Міністерство освіти і науки України
Департамент освіти і науки Хмельницької облдержадміністрації
Хмельницьке територіальне відділення МАН України
Наукове товариство учнів Кам’янець-Подільського району

Відділення: математика
Секція: математика

МАГІЧНІ КВАДРАТИ В МАТЕМАТИЦІ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКА

Роботу виконав:
Нагибась Олександр Володимирович,
учень 9 класу
Дерев’янської загальноосвітньої
школи I-III ступенів

Науковий керівник:
Криськов Цезарій Андрійович,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент Кам’янець-Подільського
національного університету імені Івана
Огієнка

Педагогічний керівник:
Ткачук Іванна Віталіївна,
учитель математики
Дерев’янської загальноосвітньої
школи I-III ступенів

Дерев’яне — 2017

ТЕЗИ

МАГІЧНІ КВАДРАТИ В МАТЕМАТИЦІ ТА ЇХ ХАРАКТЕРИСТИКА

Нагибась Олександр Володимирович

Хмельницьке територіальне відділення МАН України

Дерев'янська ЗОШ І-ІІІ ст, 9 клас, с. Дерев'яне

Ткачук Іванна Віталіївна, учитель математики

Однією з найзагадковіших і популярних математичних «головоломок» є магічний квадрат, який являє собою табличку з рівною кількістю стовпців і рядків, особливість якої полягає в тому, що суми чисел кожного рядка, стовпчика і діагоналей рівні — це число називається «магічною константою».

***Мета роботи**:* аналіз різних видів магічних квадратів, ознайомлення з методами їх побудови та вивчення застосування магічних квадратів в математиці.

В даний час відомі різні способи побудови магічних квадратів, в основному за допомогою комп'ютера, але завдання на побудову або заповнення магічного квадрата все частіше зустрічаються на математичних олімпіадах чи конкурсах, тому вивчення даної теми є актуальним сьогодні.

Відповідно до зазначеної мети виникає необхідність вирішення таких завдань: з'ясувати сутність магічного квадрату, розглянути відомі види магічних квадратів, проаналізувати та описати нормальні і нетрадиційні методи побудови магічних квадратів парно-непарного порядку, вивчити та узагальнити приклади використання магічних квадратів в математиці.

Результатом роботи є аналіз прикладів використання магічних квадратів у математиці: уроки математики в початкові школі, онлайн-ігри, головоломка «Судоку», задачі з математичних олімпіад та конкурсу «Кенгуру».

Теорія магічних квадратів ні в якій мірі не може вважатися завершеною. Дотепер невідомий ніякий загальний метод побудови всіх магічних квадратів даного порядку n і навіть невідомо їхнє число(при n). Тому таку тематику потрібно розглядати та досліджувати сьогодні.

ЗМІСТ

ВСТУП

Однією з найзагадковіших і популярних математичних «головоломок» є знаменитий магічний (чарівний) квадрат, який являє собою табличку з рівною кількістю стовпців і рядків, особливість якої полягає в тому, що суми чисел кожного рядка, кожного стовпчика і кожної діагоналі рівні — це число називається «магічною константою». Класичні магічні квадрати можуть бути нормальними (використовуються цілі числа від 1 і до n^2), побудованими для всіх порядків, крім другого, а також асоціативними (сума двох чисел, розташованих з дотриманням симетрії щодо центра квадрата дорівнює n^2+1).

Вчені минулого вважали кількісні відносини основою сутності миру. Тому вивченням чисел і їхніми співвідношеннями займалася найбільш розумна частина людства. «У дні моєї юності я у вільний час розважався тим, що становив... магічні квадрати» — писав Бенджамін Франклін. А на відомій гравюрі «Меланхолія» німецького художник А.Дюрера у верхньому правому куті висить квадрат, розбитий 44 клітини, в які вписані 16 натуральних чисел.

Це дивовижний квадрат: сума чисел в кожному рядку, у кожному стовпці і діагоналях однакові.

В даний час відомі різні способи побудови магічних квадратів, в основному за допомогою комп’ютера, але завдання на побудову або заповнення магічного квадрата все частіше зустрічаються на математичних олімпіадах чи конкурсах, тому вивчення даної теми є актуальним сьогодні.

Мета роботи полягає в аналізі різних видів магічних квадратів, ознайомлення з методами їх побудови та вивчення застосування магічних квадратів в математиці.

Відповідно до зазначеної мети виникає необхідність вирішення таких завдань:

- з’ясувати сутність магічного квадрату;
- розглянути усі відомі види магічних квадратів;

- проаналізувати та описати нормальні і нетрадиційні методи побудови магічних квадратів парно-непарного порядку;
- вивчити приклади використання магічних квадратів в математиці;
- узагальнити приклади використання магічних квадратів в математиці.

Об'єкт дослідження — магічні квадрати парного і непарного порядку.

Предмет дослідження: процес розвитку теорії магічних квадратів, властивості, методи побудови, практичне застосування.

В методології були використані роботи декількох авторів довідників та посібників, методичних матеріалів, відомостей, отриманих з інтернету з залученням інформації, наданої кваліфікованим спеціалістом в області математики. Робота виконана порівняно-літературним способом.

Робота складається зі вступу, 3 розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 25 найменувань. Робота викладена на 28 сторінках друкованого тексту і 4 додатки, робота містить 24 рисунків та 1 таблиця.

РОЗДІЛ I
ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ПРО МАГІЧНІ КВАДРАТИ

1.1. Поняття та історія виникнення магічних квадратів

Магічний квадрат (Рис.1.1.)— це квадратна таблиця $n \times n$заповнена n^2числами таким чином, що сума чисел у кожному рядку, кожному стовпчику і на обох діагоналях однакова. Якщо в квадраті рівні суми чисел тільки в рядках і стовпцях, то він називається *напівмагічним* [20]. *Нормальним* називається магічний квадрат, заповнений цілими числами від до n^2. Магічний квадрат називається *асоціативним* або *симетричним*, якщо сума будь-яких двох чисел, розташованих симетрично щодо центру квадрата, дорівнює n^2+1.

Нормальні магічні квадрати існують для всіх $n \geq 1$, за винятком $n=2$, хоча випадок тривіальний — квадрат складається з одного числа. Мінімальний нетривіальний випадок показаний нижче, він має порядок 3 [15].

		2	7	6	→	15
		9	5	1	→	15
		4	3	8	→	15
	↙	↓	↓	↓	↘	
15		15	15	15		15

Рис. 1.1. Магічний квадрат

Сума чисел в кожному рядку, стовпчику і по діагоналях, називається магічною сталою, *M*. Магічна константа нормального магічного квадрата залежить тільки від n і визначається формулою:

$$M(n) = \frac{n(n^2+1)}{2} \qquad (1.1)$$

Перші значення магічних констант наведені в таблиці1[8].

Таблиця 1

Порядок n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
M(n)	15	34	65	111	175	260	369	505	671	870	1105

Магічний квадрат III порядку вважається найдавнішим. У Китаї він використовувався ще 5000р. тому, як талісман, також були гральними.

Математиків у них зацікавила внутрішня гармонія і краса. Вони їх властивості, відкривали закономірності їх складання, класифікували їх. За кількістю клітин вони діляться на парні: 2^2, 4^2, 6^2 . . . і непарні: 3^2, 5^2, . . [25].

Стародавня легенда говорить (Додаток 1), що перший магічний квадрат Ло Шу, що містить три рядки і три стовпці, числа яких в сумі становили 15, був написаний на панцирі священної черепахи, що мешкає у водах Хуанхе. В Індії відомий свій найдавніший (XI століття) магічний квадрат, що вважається «диявольським», сума магічних чисел якого дорівнює 34.

В Європі магічний квадрат з’явився лише в середні віки завдяки візантійському письменнику Мосхопулос, проте вся слава європейських магічних квадратів дісталася А. Дюреру, який першим придумав і зобразив його у своїй гравюрі «Меланхолія».

Квадрат Дюрера в сумі 34 дає не тільки по вертикалі, горизонталі та по діагоналі: Дюрер пішов набагато далі — малі квадрати, складені з чотирьох клітинок, розташованих по кутах великого, квадрат з чотирьох клітинок в центрі, сума чисел у кутових клітинах, квадрати, що імітують «хід коня» та ін. — все дає в сумі 34. XVI століття додав до скарбнички «магії» і астрології квадрати від 3 до 9 порядків, автором яких став астролог Корнелій Генріх Агріппа. Завдяки йому магічний квадрат з тих пір і понині є символом магів і чарівників. Останні магічні квадрати були побудовані на початку XX століття Генрі Дьюдени, Аланом Джонсоном (ними були створені нетрадиційні магічні квадрати, в яких використовуються не тільки натуральні числа) і Дж.Мансі, який, за невеликим винятком, використовував послідовні прості числа [7].

Квадрат Ло Шу (Китай) (Рис. 1.2.а)

Ло Шу єдиний нормальний магічний квадрат 3×3. Був відомий ще в Стародавньому Китаї, перше зображення на черепаховому панцирі датується 2200 р. до н. е. На рис. 1.2.б зображений квадрат Ло Шу в книзі епохи Мін [2].

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Рис. 1.2.а Квадрат Ло Шу

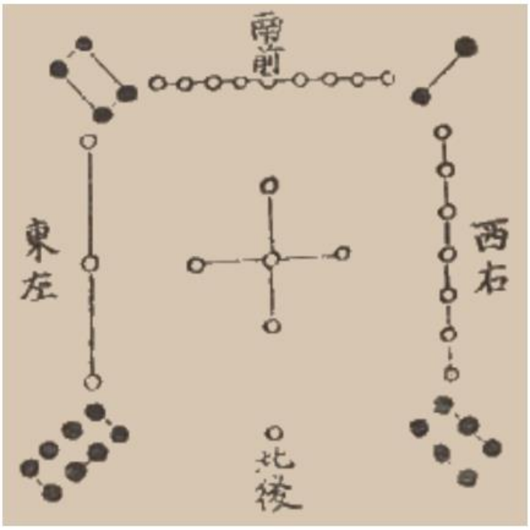


Рис. 1.2.б Зображення Ло Шу в книзі епохи Мін

Квадрат, знайдений в Кхаджурахо (Індія)(Рис. 1.3.)

