МАТЕМАТИЧНІ ФОРМУЛИ

МАТЕМАТИЧНІ ФОРМУЛИ

МАТЕМАТИЧНІ ФОРМУЛИ

5 – 11

ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1. Таблиця квадратів двозначних чисел

Десятки	Одиниці								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

2. Прості числа, менші за 1000

2,	3,	5,	7,	11,	13,	17,	19,	23,	29,
31,	37,	41,	43,	47,	53,	59,	61,	67,	71,
73,	79,	83,	89,	97,	101,	103,	107,	109,	113,
127,	131,	137,	139,	149,	151,	157,	163,	167,	173,
179,	181,	191,	193,	197,	199,	211,	223,	227,	229,
233,	239,	241,	251,	257,	263,	269,	271,	277,	281,
283,	293,	307,	311,	313,	317,	331,	337,	347,	349,
353,	359,	367,	373,	379,	383,	389,	397,	401,	409,
419,	421,	431,	433,	439,	443,	449,	457,	461,	463,
467,	479,	487,	491,	499,	503,	509,	521,	523,	541,
547,	557,	563,	569,	571,	577,	587,	593,	599,	601,
607,	613,	617,	619,	631,	641,	643,	647,	653,	659,
661,	673,	677,	683,	691,	701,	709,	719,	727,	733,
739,	743,	751,	757,	761,	769,	773,	787,	797,	809,
811,	821,	823,	827,	829,	839,	853,	857,	859,	863,
877,	881,	883,	887,	907,	911,	919,	929,	937,	941,
947,	953,	967,	971,	977,	983,	991,	997.		

Задачі на спільну роботу

У задачах на спільну роботу використовуються величини:

обсяг всієї роботи A (його часто беруть за одиницю);

час t, протягом якого виконується робота;

продуктивність праці $V = \dfrac{A}{t}$ (робота, що виконується за одиницю часу).

Задачі на відсотки

1. Число b, рівне $x\,\%$ від числа $a: b = \dfrac{x\,\%}{100\,\%}a.$

2. Число $a, x\,\%$ якого становить $b: a = \dfrac{b \cdot 100\,\%}{x\,\%}.$

Задачі на рух

При розв'язанні задач на рух припускають наступне:

1. Якщо немає спеціальних зауважень, то рух вважають рівномірним.

2. Швидкість вважають величиною додатною.

3. Будь-які переходи на новий режим руху, на новий напрям руху вважають миттєвими.

При русі двох тіл назустріч один одному зі швидкостями v_1 і v_2, час, за який вони зустрінуться (при початковій відстані між ними S) дорівнює

$$\frac{S}{v_1 + v_2};$$

при русі в одному напрямку ($v_1 > v_2$) час, за який перше тіло наздожене друге, дорівнює

$$\frac{S}{v_1 - v_2}.$$

Якщо два тіла рухаються по колу радіуса R зі сталими швидкостями v_1 і v_2 в різних напрямках, то час між їх зустрічами дорівнює

$$\frac{2\pi R}{v_1 + v_2};$$

при русі в одному напрямку ($v_1 > v_2$) час між зустрічами дорівнює

$$\frac{2\pi R}{v_1 - v_2}.$$

Закони арифметики

1. Комутативний: $a+b=b+a$; $ab=ba$.
2. Асоціативний: $(a+b)+c=a+(b+c)$; $(ab)c=a(bc)$.
3. Дистрибутивний: $(a+b)c=ac+bc$.

Дії з дробами

1. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$. 2. $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$. 3. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$. 4. $\frac{a}{d}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$.

Позначення певної множини чисел

Множина чисел що, задовольняють умову	Позначення	Назва
$a \le x \le b$	$[a;b]$	Відрізок (замкнений проміжок)
$a < x < b$	$(a;b)$	Інтервал (відкритий проміжок)
$a \le x < b$	$[a;b)$	Напіввідкритий проміжок
$a < x \le b$	$(a;b]$	Те саме
$x > b$	$(b;+\infty)$	Промінь числової прямої
$x \ge b$	$[b;+\infty)$	Те саме
$x < a$	$(-\infty;a)$	«
$x \le a$	$(-\infty;a]$	«
$-\infty < x < +\infty$	$(-\infty;+\infty)$	Числова пряма

Властивості числових нерівностей

1. Якщо $a > b$, то $b < a$.
2. Якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$.
3. Якщо $a > b$, то для довільного c $a + c > b + c$.
4. Якщо $a > b$ і $m > 0$, то $am > bm$ і $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$;

   якщо ж $m < 0$, то $am < bm$ і $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$.
5. Якщо $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
6. Якщо $a > b$ і $c > d$, то $a + c > b + d$.
7. Якщо $a > b$ і $c > d$, то $a - d > b - c$.
8. Якщо $a > b > 0$ і $d > c > 0$, то $ad > bc$.
9. Якщо $a > b > 0$, то $a^n > b^n, n \in N$.
10. Якщо $a > b > 0$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

*в) **Розміщення коренів квадратного рівняння відносно числа** $\lambda \in R$*

Нехай $f(x) = ax^2 + bx + c$, $D = b^2 - 4ac$,

x_1, x_2 — корені квадратного рівняння, тоді:

1. $\lambda < x_1 \le x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} D \ge 0, \\ af(\lambda) > 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > \lambda. \end{cases}$

2. $\lambda \le x_1 \le x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} D \ge 0, \\ af(\lambda) \ge 0, \\ -\dfrac{b}{2a} \ge \lambda. \end{cases}$

Основні теоретичні відомості

3. $x_1 \le x_2 < \lambda \Leftrightarrow \begin{cases} D \ge 0, \\ af(\lambda) > 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < \lambda. \end{cases}$

4. $x_1 \le x_2 \le \lambda \Leftrightarrow \begin{cases} D \ge 0, \\ af(\lambda) \ge 0, \\ -\dfrac{b}{2a} \le \lambda. \end{cases}$

5. $\lambda < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0, \\ af(\lambda) > 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > \lambda. \end{cases}$

6. $\lambda \le x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0, \\ af(\lambda) \ge 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > \lambda. \end{cases}$

7. $x_1 < x_2 < \lambda \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0, \\ af(\lambda) > 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < \lambda. \end{cases}$

8. $x_1 < x_2 \le \lambda \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0, \\ af(\lambda) \ge 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < \lambda; \end{cases}$

9. $x_1 < \lambda < x_2 \Leftrightarrow af(\lambda) < 0;$

10. $x_1 \le \lambda \le x_2 \Leftrightarrow af(\lambda) \le 0.$

Тотожні перетворення раціональних та ірраціональних виразів

Дії з раціональними степенями чисел. Звільнення від ірраціональності. Формули скороченого множення. Абсолютна величина (модуль) дійсного числа.

Дії над степенями $(p, q \in \mathbb{Q}, a > 0, b > 0)$.

$$a^0 = 1; \qquad a^1 = a; \qquad \frac{1}{a} = a^{-1};$$

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}; \qquad a^p : a^q = a^{p-q};$$

$$(ab)^p = a^p \cdot b^p; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}; \quad (a^p)^q = a^{p \cdot q}.$$

Дії над арифметичними коренями
$(n, k \in \mathbb{N}, n \geq 2, k \geq 2, a \geq 0, b \geq 0)$.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}; \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \ (b \neq 0);$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}; \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a};$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = a\,; \qquad \sqrt[n]{a} = \sqrt[kn]{a^k};$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \ (0 \leq a < b); \quad \sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|;$$

$$\sqrt{a^2} = |a|; \qquad \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}.$$

Зауваження: якщо $n = 2k, k \in \mathbb{N}, ab \geq 0$, то:

$$\sqrt[2k]{ab} = \begin{cases} \sqrt[2k]{a}\sqrt[2k]{b}, & \text{якщо } a \geq 0, b \geq 0; \\ \sqrt[2k]{-a}\sqrt[2k]{-b}, & \text{якщо } a \leq 0, b \leq 0. \end{cases}$$

$$\sqrt[2k]{\frac{a}{b}} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[2k]{a}}{\sqrt[2k]{b}}, & \text{якщо } a \geq 0, b > 0; \\ \dfrac{\sqrt[2k]{-a}}{\sqrt[2k]{-b}}, & \text{якщо } a \leq 0, b < 0. \end{cases}$$

Абсолютна величина (модуль) дійсного числа.

Означення:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \ge 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Властивості:

1) $|ab| = |a||b|$; 2) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \ne 0$;

3) $|a-b| \le |a| + |b|$; 4) $|a| - |b| \le |a+b| \le |a| + |b|$.

5) $\sqrt{a^2} = |a|$; 6) $|a+b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \ge 0$;

7) $|a+b| < |a| + |b| \Leftrightarrow ab < 0$;

8) $|a-b| = |a| - |b| \Leftrightarrow (a-b)b \ge 0$;

9) $|a-b| > |a| - |b| \Leftrightarrow (a-b)b < 0$;

10) $|a| \le |b| \Leftrightarrow a^2 \le b^2$.

Формули скороченого множення $(a, b \in \mathbb{R})$.

6. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

7. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

8. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

4. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

9. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

5. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

10. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

11. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

Розв'язання рівнянь

1. Лінійне рівняння: $ax = b$; $x = \frac{b}{a}$ при $a \ne 0$; $x \in \varnothing$ при $a = 0$, $b \ne 0$; $x \in R$ при $a = b = 0$.

Квадратне рівняння

Повне квадратне рівняння:

$$ax^2 + bx + c = 0 \ \ (a, b, c, \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ – *формули коренів рівняння* (3).

$D = b^2 - 4ac$ — *дискримінант* квадратного рівняння (3).

Якщо $D > 0$, то рівняння (3) має два дійсні різні корені:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Якщо $D = 0$, то рівняння (3) має два однакові корені

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Якщо $D < 0$, то рівняння (3) не має дійсних коренів.

Якщо x_1, x_2 — корені рівняння (3), то

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - x_1)(x - x_2).$$

Зведене квадратне рівняння:

$$x^2 + px + q = 0 \ (p, q \in \mathbb{R})$$

Якщо $D = \dfrac{p^2}{4} - q \geq 0$, то рівняння (4) має корені:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Якщо x_1, x_2 — корені рівняння (4), то

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Якщо x_1, x_2 — корені рівняння (4), то

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Теорема Вієта (пряма).

Якщо x_1, x_2 — корені рівняння (4), то $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q. \end{cases}$

Теорема Вієта (обернена).

Якщо числа x_1, x_2 такі, що $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$, то x_1 і x_2 — корені рівняння (4).

Лінійні системи

Досліджуючи системи двох лінійних рівнянь із двома невідомими

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2, \end{cases}$$

де $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,$ користуються наступними *твердженнями*:

а) якщо $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система має *єдиний* розв'язок;

б) якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система має *безліч* розв'язків;

в) якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система *не має* розв'язків.

. Елементарні перетворення графіків функцій

Вважаючи відомим графік функції $y = f(x)$, розглянемо геометричні перетворення, за допомогою яких можна дістати графіки нових функцій.

1. Графік функції $y = -f(x)$ симетричний графіку функції $y = f(x)$ відносно осі абсцис.

2. Графік функції $y = f(-x)$ симетричний графіку функції $y = f(x)$ відносно осі ординат.

3. Графік функції $y = -f(-x)$ симетричний графіку функції $y = f(x)$ відносно початку координат (або симетричний графіку $y = f(-x)$ відносно осі Ox).

4. Графік функції $y = f(x - a)$ можна дістати з графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням (зсувом) його вздовж осі Ox на $|a|$ праворуч, якщо $a > 0$, і ліворуч, якщо $a < 0$. Це перетворення можна здійснити паралельним перенесенням осі ординат уздовж осі Ox на величину $-a$.

5. Графік функції $y = f(x) + b$ можна дістати з графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням (зсувом) його уздовж осі ординат на $|b|$ одиниць вгору, якщо $b > 0$, і вниз, якщо $b < 0$. Це перетворення рівносильне перенесенню осі Ox на величину $-b$.

