+1; -2≠1 вірно при будь-якому m. Це означає, що умова mx≠1 виконується при будь-якому m≠-1і m≠-1 і m≠0;

1. mx≠-1 $m\frac{m-2}{m\left(m+1\right)}\ne -1, \left(m\ne 0, m\ne -1\right); \frac{m-2}{m+1}\ne -1; m-2\ne -m-1$

2m≠1; m≠$\frac{1}{2}$.

Це означає, що умова m≠-1.

Виконується при всіх m≠-1; m≠0, m≠$\frac{1}{2}$.

Відповідь: 1) Якщо m≠0, m≠-1, m≠$\frac{1}{2}$ , то $x=\frac{m-2}{m\left(m+1\right)}$ - єдиний розв’язок.

Якщо m=0; m=-1; m=$\frac{1}{2}$, то розв’язків немає.

№5 Самостійне розв’язування рівняння ( робота в групах)

$$\frac{a²x-5\left(ax-1\right)-a}{\left(x-4a\right)\left(x+1\right)}=0$$

Разом з умовою учні отримають пам’ятку щодо розв’язування цього рівняння:

1. Знайти ОДЗ рівняння і ОДЗ параметра, оскільки вони пов’язані у знаменнику між собою.
2. Згадати, коли дріб дорівнює нулю і привести рівняння до вигляду: а²х-5(ах-1)-а=0.
3. Виразити х через а.
4. Дослідити рівняння при 1)а≠0; а≠5 і 2) а=0; 3) а=5.
5. Отриманий корінь при а≠0 і а≠5 повинен задовольняти умові х≠-1; х≠4а
6. Подумати, чи можна записувати відповідь. Уважно! Звернутись до випадку, коли при а=5 ви отримали безліч розв’язків.

Якщо хтось помітив, що при а=5 із отриманої безлічі розв’язків треба відкрити х=-1 і х=4а, а саме виключити числа -1 і 20, то треба відзначити цю групу (учня) найкращою оцінкою.

Якщо цього не сталося, треба звернути увагу на цей факт учителю!

1. Записати відповідь.

a(a-5)⋅*x*=a-5

$$x=\frac{a-5}{a\left(a-5\right)}=\frac{1}{a}$$

0x=-5 - невірно

0x=0 – вірно

$$x=\frac{1}{a}$$

не має розв’язків

безліч розв’язків

один корінь

Але при а≠0 і а≠5 один корінь х=$\frac{1}{а}$ повинен ще задовольняти умові х≠4а і х≠-1, тобто $\frac{1}{а}$≠4а; 4а²≠1; а²≠$\frac{1}{4}$; а≠±$\frac{1}{2}$ .

$\frac{1}{а}$≠-1 а≠-1

Отже, х=$\frac{1}{а}$ є коренем рівняння при а≠0, а≠5, а≠±$\frac{1}{2}$ і а≠-1.

Звернемо увагу на те, що при а=5 рівняння має безліч роз’язків, але х≠-1 і х≠4а (умова ОДЗ рівняння)

Тоді х≠-1 і х≠4×5; х≠20

Відповідь: 1) Якщо а=0, а=5,а=±1; а=-1, то рівняння не має розв’язків

1. Якщо а=5, то рівняння має безліч розв’язків, крім х=-1 і х=20.
2. Якщо а≠0, а≠5,а≠±$\frac{1}{2}$, а≠-1, то рівняння має єдиний розв’язок х=$\frac{1}{а}$.

Розв’язання рівняння, дослідження його коренів слід обов’язково обговорити після закінчення роботи в групах.

Підсумки уроку: На уроці ми виробили деякі навички і уміння розв’язати лінійні рівняння з параметрами, що містять невідоме і параметри в знаменнику, а також досліджувати розв’язки, ураховуючи ОДЗ рівняння.

Домашнє завдання:

Розв’язати рівняння

$$\frac{2}{x\left(a+1\right)}-\frac{а}{х} =2(а-1)$$

Відповідь: якщо а≠±1, а ≠2, то рівняння має єдиний розв’язок х=$-\frac{а+2}{2\left(a+1\right)}$

 Якщо а=1, то х – будь-яке число, окрім х=0.

# **ВИСНОВКИ**

Вивчення багатьох процесів і геометричних закономірностей приводять до розв'язування рівнянь з параметрами, тому важко розраховувати на те, що учні самостійно дістануть правильні уявлення про суть параметра із теоретичних міркувань, тому допомогти їм у цьому повинен учитель. Треба пам'ятати також те, що розв'язання завдань з параметрами стане учням в нагоді на ЗНО, уміння розв'язувати такі задачі дозволяє кожному з них розширити грані своїх можливостей.

# **СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Горштейн П.И., Полонський В.Б., Якір М.С. Задачі з параметрами, Харьків, Гімназія, 2003 р.
2. Лукаш О.В. Розв’язуємо задачі з параметрами / О.В. Лукаш, Е.М. Пресс. — Вип. 5(41)). — Х. : Вид. група «Основа», 2006. — 144 с. — (Б- ка журн. „Математика в школах України”).
3. Мерзляк А.Г. та ін. Алгебраїчний тренажер: Посібник для школярів та абітурієнтів / А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонський, М.С.Якір –К.: А.С.К., 1997 – 320 с: 115 іл.

# **ДЛЯ НОТАТОК**