Це один з перших виявлених *унікальний* магічний квадрат, що був знайдений в написі XI століття в індійському місті Кхаджурахо. Це перший магічний квадрат, що відноситься до різновиду так званих «диявольських» квадратів.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Рис. 1.3.Квадрат, знайдений в Кхаджурахо (Індія)

Квадрат Ян Хуея (Китай) (Рис. 1.4.)

У 13 ст. математик Ян Хуей зайнявся проблемою методів побудови магічних квадратів. Його дослідження були потім продовжені іншими китайськими математиками. Ян Хуей розглядав магічні квадрати не тільки третього, а й більших порядків. Деякі з його квадратів були достатньо складні, однак він завжди давав правила для їх побудови. Він зумів побудувати магічний квадрат шостого порядку, причому останній виявився майже асоціативним (у ньому тільки дві пари центрально протилежних чисел, що виділені жирним шрифтом, не дають суму 37) [2].

27	29	2	4	13	36
9	11	20	22	31	**18**
32	25	7	3	21	23
14	16	34	30	12	5
28	6	15	17	26	**19**
1	24	33	35	8	10

Рис. 1.4.Квадрат Ян Хуея (Китай)

Квадрат Альбрехта Дюрера (Рис. 1.5.)

Магічний квадрат 4×4, зображений на гравюрі Альбрехта Дюрера «Меланхолія I», вважається найбільш раннім в європейському мистецтві. Два середні числа в нижньому ряду вказують дату створення картини (1514, в таблиці виділено жирним). Сума чисел на будь-який горизонталі, вертикалі і діагоналі дорівнює 34. Ця сума також зустрічається в усіх кутових квадратах 2×2, в

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	**15**	**14**	1

Рис. 1.5. Квадрат Альбрехта Дюрера

центральному квадраті (10+11+6+7), у квадраті з кутових клітин (16+13+4+1), в рядах чисел, побудованих «ходом коня» ((2+8+9+15) і (3+5+12+14)), прямокутниках, утворених парами середніх клітин на протилежних сторонах ((3+2+15+14) і (5+8+9+12)). Більшість додаткових симетрій пов'язано із тим, що сума будь-яких двох центрально симетрично розташованих чисел дорівнює 17 [2, 12].

Квадрати Генрі Дьюдені і Аллана Джонсона-молодшого (Рис. 1.6.)

Якщо в квадратну матрицю $n \times n$ заноситься не строго натуральний ряд чисел, то цей магічний квадрат — *нетрадиційний*. Поряд представлені два такі магічні квадрати, заповнені в основному простими числами. Перший (має порядок $n=3$) — квадрат Дьюдені; другий (має порядок $n=4$) — квадрат Джонсона. Обидва вони були розроблені на початку двадцятого століття [14].

Наступний квадрат, побудований в 1913 році Дж.Н. Мансі, примітний тим, що він складений з 143 послідовних простих чисел за винятком двох моментів: залучена одиниця, яка не є простим числом, і не використано єдине парне просте число — 2 [14].

67	1	43
13	37	61
31	73	7

3	61	19	37
43	31	5	41
7	11	73	29
67	17	23	13

1	823	821	809	811	797	19	29	313	31	23	37
89	83	211	79	641	631	619	709	617	53	43	739
97	227	103	107	193	557	719	727	607	139	757	281
223	653	499	197	109	113	563	479	173	761	587	157
367	379	521	383	241	467	257	263	269	167	601	599
349	359	353	647	389	331	317	311	409	307	293	449
503	523	233	337	547	397	421	17	401	271	431	433
229	491	373	487	461	251	443	463	137	439	457	283
509	199	73	541	347	191	181	569	577	571	163	593
661	101	643	239	691	701	127	131	179	613	277	151
659	673	677	683	71	67	61	47	59	743	733	41
827	3	7	5	13	11	787	769	773	419	149	751

Рис.1.6.Квадрати Генрі Дьюдені і Аллана Джонсона-молодшого

1.2. Види магічних квадратів

- Нормальний(*англ. normal*) — магічний квадрат, заповнений цілими числами від1 до n^2.

- Напівмагічний (*англ. semimagic*) — магічний квадрат, заповненний числами від 1 до n^2, причому сума чисел по горизонталях і вертикалях дорівнює магічній константі, а по діагоналях ця умова не виконується.
- Асоціативний(*англ. mystic*), або симетричний — магічний квадрат, у якого сума будь-яких двох чисел, що розташовані симетрично відносно центра квадрата, дорівнює одному й тому ж числу: $1+n^2$.
- Пандіагональний (*англ. Multimagic*), або диявольський(англ. Satanic) — магічний квадрат, в якого сума чисел по ламаних діагоналях також дорівнює магічній константі.
- Ідеальний (*рос.идеальный*) — магічний квадрат, що одночасно є пандіагональним і асоціативним.
- Досконалий (*рос. совершенный*) — магічний квадрат четвертого порядку, що є пандіагональним та має ряд додаткових властивостей. Всі магічні квадрати 4 порядку є досконалими.
- Бімагічний (*англ. bimagic*) — магічний квадрат, що залишається магічним після заміни всіх його елементів на їх квадрати. Бімагічних квадрати 3, 4 і 5 порядків не існує.
- Мультимагічний (*англ. multimagic*) — узагальнення властивостей бімагічних квадратів на довільний степінь *n.*
- Квадрати Б. Франкліна (*рос. .квадраты Б. Франклина*) — магічні квадрати, які крім основних властивостей мають додаткові унікальні особливості [2].

РОЗДІЛ II
ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ МАГІЧНИХ КВАДРАТІВ

2.1. Традиційні магічні квадрати і методи їх побудови

Методи побудови магічних квадратів поділяються на три категорії в залежності від того, магічний квадрат якого порядку ви хочете побудувати:

- непарний;
- дорівнює непарному числу, помноженому на 2;
- дорівнює натуральному числу, помноженому на 4.

Загальний метод побудови магічних квадратів всіх типів невідомий, а можливо і не існує, хоча широко застосовуються різні спеціалізовані алгоритми. Знайти всі магічні квадрати порядку *n* вдається тільки для n≤, тому становлять великий інтерес способи побудови магічних квадратів при *n>4*. Найпростішим є алгоритм побудови магічного квадрата непарного порядку.

Також розроблені алгоритми побудови пандіагональних квадратів, та ідеальних магічних квадратів 9 порядку. Ці результати дозволяють будувати ідеальні магічні квадрати порядків . Існують також загальні методи компонування ідеальних магічних квадратів непарного порядку . Розроблено методи побудови ідеальних магічних квадратів порядку , де, і досконалих магічних квадратів. Пандіагональні та ідеальні квадрати парного-непарного порядку вдається скомпонувати лише в тому випадку, якщо вони нетрадиційні. Тим не менш, можна знаходити майже пандіагональні квадрати. Знайдена особлива група ідеально-досконалих магічних квадратів (традиційних і нетрадиційних) [24].

2.1.1. Метод побудови магічного квадрата непарного порядку

Описаний французьким дипломатом de la Loubère у його книзі «A new historical relation of the kingdom of Siam» [2].

Побудова (Рис. 2.1.) починається з центральної клітинки верхнього ряду, куди ми вписуємо 1. Надалі ми будемо рухатися на одну клітинку вгору і вправо за один крок вписуючи послідовний ряд чисел від *1* до n^2. Якщо ми дійшли до правого стовпця чи верхнього рядка, то з наступним кроком пересуваємось до протилежного лівого чи нижнього краю відповідно. Якщо наступна клітинка вже зайнята, то просто рухаємось на 1 клітинку вниз. Продовжуємо виконувати ці кроки n^2 разів, доки не заповнимо всі клітинки.

крок 1		
	1	

крок 2		
	1	
		2

крок 3		
	1	
3		
		2

крок 4		
	1	
3		
4		2

крок 5		
	1	
3	**5**	
4		2

крок 6		
	1	**6**
3	5	
4		2

крок 7		
	1	6
3	5	**7**
4		2

крок 8		
8	1	6
3	5	7
4		2

крок 9		
8	1	6
3	5	7
4	**9**	2

Рис. 2.1.Метод побудови магічного квадрата непарного порядку

Можна починати будувати магічний квадрат і з інших клітин верхнього ряду, проте тоді сума діагоналей не буде рівною магічній константі(отримаємо напівмагічний квадрат). В процесі побудови можна вибрати й інший напрям руху(вгору і вліво, вниз і вліво, вниз і вправо). Як результат знову отримаємо справжній магічний квадрат [11, 13].

2.1.2. Метод терас

Описаний Ю. В. Чебраковим у «Теорії магічних матриць» [2].

Для заданого непарного n накреслимо квадратну таблицю розміром $n \times n$. Добудуємо до цієї таблиці з усіх чотирьох сторін тераси (пірамідки). В результаті отримаємо ступінчасту симетричну фігуру (Рис. 2.2.). Починаючи з лівої вершини ступінчастої фігури, заповнимо її діагональні ряди послідовними натуральними числами від 1 до n^2.

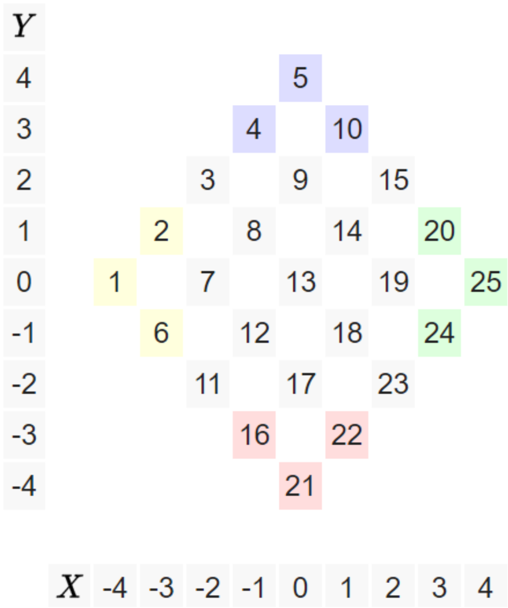
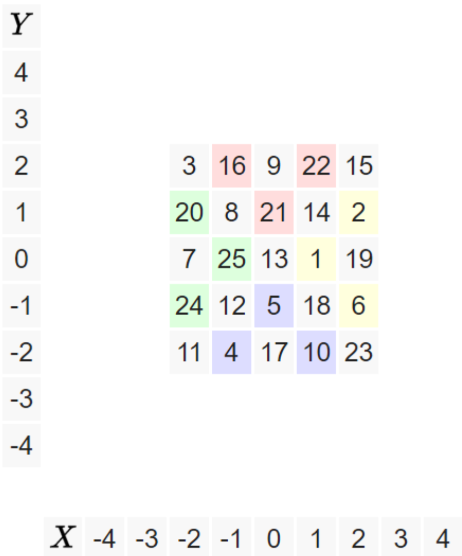


Рис. 2.2. Симетрична фігура методу терас

Після цього для отримання класичної матриці порядку n, що знаходяться в терасах, поставимо на ті місця таблиці розміром $n \times n$, в яких вони були б, якщо переміщати їх разом з терасами до того моменту, поки підстави терас не долучаться до протилежної сторони таблиці (Рис. 2.3.) [12, 16, 20].