6. Графік функції $y = kf(x)$ можна дістати з графіка функції $y = f(x)$ розтягом або стисканням його по осі ординат пропорційно коефіцієнту k (якщо $k > 1$, то графік розтягується в k разів, якщо $0 < k < 1$, то графік стискується в $\frac{1}{k}$ разів). Абсциси точок при цьому залишаються незмінними. Якщо $k < 0$, то спочатку будуємо графік функції $y = |k| f(x)$, а потім відображаємо симетрично осі Ox.

7. Графік функції $y = f(kx)$ можна дістати з графіка функції $y = f(x)$ стисканням або розтягом його вздовж осі абсцис пропорційно коефіцієнту k (якщо $k > 1$, то графік стискається в k разів, якщо $0 < k < 1$, то графік розтягується в $\frac{1}{k}$ разів). Ординати точок при цьому залишаються незмінними. Якщо $k < 0$, то спочатку будуємо графік функції $y = f(|k| x)$, а потім відображаємо його симетрично осі Oy.

Графік функції $y=|f(x)|$ можна дістати з графіка функції $y=f(x)$, враховуючи, що

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x), & \text{при } f(x)\ge 0,\\ -f(x), & \text{при } f(x)<0.\end{cases}$$

Тобто симетрично відображаємо щодо осі Ox ті частини графіка $y=f(x)$, які лежать нижче від осі Ox, а всі частини, які лежать вище і на осі Ox залишаємо без зміни.

9. Графік функції $y=f(|x|)$ можна дістати з графіка функції $y=f(x)$, враховуючи, що

$$f(|x|)=\begin{cases} f(x), & \text{при } x\ge 0,\\ f(-x), & \text{при } x<0.\end{cases}$$

Функція $f(|x|)$ парна, тому для $x<0$ її графік є симетричним відображенням щодо осі Oy побудованої частини графіка для $x\ge 0$.

10. Графік функції $y=|f(|x|)|$ можна дістати з графіка функції $y=f(|x|)$, залишивши без зміни всі його частини, які лежать вище і на осі Ox, а частини, що лежать нижче від осі Ox, симетрично відобразити відносно цієї осі.

11. Геометричний образ залежності $|y|=f(x)$ при $y\ge 0$ збігається з тими частинами графіка функції $y=f(x)$, які лежать вище і на осі Ox $(f(x)\ge 0)$, а при $y<0$ є їх симетричним відображенням відносно осі Ox.

12. Геометричний образ залежності $|y|=|f(x)|$ при $y\ge 0$ збігається із графіком функції $y=|f(x)|$, а при $y<0$ є його симетричним відображенням щодо осі Ox.

13. Геометричний образ залежності $|y|=f(|x|)$ при $y\ge 0$ збігається з тими частинами графіка функції $y=f(|x|)$, які лежать вище від осі Ox, а при $y<0$ є їх симетричним відображенням щодо осі Ox.

14. Геометричний образ залежності $|y|=|f(|x|)|$ при $y\ge 0$ збігається з графіком функції $y=|f(|x|)|$, а при $y<0$ є його симетричним відображенням щодо осі Ox.

Формули арифметичної прогресії

1. Загальна формула $a_{n+1} = a_n + d.$
2. Формула n -го члена $a_n = a_1 + d(n-1).$
3. Характеристична властивість $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}).$
4. Формула суми $S_n = \frac{1}{2}(a_1 + a_n)n.$

Формули геометричної прогресії

1. Загальна формула $b_{n+1} = b_n q \quad (q \neq 0, b_n \neq 0).$
2. Формула n -го члена $b_n = b_1 q^{n-1}.$
3. Характеристична властивість $b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}.$
4. Формула суми $S_n = \begin{cases} nb_1 \text{ при } q = 1; \\ b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1} \text{ при } q \neq 1. \end{cases}$
5. Формула суми нескінченно спадної геометричної прогресії $S = \frac{b_1}{1-q}.$

Середні величини ($a_1, a_2, \dots, a_n$ — додатні числа)

1. $A = \dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ — середнє арифметичне.

2. $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ — середнє геометричне.

3. $H = n\left(\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \dots + \dfrac{1}{a_n}\right)^{-1}$ — середнє гармонічне.

4. $K = \sqrt{\dfrac{1}{n}\left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2\right)}$ — середнє квадратичне.

Мають місце нерівності $H \le G \le A \le K$.
Рівності досягаються лише при $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Показникова функція

1. *Функцію, задану формулою* $y = a^x, (a > 0, a \neq 1)$ називають ***показниковою функцією***.
2. *Основні властивості показникової функції:*
   а). Область визначення $D(f) = \mathbb{R}$.
   б). Множина значень $E(f) = \mathbb{R}_+$.
   в). $f(0) = a^0 = 1$.
   г). При $0 < a < 1$ функція спадна: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$,
   а при $a > 1$ функція зростаюча: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$.

Логарифмічна функція

1. *Функцію, задану формулою* $y = \log_a x, (a > 0, a \neq 1, x > 0)$ називають ***логарифмічною функцією.***
2. *Основні властивості логарифмічної функції:*
   а). Область визначення $D(f) = R_+$.
   б). Множина значень $E(f) = \mathbb{R}$.
   в). $f(1) = \log_a 1 = 0$.
   г). При $0 < a < 1$ функція спадна: $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$;
   при $a > 1$ функція зростаюча: $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$.

Логарифми та їх властивості

1. ***Логарифмом*** додатного числа M за основою a, де $a > 0, a \neq 1$, називається ***показник степеня***, до якого потрібно піднести a, щоб дістати число M, тобто, $\log_a M = b$, якщо $a^b = M$.

З означення логарифма випливає тотожність

$$a^{\log_a M} \equiv M, (a > 0, a \neq 1, M > 0),$$

яку називають основною ***логарифмічною тотожністю.***

Зокрема, $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$.

2. Правила логарифмування та потенціювання алгебраїчних виразів:

а). Логарифм добутку:

$$\log_a AB = \log_a A + \log_a B, (A > 0, B > 0).$$

б). Логарифм частки:

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B, (A > 0, B > 0).$$

в). Логарифм степеня:

$$\log_a A^n = n \log_a A, \log_{a^k} A = \frac{1}{k} \log_a A, (A > 0, k, n \in \mathbb{R}, k \neq 0).$$

г) Логарифм кореня:

$$\log_a \sqrt[k]{A} = \frac{1}{k} \log_a A, \quad (A > 0, k \in N, k \geq 2).$$

Застосовані в зворотному напрямі ці формули називають ***формулами потенціювання.***

д). Узагальнення правил логарифмування:

$$\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|, (xy > 0);$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|, (xy > 0);$$

$$\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|, (|x| > 0, n \in \mathbb{N});$$

$$\log_a \sqrt[2n]{x^{2k}} = \frac{k}{n} \log_a |x|, (n, k \in \mathbb{N}).$$

3. Формула переходу від однієї основи до іншої:

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}, (a > 0, a \neq 1, M > 0, b > 0, b \neq 1).$$

. Деякі суми

1. $1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$.

2. $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

3. $1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

4. $1+3+5+\ldots+2n-1=n^2$.

5. $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$.

6. $1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$.

7. $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

8. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n}{4}(n+1)(n+2)(n+3)$.

9. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=1-\frac{1}{n}$.

10. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

11. $x+2x^2+3x^3+\ldots+nx^n=\frac{x+(nx-n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$, $(x\neq 1)$.

Тригонометрія. Довідковий матеріал

Основні тригонометричні співвідношення

$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z.$

$\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, $\quad \alpha \neq \pi n, \ n \in Z.$

$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, \quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} n, \ n \in Z.$

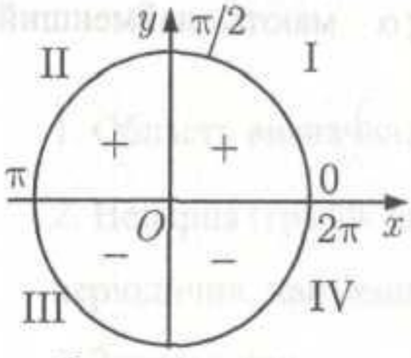
$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z.$$

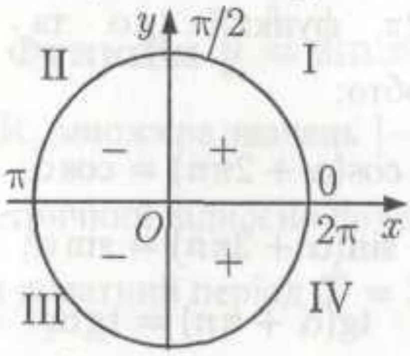
$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad \alpha \neq \pi n, \ n \in Z.$$

Знаки тригонометричних функцій

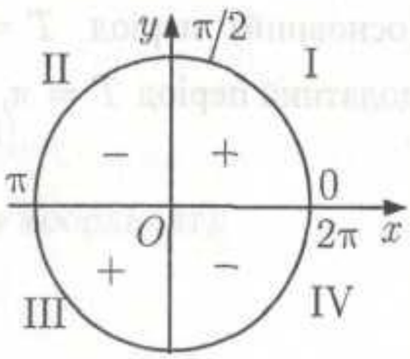
Тригонометричні функції кутів, що закінчуються в різних чвертях координатної площини, мають знаки, вказані на рис. 6.



Синус і косеканс



Косинус і секанс



Тангенс і котангенс

Рис. 6

Значення тригонометричних функцій деяких кутів

$f(\alpha)$ \ α рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	0	не існує	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не існує	0	не існує

Парність та непарність тригонометричних функцій

Функції $\cos\alpha$ і $\sec\alpha$ — парні, функції $\sin\alpha, \mathrm{cosec}\,\alpha, \mathrm{tg}\,\alpha, \mathrm{ctg}\,\alpha$ — , тобто

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha; \qquad \sec(-\alpha) = \sec\alpha;$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha; \qquad \mathrm{cosec}(-\alpha) = -\mathrm{cosec}\,\alpha;$$

$$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha; \qquad \mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Періодичність тригонометричних функцій

Функції $\cos\alpha, \sin\alpha, \sec\alpha, \mathrm{cosec}\,\alpha$ мають найменший додатний (основний) період $T = 2\pi$, функції $\mathrm{tg}\,\alpha$ та $\mathrm{ctg}\,\alpha$ мають найменший додатний період $T = \pi$, тобто:

$$\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha;$$

$$\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha;$$

$$\mathrm{tg}(\alpha + \pi n) = \mathrm{tg}\,\alpha;$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha + \pi n) = \mathrm{ctg}\,\alpha, (n \in \mathbb{Z}).$$

2.2.2. Формули зведення

$f(\alpha)$ \ α	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$

Правило. Якщо кути мають вигляд $-\alpha, \pi\pm\alpha$, то функції зберігають найменування; для кутів $\frac{\pi}{2}\pm\alpha, \frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ функції змінюють найменування на споріднене (спорідненими є функції синус і косинус, тангенс і котангенс, секанс і косеканс); знак функції визначається знаком лівої частини, якщо вважати кут α гострим.

Приклади

1. $\sin(270^\circ-\alpha) = -\cos\alpha$

(III чверть — синус від'ємний; 270° — sin змінюється на cos)

2. $\mathrm{tg}\,(180^\circ+\alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$

(III чверть — тангенс додатний; 180° — функція tg зберігається)

Функції суми аргументів

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Функції кратних аргументів

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha-1 = 1-2\sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha};$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}3\alpha=\frac{3\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}^3\alpha-3\operatorname{ctg}\alpha};$$

$$\sin 3\alpha = 4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha);$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha);$$

$$\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha);$$

$$\operatorname{ctg}3\alpha=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}(60^\circ-\alpha)\operatorname{ctg}(60^\circ+\alpha).$$

Формули половинного аргументу
(для синуса і косинуса – формули пониження степеня)

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},\alpha\neq\pi(2n+1),n\in\mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},\alpha\neq\pi(2n+1),n\in\mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\alpha\neq\pi n,n\in\mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha},\alpha\neq2\pi n,n\in\mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha},\alpha\neq\pi n,n\in\mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},\alpha\neq2\pi n,n\in\mathbb{Z}.$$

Заміна тригонометричних функцій через тангенс їх половинного аргументу (універсальна заміна)

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\alpha\neq\pi(2n+1),n\in\mathbb{Z}.$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\alpha\neq\pi(2n+1),n\in\mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\alpha,\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),n\in\mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},\alpha\neq\pi n,n\in\mathbb{Z}.$$

Перетворення добутку тригонометричних функцій в суму

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta));$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta));$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta};$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}.$$

Перетворення алгебраїчної суми тригонометричних функцій в добуток

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha \pm \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\varphi),$$

$$\text{де}\ \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

Функція $y = \sin x$

1. Область визначення $\mathbb{R}$; множина значень $[-1;1]$.

2. Непарна (графік симетричний відносно початку координат); періодична, найменший додатний період $T = 2\pi$.

3. Зростає при

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

спадає при

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Найменші значення $\sin x = -1$ набуває при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$,

а найбільші значення $\sin x = 1$ – при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

4. $\sin x = 0$ при $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$:

$\sin x > 0, x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n); \sin x < 0,$

$x \in (\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}.$

5. Неперервна і диференційовна при всіх x,

$(\sin x)' = \cos x$.

6. Графіком є синусоїда (рис. 7).

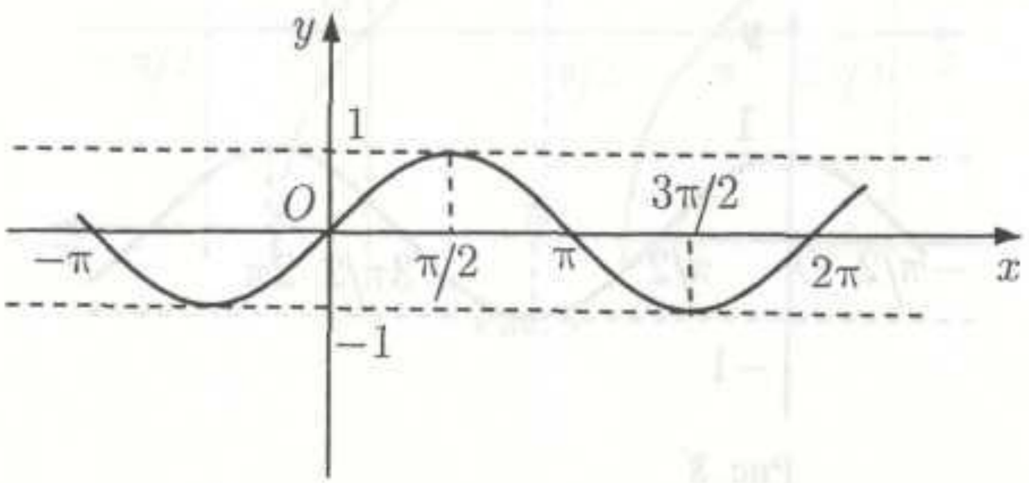


Рис. 7

Функція $y = \cos x$

1. Область визначення $\mathbb{R}$; множина значень $[-1;1]$.

2. Парна (графік симетричний відносно осі Oy),

періодична, найменший додатний період $T = 2\pi$.

3. Зростає при

$$\pi + 2\pi n < x < 2\pi + 2\pi n,$$

спадає при

$$2\pi n < x < \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Найменші значення $\cos x = -1$ набуває при $x = \pi + 2\pi n$,

а найбільші значення $\cos x = 1$ – при $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

4. $\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$:

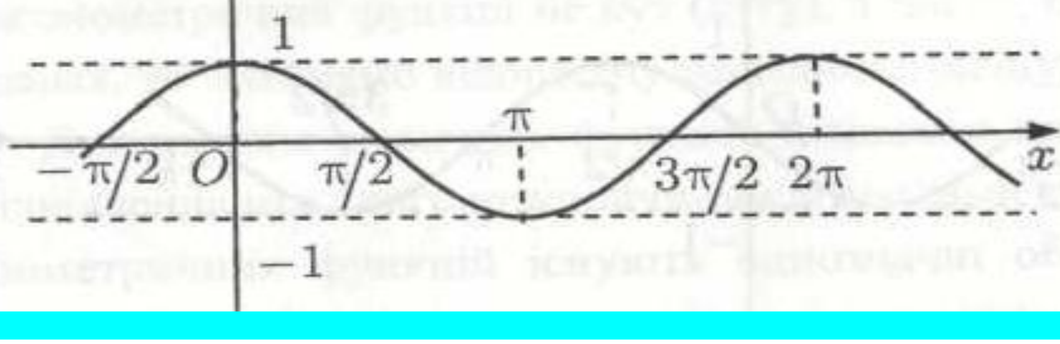
$\cos x > 0, x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right); \cos x < 0,$

$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$

5. Неперервна і диференційовна при всіх x,

$(\cos x)' = -\sin x$.

6. Графіком є косинусоїда (рис. 8).



Функція $y = \operatorname{tg} x$

1. Область визначення $\mathbb{R} \setminus \left\{ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right\}$,

множина значень $\mathbb{R}$.

2. Непарна (графік симетричний відносно початку координат),

періодична, найменший додатний період $T = \pi$.

3. Зростає на кожному з проміжків

$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$.

4. $\operatorname{tg} x = 0$ при $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

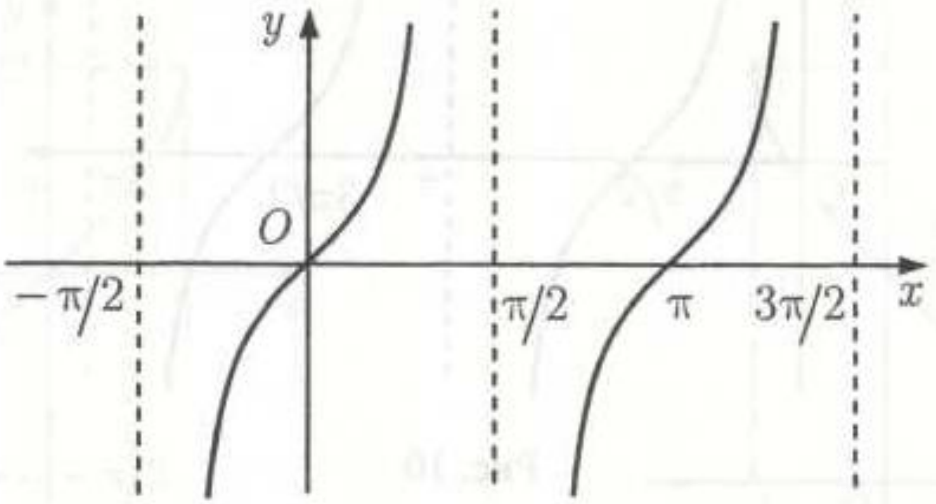
$\operatorname{tg} x > 0, x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$; t

$\mathrm{g}\, x < 0, x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}$.

5. Неперервна і диференційовна в області означення,

$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

6. Графіком є тангенсоїда (рис. 9).



Функція $y = \operatorname{ctg} x$

1. Область визначення $\mathbb{R} \setminus \{x = \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$,

множина значень $\mathbb{R}$.

2. Непарна (графік симетричний відносно початку координат),

періодична, найменший додатний період $T = \pi$.

3. Спадає на кожному з проміжків $(\pi n; \pi + \pi n)$.

4. $\operatorname{ctg} x = 0$ при $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$:

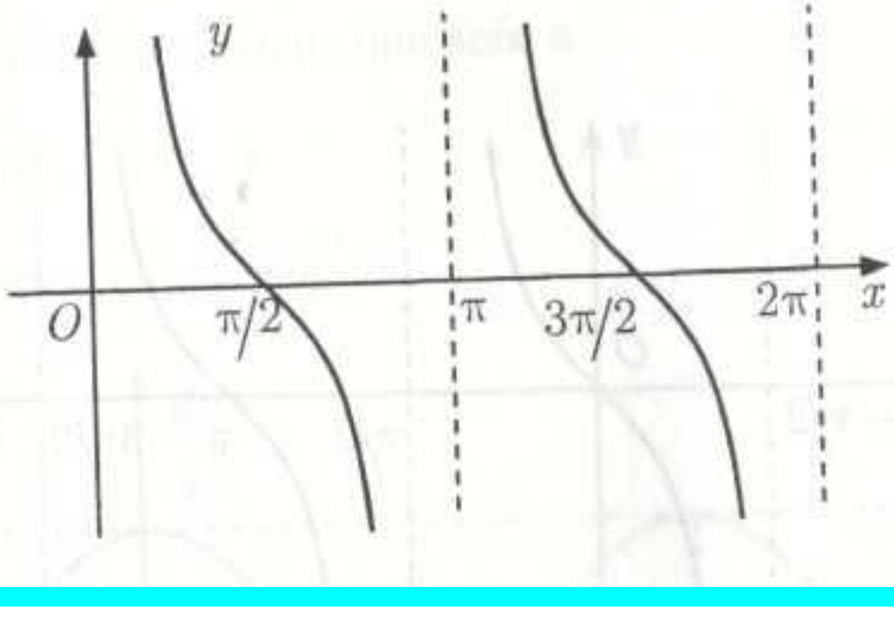
$\operatorname{ctg} x > 0, x \in \left(\pi n; \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right); \operatorname{ctg} x < 0,$

$x \in \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$

5. Неперервна і диференційовна в області визначення,

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

6. Графіком є котангенсоїда (рис. 10).



Функція $y = \arcsin x$

Арксинус — функція, обернена до синуса на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

1. Область визначення $[-1;1]$; множина значень $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Непарна, $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

(графік симетричний відносно початку координат);

3. Зростає, набуваючи найменше значення $-\frac{\pi}{2}$ при $x = -1$;

та найбільше значення $\frac{\pi}{2}$ при $x = 1$.

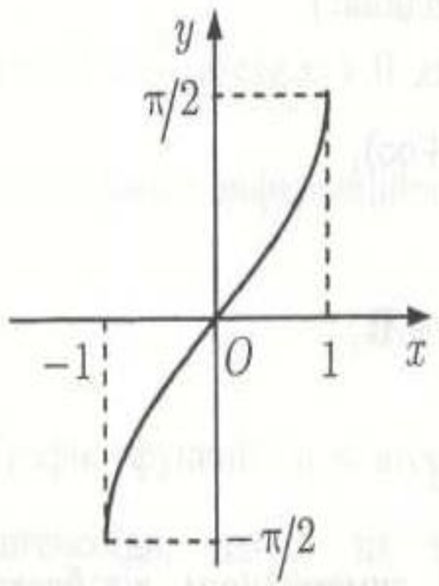
4. $\arcsin 0 = 0. \arcsin x > 0$ при $x \in (0;1]$,

$\arcsin x < 0$ при $x \in [-1;0)$.

5. Неперервна на $[-1;1]$ і диференційовна при всіх $x \in (-1;1)$:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Графік функції $y = \arcsin x$ дістаємо симетричним відображенням синусоїди, взятої на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, відносно прямої $y = x$



Функція $y = \arccos x$

Арккосинус — функція, обернена до косинуса на проміжку $[0;\pi]$.

1. Область визначення $[-1;1]$; множина значень $[0;\pi]$.