3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Рис. 2.3. Метод терас

2.1.3. Метод побудови магічних квадратів парно-непарного порядку

До класичних алгоритмічних методів побудови магічних квадратів непарного порядку відносять: індійський метод, метод альфіла та метод Баше.

Індійський метод складання магічних квадратів (іноді називається також *сіамським*) є, очевидно, самим давнім алгоритмом побудови магічних квадратів довільного непарного порядку $n=2m+1$. Цей алгоритм описується наступними правилами:

Числа від *1* до n^2по черзі вписуються в Клітини основного квадрата.

- Якщо деяке правило потребує вписати дане число в клітинку, що лежить поза основним квадратом, то замість цього розглянуте число вписується в еквівалентну клітинку основного квадрата.
- Число 1 вписується в середню клітинку верхнього ряду, тобто у клітинку з координатами $(m, 2m)$.
- Якщо число z вписаного в клітинку з координатами (x, y), то наступна число $z+1$ вписується в клітинку з координатами $(x+1, y+1)$, тобто в клітинку, суміжну з клітинкою (x, y), в напрямку зростаючої діагоналі, за умови, що ця остання клітка ще вільна від чисел.
- Якщо клітинка з координатами $(x+1, y+1)$ вже зайнята деяким числом, то число $z+1$ вписується в клітинку з координатами $(x, y\text{-}1)$, тобто в клітинку, що безпосередньо дотикається знизу до клітинки (x, y). (Виявляється, що це завжди можливо, тобто, клітина $(x, y\text{-}1)$ обов'язково вільна від чисел [12].

На рис. 2.4.зображений магічній квадрат третього порядку, побудованій індійськім методом[11]. Для ясності, на цьому малюнку заповнені також деякі клітинки поза основним квадратом.

	9	2	4
8	1	6	8
3	5	7	3
4	9	2	

Рис. 2.4. Магічній квадрат третього порядку

Зауваження. З отриманого, по індійському методу, магічного квадрата третього порядку можна поворотами навколо центру і відображення в сторонах здобудуть ще сім других магічних квадратів. Звичайно, можна зробити й інші перетворення, наприклад до всіх чисел додати чи відняті одне й ті ж саме число, або помножити чи розділити на одне й ті ж ціле число.

Індійський метод має один недолік — для кожного непарного n він дає лише один магічний квадрат[9, 12, 20].

Метод альфіла

В цьому методі використається рух по діагоналі через одну клітинку (за цим законом у стародавніх шахах рухався предок сучасного слона — назв альфіл, від якого і пішла назва методу). Перші два правила методу альфіла співпадають з індійським методом. Інші правила формулюються так:

- Число 1 вписується в клітинку з координатами (0,1).

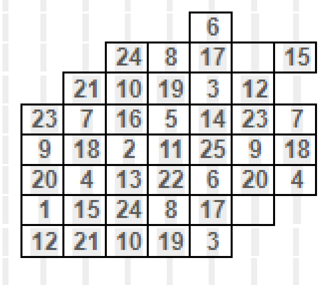


Рис. 2.5. Магічний квадрат п'ятого порядку

- Якщо число z вписано в клітинку з координатами *(x, y),* то число z+1 вписується в клітинку з координатами (x+2, y+2) за умови, що ця клітинка ще вільна від чисел.

Якщо клітинка (x+2, y+2) вже зайнята, то число z+1 вписується в клітинку (x+1, y+3), тобто в клітинку, яка получилася з клітинки з числом z «подовжений ходом коня».

Приклад магічного квадрата п'ятого порядку наведений на рис.2.5. [9, 12].

2.1.4. Побудова магічних квадратів методом накладання

Знайдений в 1937 році метод побудови магічного квадрата схожий навідомий спосіб терас, але має свої особливості. Суть методу — накладення двох квадратів.

Квадрат 1 ($к_1$) — основний, магічний, непарного порядку n = 2a + 1, (a = 1, 2, 3і т.д.) Число осередків в квадраті —n^2. Осередки незаповнені.

Квадрат 2 ($к_2$) — допоміжний, що не магічний. Розташовується під кутом 45^oдо основного квадрату. Паралельні лінії цього квадрата проходять по діагоналях осередків основного квадрата. Число точок перетину паралельних ліній другого квадрата дорівнює $(2a + 1)^2$, тобто на кожній лінії по n цифр. Загальна кількість цифр —n^2.

Порядок квадрата n_2 = 2a парний. У цьому відмінність від методу терас [7].

Приклад 1. Побудова магічного квадрата 3-го порядку.

На рис. 2.6.а побудований квадрат $к_1$ (кольоровий) третього порядку n = 3. Число вільних клітин — 9. На $к_1$ накладено допоміжний квадрат $к_2$. На його паралельних лініях розміщений натуральний ряд чисел від 1 до 9. У результаті накладення частина цифр другого квадрата (2, 4, 5, 6, 8) збіглися з осередками першого квадрата. причому число таких цифр одно центральному магічному числу m. В даному випадку — 5. Центральне магічне число m є середньоарифметичної величиною квадрата.

$m = \frac{n^2+1}{2}$, і окрім цього, в загальному вигляді $m = \frac{m_1+m_2}{2}$, де m_1 і m_2— рівновіддалені числа від центрального числа m.

Інша частина цифр, що дорівнює (n^2-m) або (m-1), залишилося в розташуванні другого квадрата (в даному випадку 4 цифри: 1, 3, 7 і 9). Ці цифри переміщаємо в основний квадрат, як показано на рис. 2.6.в

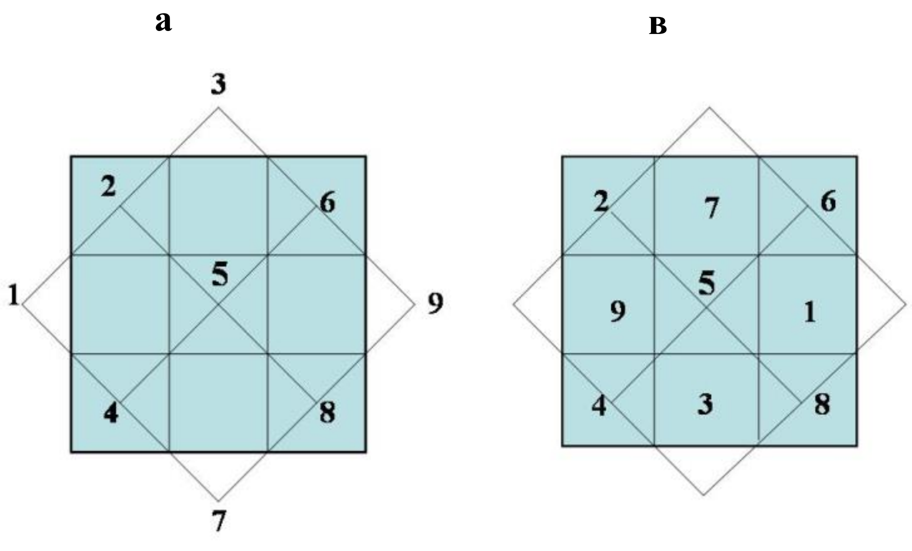


Рис. 2.6.а. Квадрат к1 (кольоровий) третього порядку;2.6.в основний квадрат

В результаті отримано: сума цифр на кожній з горизонтальних, вертикальних і діагональних ліній однакова і дорівнює добутку порядку квадрата на його магічне число. Для квадрата 3-го порядку 3 · 5 = 15.

Магічна константа $M = n \cdot m$ або $M(n) = \frac{n(n^2+1)}{2}$.

Формула запропонована Баше де Мезіріаком в XVII столітті. Дана формула Баше, як і формула центрального магічного числа $m = \frac{n^2+1}{2}$є приватними для натурального ряду чисел, де мінімальне $m_{min} = 1$.

Однак магічні квадрати можуть заповнюватися будь-якими іншими числами арифметичної прогресії від $m_{min} = 1 \cdot N$ при $N > 0$ до $m_{max} = n^2 \cdot N = n^2 \cdot m_{min}$[17].

Тоді в загальному вигляді центральне магічне число $m = \frac{m_{min}(n^2+1)}{2}$, магічна константа $M(n) = \frac{n \cdot m_{min} \cdot (n^2+1)}{2}$. Інші приклади побудови магічного квадрата наведені у додатку 2[18].

2.2. Нетрадиційні магічні квадрати і методи їх побудови

Магічний квадрат може бути заповнений будь-якими натуральними числами, в такому випадку він називається нетрадиційним, на відміну від традиційного (нормального), заповненого числами від 1 до n^2.

Звичайно, не розглядаються тривіальні квадрати, заповнені однаковими числами. Так, наприклад, якщо заповнити квадрат будь-якого порядку одними одиницями, зрозуміло, що він буде і магічним, і навіть пандіагональних.

21	47	13	39	5
7	23	49	15	31
33	9	25	41	17
19	35	1	27	43
45	11	37	3	29

Рис. 2.7. Магічний квадрат п’ятого порядку

Наприклад, магічний квадрат можна заповнити лише непарними числами або тільки парними. Такий магічний квадрат можна побудувати методом терас. На рис. 2.7. магічний квадрат п’ятого порядку, заповнений непарними числами від 1 до 49, він побудований методом терас.

Методом терас можна побудувати магічний квадрат, заповнений числами, що представляють собою послідовні члени арифметичної прогресії (з натуральних чисел) з різницею, що дорівнює натуральному числу[20].