2. Ні парна, ні непарна, причому $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

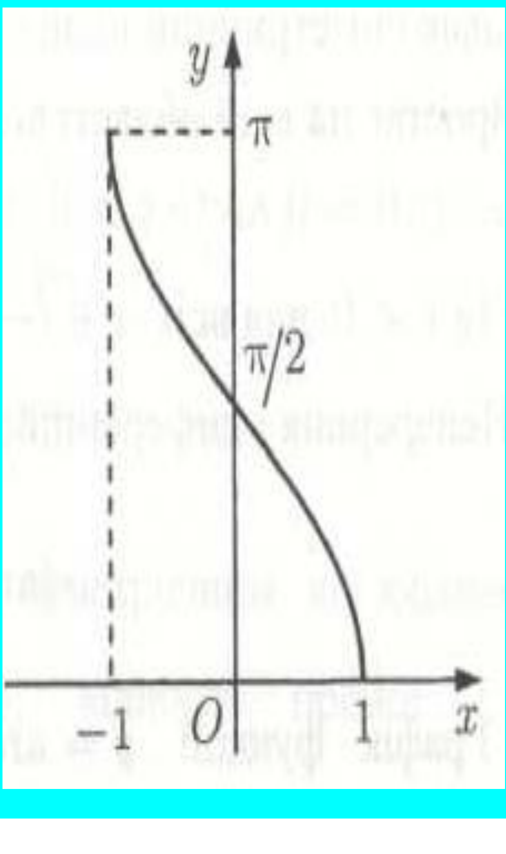
3. Спадає, набуваючи найбільше значення π при $x = -1$ та найменше значення 0 при $x = 1$.

4. $\arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$; $\arccos x > 0$ для всіх $x \in [-1;1)$.

5. Неперервна і диференційовна при всіх $x \in (-1;1)$,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

6. Графік функції $y = \arccos x$ дістаємо симетричним відображенням косинусоїди, взятої на відрізку $[0;\pi]$, відносно прямої $y = x$ (рис. 12).



Функція $y = \operatorname{arctg} x$

Арктангенс — функція, обернена до тангенса на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

1. Область визначення $\mathbb{R}$; множина значень $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Непарна, $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$

(графік симетричний відносно початку координат).

3. Зростає на всій області визначення.

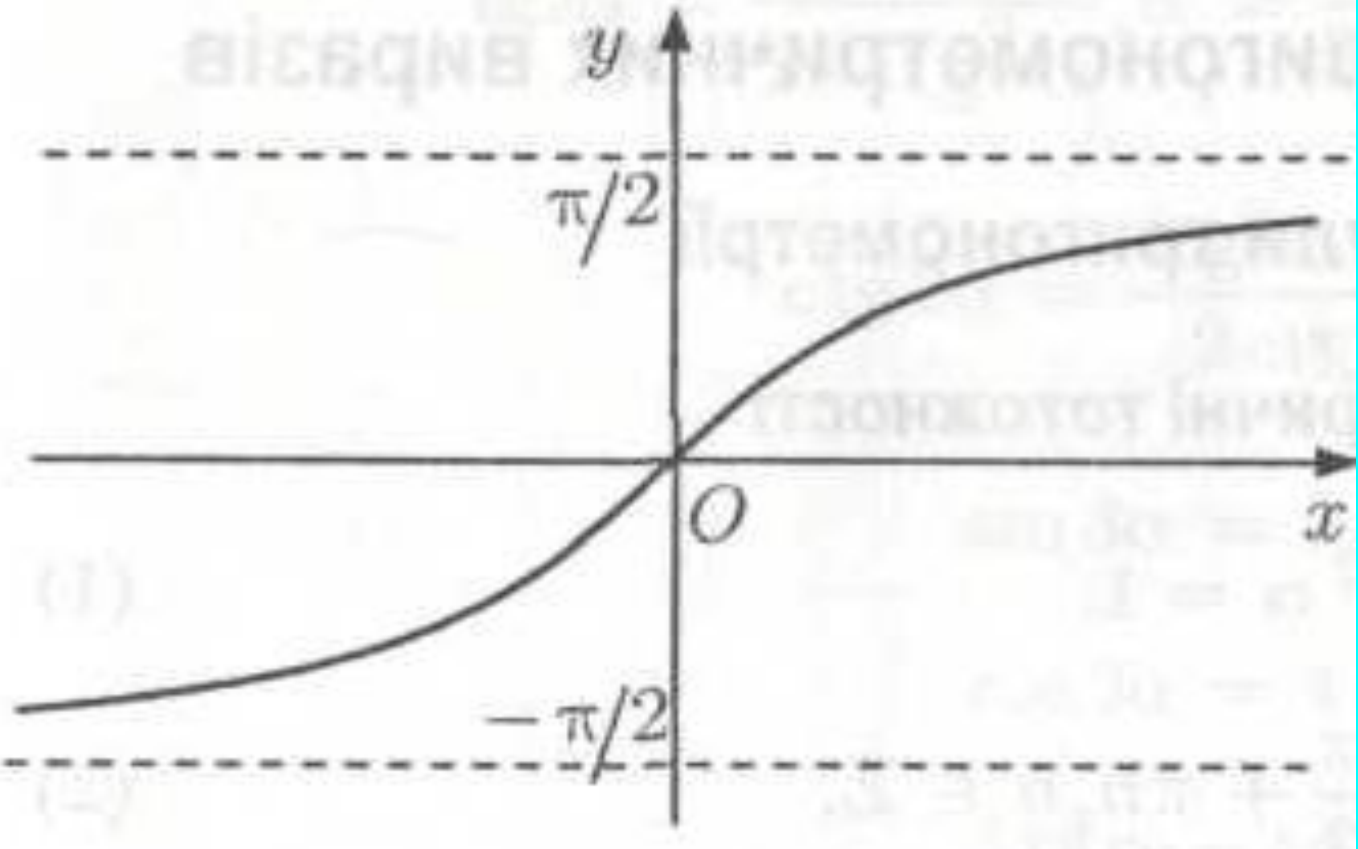
4. $\operatorname{arctg} 0 = 0; \operatorname{arctg} x > 0$ для всіх $x \in (0; +\infty)$,

$\operatorname{arctg} x < 0$ для всіх $x \in (-\infty; 0)$.

5. Неперервна і диференційовна для всіх $x \in \mathbb{R}$,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

6. Графік функції $y = \operatorname{arctg} x$ дістаємо симетричним відображенням тангенсоїди, взятої на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, відносно прямої $y = x$ (рис. 13).



Функція $y = \operatorname{arcctg} x$

Арккотангенс — функція, обернена до котангенса на проміжку $(0;\pi)$.

1. Область визначення $\mathbb{R}$;

множина значень $(0;\pi)$.

2. Ні парна, ні непарна, причому

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

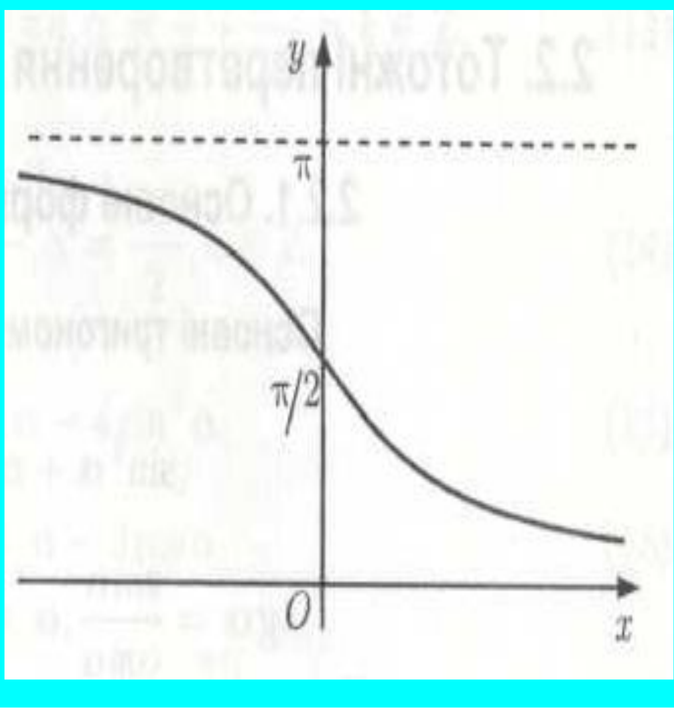
3. Спадає на всій області визначення.

4. $\operatorname{arctg} 0 = \dfrac{\pi}{2}; \operatorname{arctg} x > 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

5. Неперервна і диференційовна для всіх $x \in \mathbb{R}$,

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

6. Графік функції $y = \operatorname{arcctg} x$ дістаємо симетричним відображенням котангенсоїди, взятої на інтервалі $(0;\pi)$, відносно прямої $y = x$



У таблиці наведено властивості функцій $y = \arccos x$ і $y = \arcsin x$.

	$y = \arccos x$	$y = \arcsin x$
Область визначення	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
Область значень	$[0; \pi]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
Нулі функції	$x = 1$	$x = 0$
Проміжки знакосталості	Якщо $x \in [-1; 1)$, то $\arccos x > 0$	Якщо $x \in [-1; 0)$, то $\arcsin x < 0$; якщо $x \in (0; 1]$, то $\arcsin x > 0$
Парність	Не є ні парною, ні непарною	Непарна
Зростання / спадання	Спадна	Зростаюча

властивості функцій $y = \operatorname{arctg} x$ і $y = \operatorname{arcctg} x$.

	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arcctg} x$
Область визначення	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Область значень	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$(0; \pi)$
Нулі функції	$x = 0$	–
Проміжки знакосталості	Якщо $x \in (-\infty; 0)$, то $\operatorname{arctg} x < 0$; якщо $x \in (0; +\infty)$, то $\operatorname{arctg} x > 0$	$\operatorname{arcctg} x > 0$ при всіх x
Парність	Непарна	Не є ні парною, ні непарною
Зростання / спадання	Зростаюча	Спадна

Тригонометричні нерівності та системи нерівностей

Найпростіші тригонометричні нерівності

Розв'язуючи тригонометричні нерівності, зручно користуватися одиничним колом або графіком відповідної функції. Нагадаємо, що на колі зростання кута відбувається проти руху годинникової стрілки. Розв'язки нерівності знаходимо на проміжку, довжина якого дорівнює періоду функції, а тоді їх періодично продовжуємо.

1. $\sin x \geq a$ (рис. 15):

якщо $a < -1$, то $x \in (-\infty; +\infty)$;

якщо $-1 \leq a \leq 1$, то $\arcsin a + 2\pi n \leq x \leq \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

якщо $a > 1$, то нерівність розв'язків не має.

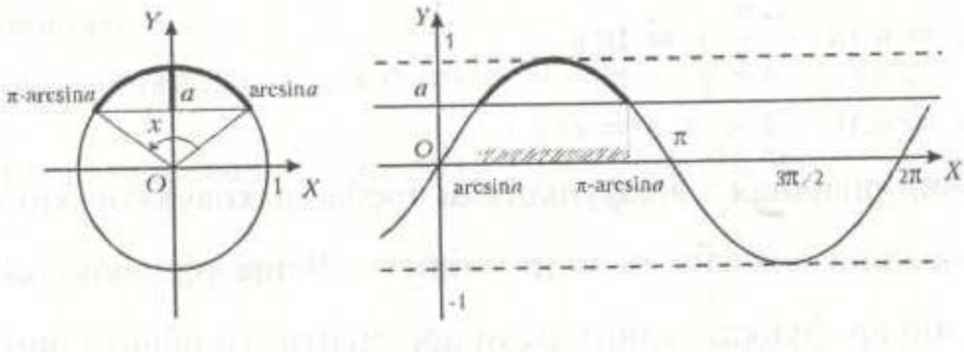


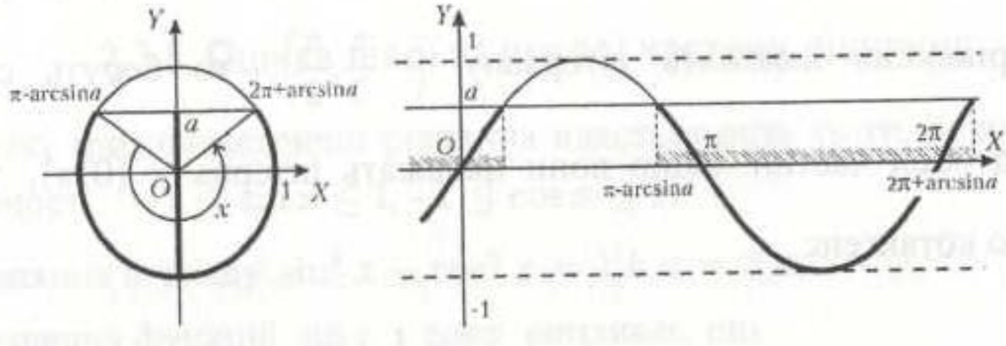
Рис. 15

2. $\sin x \leq a$ (рис. 16):

якщо $a < -1$, то нерівність розв'язків не має;

якщо $-1 \leq a \leq 1$, то $\pi - \arcsin a + 2\pi n \leq x \leq 2\pi + \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

якщо $a > 1$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.



3. $\cos x \geq a$ (рис. 17):

якщо $a < -1$, то $x \in (-\infty; +\infty)$;

якщо $-1 \leq a \leq 1$, то $-\arccos a + 2\pi n \leq x \leq \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

якщо $a > 1$, то нерівність розв'язків не має.

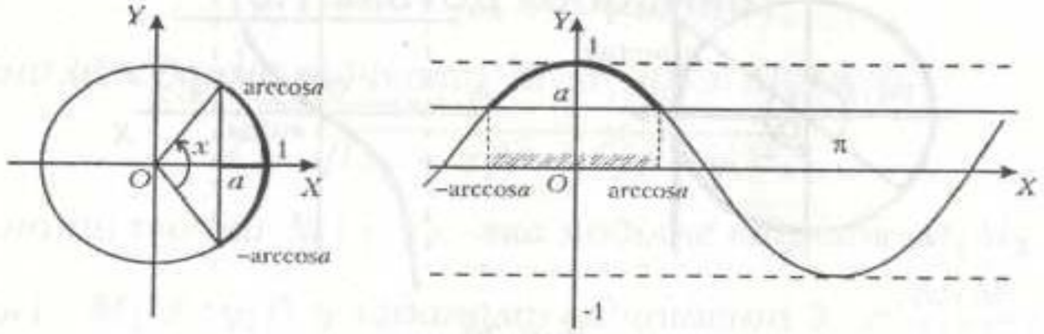


Рис. 17

4. $\cos x \leq a$ (рис. 18):

якщо $a < -1$, то розв'язків немає;

якщо $-1 \leq a \leq 1$, то $\arccos a + 2\pi n \leq x \leq 2\pi - \arccos a + 2\pi n, n$

якщо $a > 1$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.

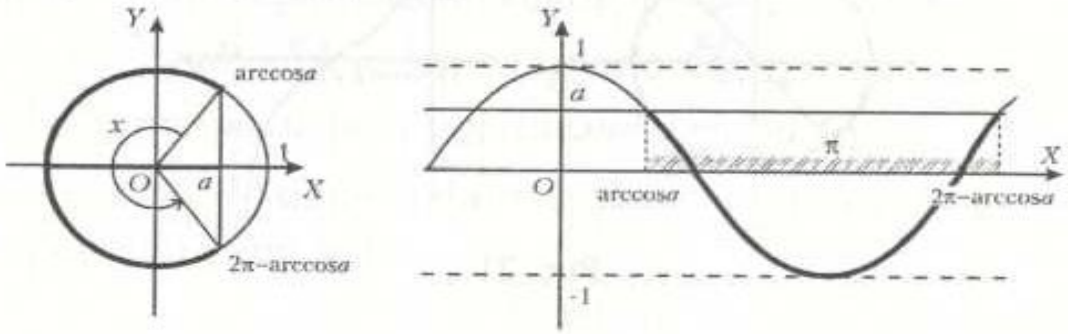
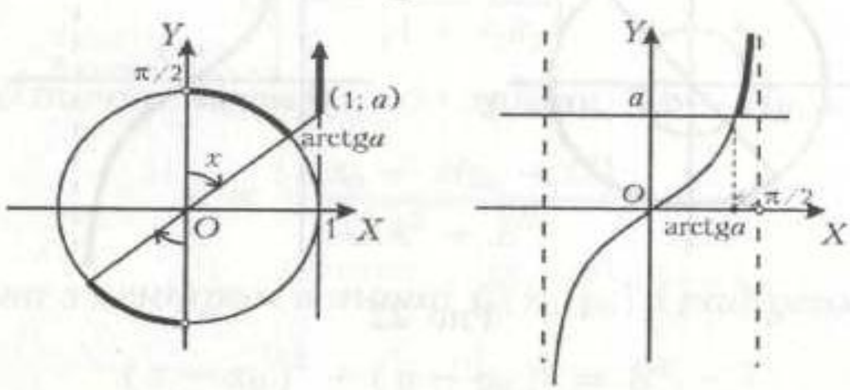


Рис. 18

5. $\operatorname{tg} x \geq a$ (рис. 19):

при $a \in \mathbb{R}$: $\operatorname{arctg} a + \pi n \leq x < \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.



6. $\operatorname{tg} x \le a$ (рис. 20):

при $a \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{2} + \pi n < x \le \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

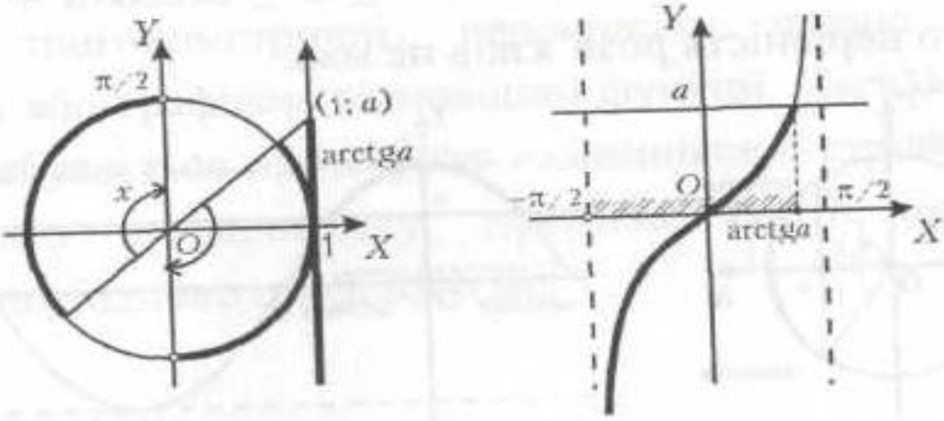


Рис. 20

7. $\operatorname{ctg} x \ge a$ (рис. 21):

при $a \in \mathbb{R} : \pi n < x \le \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

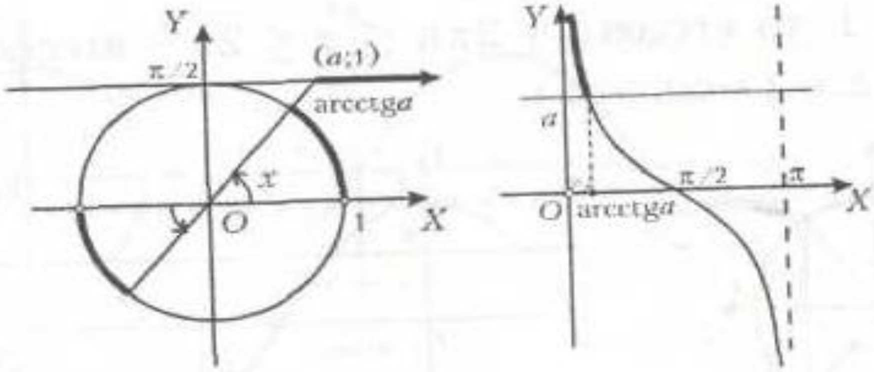
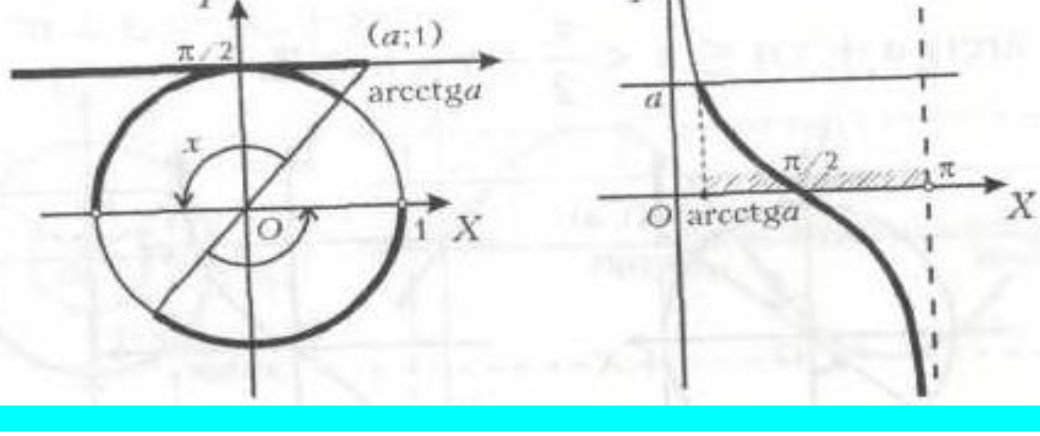


Рис. 21

8. $\operatorname{ctg} x \le a$ (рис. 22):

при $a \in \mathbb{R} : \operatorname{arcctg} a + \pi n < \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.



Основні співвідношення між оберненими тригонометричними функціями

$$\cos(\arccos m) = m \qquad (|m| \le 1);$$

$$\sin(\arccos m) = \sqrt{1-m^2} \qquad (|m| \le 1);$$

$$\operatorname{tg}(\arccos m) = \frac{\sqrt{1-m^2}}{m} \qquad (m \in [-1;\, 0) \cup (0;\, 1]);$$

$$\operatorname{ctg}(\arccos m) = \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \qquad (|m| < 1).$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} m) = m;$$

$$\sin(\operatorname{arctg} m) = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}};$$

$$\cos(\operatorname{arctg} m) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}};$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} m) = \frac{1}{m} \qquad (m \ne 0).$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} m) = m;$$

$$\sin(\operatorname{arcctg} m) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}};$$

$$\cos(\operatorname{arcctg} m) = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}};$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} m) = \frac{1}{m};$$

$$\arcsin m + \arccos m = \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad -1 \le m \le 1;$$

$$\operatorname{arctg} m + \operatorname{arcctg} m = \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad m \in R;$$

$$\arcsin(\sin m) = m \qquad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} \le m \le \frac{\pi}{2};$$

$$\arccos(\cos m) = m \qquad \text{при} \quad 0 \le m \le \pi;$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} m) = m \qquad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} < m < \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} m) = m \quad \text{при} \quad 0 < m < \pi;$$

$\arcsin(-m) = -\arcsin m;$

$\arccos(-m) = \pi - \arccos m;$

$\operatorname{arctg}(-m) = -\operatorname{arctg} m;$

$\operatorname{arcctg}(-m) = \pi - \operatorname{arcctg} m.$

Найпростіші тригонометричні рівняння

1) $\sin x = a,\ x = (-1)^k \arcsin a + k\pi,\ k \in Z,\ |a| \le 1;$
2) $\cos x = a,\ x = \pm \arccos a + 2k\pi,\ k \in Z,\ |a| \le 1;$
3) $\operatorname{tg} x = a,\ x = \operatorname{arctg} a + k\pi,\ k \in Z,\ a \in R;$
4) $\operatorname{ctg} x = a,\ x = \operatorname{arcctg} a + k\pi,\ k \in Z,\ a \in R.$

Найпростіші тригонометричні нерівності

1) $\sin x > a.$

   При $a \ge 1$ немає розв'язків;

   при $-1 \le a < 1$

   $2\pi k + \arcsin a < x < \pi - \arcsin a + 2\pi k,\ k \in Z;$

   при $a < -1$ $x \in R.$

2) $\sin x < a.$

   При $a > 1$ $x \in R;$

   при $a \in (-1;\ 1]$

   $-\pi - \arcsin a + 2\pi k < x < \arcsin a + 2\pi k;$

   при $a \in (-\infty;\ -1]$ $x \in \varnothing.$

3) $\cos x > a.$

   При $a \ge 1$ $x \in \varnothing;$

   при $a \in [-1;\ 1)$

   $2\pi k - \arccos a < x < 2\pi k + \arccos a;$

   при $a \in (-\infty;\ -1)$ $x \in R.$

4) $\cos x < a$.