Нетрадиційний магічний квадрат можна отримати простим додаванням до чисел в кожному осередку нормального (традиційного) магічного квадрата будь-якого натурального числа. Якщо до числа кожного осередку квадрата, зображеного на рис. 1, додати 1, то вийде магічний квадрат, заповнений парними числами від 2 до 50 (Рис. 2.8.).

22	48	14	40	6
8	24	50	16	32
34	10	26	42	18
20	36	2	28	44
46	12	38	4	30

Рис. 2.8. Магічний квадрат, заповнений парними числами від 2 до 50

У книзі «Математичний дозвіл» розглянуті два нетрадиційних магічних квадрата, заповнених простими числами. Перший з них — квадрат Дьюдені — заповнений послідовними простими числами (Рис. 2.9.). Його магічна константа дорівнює 111, це найменша з постійних для магічних квадратів, складених з простих чисел (доведено Дьюдені).

67	1	43
13	37	61
31	73	7

Рис. 2.9. Квадрат Дьюдені

Другий квадрат склав Дж. М. Мансі в 1913 р Цей квадрат заповнений 144-ма першими непарними простими числами (виключається єдине парне просте число 2).

1	823	821	809	811	797	19	29	313	31	23	37
89	83	211	79	641	631	619	709	617	53	43	739
97	227	103	107	193	557	719	727	607	139	757	281
223	653	499	197	109	113	563	479	173	761	587	157
367	379	521	383	241	467	257	263	269	167	601	599
349	359	353	647	389	331	317	311	409	307	293	449
503	523	233	337	547	397	421	17	401	271	431	433
229	491	373	487	461	251	443	463	137	439	457	283
509	199	73	541	347	191	181	569	577	571	163	593
661	101	643	239	691	701	127	131	179	613	277	151
659	673	677	683	71	67	61	47	59	743	733	41
827	3	7	5	13	11	787	769	773	419	149	751

Рис. 2.10. Квадрат Дж. М. Мансі

Його магічна константа дорівнює 4514. Ви маєте доступ до цього квадрат на рис. 2.10. Автор квадрата довів, що найменший магічний квадрат з послідовних непарних простих чисел повинен мати порядок 12.

У джерелі [2] наведено ще один нетрадиційний квадрат, заповнений простими числами, показую його на рис. 2.11. За джерелом [17] можна розглянути ще нетрадиційні квадрати п'ятого, четвертого і третього порядку, які заповнені числами від 1 до 50 (всі разом). Ці квадрати показані на рис. 2.12 [12, 13].

17	89	71
113	59	5
47	29	101

Рис. 2.11 Нетрадиційний магічний квадрат

4	26	50	15	37
48	13	40	2	29
38	5	27	46	16
25	49	14	41	3
17	39	1	28	47

11	34	24
36	23	10
22	12	35

6	33	21	42
44	19	31	8
43	20	32	7
9	30	18	45

Рис. 2.12 Нетрадиційні квадрати п'ятого, четвертого і третього порядку

РОЗДІЛ ІІІ
ПРИКЛАДИ ВИКОРИСТАННЯ МАГІЧНИХ КВАДРАТІВ У МАТЕМАТИЦІ

На уроках математики та інформатики частого застосування набули магічні квадрати. Починаючи з початкової школи на уроках математики, під час вивчення додавання і віднімання чисел, зустрічаються завдання з магічним квадратом. Також, завдання на побудову чи заповнення магічного квадрата можна спостерігати в завданнях міжнародного математичного конкурсу «Кенгуру», на математичних олімпіадах. Яскравий приклад магічного квадрату усім відома головоломка «Судоку».

Для того щоб розв’язати магічний квадрат можна користуватися наступною інструкцію:

- ✓ Накресліть магічний квадрат на аркуші паперу. Якщо ваш квадрат розділений на 9 клітин, в них потрібно розкласти числа від 1 до 9 так, щоб сума числі в кожному стовпці, рядку і діагоналі становили 15. Краще накреслити квадрат на аркуші в клітинку і вписувати цифри не ручкою, а олівцем — так вам легше буде вносити зміни, і ви не заплутаєтеся в закреслення цифр.
- ✓ Напишіть у всіх клітках по цифрі 5. У цьому випадку, природно, правило магічного квадрата, за яким усі сторони, стовпці і діагоналі мають бути рівні 15, буде дотримано.
- ✓ У трьох клітинах залиште цифри 5. Це може бути, наприклад, верхня ліва клітка, середня ліва і обов’язково середня. У двох поруч розташованих клітинах додайте до п’ятірок цифри 1 і 2, тобто вони повинні перетворитися в 6 і 7.
- ✓ Тепер закінчите заповнення квадрата. Розставте за вільними клітинками цифри 1, 2, 3, 4, 8 і 9. Пам’ятайте, що сума всіх сторін, діагоналей і стовпців повинна бути дорівнює 15.

✓ Існує й інший спосіб — використання симетрії. Накресліть квадрат 5х5 клітин. Усередині цього квадрата драбинкою напишіть поспіль числа від 1 до 9. У центрі повинна бути цифра 5.

✓ Потім «перекиньте» цифри 1 і 9 через цифру 5 і напишіть їх поруч із цифрою 5, тобто одиниця повинна встати праворуч від п’ятірки, а дев’ятка — зліва. Те ж саме зробіть з цифрами 3 і 7 (поставте трійку під п’ятіркою, а сімку — над нею).

✓ Після того як ви це зробите, вам залишиться просто заповнити залишилися вільними клітини [21].

Розглянемо різні приклади застосування магічних квадратів в математиці:

1. *Онлайн-ігри головоломки* на http://zagadki.org.ua/ua/games/teaser/ «Магічний квадрат» (Рис. 3.1.)

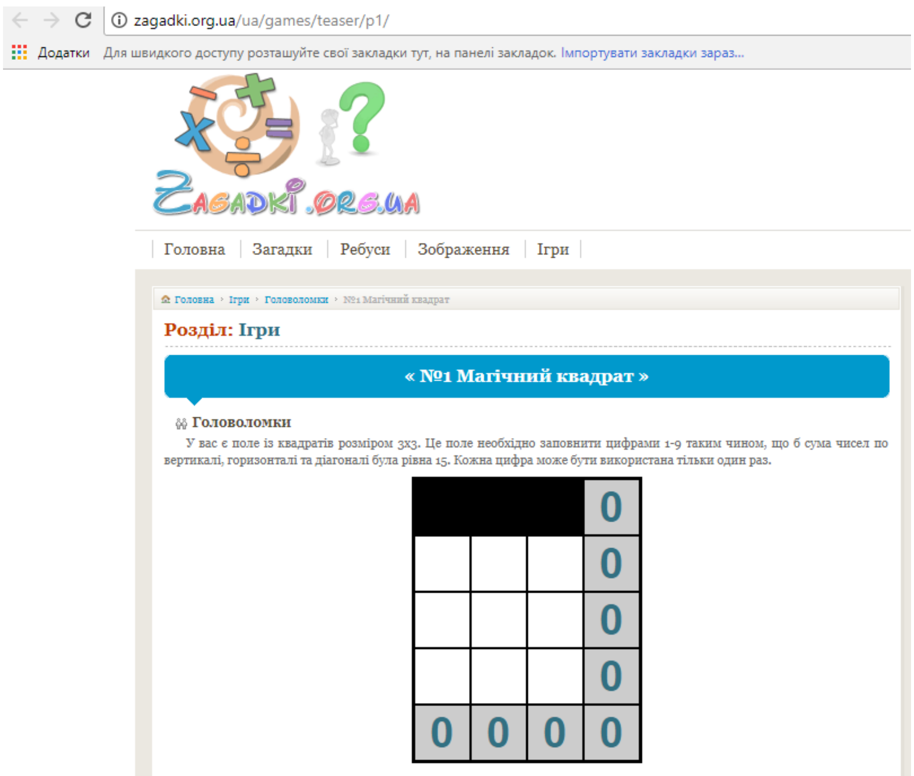


Рис. 3.1. Вікно з сайту онлайн-головоломки «Магічний квадрат»

2. *Комплекти математичних головоломок* (Рис. 3.2.) які допомагають потренувати арифметичні навички додавання та віднімання, логічне мислення та кмітливість. У кожному завданні даються чотири квадрати, у яких сума чисел у кожному стовпчику та кожному рядку дорівнює числу, написаному над квадратом, але при цьому частина чисел відсутня. Учневі (дитині) треба розгадати головоломку, обчислити відсутні числа й записати їх у порожніх клітинках кожного з квадратів. Завдання комплекту мають зростаючий рівень складності за рахунок величини квадратів і відповідно кількості задіяних чисел [4].

Рис. 3.2. Комплекти математичних головоломок

3. *Урок з математики в 5 класі на тему «Комбінаторні задачі»(Додаток Г)*

4. *Приклади цікавих задач магічні квадрати 3х3 на сумах:*

Задача 1

Розмістити в таблиці 3х3, числа від 1 до 9 так, щоб виконувалась така умови: сума по усіх рядках, по усіх колонках, по двох діагоналях була однакова (Рис. 3.3.).

Відповідь.

Зліва направо і зверху до низу числа мають розташуватися таким чином: 2, 7, 6, 9, 5, 1, 4, 3, 8.

Повного опису всіх можливих магічних квадратів не отримано і донині. Магічних квадратів 2х2 не існує. Існує магічний квадрат 3х3, а решта магічних квадратів 3х3 виходять з нього або поворотом навколо центру, або віддзеркаленням щодо однієї з його осей симетрії.

Нагадуємо способи утворення магічного квадрату 3х3.

Розташувати натуральні числа від 1 до 9 в магічний квадрат 3х3 можна 8 різними способами.

Знайти магічну суму для магічного квадрату 3х3: *(1+2+3+4+5+6+7+8+9):3 = 45:3 =15.*

Утворити суми з трьох доданків: *9+5+1 = 9+4+2 = 8+6+2 = 8+5+2 = 8+4+3 = 7+6+2 = 7+5+3 = 6+5+4 =15*

У магічному квадраті 3х3 магічною постійною є число 15, отже, повинні бути рівні сумі трьох чисел по 8 напрямам: по 3 рядкам, 3 стовпцям і 2 діагоналям. Оскільки число, що стоїть в центрі, належить 1 рядку, 1 стовпцю і 2 діагоналям, воно входить в 4 з 8 трійок, що дають в сумі магічну постійну. Таке число тільки одне: це 5. Отже, число, що стоїть в центрі магічного квадрата 3х3, вже відоме: воно рівне 5.