При $a \in (1; \infty)$ $x \in R$;

при $a \in (-1; 1]$

$2\pi k + \arccos a < x < 2\pi k + 2\pi - \arccos a$;

при $a \in (-\infty; -1]$ $x \in \varnothing$.

5) $\operatorname{tg} x < a$.

$$\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \pi k + \operatorname{arctg} a \text{ при } a \in R.$$

6) $\operatorname{tg} x > a$.

$$\pi k + \operatorname{arctg} a < x < \pi k + \frac{\pi}{2} \text{ при } a \in R.$$

7) $\operatorname{ctg} x < a$.

$\pi k + \operatorname{arcctg} a < x < \pi k + \pi$ при $a \in R$.

8) $\operatorname{ctg} x > a$.

$\pi k < x < \pi k + \operatorname{arcctg} a$ при $a \in R$

(всюди $k \in Z$).

Похідні тригонометричних функцій

1) $\sin' x = \cos x$;

2) $\cos' x = -\sin x$;

3) $\operatorname{tg}' x = \sec^2 x$;

4) $\operatorname{ctg}' x = -\operatorname{cosec}^2 x$;

5) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(-1 < x < 1)$;

6) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(-1 < x < 1)$;

7) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$;

8) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$.

Інтеграл від тригонометричних функцій

1) $\int \cos x\,dx = \sin x + c;$

2) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c;$

3) $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + c;$

4) $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + c.$

Тригонометричні функції кутів трикутника

$$\sin(A+B) = \sin C, \quad \cos(A+B) = -\cos C,$$

$$\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}, \quad \cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}.$$

Метричні співвідношення в трикутнику

Теорема синусів. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R.$

Теорема косинусів. $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$,

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

Деякі важливі границі

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e\approx 2,718.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e.$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e.$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x\right)}{x}=1.$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1.$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-1}{x}=\ln a.$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+x\right)^{\alpha}-1}{x}=\alpha.$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}q^{n}=0,\ \left(\left|q\right|<1\right).$

Похідна. Основні правила диференціювання

Похідною неперервної функції $y = f(x)$ у точці її визначення x_0 називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Якщо ця границя існує, то функція $y = f(x)$ у точці x_0 називається ***диференційовною.***

Необхідна умова диференційовності функції $y = f(x)$ у точці x_0 є її неперервність в цій точці.

Похідні від основних елементарних функцій

1. $C' = 0$, де C — стала.

2. $x' = 1$, де x — аргумент.

3. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}, \alpha \in \mathbb{R}$.

4. $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0$; $(e^x)' = e^x$.

5. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1$; $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

6. $(\sin x)' = \cos x$.

7. $(\cos x)' = -\sin x$.

8. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Загальна схема дослідження функції

1. Область визначення. Вертикальні асимптоти.
2. Парність (непарність).
3. Періодичність.
4. Корені та знаки.
5. Монотонність та екстремуми.
6. Опуклість (угнутість).
7. Горизонтальні та похилі асимптоти.

Властивості похідної

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

2. $(u \cdot v)' = u'v + v'u$.

3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

4. $(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$.

Рівняння дотичної $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Геометричний зміст похідної

Похідна $f'(x_0)$ дорівнює ***кутовому коефіцієнту*** дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці диференціювання $(x_0, f(x_0))$:

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha,$$

де α — кут нахилу дотичної до графіка функції, проведеної в точці дотику.

Механічний зміст похідної

Якщо $S = f(t)$ — рівняння прямолінійного руху матеріальної точки (твердого тіла), то швидкість цього руху в момент часу t дорівнює похідній від шляху за часом у даний момент часу, тобто

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t) = S'(t).$$

Застосування похідної до дослідження функцій

Критерій сталості функції

Для того, щоб функція $y = f(x)$ була сталою на проміжку $(a;b)$, необхідно та достатньо, щоб в кожній точці цього проміжку похідна функції $f'(x) \equiv 0$.

Монотонність функції

Якщо $f'(x)$ у кожній точці проміжку $(a;b)$ додатна, то функція $y = f(x)$ на цьому проміжку зростає.

Якщо похідна $f'(x)$ в кожній точці проміжку $(a;b)$ від'ємна, то функція $y = f(x)$ на цьому проміжку спадає.

Екстремуми функції $y = f(x)$

1. Точка $x_0 \in D(f)$ називають точкою *максимуму* (*мінімуму*) функції $y = f(x)$, якщо існує такий окіл точки x_0, у якому для всіх x виконується нерівність:

$$f(x) < f(x_0), (f(x) > f(x_0)).$$

Значення функції у точці x_0 $f(x_0)$ називають *максимумом* (*мінімумом*) даної функції.

Точки максимуму і мінімуму називаються точками *локального екстремуму* функції.

2. Необхідна умова екстремуму функції (теорема Ферма). Якщо неперервна функція $y = f(x)$ у точці x_0 має екстремум, то її похідна $f'(x)$ у цій точці дорівнює нулю або не існує.

Точки, в яких похідна $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує називають *критичними точками* функції $y = f(x)$.

Зокрема, якщо $f'(x) = 0$, то точка x_0 називають *стаціонарною* точкою функції $y = f(x)$.

3. Достатня умова екстремуму функції. Якщо при переході через критичну точку x_0 функції $y = f(x)$ похідна цієї функції змінює знак з «$+$» на «$-$», то функція в цій точці має *максимум*; якщо похідна змінює знак з «$-$» на «$+$», то функція в цій точці має *мінімум*. Якщо похідна $f'(x)$ при переході через точку x_0 не змінює знака, то в точці x_0 функція екстремуму не має.

. Найменше та найбільше значення функції

Для того, щоб знайти найменше m та найбільше M значення неперервної функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$, треба знайти всі критичні точки цієї функції, які належать відрізку, обчислити значення даної функції на кінцях відрізка та в критичних точках. Після чого вибрати з цих значень найменше m та найбільше M.

Первісна функції. Основи інтегрування

Функція $F(x)$ називається *первісною* функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, якщо $F(x)$ диференційовна на $(a;b)$ і справджується рівність:

$$F'(x) = f(x), x \in (a;b).$$

Невизначеним інтегралом функції $f(x)$ називається сукупність усіх первісних $F(x) + C$ заданої функції. Аналітичний запис:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ де } C \text{ — стала інтегрування.}$$

Таблиця основних невизначених інтегралів $(p \neq -1, a > 0, a \neq 1, k \neq 0)$

1. $\int x^p dx = \dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C.$ **2.** $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C.$ **4.** $\int e^x dx = e^x + C.$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$ $\int \sin kx dx = -\dfrac{1}{k}\cos kx + C.$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C;$ $\int \cos kx dx = \dfrac{1}{k}\sin kx + C.$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$ **8.** $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

Визначений інтеграл та його застосування

Формула Ньютона — Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на $[a;b]$.

Обчислення площ плоских фігур

1. Площа криволінійної трапеції, зображеної на рис. 1 ($f(x) \geq 0$):

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

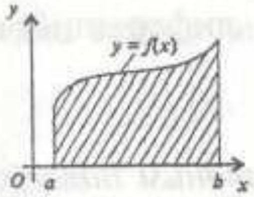


Рис. 1

2. Площа криволінійної трапеції, зображеної на рис. 2 ($f(x) \leq 0$):

$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

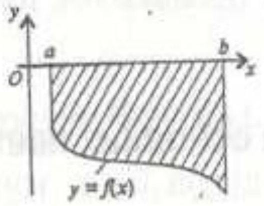


Рис. 2

3. Площа фігури, зображеної на рис. 3:

$$S = \int_a^b |f(x)|dx$$

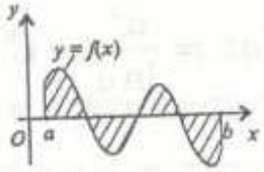


Рис. 3

4. Площа фігури, обмеженої кривими $y = f_1(x), y = f_2(x)$ та прямими $x = a, x = b$ (рис. 4):

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$$

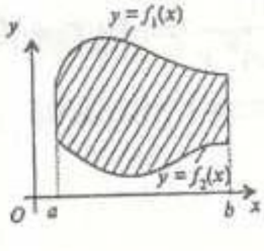


Рис. 4

5. Площа фігури обмеженої кривими $y = f(x)$ і $y = g(x)$ (a, b — корені рівняння $f(x) - g(x) = 0$ (рис. 5):

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

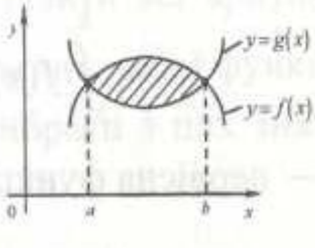


Рис. 5

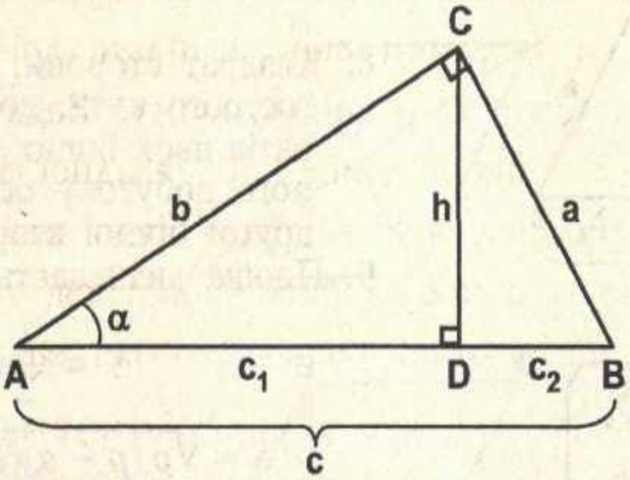
ПЛАНІМЕТРІЯ. Довідковий матеріал

Прямокутний трикутник

$$b^2 = c \cdot c_1$$
$$a^2 = c \cdot c_2$$

$$h^2 = c_1 \cdot c_2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$



1. Катет — середнє пропорційне між гіпотенузою та проекцією цього катета на гіпотенузу.
2. Висота, опущена з вершини прямого кута на гіпотенузу, — середнє пропорційне між відрізками, на які вона ділить гіпотенузу.
3. Сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи.

Якщо $\alpha = 30°$, то $c = 2a$

$$R = \frac{c}{2}$$

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$
$$r = \frac{S}{p}$$

$$S = \frac{1}{2} c \cdot h$$
$$S = \frac{1}{2} a \cdot b$$

Проти кута в 30° лежить катет, що дорівнює половині гіпотенузи.

Радіус описаного кола визначається за формулою $R = \frac{c}{2}$.

Радіус вписаного кола визначається за формулами

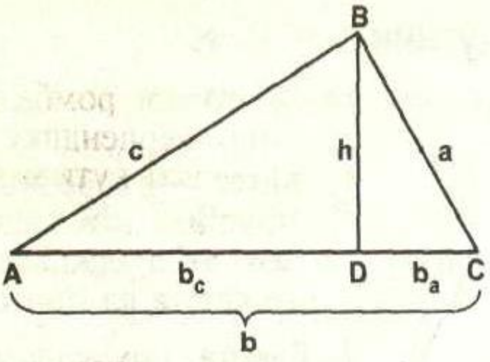
$$r = \frac{a+b-c}{2} \text{ та } r = \frac{S}{p}.$$

7. Площа визначається за формулами

$$S = \frac{1}{2} c \cdot h \text{ та } S = \frac{1}{2} a \cdot b.$$

a, b — катети; c — гіпотенуза; a_c, b_c — проекції катета на гіпотенузу:

Косокутний трикутник



8. Квадрат сторони, що лежить проти гострого кута, дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутоку основи на проекцію другої бічної сторони на основу.
9. Площа визначається за формулами:

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

10. Центр вписаного кола лежить в точці перетину бісектрис, а радіус вписаного кола визначається за формулою: $r = \frac{S}{p}$.
11. Центр описаного кола лежить в точці перетину перпендикулярів до середин сторін, а радіус описаного кола визначається за формулою: $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$.

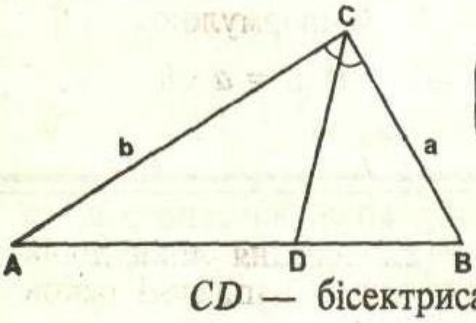
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2b \cdot b_a$$
$$a^2 = c^2 + b^2 - 2b \cdot b_c$$

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$r = \frac{S}{p}$, де S — площа, p — напівпериметр

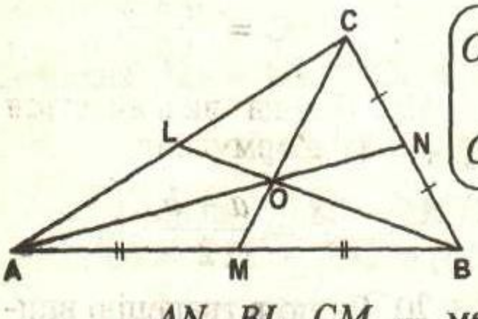
$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}$, де S — площа



CD — бісектриса

$$\frac{AD}{DB} = \frac{b}{a}$$

12. Бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить основу на частини, пропорційні прилеглим сторонам.



AN, BL, CM — медіани

$$OM = \frac{1}{3} CM$$

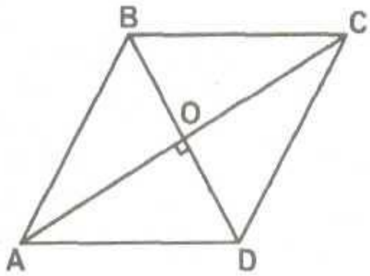
$$OC = \frac{2}{3} CM$$

13. Медіани трикутника перетинаються в одній точці і діляться нею у відношенні 2:1, починаючі від вершини.

$p = \frac{a+b+c}{2}$, r, R — радіуси вписаного та описаного кіл.

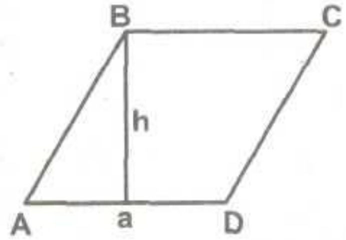
Ромб

$$AC \perp BD$$
$$\angle OAD = \angle OAB$$



14. Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні і ділять кути навпіл.

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$
$$S = a \cdot h$$



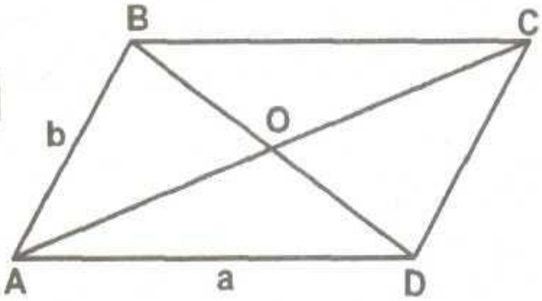
15. Площа визначається за формулами:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$
$$S = a \cdot h.$$

Паралелограм

$$AC^2 + BD^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$S = a \cdot h$$



16. Сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.
17. Площа визначається за формулою:

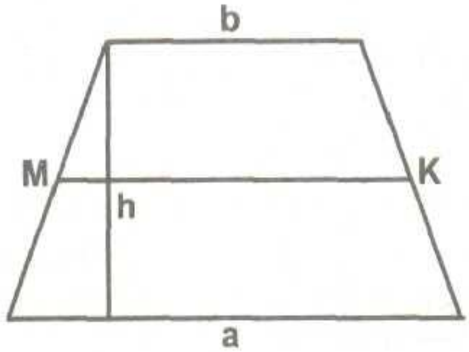
$$S = a \cdot h.$$

Трапеція

$$MK = \frac{a+b}{2}$$

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

$$a + b = c + d$$

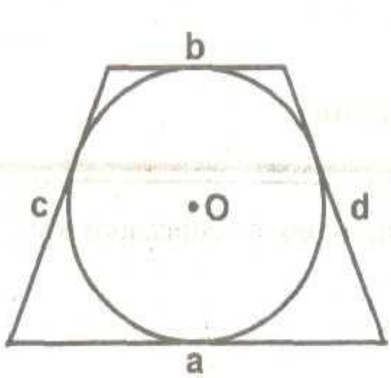


18. Середня лінія дорівнює напівсумі основ:

$$MK = \frac{a+b}{2}.$$

19. Площа визначається за формулою:

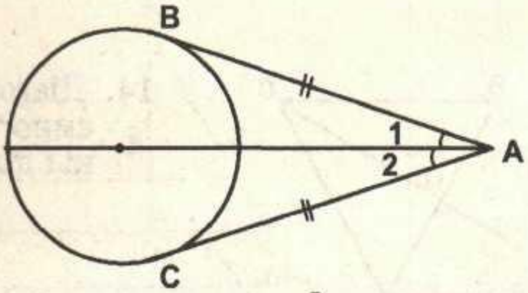
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$



20. Якщо в трапецію вписано круг, то сума основ трапеції дорівнює сумі бічних сторін.

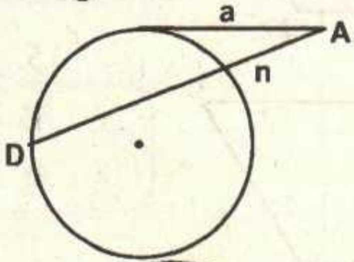
Коло і круг

$\boxed{AB = AC \quad \angle 1 = \angle 2}$



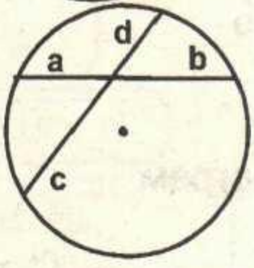
21. Якщо з однієї точки, що лежить поза колом, провести до нього дві дотичні, то
а) довжини відрізків від даної точки до точок дотику рівні;
б) кути між кожною дотичною та січною, що проходить через центр круга, рівні.

$\boxed{a^2 = AD \cdot n}$



22. Якщо з однієї точки, що лежить поза колом, провести до нього дотичну та січну, то квадрат дотичної дорівнює добутку січної на її зовнішню частину.

$\boxed{a \cdot b = c \cdot d}$



23. Якщо дві хорди перетинаються в одній точці, то добуток відрізків однієї хорди дорівнює добутку відрізків іншої.

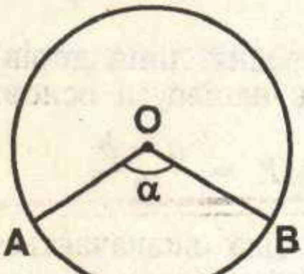
24. Довжина кола $C = 2\pi R$.

25. Довжина дуги $C_\partial = \dfrac{\pi R n}{180^\circ}$.

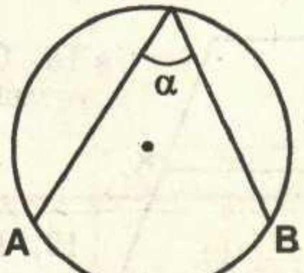
26. Площа круга $S = \pi R^2$.

27. Площа сектора

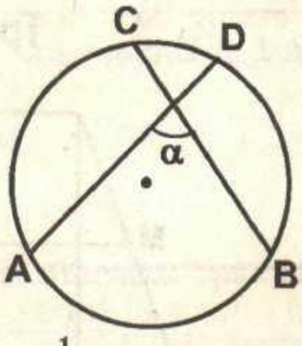
$$S_c = \frac{\pi R^2 n}{360^\circ}.$$



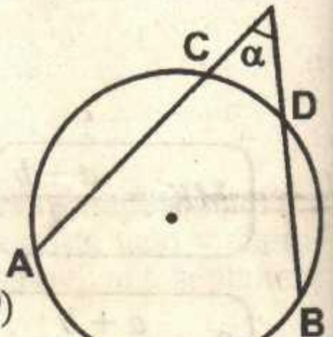
$\alpha = \smile AB$



$\alpha = \dfrac{1}{2} \smile AB$



$\alpha = \dfrac{1}{2}(\smile AB + \smile CD)$



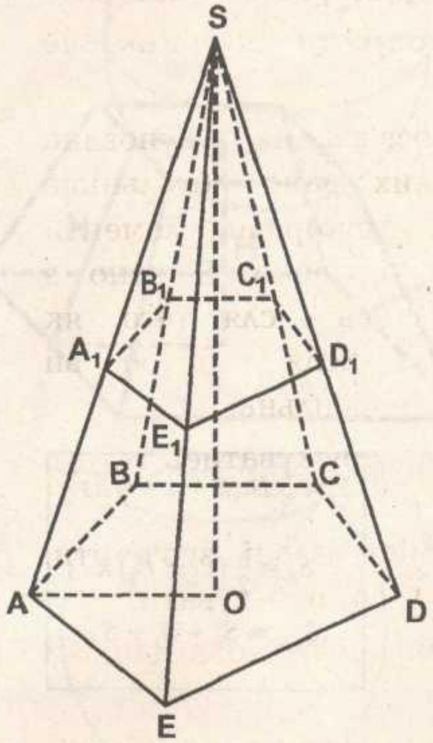
$\alpha = \dfrac{1}{2}(\smile AB - \smile CD)$

S_c — площа сектора, S — площа круга, C — довжина кола, C_∂ — довжина дуги, $\smile AB$ — кутова величина дуги.

Стереометрія

Довідковий матеріал

Якщо піраміду перетнуто площиною, паралельною до основи, то:

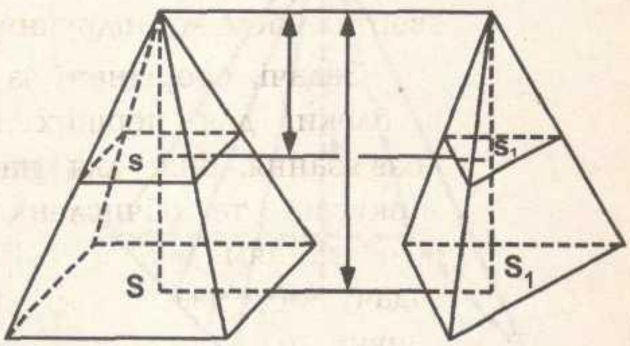


$$\frac{SA_1}{SA} = \frac{SB_1}{SB} = \ldots = \frac{SO_1}{SO}$$

$$A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$$

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}}{S_{ABCDE}} = \frac{SO_1^2}{SO^2}$$

Якщо дві піраміди з рівними висотами перетнуто на однаковій відстані від вершини площинами, паралельними до основи, то:



$$\frac{s}{s_1} = \frac{S}{S_1}$$

ПРИЗМА

ПРЯМА

$V = SH$

$S_б = PH$

$S_{пов} = S_б + 2S$

ПОХИЛА

$V = SH = S_{пер}\,AA_1$

$S_б = P_{пер}\,AA_1$

$S_{пов} = S_б + 2S$

ЦИЛІНДР

$V = \pi R^2 H$

$S_б = 2\pi RH$

$S_{пов} = 2\pi R\,(H + R)$

Позначення:

S — площа основи,

$S_б$ — площа бічної поверхні,

$S_{пер}$ — площа перпендикулярного перерізу,

$S_{пов}$ — площа повної поверхні,

P — периметр основи,

$P_{пер}$ — периметр перпендикулярного перерізу,

V — об'єм,

H — висота,

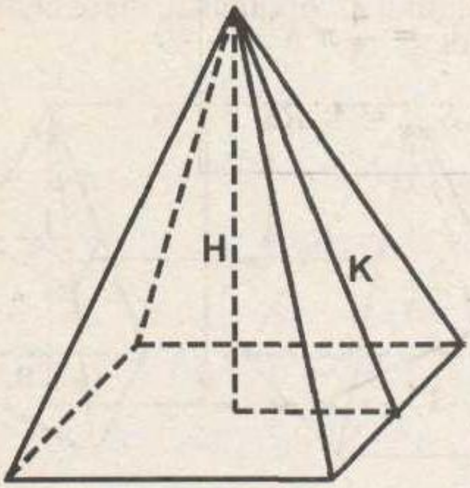
R — радіус циліндра, конуса, кулі,

K — апофема бічної грані,

L — твірна конуса.