Розглянемо число 9. Воно входить тільки в 2 трійки чисел: *9+5+1 = 9+4+2 = 15*. Ми не можемо помістити його в кут магічного квадрату, оскільки кожна кутова клітка належить 3 трійкам: рядку, стовпцю і діагоналі. Отже, число 9 повинно стояти в клітинці, що межує тільки із однією стороною квадрата в її середині. Із-за симетрії квадрата байдуже, яку із сторін ми виберемо, тому пишемо 9 над числом 5, що стоїть в центральній клітці. По обидві сторони від дев'ятки у верхньому рядку ми можемо вписати тільки числа 2 і 4. Яке з цих двох чисел опиниться в правому верхньому кутку і яке в лівому, знову-таки не має значення, оскільки одне розташування чисел переходить в інше при дзеркальному віддзеркаленні. Решта кліток заповнюється автоматично.

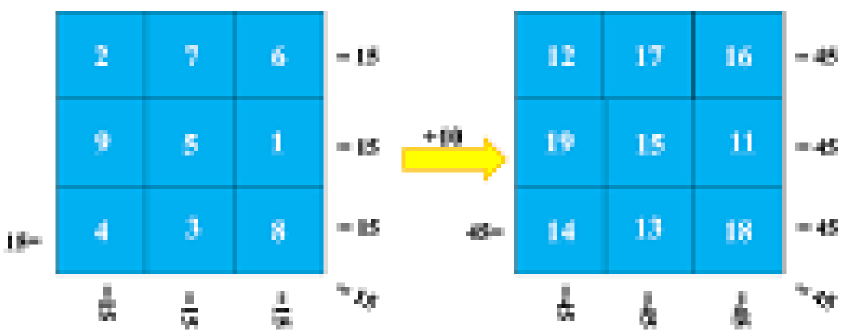


Рис. 3.3. Магічний квадрат 3х3

Задача 2

Дати відповідь на запитання:

1. Що необхідно знайти для того щоб утворити магічний квадрат 3х3?

Відповідь: Спочатку треба знайти магічну суму для магічного квадрату 3х3:

(1+2+3+4+5+6+7+8+9):3 = 45:3 =15.

Потім утворити суми з трьох доданків:

9+5+1 = 9+4+2 = 8+6+2 = 8+5+2 = 8+4+3 = 7+6+2 = 7+5+3 = 6+5+4 = 15

2. Як утворити класичний магічний квадрат 3х3?

Відповідь: Для цього накресліть порожній клітинковий квадрат, розміром 3х3. Впишіть підряд натуральні числа : 1, 2,3,4, 5, 6, 7, 8, 9. Заповніть кожну клітинку якоюсь однією цифрою, використовуючи всі цифри, окрім 0, так , щоб сума трьох чисел, що розташовані по горизонталям, і сума трьох чисел, що розташовані по вертикалям, і сума трьох чисел, що розташовані по діагоналям була однакова.

Проблемне запитання: Чому в кутових клітинках магічного квадрату 3х3 повинні стояти тільки парні числа?

Відповідь: В кутових клітинках повинні стояти тільки парні числа, бо у противному випадку не утвориться магічний квадрат. Адже якщо цифра 7 і 9 опиняються або на одній діагоналі, або в одному стовпчику, тоді порушуються магічна сума на цій діагоналі або в цьому стовпчику(адже 9+7=16, що не рівне 15).

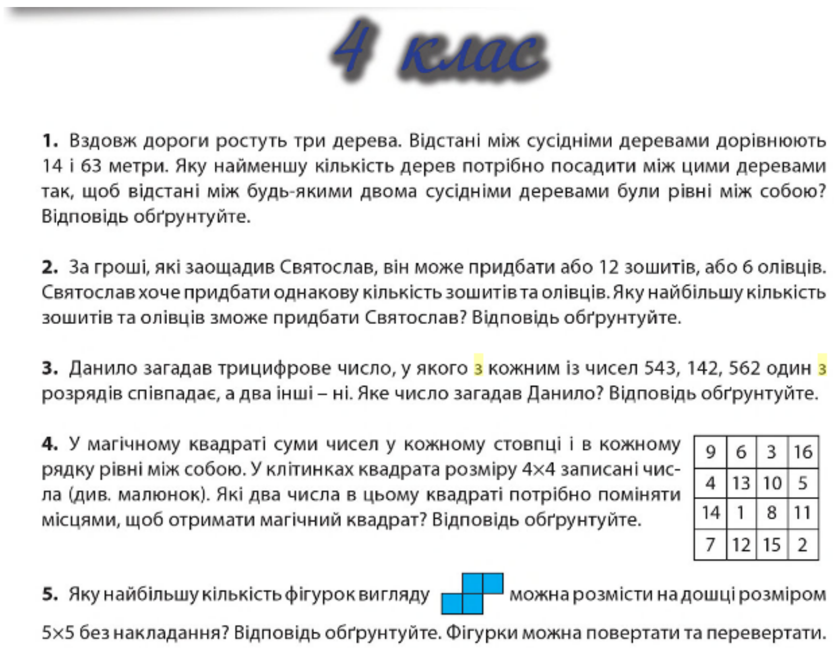
Знайшовши одне правильне розташування чисел в магічному квадраті можна отримати ще вісім таких квадратів за допомогою повороту навколо центральної клітинки [10].

5. *Олімпіади з математики. Приклад завдання для 6 класу:*

Магічним квадратом четвертого порядку називається квадрат 4×4, який заповнений різними числами, при цьому рівними є суми чисел у кожного рядку, стовпчику та великих діагоналях. Олеся хоче скласти такий квадрат, розмістивши у ньому числа 1, 2, . . . , 16. Вона почала з того, що помістила число 1 у лівий верхній кут, а числа 2 і 3 поруч з ним у сусідньому рядку та стовпчику. Як їй треба далі розмістити решту чисел, щоб одержати магічний квадрат?

Відповідь: вона не зможе далі його заповнити. Розв’язання. Оскільки сума усіх чисел дорівнює 1+2+ . . . +16 =136, то сума у кожному рядку, стовпчику дорівнює 1 4 · 136 = 34. Тобто, у рядку з 1 та 2 треба розмістити 2 числа з сумою 31, тобто це можуть бути лише числа 15 та 16. У стовпчику з 1 та 3 повинно бути 2 числа з сумою 30, це можуть бути лише числа 14 та 16, але 16 вже треба використати у рядку з 1 та 2, таким чином побудови магічного квадрату четвертого порядку досягти не вдасться [1].

6. *Міжнародний математичний конкурс «Кенгуру».* Приклад завдання для 4 класу (Рис. 3.4.) (Міжнародний математичний конкурс «Кенгуру»: 2013-2014 навчальний рік).



4 клас

1. Вздовж дороги ростуть три дерева. Відстані між сусідніми деревами дорівнюють 14 і 63 метри. Яку найменшу кількість дерев потрібно посадити між цими деревами так, щоб відстані між будь-якими двома сусідніми деревами були рівні між собою? Відповідь обґрунтуйте.

2. За гроші, які заощадив Святослав, він може придбати або 12 зошитів, або 6 олівців. Святослав хоче придбати однакову кількість зошитів та олівців. Яку найбільшу кількість зошитів та олівців зможе придбати Святослав? Відповідь обґрунтуйте.

3. Данило загадав трицифрове число, у якого з кожним із чисел 543, 142, 562 один з розрядів співпадає, а два інші – ні. Яке число загадав Данило? Відповідь обґрунтуйте.

4. У магічному квадраті суми чисел у кожному стовпці і в кожному рядку рівні між собою. У клітинках квадрата розміру 4×4 записані числа (див. малюнок). Які два числа в цьому квадраті потрібно поміняти місцями, щоб отримати магічний квадрат? Відповідь обґрунтуйте.

9	6	3	16
4	13	10	5
14	1	8	11
7	12	15	2

5. Яку найбільшу кількість фігурок вигляду можна розмістити на дошці розміром 5×5 без накладання? Відповідь обґрунтуйте. Фігурки можна повертати та перевертати.

Рис. 3.4. Завдання Міжнародний математичний конкурс «Кенгуру»: 2013-2014 навчальний рік

Відповідь: 13 і 15.

Розв’язок: На малюнку обчислено суму чисел у кожному рядку і кожному стовпці. Після того, як квадрат стане магічним, сума чисел у кожному рядку та кожному стовпці дорівнюватиме 34. При перестановці двох чисел сума зміниться щонайбільше у двох стовпцях і щонайбільше у двох рядках, тому числа, що потрібно переставити, стоять у стовпці та рядку, сума в яких не дорівнює 34.

Тому потрібно переставити або числа 13 і 15, або числа 10 і 12, проте лише пара 13 і 15 задовольняє умову задачі (Рис. 3.5.)

9	6	3	16	**34**
4	13	10	5	**32**
14	1	8	11	**34**
7	12	15	2	**36**
34	**32**	**36**	**34**	

Рис. 3.5. Розв'язок задачі

7. Традиційною сферою застосування магічних квадратів є *талісмани.* (Повний список планетних талісманів можна знайти в монографії А.Санарова «Магія талісманів. Практичний посібник»).

Наприклад, талісман Місяця (Рис. 3.6.) має певні властивості: оберігає від корабельної аварії і хвороб, робить людину люб'язним, сприяє запобіганню поганого наміру, а так же зміцнює здоров'я. Його гравірують на сріблі в день і годину Місяця, коли Сонце або Місяць знаходиться в перших десяти градусах Рака. Магічний квадрат 9-ого порядку вписується в дев'ятикутник (9 — число Місяця) і оточується спеціальними символами.