ПІРАМІДА

ПОВНА

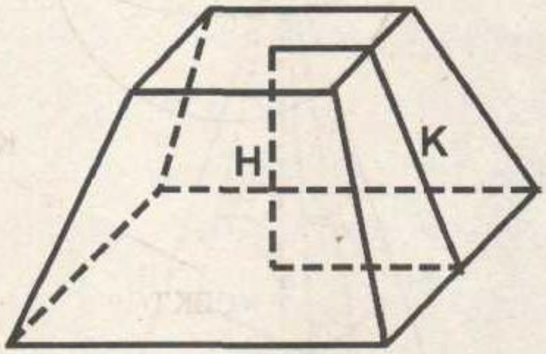


$$V = \frac{1}{3} SH$$

$$S_б = \frac{1}{2} Pk$$

$$S_{пов} = S_б + S$$

ЗРІЗАНА



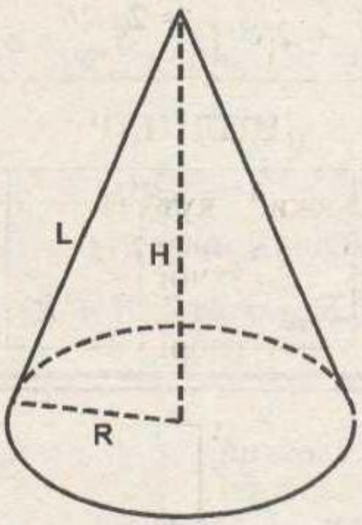
$$V = \frac{1}{3} H \left(S + s + \sqrt{Ss}\right)$$

$$S_б = \frac{1}{2} (P_1 + P_2)\, k$$

$$S_{пов} = S_б + S_1 + S_2$$

КОНУС

ПОВНИЙ

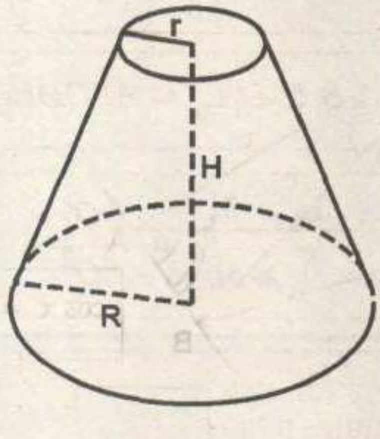


$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

$$S_б = \pi RL$$

$$S_{пов} = \pi R (L + R)$$

ЗРІЗАНИЙ

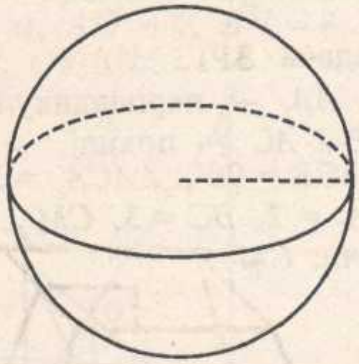


$$V = \frac{1}{3} \pi H \cdot (R^2 + r^2 + Rr)$$

$$S_б = \pi (R + r) L$$

$$S_{пов} = S_б + \pi R^2 + \pi r^2$$

КУЛЯ

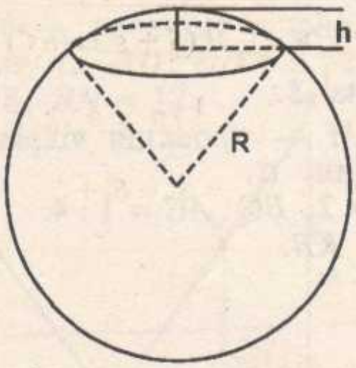


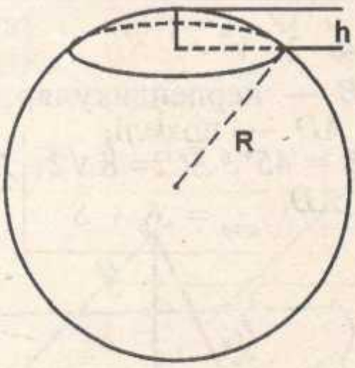
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$S_{пов} = 4\pi R^2$$

КУЛЬОВИЙ

СЕКТОР | СЕГМЕНТ (КУЛЯ) | ПОЯС



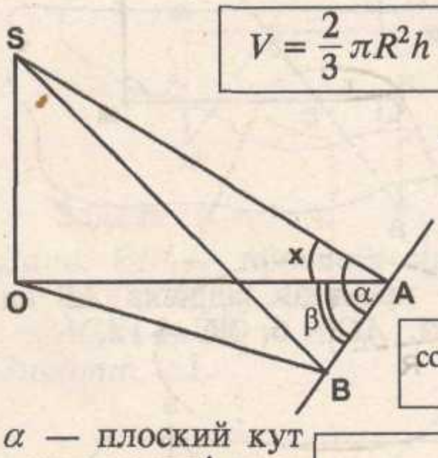


$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h\right)$$

$$S_{пов} = 2\pi Rh$$

Теорема трьох косинусів



$$\cos x = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

α — плоский кут при вершині правильної n-кутної піраміди, x — кут при ребрі основи.

$$\cos x = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$$

α — плоский кут при вершині правильної n-кутної піраміди, x — кут між бічним ребром та площиною основи.

$$\cos x = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{180^\circ}{n}}$$

α — плоский кут при вершині правильної n-кутної піраміди, x — кут при бічному ребрі.

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{90^\circ(n-2)}{n}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Примітка. При n, яке дорівнює 3, 4, 5, 6 і т.д., маємо залежність між даними кутами відповідно в правильних пірамідах: трикутній, чотирикутній і т.д.

47. Площі поверхонь геометричних тіл

1. Площа поверхні призми

$S = S_б + 2S_о$, де $S_б$ — площа бічної поверхні; $S_о$ — площа основи призми.

$S_б = P_п b$, де $P_п$ — периметр перпендикулярного перерізу; b — бічне ребро.

$S_б = P_о H$, де $P_о$ — периметр основи; H — висота прямої призми.

2. Площа поверхні піраміди

$S = S_о + S_б$, де $S_о$ — площа основи; $S_б$ — площа бічної поверхні.

$S_б = n \cdot \frac{1}{2} Aa$, де A — апофема, a — сторона основи правильної n-кутної піраміди.

$S_б = n \cdot \frac{1}{2} b^2 \sin\alpha$, де b — бічне ребро; α — плоский кут при вершині правильної n-кутної піраміди.

$S_б = \frac{S}{\cos\alpha}$ (всі бічні грані утворюють з площиною кут α).

3. Площа поверхні циліндра

$S = 2\pi R(R + H)$, $S_б = 2\pi RH$, де R — радіус основи; H — висота циліндра.

4. Площа поверхні конуса

$S = \pi R(R + l)$, $S_б = \pi Rl$, де R — радіус основи; l — твірна конуса.

5. Площа поверхні зрізаного конуса

$S = \pi\left(Rl + rl + R^2 + r^2\right)$, $S_б = \pi(R + r)l$, де R та r — радіуси основ; l — твірна зрізаного конуса.

6. Площа поверхні кулі

$S = 4\pi R^2$, де R — радіус кулі.

3.1. Метод координат

1. *Відстань між двома точками* $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

2. *Координати точки* $M(x;y)$, *яка поділяє відрізок* M_1M_2 $(M_1(x_1;y_1),\ M_2(x_2;y_2))$ *у заданому відношенні* $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2}$:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda};$$

3. *Координати середини відрізка* M_1M_2 $(M_1M = MM_2, \lambda = 1)$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

4. *Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом* $y = kx + b$,

де $k = \operatorname{tg}\alpha, \alpha$ *— кут між прямою і віссю* Ox,

b *— ордината точки перетину прямої з віссю* Oy.

5. *Рівняння прямої, яка проходить через точку* $M_0(x_0;y_0)$ *з кутовим коефіцієнтом* k:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

6. *Рівняння прямої, яка проходить через дві точки* $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

7. *Гострий кут* φ *між двома прямими* $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|.$$

8. *Відстань від точки* $M_0(x_0;y_0)$ *до прямої* $Ax + By + C = 0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

9. *Рівняння кола з центром в точці* $C(x_0;y_0)$ *і радіусом* R:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

3.2. Вектори

1. *Розклад вектора за ортами координатних осей:*

$$\overline{a} = X\overline{i} + Y\overline{j},$$

де X, Y *— координати вектора (проекції вектора на координатні осі),* $\overline{i}, \overline{j}$ *— одиничні вектори координатних осей відповідно* Ox, Oy.

2. *Якщо задані точки* $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$, *то вектор*

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j}.$$

3. *Довжина вектора* $\overline{a} = (X;Y)$:

$$|\overline{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

4. *Якщо* $\overline{a} = (X_1;Y_1)$ *і* $\overline{b} = (X_2;Y_2)$, *то*

$$\overline{a} + \overline{b} = (X_1 + X_2; Y_1 + Y_2), \overline{a} - \overline{b} = (X_1 - X_2; Y_1 - Y_2),$$

$$\lambda\overline{a} = (\lambda X; \lambda Y), \lambda \in \mathbb{R}.$$

5. Якщо $\overline{a} = (X_1;Y_1)$ і $\overline{b} = (X_2;Y_2)$ колінеарні, то

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \lambda.$$

6. *Скалярний добуток двох ненульових векторів* $\overline{a}$ і $\overline{b}$:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}).$$

7. *Якщо* $\overline{a} = (X_1;Y_1)$ *і* $\overline{b} = (X_2;Y_2)$, *то*

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = X_1X_2 + Y_1Y_2.$$

8. *Кут між векторами* $\overline{a} = (X_1;Y_1)$ і $\overline{b} = (X_2;Y_2)$:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|};\ \cos\varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}\sqrt{X_2^2 + Y_2^2}}.$$

9. *Умова перпендикулярності ненульових векторів* $\overline{a}$ *і* $\overline{b}$:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = 0;\ X_1X_2 + Y_1Y_2 = 0.$$

10. *Проекція вектора* $\overline{a}$ *на напрямок вектора* $\overline{b}$:

$$\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{b}|};\ \text{пр}_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2}{\sqrt{X_2^2 + Y_2^2}}.$$

Деякі математичні позначення

$=$	дорівнює	$\lim$	границя
$\neq$	не дорівнює	$\int$	інтеграл
$\approx$	наближено дорівнює	y'	похідна
$>$	більше ($15 > 2$)	$\parallel$	паралельно
$<$	менше ($3 < 7$)	$\perp$	перпендикулярно
$\geq$	більше або дорівнює ($3 \geq 3$, $3 \geq 0$)	$\in$	належить ($A \in a$)
$\leq$	менше або дорівнює ($2 \leq 2$, $2 \leq 9$)	$\subset$	належить ($a \subset \gamma$)
$\lvert\ \rvert$	модуль числа	$\bigcup$	об'єднання
$\sqrt[n]{\ }$	корінь n-го степеня ($n \in \mathbf{N}$)	$\bigcap$	перетин
$\log_z$	логарифм при основі z	Δ	трикутник
$\lg$	логарифм десятковий ($z = 10$)	$\varnothing$	порожня множина
$\ln$	логарифм натуральний ($z = e$)	$\%$	процент (відсоток)