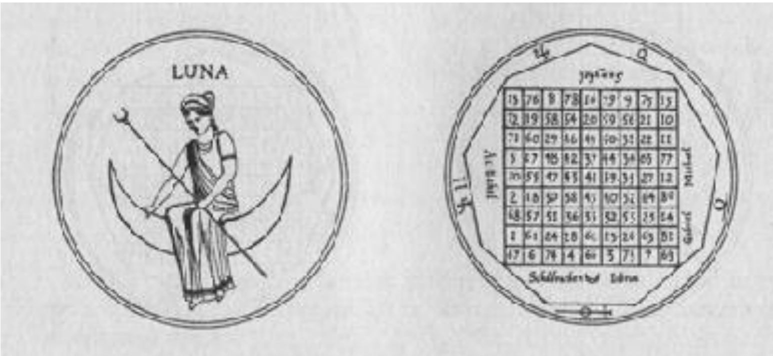


Рис. 3.6. Талісман Місяця

ВИСНОВКИ

У даній роботі розглянута тема з математики, над якою роздумували дуже багато великих людей, — магічні квадрати. Незважаючи на те, що самі магічні квадрати не знайшли широкого застосування в науці й техніці, вони підштовхнули на заняття математикою багатьох неабияких людей і сприяли розвитку інших розділів математики (теорії груп, визначників, матриць і т.д.).

В даній темі, зокрема у першому розділі, описуються види магічних квадратів, історія їх виникнення, також, дається означення магічного квадрату.

У другому розділі ми розглянули класичні алгоритмічні методи побудови магічних квадратів непарного порядку, які відносяться до лінійних методів, а саме індійський метод, метод альфіла, метод Баше де Мезіріака, методи терас та накладання. також розглянуті умови правильності лінійного методу, а також метод побудови магічних квадратів парного порядку:

Третій розділ присвячений аналізу прикладів використання магічних квадратів у математиці: уроки математики в початкові школі, онлайн-ігри, головоломка «Судоку», задачі з математичних олімпіад та конкурсу «Кенгуру».

У додатках наводимо легенду виникнення магічних квадратів, приклади методів побудови магічних квадратів з їх схемами, завдання задач та завдань на вирішення та заповнення магічних квадратів.

Пишучи дану роботу, ми знайшли для себе багато цікавого, дізналися, що ж було предметом пильного вивчення ряду відомих математиків. Зрозуміли, що теорія магічних квадратів ні в якій мірі не може вважатися завершеною. Досить сказати, що дотепер невідомий ніякий загальний метод побудови всіх магічних квадратів даного порядку n і навіть невідомо їхнє число(при n). Тому таку тематику потрібно розглядати та досліджувати сьогодні.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Александров* Александр Федорович "ТАЙНЫ МАГИЧЕСКИХ ЦИФР" [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://www.litmir.me/br/?b=198723&p=77

2. *ВікіпедіЯ*. Магічний квадрат [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://uk.wikipedia.org/wiki/ Магічний_квадрат

3. *Георгий* Александров. Красивый способ построения идеального магического квадрата 6х6 [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://lj.rossia.org/users/renuar911/5464.html. 18 Болл У. Математические эссе и развлечения / У. Болл, Г. Коксетер. – Москва: Мир, 1986. – 474 с.

4. *Головоломка* «Магічний квадрат» [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://childdevelop.com.ua/worksheets/3799/

5. *Гуревич* Е. Я. Тайна древнего талисмана / Е. Я. Гуревич. – Москва: Наука, 1969. – 152 с.

6. *Книга:* Нумерология. [Електронний ресурс]. – 2015. – Режим доступу до ресурсу: http://rutlib2.com/book/26603/p/73

7. *Кроули* А. 777. Каббала Алистера Кроули / А. Кроули. – Москва: ОДДИ-Стиль, 2003. – 448 с.

8. *Макарова* Н. В. Волшебный мир магических квадратов / Н. В. Макарова. — Самиздат., 2009. – 180 с.

9. *Макарова* Н. Полные комплекты квадратов франклина [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://www.natalimak1.narod.ru/komplfr.htm.

10. *Математичні* шкільні олімпіади [Електронний ресурс]. – 2016. – Режим доступу до ресурсу: http://olimpmath.blogspot.com/2016/11/33.html

11. *Метод* построения магических квадратов чётно-нечётного порядка [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://www.klassikpoez.narod.ru/mojmetod.htm

12. *Методы* построения магических квадратов [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://www.natalimak1.narod.ru/metody1.htm

13. Нетрадиционные магические квадраты [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://www.natalimak1.narod.ru/netradic.htm

14. *Оре* О. Приглашение в теорию чисел / О. Оре. – Москва: Наука, 1980. – 128 с.

15. *Петровец* Т. Г. Энциклопедия мировой живописи / Т. Г. Петровец, Ю. В. Садомова. – Москва: ОЛМА-ПРЕСС, 2000. – 431 с.

16. *Постников* М. М. Магические квадраты / М. М. Постников. – Москва: Наука, 1964. – 84 с.

17. Построение магических квадратов способом наложения. И.В. Мартынов, Н.В. Курылёва [Електронний ресурс]. – 2015. – Режим доступу до ресурсу: http://www.ipac.ac.ru/docs/MS.pdf

18. *Сайт Макарової* Н. В. [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://www.klassikpoez.narod.ru/glavnaja.htm

19. *Санаров* А. В. Магия талисманов. Практическое пособие / А. В. Санаров. – Москва: Велигор, 2002.

20. *Чебраков* Ю. В. Магические квадраты. Теория чисел, алгебра, комбинаторный анализ / Ю. В. Чебраков. – Санкт-Петербург: СПбГТУ, 1995. – 388 с.

21. *Як просто*. Як вирішувати з математики магічні квадрати [Електронний ресурс]. – 2015. – Режим доступу до ресурсу: http://yak-prosto.com/yak-virishuvati-z-matematiki-magichni-kvadrati/

22. Як розв'язувати з математики магічні квадрати [Електронний ресурс]. – 2016. – Режим доступу до ресурсу: http://howded.com/uk/pages/235094.

23. *Abe* G. Unsolved Problems on Magic Squares / G. Abe. // Disc. Math. 127. – 1994.

24. *Gardner* M. Magic Squares and Cubes / M. Gardner // Time Travel and Other Mathematical Bewilderments / M. Gardner. – New York: W. H. Freeman, 1988.

25. Stud 24. Магічні квадрати [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://stud24.ru/mathematic/magchn-kvadrati/379107-1204704-page1.html

ДОДАТКИ

Додаток А

Згідно з легендою стародавній китайський майстер витягнув мудрість з зображення на панцирі черепахи (Рис. 1). Вивчаючи це зображення, він побачив глибший малюнок природних ритмів або законів Всесвіту, відображених в накресленнях магічного квадрата Ло Шу.

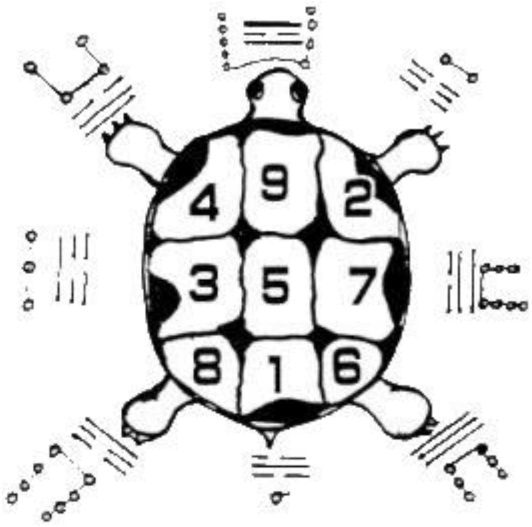


Рис. 1. Панцир черепахи, з малюнками природних ритмів і законів Всесвіту

Існує кілька злегка різняться версій про різних майстрів, найбільш популярна з яких — про імператора Ю, гуляти вздовж річки Ло, тому Ло Шу перекладається як «послання річки Ло». Ця легенда йде корінням в 560 рік до різдва Христова, за часів великих повеней в Китаї.

Черепаха, яка з'явилася з річки, володіла панциром, на якому був написаний малюнок сітки-квадрата 3 на 3, яка згодом стала основою квадрата Ло Шу, математичної схемою, на якій сума всіх сторін, будь то по вертикалі, діагоналі або ж по горизонталі, завжди була одна й та сама.

За будь-якого складали числа в будь-якому з напрямків, Ви завжди прийдете до суми, яка дорівнює 15ти. Число 15 вважається дуже могутнім, так як воно відповідає числу днів в кожному з 24-х циклів китайського сонячного року. Іншими словами, це кількість днів в місячному циклі — від нової Місяця до повної.

В квадраті Ло Шу число 5 знаходиться в центрі. У той же час, парні і непарні числа знаходяться по краях. Чотири парних числа — 2, 4, 6, 8 - перебувають по кутах квадрата, а п'ять непарних - 1, 3, 5, 7, 9 - утворюють хрест посередині.

Тепер Вам стало зрозуміло, як сітка Багуа сталася з Ло Шу, особливо, якщо Вам відомо, що в Китаї на картах південь знаходиться нагорі. Число 9 — це південь (нагорі), а число 1 — число півночі і низ квадрата.

Непарні числа несуть в собі енергію ян, а парні - енергію інь. В квадраті Ло Шу числа інь і ян чергуються навколо центру - числа 5.

Числа в квадраті Ло Шу володіють особливими властивостями і є проявами особливих енергій. Наприклад, число 9 несе сильну енергію елемента вогню, в той час як число 1 — це елемент води. У фен-шуй їх називають летять зірки, і їх рух передбачувано.

Рух зірок схематизується щороку. Це дозволяє визначити рух особливих енергій, як позитивних, так і негативних. Знаючи цю схему, можна створити врівноважений фен шуй у себе вдома. Динаміка квадрата Ло Шу враховується при обчисленні річних змін.

Додаток Б

Магічні квадрати 3-го порядку

Рис. 2а.

$m_{min} = 1$ (нормальный квадрат)

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Рис. 2б.

$N = m_{min} = 0.5.$

1	3.5	3
4.5	2.5	0.5
2	1.5	4

Спосіб накладання працює для побудови магічних квадратів непарногопорядку при $n \geq 3$

Приклад 3. Побудова магічного квадрата 5-го порядку. (Рис. 3а, 3в.) Будуємо квадрат-1 п’ятого порядку.n = 5. Центральне магічне число m = 13. Магічна константа M = 65.В квадраті-2 число цифр на кожній паралельній лінії — 5.В результаті накладання 13 цифр перейшло в перший квадрат. Числа, що залишилися в $к_2$переміщуємо в $к_1$ згідно з правилом переміщення цифр з допоміжного квадратав магічний.

1). Найвіддаленіші цифри від першого квадрата (1, 5, 21, 25) переміщаємо ввільні комірки за центральним магічним числом.

2). Найближчі цифри до першого квадрату переміщаються в крайніпротилежні вільні комірки.

Рис. 3а.

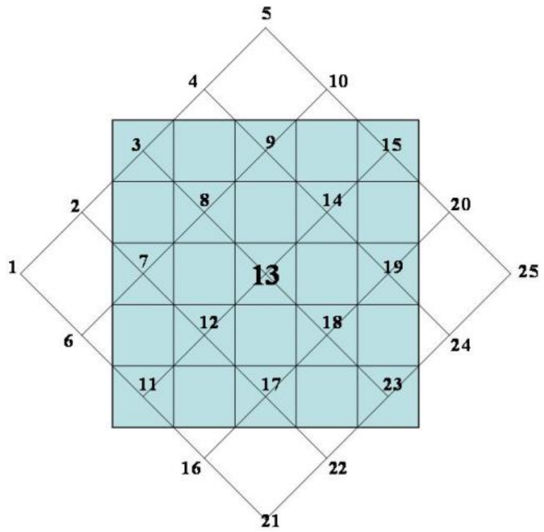
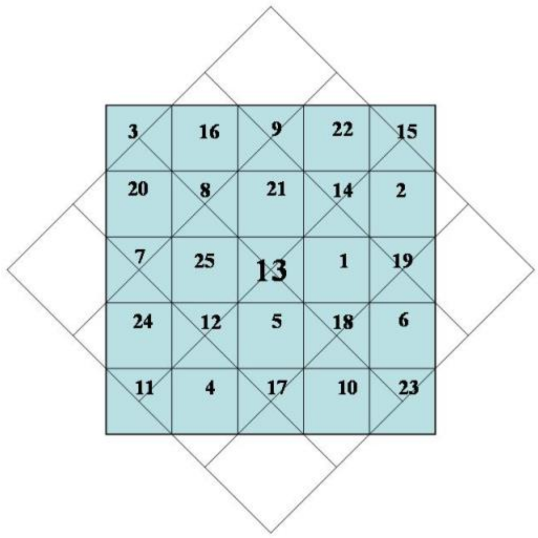


Рис. 3в.



У підсумку маємо магічний, симетричний квадрат п'ятого порядку.

Приклад 4. Магічні квадрати 5-го порядку (N = 1; N = 2).

Рис. 4а. $m_{min} = 1$.

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Рис. 4б. $m_{min} = 2$

6	32	18	44	30
40	16	42	28	4
14	50	26	2	38
48	24	10	36	12
22	8	34	20	46

Приклад 5. Побудова магічного квадрата 7-го порядку. (Рис. 5а, 5в).

Основний квадрат 7-го порядку. n = 7; m = 25; M = 175. В квадраті — 2 число цифр на кожній паралельній лінії — 7.

В результаті накладання в основному квадраті розташувалися 25 цифр. Решта 24 цифри переміщаємо з вищевикладеного правилом.

Рис. 5а.

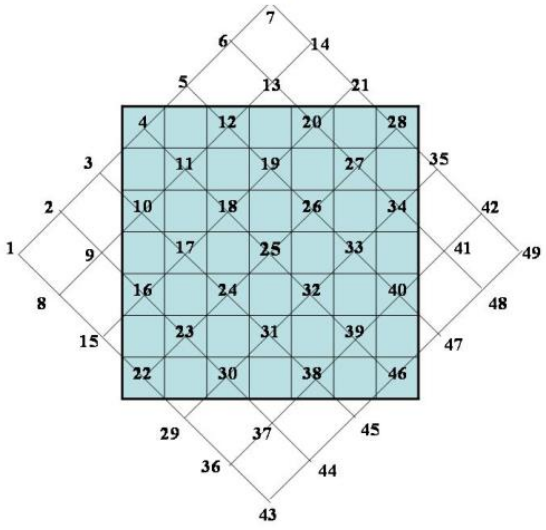
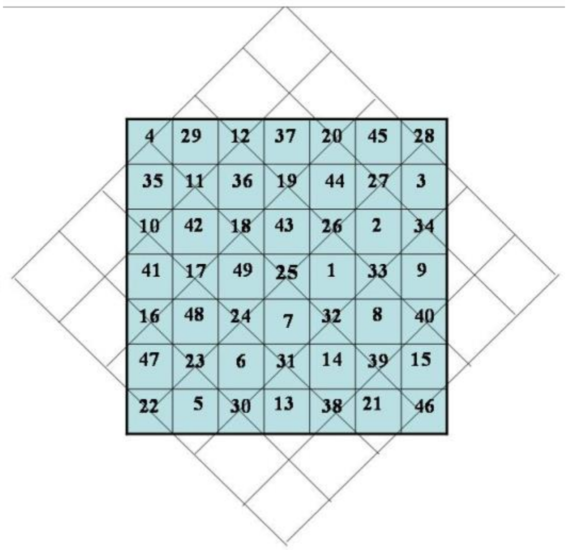


Рис. 5в.



Магічний квадрат 9-го порядку.

Рис 6а. n = 9; m = 41; M = 369.

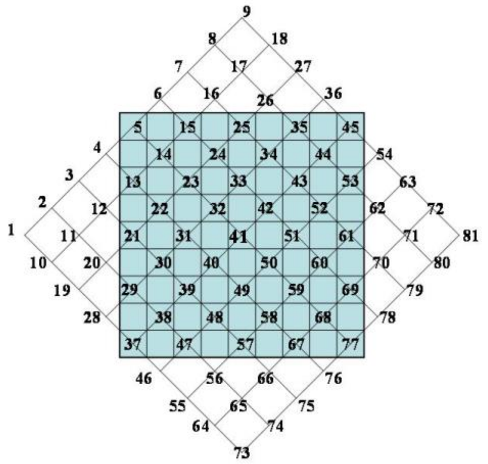
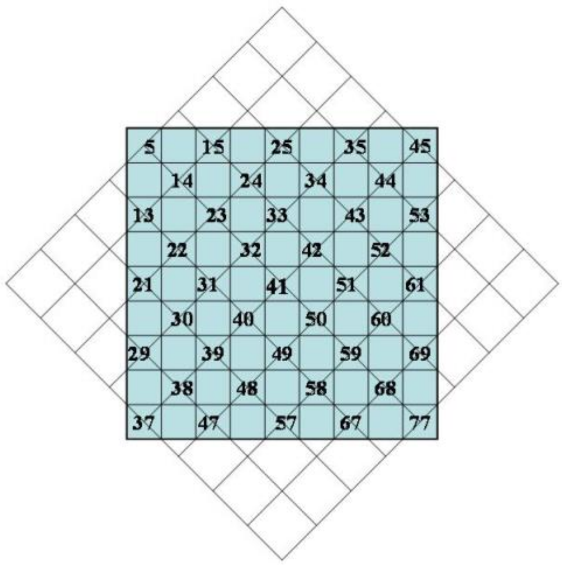


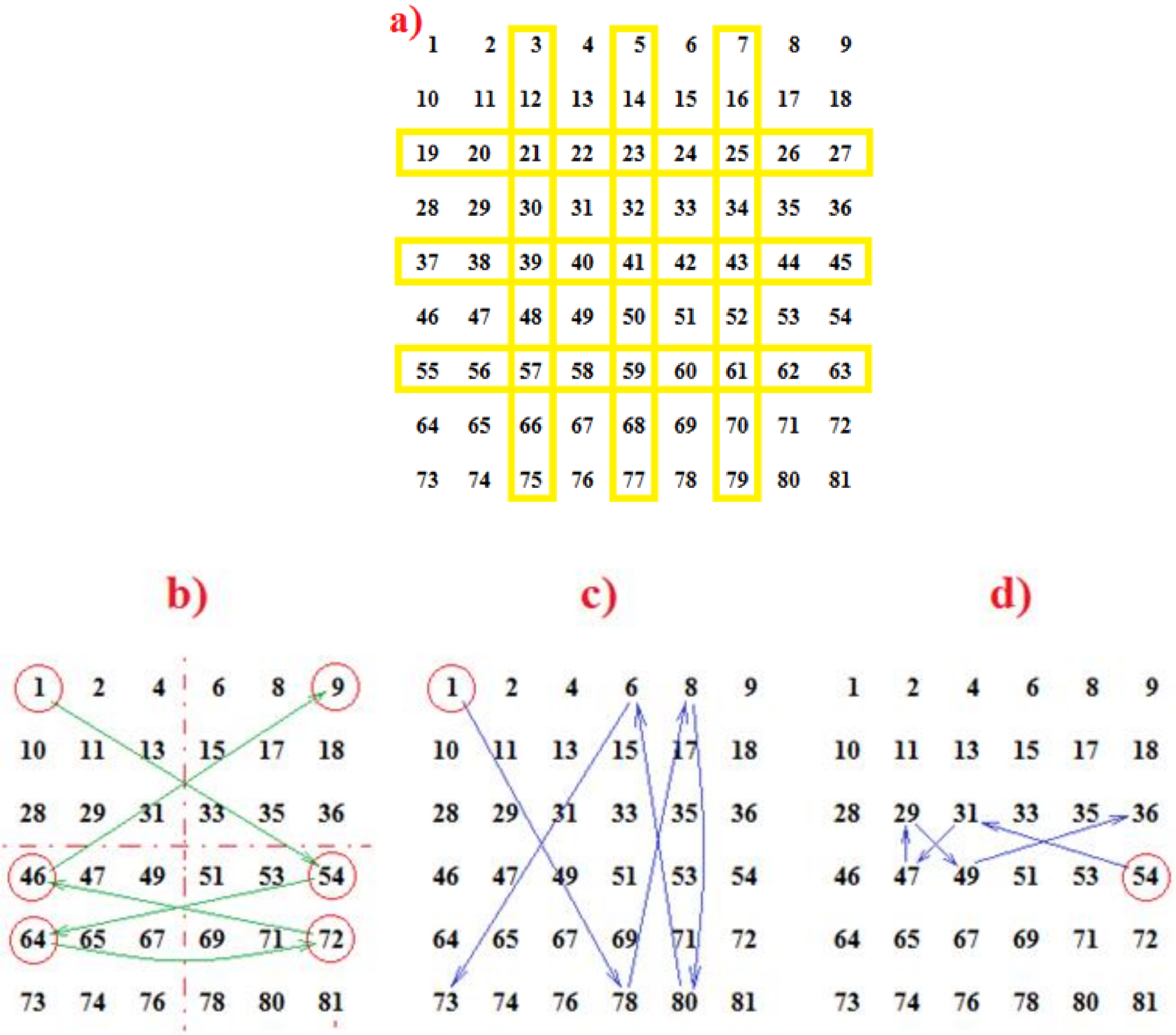
Рис. 6в.

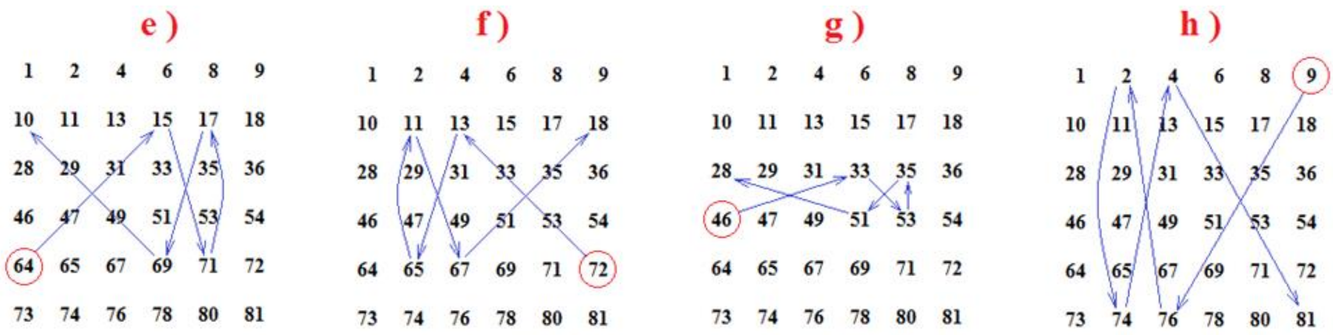


Додаток В

Спосіб побудови ідеального магічного квадрата 6 x 6

Ідеальні магічні квадрати порядку одинарної парності (тобто х6, 10х10, 14х14 і так далі) можуть бути тільки нетрадиційними. Тобто вони наповнюються не послідовні натуральним рядом чисел, а якимись вибірковими числами. Ідеальні квадрати 6-го порядку з довільних натуральних чисел елементарно виходить з квадрата Журби, який був опублікований в журналі «Наука і життя» ще в минулому столітті. Однак, прямий спосіб побудови в літературі ще не зустрічався. Уджерелі [3]розглядають графічний метод побудови. Алгоритм наочно показаний на малюнку

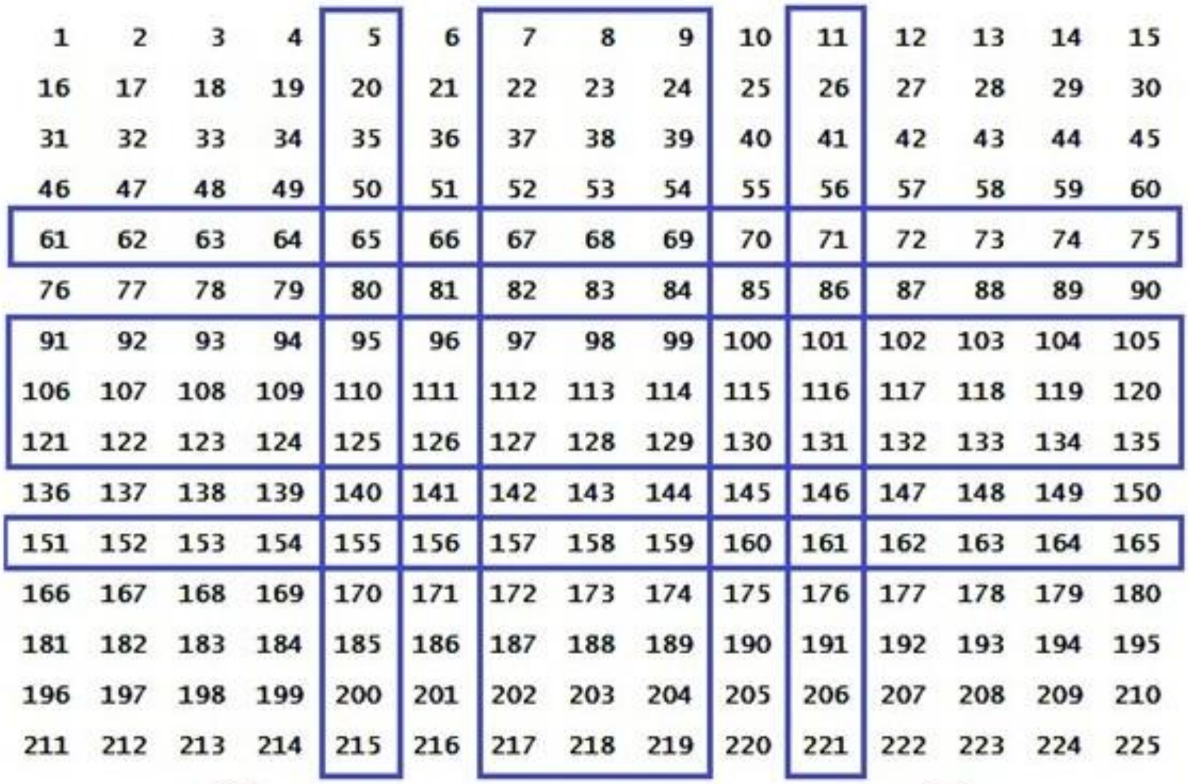




На першому кресленні а) дано прийом сортування чисел для майбутнього магічного квадрата (МК). Будується квадрат послідовних натуральних чисел розміром 9x9. Число 9 — це полуторне величина від 6. Далі в жовті рамки укладаємо ті числа, які потрібно вилучити з розгляду. Решта числа і присутні в кресленнях b)-h). На кресленні b) дано принцип виявлення послідовності чисел в самій лівій колонці МК зверху вниз. В інших кресленнях — чергування чисел по рядках. Якщо уважно придивитися до креслень, то можна легко зрозуміти єдиний принцип побудови векторів. В результаті отримаємо готовий ідеальний МК порядку 6:

1	78	8	80	6	73
54	31	47	29	49	36
64	15	71	17	69	10
72	13	65	11	67	18
46	33	53	35	51	28
9	76	2	74	4	81

Тут магічна сума 246. Навіть за всіма ламаним діагоналях. Крім того, МК асоціативний, тобто сума будь-яких пар центрально протилежних чисел дорівнює 82. Те ж саме можна зробити з МК 10 x 10. Тільки тут схема відсіювання зайвих чисел більш цікава і форма графа напрочуд гарна:


1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45
46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60
61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75
76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90
91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105
106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116 117 118 119 120
121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133 134 135
136 137 138 139 140 141 142 143 144 145 146 147 148 149 150
151 152 153 154 155 156 157 158 159 160 161 162 163 164 165
166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176 177 178 179 180
181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192 193 194 195
196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208 209 210
211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224 225


1 2 3 4 6 10 12 13 14 15
16 17 18 19 21 25 27 28 29 30
31 32 33 34 36 40 42 43 44 45
46 47 48 49 51 55 57 58 59 60
76 77 78 79 81 85 87 88 89 90
136 137 138 139 141 145 147 148 149 150
166 167 168 169 171 175 177 178 179 180
181 182 183 184 186 190 192 193 194 195
196 197 198 199 201 205 207 208 209 210
211 212 213 214 216 220 222 223 224 225

1	213	10	222	14	224	12	220	3	211
45	193	36	184	32	182	34	186	43	195
136	78	145	87	149	89	147	85	138	76
180	58	171	49	167	47	169	51	178	60
196	18	205	27	209	29	207	25	198	16
210	28	201	19	197	17	199	21	208	30
166	48	175	57	179	59	177	55	168	46
150	88	141	79	137	77	139	81	148	90
31	183	40	192	44	194	42	190	33	181
15	223	6	214	2	212	4	216	13	225

Магічна сума 1130, а центрально протилежні пари чисел дають в сумі число 226 [3].

Додаток Г

Уривок конспекту уроку з математики в 5 класі
з теми «Комбінаторні задачі»

Тема:Комбінаторні задачі

Мета:

- ознайомити учнів з комбінаторними задачами та способами їх роз’вязання; способу перестановки та правила множення;
- розвивати логічне мислення, увагу, математичну мову, пізнавальну активність;
- виховувати наполегливість,інтерес до предмету.

Тип уроку: Засвоєння нових знань і вмінь.

Обладнання: Підручник, роздатковий матеріал.

Хід уроку

I. Організаційний етап.

II. Перевірка домашнього завдання.

III. Вивчення нового матеріалу.

1. *Що таке комбінаторика?*

Комбінаторика- розділ математики, який вивчає комбінації і перестановки предметів, розміщення елементів,що мають певні властивості.

2.Приклади розв’язування комбінаторних задач

1).На почті в продажу є п’ять різних конвертів і три різні марки. Скількома способами можна купити конверт з маркою.

Відповідь: 15 способів (Дерево можливих варіантів)

2).У фінальному забігу беруть участь Сідоров, Іванов І Петров. Назвіть можливі варіанти розподілу призових місць.

Відповідь: 6 способів. (Метод перестановки).

3).Скількома способами можна склеїти святковий прапорець з чотирьох кольорів.

Відповідь: 24 способа (правило добутків)

4). В комбінаторних задачах існують магічні квадрати, а чи знаєте ви що це за квадрати?

Магічний квадрат — це крадрат розміром 3*3. Сума чисел в кожному рядку, стовбчику і діагоналі рівні.

Назву магічних (чарівних, таємничих) квадрати одержали від арабів, які вбачали в таких числових властивостях і сполуках дещо неземне та містичне і вважали такі квадрати талісманами.

Давайте розглянемо такі магічні квадрати.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

IV. Формування вмінь і навичок

Завдання № 1

Спробуємо заповнити свій магічний квадрат на отриманих картках.

16		
	15	13
		14

5	10	
	6	
		7

		12
18	10	
8		

	16	2
	8	
14		

V. Підбиття підсумків уроку. Рефлексія.

VI. Домашнє завдання

VII. Використані джерела